Proyecto “mete” (mathematics education traditions of europe[1]): Polígonos en primaria

Nuria Climent Rodríguez y José Carrillo Yañez
Universidad de Huelva

Resumen

El proyecto METE aborda el estudio comparativo de la enseñanza de la matemática en Bélgica –Flandes-, España, Finlandia, Hungría e Inglaterra, desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa. Presentamos parte de los resultados relativos a la enseñanza de los polígonos en el último ciclo de Primaria, extraídos del análisis de cuatro unidades didácticas puestas en práctica por profesores de dichos países. Mostramos la complementariedad de ambos tipos de datos y sus posibilidades para profundizar en la enseñanza de dicho tópico.

Abstract

The METE Project deals with a comparative study on the teaching of mathematics in Flemish Belgium, Spain, Finland, Hungary, England, from a quantitative and qualitative perspective. We present the outcomes related to the teaching of polygons in grades 5-6, which derive from the analysis of four units which were implemented by teachers from those countries. We show the complementariness of both types of data and the opportunities they provide to go deeper in the teaching of the mentioned topic.

La investigación desarrollada en el proyecto METE es un estudio de casos centrado en los dos últimos cursos de Primaria y los dos primeros de Secundaria, y en los tópicos de porcentajes, ecuaciones y polígonos. De la información recogida se extraen datos cuantitativos y cualitativos, complementariedad que permite comparar la práctica de los docentes. El objetivo de esta comparación es, sobre todo, profundizar en la comprensión de la enseñanza de dichos tópicos en los niveles señalados y, en concreto, reflexionar sobre dicha enseñanza en el país.

Esta comunicación debe considerarse ligada a la de Andrews et al. (2005) (en este simposio), que presenta el estudio general (de todos los tópicos) del proyecto METE y se centra en uno de los aspectos estudiados (el foco matemático). Aquí nos restringiremos a los datos relativos al estudio de los polígonos en Primaria en cuatro de los cinco países (los datos fineses estar por analizar). Resaltaremos sólo algunos aspectos, sobre los que centraremos nuestra discusión de los resultados referidos al análisis cualitativo de los datos, y no repetiremos características del estudio general que se explican en la comunicación mencionada[2].

Un aspecto fundamental en el estudio de los polígonos es el de las relaciones entre distintas figuras geométricas, lo que está estrechamente ligado a su clasificación. En la geometría tradicional, tal clasificación se ha trabajado como contenido puramente conceptual y de manera memorística. Autores como De Villiers (1994) han señalado las diferencias entre dos tipos de clasificaciones: disjuntas, que subrayan las diferencias entre las distintas clases, e inclusivas, que destacan lo que tienen en común. Las ventajas de este tipo, desde el punto de vista de la construcción matemática, son evidentes en cuanto a la extensión de propiedades de unas figuras a otras. Hay que tener en cuenta, según el trabajo de los Van Hiele, que las clasificaciones inclusivas son más complejas que las disjuntas, requiriendo

[1] METE (código 2002-5048) está financiado por la UE, Acción 6.1 del programa Sócrates
[2] Remitimos igualmente a ella para la fundamentación general sobre el enfoque del proyecto y sus métodos

un mayor nivel de desarrollo intelectual (en la mayoría de los casos fuera de Primaria, Jaime et al., 1992). El estudio de las características comunes a distintos tipos de figuras está relacionado con la geometría *interfigural* (que se ocupa de las relaciones entre distintas figuras) e *intrafigural* (relaciones entre los elementos de una misma figura) (Piaget y García, 1985; Vecino, 2003). Es necesario abordar en la escuela los dos tipos de geometría, siendo la propia actividad de clasificar característica de la interfigural.

Por otra parte, la geometría puede suponer un contexto especialmente adecuado para que el alumno de Primaria haga matemáticas y adquiera conocimiento *sobre* matemáticas (Ball, 1990). El estudio de figuras concretas y sus propiedades, por ejemplo, favorece la búsqueda de conjeturas y sus demostraciones, o en algunos casos el seguimiento de demostraciones ya hechas. Además, puede iniciarse a los niños en distintos tipos de verificaciones (visualizaciones, comprobaciones) que si bien no demuestran de manera general, en algunos casos captan el argumento que sustenta la demostración.

Metodología

Para el estudio de la enseñanza de los polígonos al final de Primaria, hemos grabado en vídeo la unidad didáctica (4-5 lecciones) de un profesor de cada país asociada a la introducción de ese tópico en grado 6 (11-12 años). Estos profesores son considerados ejemplos de buena práctica en su contexto por el grupo de investigadores del proyecto de su país. Además, hemos recogido sus planificaciones y material escrito.

Respecto del análisis cuantitativo, cada lección se ha dividido en episodios (un fragmento de la lección en el que la intención didáctica o relativa a la gestión del profesor es constante) y cada episodio analizado según un sistema de categorías construido previamente en el seno del proyecto. Cada unidad fue analizada por el equipo local y después han sido analizadas las dos primeras lecciones de cada unidad (subtituladas en inglés) por nuestro equipo (el responsable del tópico de polígonos en Primaria). El grado de fiabilidad obtenido entre los análisis de estas lecciones por parte de los equipos (coeficiente Kappa superior al 0.79) ha permitido asumir el análisis cuantitativo del resto de la unidad (no subtitulada). Remitimos a Andrews et al (2005) para la explicación del proceso anteriormente descrito. Este estudio se ha completado con un análisis cualitativo de las unidades. La base de éste ha sido la observación de los vídeos y análisis del material complementario. Ha sido realizado principalmente por el equipo responsable del tópico, junto con el equipo de cada país. Teniendo en cuenta algunas consideraciones de la literatura de investigación sobre la enseñanza del tópico en Primaria, nos hemos fijado en las actividades y en general las formas de abordar la enseñanza de dichos contenidos por parte de los cuatro profesores (por ejemplo, recursos que usan y su papel o tipo de clasificaciones), sus diferencias y sus similitudes. Partiendo de dichas consideraciones y en un análisis reiterado de las lecciones, comparándolas entre ellas, surgen los elementos que nos parecen más destacables del contenido de cada unidad.

Los grupos observados en Bélgica (B) y Hungría (H) son de habilidad media, el de España (E) es un grupo con especiales dificultades y el de Inglaterra (I) es un grupo de alto rendimiento. El alumnado de las correspondientes escuelas belgas e inglesas es de nivel socioeconómico medio-alto y el de los otros países es de nivel medio. Los cuatro profesores poseen entre diez años de experiencia (Pierre, B) y 25 (Ewa, H).

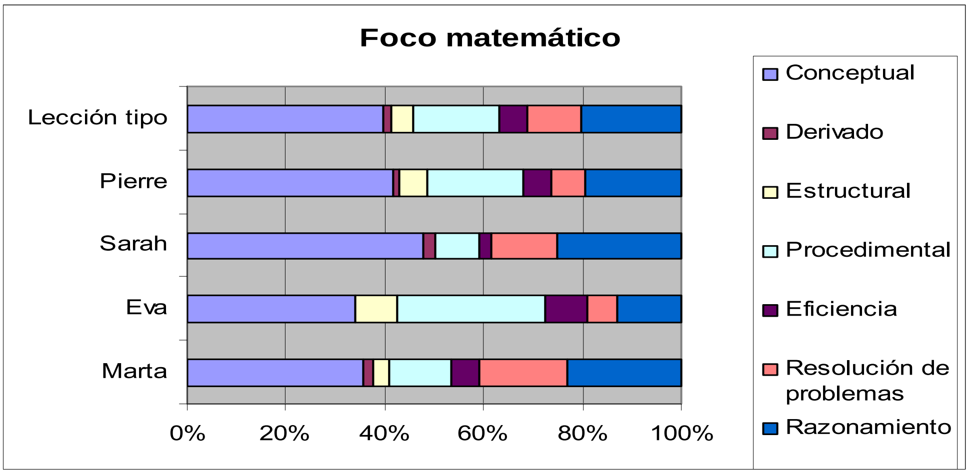
Resultados y discusión

Análisis cuantitativo

La lección tipo o media del proyecto, extraída con las medias de los valores de las variables correspondientes a los cuatro profesores estudiados, nos apoya en la comparación de los cuatro casos, sirviéndonos para la reflexión sobre posibles características comunes y diferenciadas en los cuatro países.

A modo de introducción, describiremos las características principales de esta lección media, pasando a centrarnos en el foco matemático. En la lección media predomina el *trabajo con el grupo-clase*, siendo los datos de todos los países consistentes con esto. Las formas dominantes de actividad pedagógica se centran en el des*arrollo de teoría o el trabajo sobre problemas u otras tareas* relativas al contenido. El contexto matemático dominante, donde subyace la concepción de la matemática observable en las tareas propuestas a los alumnos, es el de *tareas no provenientes del mundo real, con datos inventados por el profesor*. El foco matemático más común (gráfico 1) es el conceptual, seguido del razonamiento y el procedimental (Andrews et al., 2005). No hay apenas presencia del foco derivado y muy poco del estructural y eficiencia. Finalmente, las estrategias didácticas observadas se basan en: *los alumnos comparten públicamente sus ideas, soluciones o respuestas; el profesor explica una idea o solución, ofrece pistas o sugerencias, y formula cuestiones que permiten al alumno construir o refinar ideas matemáticas*.

Nos centramos ahora en cada uno de los profesores estudiados y en el foco matemático (remitimos a Andrews et al., 2005, para la definición de sus categorías y la explicación de cómo se obtienen los datos siguientes en el caso de un tópico cualquiera).



	Marta (E)	Ewa (H)	Sarah (I)	Pierre (B)	Proyecto
Conceptual	35,71	*34,04*	*47,72*	41,67	39,78
Derivado	1,78	*0*	*2,27*	1,39	1,36
Estructural	3,57	*8,51*	*0*	5,55	4,4
Procedimental	12,5	*29,79*	*9,09*	19,44	17,7
Eficiencia	5,36	*8,51*	*2,27*	5,55	5,42
Resolución de problemas	*17,86*	*6,38*	13,64	6,94	11,2
Razonamiento	23,21	*12,76*	*25*	19,44	20,1

Gráfico 1: Porcentaje medio de indicadores relativos a los distintos focos matemáticos (respecto del total de indicadores de la lección de cada profesor –en cursiva aparecen los casos extremos).

Podemos observar cómo las lecciones de Pierre y Marta son las que presentan todos los indicadores, aunque algunos con escasa presencia (derivado, estructural y eficiencia). Se diferencian básicamente en que Pierre pone más énfasis procedimental que Marta, lo contrario ocurre con la resolución de problemas. Sarah y Marta otorgan una importancia similar a la resolución de problemas y al razonamiento; diferenciándose en el mayor énfasis conceptual de la primera. Ewa es la que presenta una distribución más diferente a las restantes (es sólo similar a Marta en el indicador conceptual), con una distribución más homogénea respecto de los distintos indicadores (exceptuando el derivado) y con el mayor énfasis procedimental. La lección media de Ewa es las que más difiere de la del proyecto, mientras que la de Pierre es la más parecida. Puede sorprender que en todos los indicadores Ewa y Sarah presenten los casos extremos, excepto en resolución de problemas. Además, mientras que Ewa presenta los valores máximos en los focos estructural, procedimental y eficiencia, y los mínimos en conceptual, derivado, resolución de problemas y razonamiento (Sarah presenta los extremos opuestos).

Resultan especialmente sorprendentes las diferencias en resolución de problemas y razonamiento en Ewa. El análisis cualitativo de los vídeos y el material de clase nos ayudan a interpretar estas diferencias. Hemos de entender la diferencia en resolución de problemas, según se ha puesto de manifiesto en el transcurso del proyecto, en el contexto de cada grupo-clase. Si analizamos las tareas a las que se enfrentan los alumnos de ambas clases, las de Ewa son más complejas intelectualmente y encierran una matemática más avanzada que las que propone Marta (la tarea que se describe en el siguiente epígrafe [2ª sesión de Ewa] y, en la 2ª sesión de Marta, la de extraer cuáles son las características que nos permiten distinguir distintos cuadriláteros, son ejemplos de ambas). Sin embargo, teniendo en cuenta la complejidad de dichas tareas para cada uno de los grupos correspondientes, para los alumnos de Marta se trata en más ocasiones de tareas no rutinarias. En cuanto al razonamiento, creemos que la causa del bajo valor en la clase de Ewa es que ella no pide a sus alumnos que formulen sus argumentos. Parece interesante el perfil de la lección de Sarah, con gran énfasis conceptual, y prácticamente sin presencia de los focos estructural y eficiencia (lo que relacionamos, como veremos, con el conocimiento *sobre* matemáticas). En el análisis de los vídeos podemos observar cómo son los alumnos los que tienen que articular en muchas ocasiones los argumentos y se destaca la relación entre distintos conceptos y propiedades. Se trabajan muy pocos procedimientos (los más ligados a lo conceptual, como clasificar los cuadriláteros). En el caso de Marta, los valores son bastante cercanos a la media, destacando el indicador de resolución de problemas, antes comentado. Tras el análisis cualitativo volveremos sobre los valores de algunos de los focos matemáticos.

Análisis cualitativo

En este apartado ejemplificaremos cómo integramos en nuestro estudio los datos de tipo cuantitativo y cualitativo y, a su vez, extraeremos algunas consideraciones sobre la enseñanza de este tópico. Nos centraremos en el tratamiento (inclusivo o disjunto) de clasificaciones de figuras, relacionado con la terminología de cada país, y la consideración de un conocimiento *sobre*. En cada aspecto nos fijaremos en los profesores que representen tratamientos más diversos.

Pierre trabaja explícitamente la clasificación de triángulos según sus lados de manera inclusiva (equiláteros como isósceles), a excepción de considerar los "isósceles" y los "no-isósceles", y la clasificación de cuadriláteros de igual modo (paralelogramo como trapecio). No usa los términos "escaleno", "trapezoide" ni "romboide". De hecho, éstos no se usan en la escuela belga-flamenca (ni en los restantes países; "trapezoid" en inglés es poco utilizado). Marta, como es habitual en España, diferencia los triángulos escalenos, isósceles y equiláteros como tres clases disjuntas (no trata la clasificación de cuadriláteros). En este sentido, nos parecen interesantes dos cuestiones. Una es que la propia terminología usada en cada país (ligada a las conceptualizaciones tradicionales) puede favorecer o no el tratamiento inclusivo de las clasificaciones (nuestros términos son los que más favorecen las clasificaciones disjuntas). Otra es que en el resto de los países, ya en la escuela primaria los alumnos se enfrentan a clasificaciones inclusivas. Esto contrasta con nuestra situación, donde si algunas propuestas consideran unas clases como casos particulares de otras, lo hacen sólo en casos muy especiales (cuadrado-rectángulo o cuadrado-rombo). ¿Tendrían más dificultades nuestros alumnos de edades similares de entender dicho tipo de clasificaciones? Quizás tengan el problema añadido, si se pretende hacer a partir de cierto nivel cognitivo de éstos, de tener que desechar términos y conceptos que pierden su sentido (como escaleno). Estos hechos contrastan con la idea de no abordar la inclusividad en Primaria, referida al comienzo.

Por otra parte, las lecciones de Ewa destacan sobre las restantes por el uso de notación matemática tanto por parte de la maestra como por parte de los alumnos (por ejemplo, para nombrar los vértices, A, B, C, lados, a, b, c o AB, BC, CA, y ángulos de un triángulo, α, β, γ, o para nombrar el simétrico de un punto respecto de un eje, P y P’). No sólo se usa, sino que se discute el significado de dicha notación (por ejemplo, que pueden usarse las letras mayúsculas que se quieran para los vértices de un triángulo, pero se usan entonces para los lados correspondientes las minúsculas relativas para evidenciar qué lado se opone a cada ángulo) y su utilidad (se comenta que la notación puede no ser la convencional pero debe ser clara). Además, se enfatizan otros aspectos del conocimiento *sobre* matemáticas como, en el caso de problemas geométricos, el procedimiento de partir de lo que se desea obtener. El siguiente fragmento de clase ejemplifica lo anterior:

Se plantea a los alumnos la tarea de dibujar un triángulo simétrico dado el eje de simetría y uno de sus vértices (P, exterior al eje). Para ello, se sugiere la estrategia de pensar primero en qué se quiere obtener (cómo debe ser la figura resultante) y pensar después en qué pasos deben darse desde los datos que se tienen para llegar a ese dibujo. Se pide cuántas soluciones tiene, acordándose que hay infinitas, tantas como posibilidades de colocar el vértice sobre el eje de simetría (todos los puntos del eje menos el punto de corte con el segmento PP’). *[2ª sesión de Ewa]*

Pierre y Sarah se centran en el conocimiento *de* matemáticas, mientras que Marta enfatiza también algunos modos de proceder propios del quehacer matemático, como el heurístico “organizar los datos de un problema” o proceder sistemáticamente en su resolución, aspectos relativos al conocimiento *sobre* matemáticas, más básicos (pero no menos importante) que los considerados por Ewa..

Volviendo a los datos cuantitativos referidos al foco matemático, Ewa presentaba el mayor énfasis estructural (8’51%), seguida de Pierre (5’55%) y Marta (3’57%); los valores coinciden con los anteriores en lo que se refiere a la eficacia en el caso de Ewa y Pierre, y sigue Marta (con un 5’36%) muy cercana a Pierre. Si sumamos ambos valores, obtenemos un 17’02% en el caso de Ewa, un 11’1% en el caso de Pierre y un 8’93% en el caso de Marta. Es interesante, además, tener en cuenta la distribución de estos indicadores a lo largo de la unidad. En el caso de Ewa, hay indicadores entre un 7 y un 15% en cuatro de las cinco lecciones en el foco estructural, y entre un 10 y un 15% en tres de las cinco en eficiencia; Pierre presenta indicadores en el foco estructural sólo en dos de sus cinco lecciones (casi 20 y 5%) y en eficiencia en otras dos (una no coincidente con las anteriores, con aproximadamente 10 y 15%); Marta sólo presenta indicadores en el foco estructural en una lección (cerca de 15%) y eficiencia en otra lección (algo más de 20%). La distribución por lecciones da un retrato más fiel de lo que supone la matemática que se presenta a los alumnos en estos casos respecto de la matemática *sobre*. La matemática que se presenta y manejan los alumnos de Ewa enfatiza más y más constantemente (como una característica propia de la maestra, no como algo puntual) la estructura y las bases de la materia, desde el punto de vista del esqueleto de sus contenidos y de sus modos propios de proceder. Podría decirse que es una matemática más formal, sin caer en un formalismo vacío de significado para el alumno y no justificado. El empleo de la notación por parte del alumno, por ejemplo, es entendido como un recurso para favorecer su razonamiento matemático, además de como un contenido. Este dato coincide con lo que se observa en los profesores húngaros estudiados en relación con los distintos tópicos (Andrews et al., 2005) y lo observado por Andrews (2003).

En ese sentido, nos parece interesante la formación matemática que ponen en evidencia los profesores estudiados. Ewa muestra soltura en el conocimiento matemático (tanto *de* como *sobre*), ¿cuántos de nuestros maestros estarían preparados para abordar en sus aulas dicho conocimiento? ¿Se trata de una cuestión de hábitos y/o capacidades de sus alumnos? ¿Qué observamos y trabajamos en las aulas de formación de maestros? Son algunas cuestiones que pueden servir de hilo conductor de un debate necesario sobre la naturaleza de la matemática que se estudia en nuestras aulas.

Referencias

Andrews, P. (2003). Opportunities to learn in the Budapest mathematics classroom, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1 (2), 201-225.

Andrews, P, Carrillo, J. y Climent, N. (2005). Proyecto “METE” (Mathematics Education Traditions of Europe): El foco matemático. Comunicación *IX Simposio de la SEIEM.*

Ball, D.L. (1990). The mathematical understanding that prospective teacher bring to teacher education, *Elementary School Journal*, 90, 446-449.

Carrillo, J. y Climent, N. (2005). The mathematics education traditions of Europe (METE) project: The teaching of polygons in Primary school. Paper aceptado en la *11th Biennial EARLI Conference* (European Association for Research on Learning and Instruction), a celebrar en Chipre, 23-27 agosto 2005.

De Villiers, M. (1994). The role of a hierarchical classification of quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-21.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B., *Epsilon*, 23, 49-62.

Piaget, J. y García, R. (1985). *Psicogenesi e storie delle scienze*. Milano: Garzanti.

Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M.C. Chamorro (coord) *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación