# La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system)

Matías Camacho Machín
*Universidad de La Laguna*

***Resumen***

*En este trabajo se presentan dos investigaciones que hemos venido desarrollando en los últimos años, centradas en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida y la integral impropia. Se destacarán aquéllos aspectos que se relacionan con el uso que se hace de los CAS*[1] *Derive y Maple respectivamente, incidiendo en el papel que ha jugado cada uno de ellos en la investigación y mostrando algunos de los resultados obtenidos.*

***Abstract***

*In this work we present two researches that we have come developing in the last years, centred on the teaching and learning of Definite Integral and Improper integral. It will be the aspects that relate to the use that is done of the CAS Derive and Maple respectively, affecting in the role that has played each of them in the research and showing some of the obtained results.*

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años la generalización del uso de programas informáticos potentes y el fácil acceso a ellos, ha provocado un reconocimiento más o menos oficial de la necesidad de integración de las distintas herramientas tecnológicas en los estudios universitarios. Las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) están empezando a constituirse en recursos que ayudan a cambiar los métodos de enseñanza, principalmente en los primeros cursos de Universidad. El reciente informe del ICMI (Holton, 2001) dedica una de sus secciones a la Tecnología y (King, et al, p. 350) destaca la importancia de la Tecnología como un medio para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, haciendo énfasis en algunas de las potencialidades de las TIC para promover un aprendizaje más activo así como el trabajo cooperativo, motivar las explicaciones, indagar sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes, etc. Desde la década de los 80, existen en el mercado diferentes programas que poco a poco han ido incorporándose en la enseñanza, algunos concebidos con ideas educativas y otros no especialmente pensados con esa idea. Aparecieron programas tales como el *Macsyma, Mumath*, etc. -denominados manipuladores simbólicos- que son capaces de resolver fácilmente los ejercicios rutinarios, que, de otro modo, requerirían de una instrucción en técnicas de cálculo muy laboriosas. Comenzó en ese momento, principalmente en USA y Canadá, un replanteamiento sobre qué y cómo debe ser enseñado el Cálculo en los últimos cursos de Secundaria y primeros cursos de Universidad. En la década de los noventa y con la aparición de algunos programas más específicos, con más capacidades tanto simbólicas como gráficas (*Maple, Mathemática, Matlab, Mathcad, Derive*, etc.), el uso de este software se ha ido extendiendo a la enseñanza del Cálculo o Análisis Matemático, aunque en ningún caso el manejo de éstos puede considerarse como generalizado. Todo este software es generalmente denominado en la literatura anglosajona Computer Algebra System (CAS), dado que son

---

[1] Hemos optado por utilizar este término, porque es el más usado internacionalmente. También se utiliza SCF (Système de Calcul Formal) en la literatura francesa y PCS (Programa de Cálculo Simbólico) en la española.

programas informáticos que facilitan el trabajo simbólico y que permite manipular con expresiones algebraicas y numéricas. También los CAS permiten la representación de gráficas de funciones así como la conjugación de todos estos aspectos. También en esta década de los 90, surgen las calculadoras simbólicas, que son aquéllas que tienen implementadas algún CAS, como es el caso de la TI-92 o la Voyage 200. Cada vez más, aparece en los libros de texto la alusión al uso de las calculadoras tanto gráficas como simbólicas para la resolución de problemas.

Quizás uno de los CAS que por sus propias características (fácil manejo, economía de memoria, etc.) ofrece más posibilidades didácticas, es el *Derive*. Se han desarrollado diferentes proyectos de investigación subvencionados por las instituciones académicas responsables que han tratado de extender el uso de tal software (Artigue et al, 1995; Drijvers et al, 1997; Heugl 1997), aportando resultados bastante alentadores. A pesar del temprano optimismo despertado por el uso de CAS existe un amplio abanico de cuestiones sin responder. Por ejemplo:

¿Cuál es la relación entre lápiz-papel y el trabajo en un entorno informático?

¿Cómo afecta el uso de CAS al currículo?

¿Cómo afectan los CAS a la comprensión de los conceptos?

¿Qué conocimientos previos se requieren para usar un CAS de forma productiva?

El Documento de Discusión del 12 ICMI Study titulado *"The Future of the Teaching and Learning of Algebra"* señaló las siguientes interrogantes como cuestiones básicas que necesitan de respuestas más o menos inmediatas

- *¿Para qué estudiantes y cuándo es apropiado introducir el uso de un CAS?*
- *¿Cuándo las ventajas de usarlo sobrepasan el esfuerzo que hay que poner en aprender a utilizarlo? ¿Hay actividades en los que pueden ser realizados con provecho por estudiantes más jóvenes?*
- *¿Qué intuiciones algebraicas y "sentido simbólico" necesita el usuario de un CAS y a qué intuiciones conlleva el uso de éste?*
- *Una de las potencialidades de los CAS es que favorecen múltiples representaciones de conceptos matemáticos. ¿Cómo se puede utilizar esto correctamente? ¿Pueden ser "sobreutilizados"?*
- *¿Cuáles son las relaciones e interacciones entre distintas aproximaciones y filosofías de la enseñanza de las Matemáticas con el uso de CAS?*
- *Los estudiantes que utilizan distintas herramientas informáticas resuelven los problemas y piensan en los conceptos de forma distinta. Los profesores tienen más opciones para cómo enseñar. ¿Qué impacto tiene esto en la enseñanza y el aprendizaje? ¿Qué tipos de sistemas favorecen qué tipos de aprendizaje? ¿Pueden ser caracterizadas teóricamente estas diferencias?*
- *¿Cómo debería ser un currículo de Álgebra en un país donde los CAS están disponibles libremente? ¿Qué habilidades manipulativas deberían retenerse?* (Chick et al, 2001)

Es claro que la integración de los CAS en la educación matemática hace emerger muchas cuestiones que aún están por responder. Consecuentemente, la investigación sobre el la integración de estos programas en el aula en los diferentes niveles, ha ido configurándose poco a poco como campos de investigación en el que aparecen involucrados colectivos de investigadores cada vez más amplios. En algunos países, el impacto de estas tecnologías ha llevado a dedicar un espacio de discusión e investigación emergente, en el que han surgido elementos teóricos que nos ayudan a interpretar las dificultades y potencialidades que aparecen al introducir las TIC en el aula. Por ejemplo, en Francia, M. Artigue directora del IREM de París, ha liderado un grupo de investigación que ha tratado de explicitar la complejidad que tiene el proceso de enseñanza y aprendizaje utilizando CAS. Desde ese punto de vista (Artigue, 2002, Trouche, 2004, Guin, Ruthven y Trouche, 2005), establecen las bases de lo que se viene llamando recientemente la Aproximación Instrumental, como un elemento que ayuda a organizar la enseñanza e interpretar el aprendizaje de los estudiantes. Desde este punto de vista, el trabajo en un entorno de aprendizaje con ordenadores (CLE, Computerized Learning Environments) se hace efectivo mediante lo que se denomina Génesis Instrumental, que es el proceso mediante el cual un instrumento resulta de la construcción hecha por un individuo, en un entorno práctico, sobre las base de un "artefacto" (la Calculadora Simbólica).

En este trabajo describiremos dos investigaciones que hemos venido desarrollando durante los últimos años, cuyos enfoques son esencialmente diferentes: en la primera, que está dedicada a la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, elegimos el CAS *Derive*, como mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje y en la segunda, utilizamos el CAS *Maple V*, con el objetivo principal de operacionalizar algunos de los resultados teóricos que han sido presentados a los estudiantes en una secuencia de enseñanza sobre la integral impropia con alumnos de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas

## LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Esta investigación cubre un aspecto, que se relaciona con el currículo habitual del Cálculo. Se introduce, previo al estudio del cálculo de primitivas, el concepto de Integral Definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica partiendo de la idea de aproximación y utilizando *Derive*. Se pretende analizar la viabilidad de esta modificación del currículo, las potencialidades y dificultades que surgen en su implementación y, finalmente, analizar cómo adquieren los estudiantes el concepto de Integral Definida.

Hemos considerado como soporte teórico de nuestro trabajo, dado que nos propusimos analizar cómo entienden los estudiantes el concepto de área e integral definida después de participar en un curso en el que se utilizaba *Derive*, dos componentes importantes. Por un lado, consideramos un modelo de competencia adaptado del que define Socas (2001) cuando estudia el papel de los Sistemas Matemáticos de Signos en la comprensión de los objetos matemáticos en relación con el pensamiento numérico y algebraico, y, por otro, aspectos relacionados con el uso de la TIC, como elementos que facilitan el proceso de formación de los conceptos.

En relación al primer aspecto, el modelo de competencia se utiliza como un marco de referencia que al compararlo con las actuaciones de un estudiante, nos ayuda a determinar el grado de comprensión del concepto (Camacho y Depool, 2003) y funciona como un elemento organizador que facilita el análisis de la comprensión del concepto de Integral Definida por parte de los estudiantes.

El segundo elemento que ya hemos indicado, tiene que ver con el uso herramientas tecnológicas como mediadores entre el proceso de instrucción y el aprendizaje. En los últimos veinte años, aparte de los cambios experimentados por el software matemático y los propios ordenadores, las teorías sobre cómo los CAS pueden influir en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, también han venido refinándose cada vez más (Mariotti, 2002). (Heid, 2002) establece en su trabajo que es importante analizar cómo las teorías existentes sobre la enseñanza y aprendizaje pueden influir en el papel que representan los CAS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Para Heid, existen dos tipos de teorías que podrían resultar útiles para explorar el papel de los CAS en el aprendizaje de las Matemáticas: las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y la estructura del currículum de Matemáticas, y, las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y los contenidos del currículum.

En cuanto al primer tipo de teorías, Heid señala que los CAS constituyen una tecnología cognitiva que facilita el acceso de los estudiantes a procesos de pensamiento matemático de un nivel más alto. Con un CAS los estudiantes pueden generar y manipular expresiones simbólicas que de otra manera necesitaría un gran tiempo de trabajo. Para Pea (1987) como tecnología cognitiva, los CAS pueden ser considerados como "amplificadores" o "reorganizadores u organizadores" del currículum. En el primer sentido, gracias a la función amplificadora, los CAS permiten extender el currículum y ampliar los tópicos que se trabajan en el currículum habitual. La segunda manera de usar CAS, como tecnología cognitiva, es como reorganizadora del currículum, cambiando la naturaleza y ordenación del currículum. En las investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, resulta difícil de separar totalmente la relación de estas dos funciones que hemos señalado. Sin embargo, esta categorización nos ayuda principalmente al tratar de examinar los efectos de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Como consecuencia de lo anterior, nuestra investigación se ha configurado combinando ambos elementos. De esta forma, vamos a considerar que el CAS *Derive* constituye un amplificador del currículum desde el momento que ha sido utilizado para que los estudiantes desarrollen un conjunto de Prácticas de Laboratorio en un aula de ordenadores para introducir y establecer el concepto de Integral Definida, usando métodos de aproximación numérica que no se encuentran en los currícula habituales del curso de de Cálculo I para una carrera de ingeniería en una Universidad Latinoamericana[2]. En el otro sentido, consideramos el CAS *Derive* como un reorganizador del currículum, puesto que en el programa de formación optamos por organizar la enseñanza de otra forma, es decir, adelantando la enseñanza del concepto de Integral Definida como área, al cálculo de primitivas que es como se presenta habitualmente a los estudiantes de esos niveles.

Heid distingue como segundo tipo de teorías aquéllas que relacionan los contenidos y los procesos que aparecen en el currículum de Matemáticas, estableciendo además diferentes subcategorías de análisis:

El papel de los CAS en el álgebra escolar, el paso de las estrategias informales a las formales, la influencia de los CAS en las teorías que relacionan los procesos y objetos matemáticos y, finalmente, la influencia en las teorías de la representación para el aprendizaje de las Matemáticas.

Nos centraremos en esta última subcategoría que resulta ser la que más se relaciona con nuestro estudio. Pese a que existen diferentes interpretaciones de las representaciones (internas, externas, semióticas…), creemos, al igual que Heid, que lo que importa es el sistema en el que se produce la representación, no la perspectiva que se tome sobre las representaciones. Lo esencial en este caso es la conversión entre representaciones para su articulación coherente.

Los CAS y sus capacidades multirrepresentacionales constituyen un entorno de trabajo privilegiado. Muchas investigaciones han mostrado, como elementos claves en los que los estudiantes fracasan, la conexión entre las distintas representaciones. Santos (2000) en su investigación, encontró que un aspecto importante que favorece las conexiones entre las distintas representaciones, es la reflexión sobre la información que cada sistema de representación puede aportar a otro sistema de representación.

El trabajo que desarrollamos se centró en dos aspectos, primeramente en el papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, cuando se utiliza un CAS como *Derive,* y en segundo, nos centramos en cómo influye el uso de un CAS en la construcción de dichas representaciones.

El análisis de estos dos aspectos nos permitió, por una parte, establecer la competencia de los estudiantes mediante un modelo definido con anterioridad (Camacho y Depool, 2003a) y, por otra, determinar una serie de perfiles de actuación en la resolución de los problemas no rutinarios que se utilizaron en nuestra investigación, lo que constituye el trabajo que se presenta aquí.

**La secuencia de enseñanza para la integral definida**

En la investigación participaron un grupo de 31 estudiantes que recibieron un curso de Cálculo I entre los meses de octubre de 2001 y marzo de 2002. En este curso se combinaron las clases habituales de tiza y pizarra con una serie de Prácticas de Laboratorio (PL) para realizar con *Derive.* Una vez que los estudiantes habían asistido a las clases, desarrollaban las PL que se diseñaron para el trabajo de laboratorio. Los temas contenidos en el programa oficial fueron:

Se preparó un Módulo Instruccional que constaba de 8 Prácticas de Laboratorio. Las primeras cinco dedicadas al estudio de Funciones, Límites y Derivadas que se configuraron utilizando sencillos Programas de Utilidades (PU) similares a los expuestos en algunos libros de Cálculo (Stewart, 1999) así como los comandos de cálculo directo que se incluyen en los diferentes menús del *Derive*. El resto de las prácticas se diseñaron para el estudio de la Integral Definida, y se basaron principalmente en el uso de un Programa de Utilidades diseñado por nosotros (ver Camacho y Depool, 2003b, Depool 2004). Estas prácticas fueron concebidas con la intención global de que los estudiantes puedan seguir

[2] En líneas generales, en Latinoamérica la integral definida se introduce en los primeros cursos de Universidad

paso a paso el cálculo del área de la región limitada por una curva, utilizando aproximaciones con rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson), para interpretar desde un punto de vista el concepto de Integral Definida partiendo del cálculo aproximado de áreas de regiones. Se enfatiza el aspecto gráfico en la práctica 6, en la que se realizan lo que hemos denominado cuadraturas de la región cuya área queremos calcular, utilizando construcciones progresivas de rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (en el sentido de Simpson). En la práctica 7 se le presenta al estudiante un resumen del desarrollo gráfico expuesto en la anterior y se introduce el aspecto numérico calculando las diferentes aproximaciones totales al área, mediante las sumas de las distintas divisiones que se han hecho para la región que se está estudiando (práctica 7). En la última práctica (8) se incluyeron diferentes problemas de aplicación en los que se deben aplicar los conocimientos trabajados desde el punto de vista teórico en las clases habituales y en las PL anteriores.

De esta manera, para la formación de los estudiantes se desarrolló un trabajo dividido en tres fases principales:

Fase 1: *Clases habituales:* El profesor hace una presentación de los contenidos usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: *Prácticas en el Laboratorio de ordenadores:* Los estudiantes realizan por parejas, en el laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional. Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la práctica y para aclarar dudas en su desarrollo.

Fase 3: *Puesta en común:* Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron.

Ya se indicó que las PL constituyeron el núcleo central de la instrucción. Cada práctica de laboratorio constaba de un comentario general sobre la misma y un protocolo que los estudiantes deben seguir como instrucción de la práctica, con el asesoramiento del profesor. El contenido de cada práctica se proyecta en una pantalla con un cañón de proyección, y se les entrega a los alumnos con el objetivo de aclarar los puntos que sean necesarios de la misma. Cada práctica de laboratorio es recurrente, es decir, cada práctica nueva se comienza abriendo el archivo que contiene la práctica anterior en la que los estudiantes leen las observaciones de ésta y la calificación respectiva. Una vez terminado el módulo, se realiza una evaluación final que contiene los puntos más importantes tratados en las prácticas. Un ejemplo de Práctica de Laboratorio sería la resolución del siguiente problema que aparece en un libro de texto clásico:

*Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas* (90 cm) *de ancho con secciones transversales con la forma de la curva* (figuras 1, 2)

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x, \qquad 0 \le x \le 36$$

*¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas?*

(Edwards y Penney 1996, pp. 370-371).

Teniendo en cuenta que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

se tiene en este caso

$$S(x)=\int_0^{36}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\ dx=36\int_0^{1}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\ dx$$

Figura 1. Lámina de metal

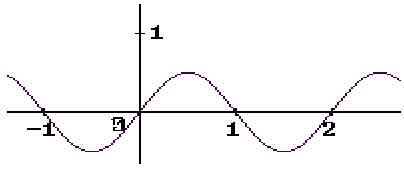



Figura 2. Gráfica de $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x$

En el texto mencionado se señala *Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales* (p. 370) para remitir al lector a otro capítulo del libro donde se trata la integración numérica. Presenta entonces la siguiente solución:

$$\int_0^{1}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\ dx=1{,}46$$

Indicando a continuación que la solución del problema es: $36.(1{,}46)=52{,}56$ pulgadas.

Con la secuencia de enseñanza desarrollada por los estudiantes para el estudio del concepto de Integral Definida vista como el cálculo de áreas limitadas por una curva, no necesitamos darle solamente una solución numérica tal y como se hace en el texto, sino que podría obtener dicha solución desde el punto de vista gráfico y numérico. Para lo cual bastaría con considerar la función:

$$F(x):=\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}$$

que al representarla gráficamente (figura 3) nos permite observar que es una función positiva. El PU servirá ahora para resolver el problema, se puede observar en la figura los distintos rectángulos y el "llenado" de la superficie limitada con el eje de abscisas.

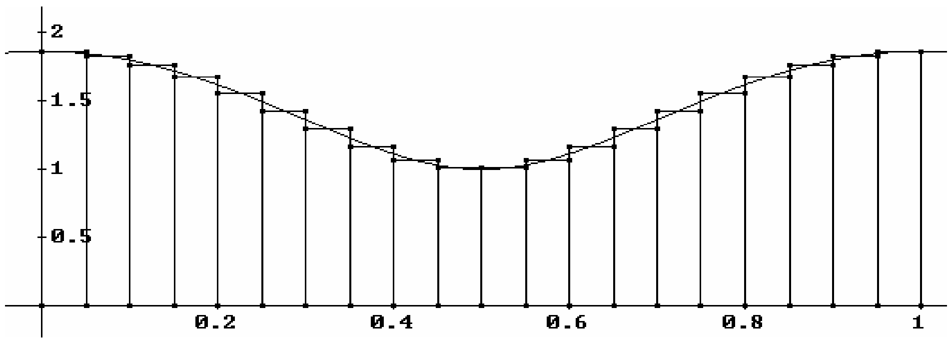



Figura 3. Gráfica con Rectángulos Punto Medio

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46369.

| N. S | R. INF | R. PTO. M | TRAP. | TRAP. PARAB. | R. SUP. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1.377485726 | 1.463695629 | 1.463695315 | 1.463632875 | 1.549904904 |
| 20 | 1.420590677 | 1.463695472 | 1.463695472 | 1.463695524 | 1.506800266 |
| 30 | 1.434958942 | 1.463695472 | 1.463695472 | 1.463695472 | 1.492432002 |

El estudiante concluirá en definitiva que, el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente $36(1{,}46369)\approx 52{,}69$ pulgadas de ancho.

**Análisis de los resultados**

Los instrumentos de análisis utilizados para la recolección de datos fueron: un cuestionario de conocimientos y una entrevista. El primero fue aplicado a todo el grupo, y el segundo a seis de estos estudiantes. Estos últimos se seleccionaron según su actuación cuando resuelven por escrito las tareas propuestas en el cuestionario de conocimientos. En (Camacho, Santos, Depool, 2004a, 2004b) se incluye una síntesis general de las respuestas dadas por el gran grupo, así como de los estudiantes que se seleccionaron. Pasamos ahora a describir con mayor detalle los instrumentos utilizados:

*El cuestionario y la entrevista:* Las tareas propuestas tanto en el cuestionario de conocimientos como en la entrevista, se organizaron en torno a tres grupos de acuerdo con las características y las formas potenciales de solución:

- Primer grupo de preguntas: Preguntas en las que el registro gráfico constituye el elemento básico de la información que se suministra para la resolución del problema.
- Segundo grupo de preguntas: Preguntas en las que la información suministrada viene dada en el registro algebraico.
- Tercer grupo de preguntas: Cuestiones más generales en las que los estudiantes tienen que poner en juego un alto nivel de comprensión del concepto de Integral Definida para usar los diferentes registros de representación semiótica considerados durante la instrucción (numérico, gráfico y algebraico)

Los estudiantes cumplimentaron el cuestionario en tres escenarios diferentes:

*Escenario 1,* en el que los estudiantes resuelven las tareas del cuestionario empleando solamente lápiz y papel e informan por escrito sobre sus planteamientos o soluciones a los problemas.

*Escenario 2:* que corresponde al trabajo que presentan los estudiantes al resolver el cuestionario con el empleo del software *Derive*; aquí los estudiantes entregan una copia del disquete que contiene sus soluciones y sus comentarios sobre el contenido de la práctica.

*Escenario 3:* en el que los 6 estudiantes seleccionados (E1, E2, E3, E4, E5, E6) son entrevistados y se les pregunta directamente sobre su manera de resolver los problemas planteados. Aquí ellos eligen libremente qué tipo de herramienta deben emplear durante sus explicaciones o soluciones al cuestionario.

Conviene señalar que no todas las preguntas se propusieron en los tres escenarios, dado que un análisis previo de las respuestas dadas por el gran grupo (la clase) en los escenarios 1 y 2 nos sugirió incluir o descartar algunas de las preguntas que quedaron para la entrevista semiestructurada (escenario 3) que se desarrolló con el grupo de estudiantes seleccionado.

El análisis de las entrevistas nos permitió definir tres perfiles de actuación de los estudiantes

- En el primer perfil, situamos a los estudiantes que utilizan el CAS simplemente para realizar cálculos algebraicos o localizar cortes de la curva con el eje OX; aplican procedimientos algebraicos y/o numéricos en la resolución de los problemas, con escaso soporte gráfico.
- Los estudiantes incluidos en el segundo perfil, usan el software como una herramienta que les permite hacer más fáciles la resolución de las tareas.
- En un tercer perfil se encuentran los estudiantes que muestran una disposición clara al uso de *Derive*.

## LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Pasamos ahora a describir la segunda investigación que hemos venido realizando sobre el estudio de la Integral Impropia. Esta investigación se desarrolló dentro del marco de la Universidad y en particular de la Licenciatura de Matemáticas.

La secuencia se basa en presentar la integral impropia destacando su condición de generalización de la integral definida, por lo que se pretende ir complementando un conocimiento que los estudiantes deberían tener. Esta elección de comenzar el estudio partiendo de un problema matemático (el de generalización) viene condicionada por el nivel de conocimiento de nuestros alumnos de Primer Curso (no es posible comenzar con un problema de aplicación, puesto que nuestros estudiantes no conocen aún la Teoría de Probabilidades ni aplicaciones físicas de los conceptos estudiados). En el anexo se esquematiza el desarrollo que proponemos.

El hecho de suprimir una de las condiciones iniciales para definir el nuevo concepto puede ocasionar algún problema a los estudiantes. Sin embargo, el hecho de partir de la misma definición pretende crear una continuidad entre ambas definiciones (aunque es evidente que no se conservan todas las propiedades). Otra de las rupturas evidentes es la diferencia en las condiciones de existencia de una integral propia e impropia (por ejemplo, para el valor absoluto[3]). Además, funciones en las que siempre existe la integral definida (como polinomios) aparecen como imposibles de integrar en un intervalo infinito.

La secuencia de enseñanza utilizada incluyó dos sesiones en un laboratorio de ordenadores con la intención principal de promover lo que se denomina génesis instrumental[4]. Desde esta perspectiva, en la enseñanza de los conceptos utilizando CAS, se distingue entre un artefacto tecnológico y el instrumento que un ser humano es capaz de construir a partir de él. Mientras el artefacto se refiere a una herramienta objetiva, el instrumento se refiere a una construcción mental hecha por el usuario de la herramienta. El instrumento no viene dado con el artefacto, se construye mediante el proceso complejo que se denomina génesis instrumental y da forma a la actividad y el pensamiento matemático.

La génesis instrumental trabaja en dos direcciones. En la primera, se dirige hacia el artefacto, cargándolo progresivamente con potencialidades; se llama a este proceso instrumentalización del artefacto. En la segunda dirección, se dirige hacia el sujeto y lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva a tareas dadas. Esto último es lo que se denomina propiamente instrumentación.

Es en esta perspectiva global y teórica, en la que Artigue (2001) establece un análisis sobre todos estos factores mediante el cual trata de caracterizar su marco teórico, centrándolo en los siguientes aspectos:

- La inesperada complejidad de la génesis instrumental.
- Las necesidades matemáticas de instrumentación.
- El estatus de las técnicas instrumentales, los problemas surgidos de su conexión con las técnicas de papel /lápiz, y su administración institucional

Entre los resultados más relevantes de las investigaciones con calculadoras simbólicas se encuentran los de Trouche (2004, 2005). Concluye que existen efectos negativos sobre los procesos de conceptualización, al hacer un uso individual de la calculadora simbólica. Guin y Trouche (1999) muestran que hay tres tipos de restricciones: internas, de comandos y de organización; es fundamental tenerlas en cuenta según la necesidad de una socialización del proceso de instrumentación, dado que:

- La utilización de las calculadoras conduce a los estudiantes, con más probabilidad, a construir su propia comprensión matemática gracias a una reflexión consciente.
- El comportamiento ideal que describen, induce un aporte benéfico de las calculadoras.
- Los profesores son investidos de una responsabilidad importante dentro de la elección de situaciones para acompañar el proceso individual de instrumentación.
- El rol del profesor es: subrayar las contradicciones no percibidas, incitar a una reflexión para encontrar una coherencia matemática, ayuda a los alumnos a acceder a esta

[3] Se tiene que, en un intervalo $[a, b]$, si existe la integral de $f(x)$ también existirá la de $|f(x)|$. Sin embargo, si se toma el intervalo $[a, +\infty)$ este resultado es falso. Más adelante mostramos algunos ejemplos.
[4] Para una exposición detallada del tema, consultar Artigue, 2002.

coherencia, introducir los nuevos conocimientos matemáticos necesarios y administrar las dificultades que surjan dentro del nuevo entorno.

Nos muestran además, cómo los estudiantes trabajan en un solo registro (gráfico, numérico, simbólico) y existen dificultades de conversión entre registros.

Cuando los alumnos aprenden por sí solos a utilizar las calculadoras ¿Cuáles pueden ser las consecuencias?

Se observa que los estudiantes:

- No consideran que la pantalla tiene límites mientras que la gráfica no los tiene.
- Consideran que las asíntotas forman parte de la función.
- Creen fielmente lo que les dice la calculadora sin buscar relaciones con los conocimientos adquiridos.

En las sesiones experimentadas con el *software Maple V* tratamos de evidenciar a los estudiantes algunas de las restricciones internas propias de este programa con el objetivo de ampliar las perspectivas de enseñanza y aprendizaje de la integral impropia.

También los obstáculos globales y locales definidos por Drijvers (2002) nos servirán para que los estudiantes reflexionen sobre su propio aprendizaje. Las ideas que aparecen establecidas en el marco teórico juegan un papel esencial, no solamente en el análisis del trabajo de los estudiantes, sino también en el diseño y estructura de nuestro estudio.

**La secuencia de enseñanza de la Integral Impropia**

Tal y como se ha indicado con anterioridad, la secuencia de enseñanza experimentada constó de diez sesiones, estando las dos últimas dedicadas al trabajo con el CAS *Maple V*. Consideramos que el uso del registro gráfico de forma más activa durante la instrucción y en los ejercicios y problemas propuestos podría paliar algunas de las carencias mostradas por los alumnos en investigaciones precedentes (González-Martín y Camacho, 2004; González Martín, 2002).

En la secuencia de enseñanza utilizada se destaca que el aprendizaje de los nuevos conceptos puede utilizarse para reforzar los conocimientos previos de los estudiantes. y por ello supone una retroalimentación de los conceptos aprendidos; por una parte, utilizamos activamente el aprendizaje anterior de los estudiantes para construir los nuevos conceptos y, por otro, estos nuevos conceptos serán utilizados para revisar los anteriores y aclarar algunos aspectos de ellos. En particular, se tiene en cuenta en la propuesta de enseñanza que:

- La introducción de la integral generalizada a partir del problema de extensión de la definición de Riemann puede reforzar la comprensión de ésta, en particular las condiciones bajo las que se define. Con este enfoque, algunos obstáculos ligados al concepto de integral definida pueden revisarse.
- La presentación de la función integral como elemento central del discurso puede reforzar la visión de la integral como un proceso dinámico.
- El cálculo de límites de la función integral para decidir el carácter de una integral puede hacer que los estudiantes revisen su visión de los procesos límite. De esta forma, se pretende combatir el obstáculo generado por el empleo de una concepción estática de los procesos límite.
- La decisión de abordar la secuencia en paralelo a la secuencia habitual para la enseñanza de las series y la evidencia de sus relaciones a partir del Test Integral puede enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre las series, favoreciendo nuestro esquema de retroalimentación de los conceptos nuevos con los previos.
- El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquecerá el conjunto de experiencias de los estudiantes, haciéndolos más sensibles a los engaños de la intuición y dándole un mayor estatus matemático al registro gráfico.

La secuencia de enseñanza está divide en seis bloques (Integral de una función en un intervalo infinito: Introducción y primeras intuiciones, Estudio de la integral impropia de funciones estrictamente positivas, Estudio de las propiedades que se conservan al extender la definición, Relaciones entre integrales impropias y series, Estudio de la integral impropia de funciones que cambian de signo, Ampliación al caso de integrales de funciones no acotadas en el intervalo de integración) con un total de ocho sesiones en el aula (donde se utilizarán hojas de actividades, debates y discusiones, ejemplos y contraejemplos) y dos en el aula de ordenadores.

En cuanto a los objetivos que nos hemos propuesto para alcanzar durante el desarrollo de las sesiones de laboratorio, tendremos:

- Reforzar el uso de criterios mediante la resolución de problemas más difíciles de resolver con lápiz y papel e incorporando funciones no prototípicas

- Mostrar las limitaciones del software para decidir la convergencia de algunas integrales, lo que motiva el interés del aprendizaje y el uso de criterios

- Reforzar el uso del registro gráfico en las actividades y resvisar contenidos institucionalizados

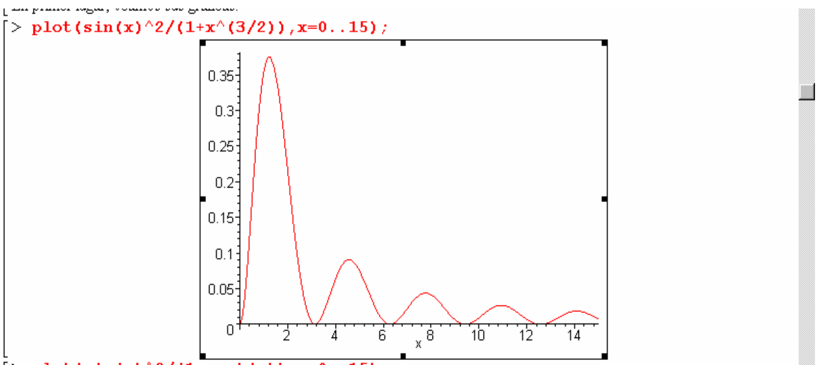
- Analizar si es posible adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la génesis instrumental a un contexto de aprendizaje con ordenadores.

- Analizar la viabilidad para la observación de génesis instrumentales y la posibilidad de generalizar algunos obstáculos observados en entornos de calculadoras gráficas en un contexto de aprendizaje con ordenadores.

Conviene destacar que se usa el ordenador sólo para reforzar los conceptos aprendidos y no para hacer surgir nuevas ideas.

La primera sesión diseñada hace un acercamiento al *software Maple V* y presenta las órdenes que se utilizarán en las actividades. Las actividades están organizadas de forma que la complejidad del uso de las órdenes es gradual, permitiendo al estudiante instrumentalizar la máquina y generar sus propios esquemas de acción instrumentada (instrumentación). La estrategia diseñada para que el estudiante tuviera una actitud crítica y tratara de utilizar resultados teóricos fue mostrar algunos defectos del *software* (restricciones internas) y la poca manejabilidad de algunos resultados que éste ofrece. La orquestación empleada (Trouche, 2002) contaba con un alumno *sherpa* con su computadora conectada a un cañón de proyección, de modo que sus acciones se presentaban en una pantalla, permitiendo al resto de alumnos controlar el desarrollo de las actividades y aportar sus propios métodos de resolución.

Una de las actividades presentadas plantea el estudio de la convergencia de la integral de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^{3/2}}$, en el intervalo $[0, +\infty)$, cuya gráfica es:




La estrategia que esta actividad tiene por objetivo desarrollar es la implementación de un criterio de comparación para concluir la convergencia de la integral. Esto se debe a que la evaluación directa de la integral produce un resultado difícil de interpretar, que se muestra en la siguiente figura:

```
> int(sin(x)^2/(1+x^(3/2)),x=0..infinity);
```

$$\frac{1}{8}\sqrt{3}\Bigg(\frac{128}{1215}\,\frac{\pi^{\left(\frac{7}{2}\right)}\,\mathrm{hypergeom}\left([1],\left[2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{11}{6},\frac{4}{3}\right],\frac{-1}{729}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}-\frac{8}{45}\pi^{\left(\frac{7}{2}\right)}\sqrt{3}\,\mathrm{hypergeom}\left([\ ],\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{11}{6},\frac{4}{3}\right],\frac{-1}{729}\right)$$

$$+\frac{64}{81}\,\frac{\pi^{\left(\frac{7}{2}\right)}\,\mathrm{hypergeom}\left([\ ],\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right],\frac{-1}{729}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}-\frac{512}{315}\pi^{3}\sqrt{3}\,\mathrm{hypergeom}\left([1],\left[\frac{3}{4},\frac{17}{12},\frac{5}{4},\frac{19}{12},\frac{13}{12},\frac{11}{12}\right],\frac{-1}{729}\right)+\frac{1}{1296}$$

$$\pi^{\left(\frac{5}{2}\right)}\sqrt{2}\sqrt{6}\Bigg(\sum_{\_k1=0}^{\infty}(-1)^{(2\,\_k1)}\Big(-\Psi(1+\_k1)-\pi\tan\left(-\pi\,\_k1+\frac{1}{6}\pi\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\_k1\right)+\pi\tan(\pi\,\_k1)$$

$$-\Psi\left(\frac{2}{3}+\_k1\right)+\pi\cot\left(\frac{1}{3}\pi-\pi\,\_k1\right)+\pi\cot\left(\frac{1}{4}\pi-\pi\,\_k1\right)-\pi\tan\left(\frac{1}{4}\pi-\pi\,\_k1\right)-\Psi\left(\frac{5}{6}+\_k1\right)-\Psi\left(\frac{7}{6}+\_k1\right)$$

$$-\Psi\left(\frac{4}{3}+\_k1\right)-6\ln(3)\Big)\,3^{(-6\,\_k1)}\sec(\pi\,\_k1)\sec\left(-\pi\,\_k1+\frac{1}{6}\pi\right)\csc\left(\frac{1}{3}\pi-\pi\,\_k1\right)\sec\left(\frac{1}{4}\pi-\pi\,\_k1\right)$$

Time: 23.1s | Bytes: 2.37M | Available: 491M / 44%

En particular, esta actividad tiene por objetivo que el estudiante emplee el criterio de comparación por cociente y pruebe diferentes funciones con las que comparar, generando así esquemas de acción y de reconocimiento de regularidades. Una posible solución sería:

Probamos con otra función:

```
> f:=x-> x^(1/3)/(1+x^(3/2)) ;
```

$$f := x \to \frac{x^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{1+x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

```
> int(f(x),x=0..infinity);
```

$$\frac{2}{3}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{9},\frac{8}{9}\right)$$

```
> evalf(%);
```

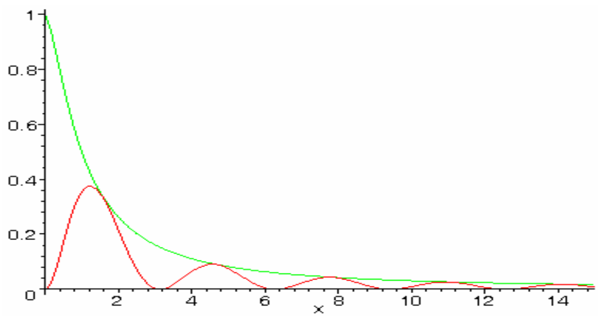
$$6.123601617$$

```
> limit((sin(x)^2/(1+x^(3/2)))/f(x),x=infinity);
```

$$0$$

Hemos elegido una función en este caso tal que su integral es "**sencilla**" de calcular y resulta ser convergente. Además, el límite del cociente de funciones tiende a cero.
El criterio de comparación nos asegura que la integral de partida es **convergente**.

Se observó que algunos estudiantes lo que hacen es dibujar conjuntamente las funciones $f(x)$ y $\dfrac{1}{1+x^{3/2}}$, obteniendo una gráfica como la siguiente:




La segunda integral es convergente (se puede comprobar fácilmente), por lo que $f(x)$, al encerrar un área menor, es también convergente. Este tipo de razonamiento nos parece una muestra muy significativa de la elaboración de los estudiantes de sus propios esquemas de acción instrumentada y del proceso de instrumentación, al elegir un criterio de comparación mucho más fácil de implementar en este caso.

Mencionamos, finalmente, que el trabajo con el ordenador resulta especialmente útil cuando se trabaja con integrales de funciones que cambian de signo. Así, la función $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ constituye un ejemplo clásico de función con integral convergente pero no absolutamente convergente. Sin embargo, este ejemplo está fuera del alcance intuitivo de los estudiantes. Utilizando la teoría de series y los conocimientos previos, es mucho más sencillo construir contraejemplos de funciones que convergen condicionalmente (González-Martín y Camacho, 2005)

**Análisis de los resultados**

En la primera sesión participaron 18 estudiantes y en la segunda se contó con la presencia de 22. Se observó, en general, un primer nivel de instrumentación. Los estudiantes descubren los comandos y sus efectos, aunque no tienen en cuenta otras fuentes de información. En algunos de los estudiantes se observó, además, un intento de comprensión de la herramienta y de combinación de los elementos teóricos con los comandos aprendidos, resolviendo el problema de no encontrar una función adecuada para el Criterio del Cociente mediante el uso del Criterio de Comparación, lo que puede constituirse en los primeros pasos hacia la instrumentalización

Para la génesis instrumental colectiva de estos procesos, pensamos que la elección del alumno sherpa resultó ser fundamental, pese a que algunos problemas propios de la sintaxis del programa, incluso las carencias de conocimientos de los estudiantes dificultó la génesis de estos procesos.

Las actividades utilizadas, las elecciones hechas y la orquestación seguida han permitido observar algunos de los procesos de instrumentación e instrumentalización en los estudiantes, lo que alienta el diseño de otras sesiones futuras donde los estudiantes tengan mayor libertad y puedan movilizar sus conocimientos.

Se observó en nuestra experiencia con el ordenador que hay también una presencia de varios de los obstáculos tanto locales como globales en el mismo sentido que (Drijvers, 2002) establece en un contexto de CAS para calculadoras simbólicas. Conjeturamos además que estos obstáculos tienen un carácter dual que sobrepasa la dependencia del tema concreto que se esté estudiando.

Finalmente, se observó que las dificultades no previstas por los estudiantes para visualizar conjuntamente series y funciones, así como la confusión existente entre la serie asociada y las sumas de Riemann, han oscurecido la introducción del Test Integral y su operacionalización y además se han mostrado resistentes. Como conclusión, pensamos que será conveniente desarrollar más experiencias de enseñanza en el futuro donde se tenga en cuenta esta situación para ofrecer estrategias que permitan a los estudiantes superar estas dificultades.

## CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo se han mostrado las bases fundamentales de dos secuencias para la enseñanza y aprendizaje de dos conceptos importantes del Análisis Matemático haciendo un diferente uso de los CAS *Derive* y *Maple V.* La primera para el concepto de integral definida, basada principalmente en un trabajo amplio de laboratorio y la otra secuencia, más teórica, en la que el papel del CAS es esencialmente diferente a la primera.

Resulta pertinente destacar que, a nuestro parecer, el uso del software proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan librarse de memorizar formulas o procedimientos de cálculo, aunque es fundamental tener en cuenta que los estudiantes necesitan un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual segura de los conceptos. Necesitan prestar atención al proceso de transformación y relación que pueden establecerse entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Hemos constatado además que los estudiantes necesitan desarrollar un conjunto de estrategias para la resolución de problemas que pudieran ayudarlos a decidir cuándo usar el software y cómo dirigir su trabajo con el mismo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS


Artigue, M.; Abboud, M.; Drouhard, P.; Lagrange, B. (1995). *Une recherché sur le logiciel Derive.* Cahier de DIDIREM 3 (número especial). IREM. Paris 7.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol. 7 (3), pp. 245-274.

Camacho, M.; González-Martín, A. S. (2002). *Análisis de una experiencia con Maple en primer curso de Ingeniería Técnica Industrial: las opiniones de los estudiantes.* Póster. Congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME2002), Puerto de la Cruz (Tenerife).

Camacho, M.; Depool, R. (2002). El concepto de Integral Definida y su relación con el concepto de área limitada por una curva. Análisis de una experiencia piloto. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IV,* pp. 79-132.

Camacho, M.; Depool, R. (2003a). Modelo de competencia para el campo conceptual de la integral definida. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática,* Vol. 5, pp. 71-104.

Camacho, M.; Depool, R., (2003b). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (CAS) *Derive. Educación Matemática.* 15(3), 119-140.

Camacho, M.; Santos, M.; Depool, R. (2004a). Promoting Students´ Comprehension of Definite Integral and Area Concepts Through the Use of Derive Software. *Proceedings of the 26 PME-NA.* Vol 2, pp. 447-454

Camacho, M.; Santos, M.; Depool, R. (2004b). La comprensión del concepto de área e integral definida en una entorno computacional. Perfiles de actuación. *Formación del Profesorado en investigación en Educación Matemática,* Vol. 6, pp. 21-46

Chick, H.; et al (2001). *Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra.* Melbourne: The University of Melbourne.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna. Tesis Doctoral.

Drijvers, P.; Verweij, A., Winsen E. (1997). Mathematics Lessons with *DERIVE*. Developed by the CAVO working group. En *ZDM*. 4, 118-123.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 5,189-209.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 34 (5), 221-228.

Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment

Edwards, C.; Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.

González-Martín, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia*. Tesina. Universidad de La Laguna (sin publicar).

González-Martín, A. S.; Camacho, M. (2004). What is First-Year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol 35 (1) pp. 73-89.

González-Martín, A. S.; Camacho, M. (2005). La integral impropia. Una ingeniería didáctica para su enseñanza. En Hitt, F. (ed. ) *Reflexiones sobre la enseñanza del Precálculo y el Cálculo.* ISBN: 970 703 213 pp.265-280. Morevallado Editores. México

Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) (2005) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.*

Springer. New York

Guin, D.; Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 3, 195-227.

Heid, M. K. (2002). How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computers Algebra in Mathematics Education.* 9 (2), 95-112.

Heugl, H. (1997). Experimental and Active Learning with *DERIVE*. En *ZDM*. 4 (4), 142-148.

Holton, D. (ed.) (2001) en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands

King, K., Hillel, J.; Artigue, M. (2001). Technology. A working group report, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 349-356.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in Mathematics courses. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D. ed), Kluwer Academic Publishers, pp. 127-135.

Mariotti, M. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 695-723

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. *Educational Communication and Technology.* New York University. 89-122.

Santos, M. (2000). The Use of representations as a Vehicle to Promote Students' Mathematical Thinking in Problem Solving. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 7 (3), 193-212.

Socas, M. (2001), *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna (sin publicar).

Stewart, J (1999): *Cálculo.* México: Thomson.

Trouche, L. (2002), Genèses instrumentales, aspects individuels et collectives. *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (Guin, D. y Trouche, L. eds), pp. 243-276. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Trouche, L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281-307

Trouche, L. (2005) An instrumental aproach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* New York: Springer.