

# El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas

Pedro Cobo Lozano

Departament de Matemàtiques, IES Pius Font i Quer  
pcobo@xtec.net

Josep María Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals,  
Universitat Autònoma de Barcelona  
josepmaria.Fortuny@uab.es

## *Resumen*

*En esta comunicación presentamos el sistema tutorial inteligente, al que hemos llamado AGENTGEOM, y analizamos cómo interactúa con un alumno en la resolución de un problema que compara áreas de superficies planas. En esta interacción, el alumno llega a apropiarse de habilidades estratégicas y argumentativas en la resolución de problemas. Observaremos que estas apropiaciones son consecuencia de las formas de comunicación alumno-AGENTGEOM, en las que se combinan construcciones gráficas y sentencias escritas que siguen las normas del lenguaje matemático, y la emisión de mensajes escritos en lenguaje natural.*

## **Introducción**

Las competencias en matemáticas se consideran parte esencial de la preparación para la vida ciudadana de los estudiantes. El enfoque pedagógico por competencias es muy prometedor, aunque aún no es prioritario en nuestro país, quizás esto explica según (Recio y Rico, 2004) los bajos resultados obtenidos del estudio PISA 2003 en España. El modelo de aprendizaje por competencias comparado con el enfoque por objetivos, permite evitar la compartimentación artificial de los aprendizajes, como cuando a un problema de matemáticas se le atribuye la etiqueta de "algebraico", mientras que el alumno ejerce algo más complejo (v-g. una modelización con dependencia entre variables e incertidumbre en un razonamiento cuantitativo), o cuando se cree que en clase de matemáticas sólo es digno de interés el contenido propiamente matemático. El enfoque por competencias proporciona referencias adaptadas a todos los que quieran tener en cuenta la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar, en el aprendizaje de las matemáticas, los procesos comunicativos -estrategias compartidas con el uso de la lengua natural, del lenguaje matemático y de la argumentación-, el razonamiento, la abstracción, la resolución de

problemas, etc.

El desarrollo de estas competencias está asociado a una gran diversidad de alumnado, que se produce no sólo porque en una clase haya alumnos con deficiencias en sus conocimientos y actitudes, sino porque también los hay que tienen mucho más desarrolladas sus habilidades. Además, al profesor se le exige que atienda a los alumnos que tienen necesidades educativas específicas, a los que necesitan refuerzo personalizado fuera del aula, y por supuesto también al alumno recién llegado que tiene muchas más dificultades para seguir el discurso oral de las clases que la expresión escrita, visual e interactiva a través de la interficie de un dispositivo informático.

La problemática que presentamos plantea cómo ayudar al docente en su responsabilidad de atender la diversidad de casos cuando el enfoque pedagógico se centra en el desarrollo de las competencias de sus alumnos. La solución que proponemos, no porque creamos que sea única<sup>i</sup>, sino porque estamos en la búsqueda de una solución pragmática, pasa justamente por la utilización de las nuevas tecnologías. Los entornos *e-learning* y, en particular, el ordenador con conexión a Internet son herramientas privilegiadas si, detrás de la programación, hay un análisis serio y riguroso de las tareas pedagógicas y matemáticas a desarrollar, siendo el entorno el que sepa adaptarse a los conocimientos de cada alumno y no el alumno el que se tenga que adaptar al dispositivo informático.

Nuestro propósito es aprovechar y potenciar las ventajas de ese tipo de entornos para elaborar un *sistema tutorial inteligente*, al que llamamos *AGENTGEOM* (Agente de Geometría) que colabora con la tutorización humana, ayudando al alumno a mejorar sus competencias matemáticas. Cuando hablamos de las ventajas de los entornos *e-learning* pensamos en que su utilización: facilita las interacciones entre el profesor, los alumnos, la tarea,...; mejora la calidad de las interacciones profesor-alumno; incrementa el ritmo y mejora el estilo del aprendizaje de los alumnos; desarrolla el conocimiento y las habilidades de enseñanza del profesor; etc. (Richard y otros, 2005). Cuando nos referimos a las competencias matemáticas pensamos en la resolución de situaciones-problema, en el desarrollo del razonamiento matemático y en la utilización del lenguaje matemático en los procesos comunicativos que se dan en las situaciones que se plantean.

Un *sistema tutorial inteligente* ha de tener, desde nuestro punto de vista, tres características básicas:

Ha de ser *emergente* en el sentido que tenga una conducta que no pueda ser predicha desde una descripción centralizada y completa de las unidades que lo componen. Por tanto su comportamiento ha de ser autónomo y calificable como espontáneo. Por ejemplo, entre otros, en los aspectos que se refieren a la conversación *-ha de tener capacidades de interacción avanzadas, en nuestro caso, mediante mensajes escritos en tiempo real y ajustado al lenguaje del contexto en que se use -*. Para mantener este tipo de conversación ha de incorporar una base de conocimientos y un modelo de discurso que le permitan al mismo tiempo asociar ideas.

Ha de ser *personalizado*, es decir, ha de proporcionar al usuario actividades y ayudarle a realizarlas, y ha de ser capaz de evolucionar en el tratamiento de la realización de la tarea y adaptarse a las características cognitivas y sociales de cada alumno.

Ha de ser *abierto*, es decir, ha de poner menos énfasis en tipos de aprendizajes basados en elementos instructivos y más en aspectos constructivos en los que primen las interacciones no guiadas que permitan a los alumnos practicar y adquirir habilidades metacognitivas, asociadas con la efectividad de la exploración, tan importantes en los modelos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas.

Hemos construido el sistema tutorial inteligente *AGENTGEOM*, teniendo en cuenta esas características de emergencia, personalización y apertura, sobre una arquitectura web, a la que podemos acceder mediante un protocolo http<sup>ii</sup>. Además, este sistema tutorial no sólo se aprovecha de las ventajas de este tipo de entornos, sino que se beneficia de las competencias de su profesor, ya que el docente puede adaptar el estilo, el contenido o la naturaleza de los mensajes del tutor artificial. Por otra parte, nuestro

proyecto incluye una experimentación del sistema tutorial elaborado, en el sentido de que identificamos las interacciones *AGENTGEOM*-alumnado, y analizamos su influencia en el desarrollo de las competencias matemáticas del alumno. En esta ponencia mostramos el caso de uno de los diferentes alumnos que han participado en esta experimentación.

### Marco teórico

A pesar de la importancia que tiene el debate social en la construcción del conocimiento, reconocida desde las aproximaciones más tradicionales de la psicología (Festinger, 1957, 1989; Vygotsky, 1978; etc.) hasta las investigaciones más recientes, los entornos informáticos de aprendizaje humano para la enseñanza de la geometría todavía no tienen en cuenta la influencia del debate social simulado en el aprendizaje de las matemáticas (Richard y otros, 2004).

Por debate social simulado entendemos la discusión organizada y dirigida en la cual los interlocutores son los agentes pedagógicos virtuales. Así, contrariamente al debate social en la clase, en el que puede quedar diluida la responsabilidad del alumno en su aprendizaje, en el debate social simulado que pretendemos generar, el alumno ha de desempeñar el papel de actor principal, ya que la progresión en el debate dependerá sobre todo de las aportaciones temáticas que él haga a través de su interficie - dimensión temática del discurso- y de su iniciativa (o la del sistema tutorial, si es el caso) en la realización de tales aportaciones -dimensión interlocutiva- (Calsamiglia y otros, 1997; Cobo y Fortuny, 2000). La comunicación en el entorno del *AGENTGEOM* se produce a través del lenguaje escrito, lo que supone una modificación de la comunicación verbal presencial, pero da lugar a un aumento del valor comunicativo, de generación de conocimientos y, en general, de inteligencia colectiva (Levy, 1994).

Por su parte, el STI ha de reproducir un comportamiento humano competente para que pueda adaptar su enseñanza a las necesidades del aprendizaje de cada estudiante, y sus contribuciones al debate serán de tipo metacognitivo, que guíen el proceso de resolución que desarrolla el alumno, o cognitivas cuando el alumno las necesite.

Con la elaboración de STI, con las características descritas en los apartados anteriores, estamos superando el paradigma que consideraba al medio tecnológico sólo como elemento mediador entre los seres humanos y los objetivos de las actividades que llevan a cabo (Cole, 1996), para situarlo como un sistema cognitivo más. En realidad lo que tenemos es la interacción entre dos sistemas cognitivos: el agente humano y el que se encuentra en la máquina.

Consideramos que los conocimientos que el alumno, como ejemplo de agente humano, llega a construir dependen de sus conocimientos anteriores. Desde esta perspectiva constructivista, la construcción efectiva de conocimientos pertinentes se realiza por un cambio de concepción del alumno y de superación de los obstáculos en situaciones que reproducen las características del trabajo matemático (Richard y otros, 2004). Uno de los aspectos que más se resalta en las situaciones didácticas es el hecho de que *hacer* matemáticas es una actividad social. Según Brousseau (1998), el único medio de hacer matemáticas es buscar y resolver ciertos problemas específicos y ser capaz de generar nuevas preguntas sobre ellos. Para poder llegar a esto, se supone que la enseñanza no sólo ha de preocuparse de desarrollar las competencias de los alumnos, sino también su autonomía. Del análisis de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau nos interesa resaltar, por su relevancia en las interacciones del alumno con el STI en la resolución de una situación-problema, los tres tipos de situaciones que se pueden producir (Llinares, 1994): *situaciones de acción*, en las que los alumnos producen intentos de búsqueda de la solución que pueden generar nuevos conocimientos; *situaciones de formulación*, en las que los alumnos intercambian informaciones (comparten estrategias utilizadas, adelantan resultados,...) y, por tanto, el proceso comunicativo se constituye en un aspecto importante del proceso de aprender; y las *situaciones de validación*, en las que los alumnos ven la necesidad de justificar las afirmaciones que hacen. Se pretende que con el uso continuado de los STI, los alumnos vayan asumiendo la responsabilidad de validar que ahora delegan en el propio sistema tutorial (o en el profesor, en el libro de texto o en compañeros más competentes, en situaciones de enseñanza y

aprendizaje en el aula).

En cambio, el sistema cognitivo de la máquina depende de las opciones epistemológicas que hayan considerado los que la han programado. En este sentido, en los párrafos siguientes, resumimos los fundamentos teóricos en los que nos hemos basado para elaborar el sistema de mensajes que hemos implementado en el *AGENTGEOM*, y resaltamos la importancia de los sistemas de representación semiótica que se utilizan en la comunicación STI-alumno, y la forma en que el sistema puede controlarlos.

Para seleccionar el sistema de mensajes, hemos tomado como punto de partida los modelos de interacciones de Cobo y Fortuny (2000) y de Kieran (2001), y la noción de apropiación de Moschovich (2004). Las interacciones del primer modelo –“guiadas”, “alternativas”, “de relanzamiento” y “cooperativas”- son compatibles con la dialéctica de Lakatos (1984), en el sentido de que los alumnos pueden relacionar diferentes competencias como la formulación de una conjetura, el proceso de argumentación, la organización del conocimiento, etc. El segundo modelo de interacciones (Kieran, 2001) hace posible identificar, en un proceso de resolución entre pares de alumnos, si la producción cognitiva y heurística es del mismo orden, es decir, si los interlocutores razonan sobre los mismos objetos, contribuyen a la formulación o demostración de la misma conjetura, y si sus iniciativas o sus reacciones se separan del proceso argumentativo. Por otra parte, la apropiación es un concepto neovygotskiano que se ha utilizado para describir de qué forma el aprendizaje es mediado por la interacción con otros y de qué manera los alumnos aprenden cuando les guían y les enseñan (Newman y otros, 1989, Wells, 1999, y Moschovich, 2004). Esta perspectiva sociocultural que utilizamos considera dos aspectos de la apropiación: uno relacionado con lo que los alumnos se apropian y, el otro, cómo transforman activamente estas apropiaciones.

Hacemos la identificación y selección de los mensajes que implementamos en el *AGENTGEOM* para los problemas que consideramos a partir del espacio básico de la acción tutorial humana (Cobo, 2004). Ahora bien, este espacio de la acción tutorial humana lo obtenemos construyendo, en primer lugar, el espacio básico de cada problema (Cobo, 1998), que contiene todas las posibles formas de resolver el problema, identificadas por un resolutor experto, y todos los pasos posibles dentro de cada resolución, y, después, analizando -según los modelos teóricos antes descritos- las interacciones entre pares de alumnos cuando resuelven los problemas propuestos, para identificar las competencias comunicativas y cognitivas que los alumnos desarrollan durante los procesos de resolución.

Por otra parte, en una situación de aprendizaje la cuestión semiótica es a menudo subestimada por los matemáticos y por los informáticos. “Todo sistema de representación semiótica, se trate de signos figurales, de símbolos matemáticos o de palabras del lenguaje natural, tiene a la vez efectos productores y reductores en la representación del conocimiento. Es decir, si los signos movilizados permiten “ver” ciertas propiedades, a su vez, impiden también “ver” otras. Esta paradoja es determinante en la adquisición de conocimientos, sea a nivel de la comunicación, del tratamiento de las representaciones cognitivas y de la objetivización de las representaciones virtuales (por ejemplo, las que hay en la mente de un alumno)” (Richard y otros, 2004, p. 13).

Duval (1995) destaca la importancia de considerar sistemas de representación diferentes, ya que cada uno de ellos tiene propiedades específicas que limitan intrínsecamente sus posibilidades, y de coordinar su uso. Así, el debate social debe considerar la coordinación de varios sistemas de representación durante la progresión de un razonamiento o de una argumentación. En la interacción alumno-*AGENTGEOM* se complementan la utilización de signos figurales (expansión gráfica, Richard y otros, 2004) con la de símbolos algebraicos y con el lenguaje natural (expansión discursiva, Duval, 1995). En el *AGENTGEOM* el área gráfica facilita la utilización de la representación figurativa; el área deductiva posibilita la representación mediante símbolos algebraicos; y el lenguaje natural se potencia en los mensajes implementados en el sistema tutorial y en la posibilidad que tienen los alumnos de participar en foros de debate virtual durante o al final de los procesos de resolución.

En el debate social simulado, los agentes pedagógicos virtuales de los STI han de asegurar que los

símbolos que acepta el sistema tengan el mismo sentido para él y para el alumno (control semiótico); que el alumno trabaje en la misma situación-problema que se le ha propuesto (control situacional); y que los conceptos en juego se refieran efectivamente a los modelos pretendidos (control cognitivo).

### **Antecedentes del AGENTGEOM**

El *AGENTGEOM* tiene un antecedente lejano en el Cabri y otro más inmediato en el proyecto Baghera, desarrollado en el Laboratorio Leibniz de Grenoble (Laboratoire Leibniz, 1993) y dirigido por el investigador N. Balacheff.

Cabri es un software desarrollado por Vanda Luengo que utiliza la lógica geométrica para la construcción de figuras geométricas. Es útil para el análisis de las figuras representadas y ayuda al alumno en el uso del conocimiento geométrico. Facilita el arrastre de objetos en la pantalla del ordenador y, por tanto, la modificación continua del dibujo sobre la pantalla<sup>iii</sup>.

A diferencia del Cabri, el *AGENTGEOM* incorpora una descripción a priori de todos los procedimientos, que identifica un resolutor experto y que pueden conducir a resolver el problema propuesto.

El proyecto Baghera, como nuestro sistema tutorial, incorpora tres principios que consideramos básicos en la elaboración de entornos asistidos por ordenador. Por una parte, la colaboración entre agentes humanos y artificiales, que supera el paradigma de décadas anteriores en las que se consideraba al ordenador como máquina autónoma que concebía la enseñanza sólo como función instruccional (Balacheff, 2000). En segundo lugar, la concepción de “la educación como el resultado de un proceso complejo que emerge de las interacciones entre agentes que tienen habilidades diferentes y complementarias” (Webber y otros, 2002). Y, por último, ambos proyectos están concebidos como sistemas tutoriales multiagentes de diagnóstico que son capaces de identificar los conocimientos de los alumnos después de las interacciones de éstos con el sistema y, por tanto, han de ser capaces de adaptarse a sus características cognitivas y a la evolución de sus conocimientos matemáticos.

En cambio hay diferencias entre ambos proyectos, en concreto en dos aspectos que consideramos fundamentales y que hacen del nuestro una propuesta innovadora y pionera en la elaboración de entornos interactivos web de enseñanza y aprendizaje. Así, mientras Baghera es un entorno basado en la red para el aprendizaje de la demostración geométrica, fundamentado en los trabajos de Balacheff (1999) y Luengo (1999), y ése es el contenido básico de las propuestas de actividades que se hacen a los alumnos, el proyecto AgentGeom utiliza como objeto de estudio y como base de las propuestas de sus actividades, además del desarrollo del razonamiento matemático, todos los procesos implicados en la resolución de problemas, y los procesos comunicativos que conllevan, y tiene como fundamento las amplias investigaciones llevadas a cabo por los investigadores que formamos parte de él, relacionadas con las interacciones en la resolución de problemas en diferentes contextos (Cobo, y Fortuny, 2000; Fortuny, Murillo, y otros, 1999; Meavilla, y Fortuny, 1999; Rodríguez, 2003; Richard, 2004<sup>a</sup> y 2004<sup>b</sup>; y Cobo y otros, 2004).

Además, Baghera tiene un nivel de actuación muy limitado en lo que se refiere a la verificación en tiempo real de la realización de las actividades de los alumnos (Webber y otros, 2002), dejando tal verificación para cuando el alumno ha acabado su propuesta de demostración. Pero, de acuerdo con Bunt y Conati (2002): “Los entornos abiertos de aprendizaje podrían mejorarse proporcionando, en tiempo real, soporte a los procesos de exploración, adaptados a las necesidades individuales de cada estudiante”. Siguiendo este principio, hemos conseguido que el *AGENTGEOM* compruebe y verifique de forma instantánea todas las acciones realizadas por los alumnos, identificando el momento del proceso de resolución en el que se encuentra y mostrándole, siempre que el tutor humano lo considere oportuno o cuando el alumno lo solicite, mensajes o sugerencias que orienten su proceso y que le ayuden a que sea él mismo quien obtenga una solución del problema, siendo este tipo de ayudas las mínimas imprescindibles, como sugieren los diferentes modelos instructivos para la enseñanza de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985 y 1987; Callejo, 1994; O’Daffer, 1995; Stacey y Groves,

1999; etc.). Este sistema de ayuda diferenciado para cada alumno, en función de la evolución de su proceso de resolución, hecho de forma directa, en tiempo real y adaptado a sus necesidades cognitivas dará a nuestro aplicativo el carácter de emergente al que nos referíamos en la introducción de esta ponencia.

### Arquitectura del AGENTGEOM

El *AGENTGEOM* es un sistema tutorial artificial concebido como un sistema multiagente híbrido que combina interfícies, utilizadas por personas como usuarios del sistema (profesores y alumnos); con dos agentes artificiales -el agente tutor, que tiene una arquitectura principalmente reactiva, y el agente mediador, que recibe las entradas de las interfícies del alumno y del profesor-; y una base de datos, en la que se almacenan todas las entradas de los usuarios.

Las interfícies son todas las herramientas de las que disponen los usuarios para interactuar con los agentes mediador y tutor. En el caso del profesor, el *AGENTGEOM* dispone de herramientas de comunicación -diferentes pantallas- que hacen posible que el profesor cree problemas y los asigne a sus alumnos (Figura 1).

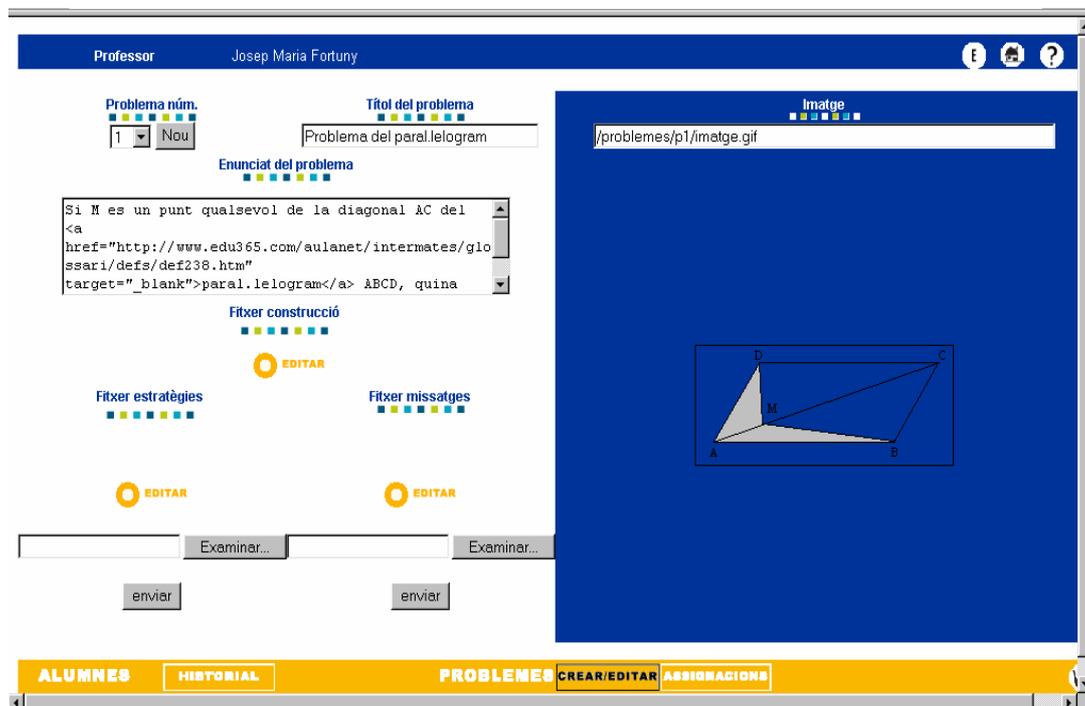


Figura 1. Pantalla del área de trabajo del profesor

La creación de problemas nuevos exige la elaboración de todo un contenido pedagógico alrededor de cada problema, que comporta la identificación de todas las estrategias que resuelvan el problema y los diferentes mensajes que el profesor quiera que se muestren al alumno cuando el agente tutor lo considere necesario.

La interfície del alumno le ofrece todas las herramientas para resolver el problema. Como se observa en la figura 2, el alumno dispone de un área de construcción gráfica (parte izquierda de la pantalla) y de un editor de deducciones (parte derecha). En el área de construcción gráfica, el alumno puede dibujar figuras utilizando los botones (primitivas de construcción) para dibujar puntos, líneas rectas, circunferencias, segmentos, paralelas, perpendiculares, definir la intersección de dos objetos, etc. Con el editor de deducciones, el alumno puede construir sentencias sobre los objetos gráficos que ha creado, y que el agente mediador validará o no.

El agente mediador recibe las entradas de las interfícies del profesor y de los alumnos, es decir,

procesa todas las acciones (gráficas y deductivas) del profesor cuando crea problemas nuevos y del alumno cuando resuelve el problema, y las almacena en la base de datos. Concretamente, por lo que se refiere a las acciones gráficas –cualquier acción que se realiza en el área gráfica-, el agente mediador recibe todas las primitivas de construcción, calcula todos los elementos nuevos derivados de las acciones, emite mensajes si hay errores en la construcción o en la identificación de los nuevos objetos gráficos, y, si el proceso acaba correctamente, muestra la figura que se ha dibujado en el área de construcción. Las acciones gráficas constan de una primitiva de construcción y de parámetros asociados, como por ejemplo el nombre que el alumno le da al objeto que crea o la posición que se elige para situarlo en el área gráfica, en el caso de un punto, etc. Las acciones gráficas conducen al agente mediador a mantener una representación interna de la figura que el alumno está construyendo. Esa representación interna está referida en todo momento al conocimiento sobre geometría métrica clásica necesario para resolver cualquier tipo de problemas geométricos, que hemos implementado en el *AGENTGEOM*.

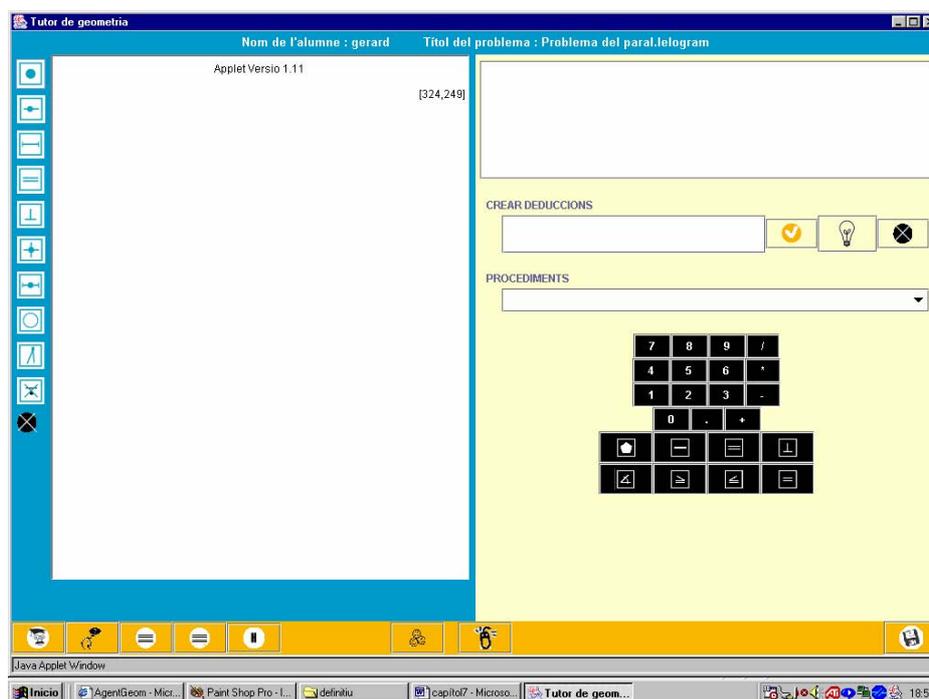


Figura 2. Pantalla del área de trabajo del alumno

Por lo que se refiere a las acciones deductivas (o sentencias) –acciones que se realizan en el editor de deducciones-, el agente mediador gestiona la construcción correcta de su sintaxis, mostrando mensajes de error si no están bien construidas; determina si la sentencia es verdadera o falsa, utilizando el modelo de gráfico al cual está referida siempre la sentencia; y muestra la validez o no de la deducción introducida.

El agente tutor tiene por objetivo ayudar directamente al alumno en la resolución del problema. Por eso contiene, en forma de árbol, cada una de las estrategias correspondientes a cada problema. También tiene diferentes listas de mensajes. Una lista para cada estrategia y una lista especial de cambio de estrategia. Así, el agente tutor tiene toda la información sobre estrategias, y sólo necesita un mecanismo para saber cuando y como mostrar los mensajes al alumno. Este mecanismo comienza cuando el agente mediador, que sigue la pista de todas las acciones que realiza el alumno, las pasa al agente tutor, que las identifica dentro de su árbol de estrategias.

A continuación describimos la forma de mostrar los mensajes que tiene el agente tutor.

El alumno entra en el *AGENTGEOM* y empieza a realizar acciones desde su interficie, sean deductivas o gráficas.

La primera acción que hace el alumno puede ser reconocida por el agente mediador, en el sentido que la considere correcta, o no reconocida –acción que el sistema considera incorrecta (de hecho es una acción objetivamente incorrecta, excepto en casos muy excepcionales)-. El agente mediador pasa la información al agente tutor.

Si la acción que hace el alumno es reconocida, entonces el agente tutor la considera como la última acción reconocida (a efectos de identificar la estrategia que sigue el alumno y, en consecuencia, elegir el mensaje adecuado) y actualiza a cero el contador de acciones no reconocidas, es decir, no considera las anteriores posibles acciones no reconocidas a efectos de emitir mensajes. Después, el agente tutor espera que el alumno realice una nueva acción.

Si, por el contrario, el agente mediador no reconoce la acción que realiza el alumno, entonces el contador de acciones incorrectas sube una unidad y espera una nueva acción. Si el contador de acciones incorrectas llega a valer 3, entonces el agente tutor selecciona un mensaje según el siguiente criterio:

Si no hay una última acción reconocida, entonces elige de manera aleatoria un mensaje de entre los disponibles (que no hayan salido antes) que orienten al alumno hacia una nueva estrategia general. Después de la elección, el agente tutor muestra este mensaje y espera una nueva acción del alumno.

Por el contrario, si hay una última acción reconocida, entonces el agente tutor selecciona el mensaje que sigue el orden de esta última acción reconocida (que dependerá del momento en el cual se encuentre la resolución y, por tanto, el desarrollo de mensajes para que la elección sea aleatoria o no). A continuación, el agente tutor muestra por la pantalla el mensaje elegido. Si el conjunto de mensajes relacionados con la última acción está vacío, entonces el sistema selecciona, de forma aleatoria, un nuevo mensaje entre el resto de los que oriente al alumno hacia una estrategia diferente de la que actualmente seguía, lo muestra en la pantalla y espera una nueva acción del alumno.

### **Análisis de las interacciones con el *AGENTGEOM*. El caso de Albert**

En este caso, describimos cómo, en la interacción con *AGENTGEOM* en la resolución de un problema geométrico, Albert se apropia de aspectos relacionados con las ideas de concebir lo que es una demostración matemática y como se redactan y validan las sentencias que se infieren desde la representación figural del enunciado del problema. Y también cómo Albert interioriza la necesidad de articular una secuencia de sentencias, derivándose unas de otras ya validadas o haciendo uso de una propiedad geométrica ya establecida. Además, describimos cómo llega a reaccionar a los mensajes del tutor, cambiando de estrategia en la resolución, y apreciando cuando la producción de una serie de sentencias, que le hace visible el sistema, es ya suficiente para ser considerada como solución.

- *Contenidos implicados en la resolución del problema del paralelogramo*

En los párrafos siguientes resumimos las características del problema que hemos implementado y del alumno que participa en la experimentación, así como la forma de recoger los datos que nos permitirán identificar y analizar las interacciones del alumno con el *AGENTGEOM* y los beneficios cognitivos que se deriven de estas interacciones.

Hemos seleccionado un problema sobre comparación de áreas de figuras planas -problema del paralelogramo (Figura 3)-, que tiene dos características que lo hacen adecuado para su implementación en el *AGENTGEOM*: es posible abordar su resolución de diferentes formas y se puede resolver combinando componentes gráficos y deductivos.

El enunciado del problema del paralelogramo es el siguiente:

Si  $M$  es un punto cualquiera de la diagonal  $AC$  del paralelogramo  $ABCD$ , ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos rallados de la figura?

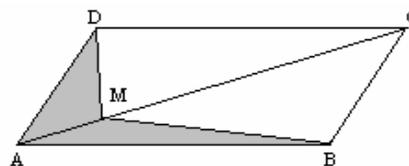


Figura 3. El problema del paralelogramo

A partir de la construcción de su espacio básico, hemos analizado en profundidad las características de este problema: contenidos conceptuales y procedimentales implicados en su resolución (Cobo, 1998), así como todas las acciones gráficas y deductivas que un alumno pueda hacer para llegar a solucionar el problema (Cobo, 2004). Resumiendo, podemos decir que hay cuatro formas de aproximarnos a la solución del problema del paralelogramo que son las que hemos implementado en el *AGENTGEOM*: mediante el trazado de rectas paralelas a los lados por el punto  $M$ , considerando casos particulares, límite y singulares, buscando un problema equivalente, y aplicando la fórmula del área del triángulo.

- *Características cognitivas del alumno que participa en la experimentación*

Diversos alumnos participan en la experimentación con el *AGENTGEOM*. Los datos que analizamos en esta ponencia corresponden al alumno que hemos llamado Albert.

Albert estudia primer curso de bachillerato (16 años) en un Instituto de Enseñanza Secundaria de Manresa. No ha seguido ningún aprendizaje específico sobre la resolución de problemas ni sobre la demostración en matemáticas. La enseñanza de la resolución de problemas siempre se le ha enfocado desde un punto de vista de la resolución de ejercicios o problemas de aplicación cuyos contenidos matemáticos acaban de ser explicados por el profesor. Albert y sus compañeros utilizan esporádicamente el ordenador en sus clases -siempre trabajando en colaboración con sus compañeros-, y realizando actividades estructuradas y guiadas, asociadas a los contenidos matemáticos que el profesor pretende enseñar.

Los contenidos matemáticos de los problemas de comparación de áreas se han tratado en los cursos anteriores al que hace actualmente Albert, a pesar de que no de forma explícita ni con la finalidad concreta de resolver problemas de este tipo. Albert, conserva conocimientos procedimentales relacionados con la aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas, y conocimientos suficientes sobre los conceptos asociados a las construcciones geométricas del área gráfica del *AGENTGEOM* y los que se utilizan en la escritura de las sentencias deductivas.

A todos los alumnos que participan en esta experimentación se les explica detalladamente el funcionamiento del *AGENTGEOM* y practican informalmente con él y, finalmente, se les propone que resuelvan el problema del paralelogramo. Los datos de las resoluciones que desarrollan los alumnos quedan registradas por el *AGENTGEOM* en el historial de cada uno de ellos. A partir de este historial y de las transcripciones de las grabaciones de todos los eventos de pantalla realizadas con el software Flash Cam<sup>iv</sup> obtenemos los protocolos escritos que utilizamos para analizar las interacciones alumno-*AGENTGEOM*. Así pues, estamos utilizando una recogida de información que Ángel Gutiérrez identifica en su ponencia como “registro automático de la actividad de los estudiantes”.

- *Aspectos a considerar en el análisis de las interacciones de Albert con el AGENTGEOM*

En esta sección resumimos las bases del análisis cualitativo de las interacciones que se producen entre el alumno y el *AGENTGEOM* durante el proceso de resolución, con la finalidad de identificar las apropiaciones que el alumno va realizando durante dichas interacciones.

El objetivo último para el alumno en la resolución del problema es ejercer el significado de sus

conocimientos para que permanezcan coherentes al final del proceso de resolución, al menos en la lógica de la situación propuesta. Entonces, el agente tutor puede orientar al alumno para que lo que vea, lo que diga y lo que haga sea coherente con esta lógica. Para el agente tutor, la lógica en cuestión está explícitamente dirigida por el espacio básico del problema, ya que los mensajes del agente tutor han sido concebidos en relación a este espacio. Se trata de focalizar la atención del alumno, de asegurar el significado de las proposiciones que produce, y de verificar si se encamina hacia el objetivo previsto. Así pues, la *influencia del medio social* y, concretamente, el uso del lenguaje gráfico-deductivo en relación a los mensajes del agente tutor será uno de los elementos (o capas) del análisis que realicemos. Por otra parte, teniendo en cuenta que la comunicación del alumno con el agente tutor se realiza a través de su interficie, es lógico considerar otras dos capas en el análisis de las interacciones: la utilización de las representaciones gráfica y algebraica, es decir, la utilización que el alumno hace de las áreas gráfica y deductiva, y la *naturaleza del discurso* del alumno en su interacción con el agente tutor, en concreto, el análisis de las aportaciones temáticas que hace y de la iniciativa en el proceso de resolución. Siempre teniendo presente que la comunicación del alumno con el *AGENTGEOM* o con otros alumnos en el forum de debate (que en este caso no consideramos) se realiza a través del lenguaje escrito.

Estas tres capas en el análisis de las interacciones están conectadas entre sí, es decir, la información contenida en una capa puede interpretar la información de otra. Por ejemplo, los contenidos de las acciones gráficas y deductivas es posible que se tengan que explicar en base a los contenidos de los mensajes del agente tutor, etc. A continuación precisamos un poco más el contenido de cada una de las capas mencionadas.

#### a) Utilización de las áreas gráfica y deductiva

Para ser capaz de comunicarse con la interficie, el alumno crea proposiciones gráficas (carga la figura del enunciado, crea objetos, que pueden ser puntos, segmentos, paralelas, perpendiculares, intersección..., borra objetos, nombra objetos, etc.) y proposiciones deductivas (escribe deducciones, pide verificación de deducción, pide verificación del resultado final, borra deducciones, etc.), a través de los botones correspondientes. El sistema transforma las proposiciones gráficas de forma que pueden ser utilizadas como objetos para producir inferencias, de acuerdo con las normas de deducción establecidas. Por tanto, es necesario que los alumnos creen objetos gráficos para que puedan ser utilizados en sus proposiciones deductivas. Así pues, es fundamental para el progreso del proceso de resolución una utilización conjunta de ambas áreas de trabajo. Todas las acciones gráficas y deductivas, así como los mensajes del agente tutor quedan registradas en el historial del proceso de resolución del alumno. Esto facilita el análisis de la forma en que el alumno utiliza dichas áreas, así como la forma en que evoluciona esa utilización a lo largo del proceso de resolución.

#### b) La naturaleza del discurso

En esta capa nos interesa analizar los contenidos matemáticos que los alumnos introducen en el proceso de resolución – dimensión temática- y las iniciativas de los alumnos en sus intervenciones – dimensión interlocutiva - (Calsamiglia y Tusón, 1999; Cobo y Fortuny, 2000).

Cuando la intervención del alumno suponga un progreso cognitivo, ya sea con la introducción de procedimientos u otros contenidos matemáticos (gráficos o deductivos), demandas de información y de validación al agente tutor... diremos que dicha intervención es de tipo progresivo. Por el contrario, si la intervención del alumno no introduce ninguna información nueva (borrado de objetos, acciones gráficas o deductivas no acabadas, acciones realizadas previamente, etc) diremos que es de tipo circular o repetitiva.

En un contexto en el que el alumno es el protagonista principal, tiene especial relevancia el estudio de quién lleva la iniciativa durante el proceso de resolución. Estudiar esa iniciativa supone considerar el carácter proactivo o reactivo de las intervenciones de los alumnos y su influencia en el proceso de resolución. Una acción es:

- *Proactiva* si es de iniciativa propia del alumno y no espera ninguna información del agente tutor que no sea una respuesta de validación a una acción deductiva o una respuesta gráfica a una acción gráfica, excepto cuando la demanda sea de un mensaje.
- *Reactiva* si es la reacción del alumno a una sugerencia (mensaje) del agente tutor en la línea marcada por ese mensaje.

### c) La influencia del medio social

Estudiamos la influencia que los mensajes del agente tutor han tenido en el alumno, por ejemplo, si ha éste ha seguido las sugerencias del agente tutor y si se ha beneficiado de ese seguimiento, o si, por el contrario, no ha hecho caso y ha seguido sus propias iniciativas. Esta influencia ha sido examinada teniendo en cuenta los tres niveles de mensajes (o sugerencias) que hemos implementado en el agente tutor:

Nivel 0: Mensajes generales que no incluyen contenidos matemáticos implicados en la resolución del problema. Informaciones que los alumnos pueden encontrar directamente en su área de trabajo (reconocimientos de objetos, elemento de la ventana de procedimientos...).

Nivel 1: Mensajes que sólo contienen el nombre de los contenidos matemáticos involucrados.

Nivel 2: Mensajes que contienen informaciones sobre esos contenidos matemáticos.

### **Análisis del proceso de resolución del problema del paralelogramo desarrollado por Albert**

En los siguientes párrafos analizamos el proceso de resolución de Albert cuando interactúa con el *AGENTGEOM* para resolver el problema del paralelogramo. Para analizar el proceso de resolución lo dividimos en episodios sociales, que son intervalos de tiempo durante los cuales el alumno culmina una fase del proceso de resolución que ha seguido, en el sentido de Schoenfeld (1985), o interpreta el enunciado o se beneficia de una mejor comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados en la resolución del problema gracias a las interacciones que se producen; o el alumno implementa una aproximación que le conduce directamente a la solución (Cobo y Fortuny, 2000).

En el proceso de resolución de Albert hemos identificado tres episodios sociales, que hemos nombrado, teniendo en cuenta la finalidad de las acciones del alumno, de la forma: “establecimiento de una conjetura”, “trazado de rectas perpendiculares” y “trazado de rectas paralelas para justificar la conjetura”.

#### a) *El establecimiento de una conjetura*

Inmediatamente después de leer el enunciado del problema, de cargar en la pantalla gráfica la figura adjunta a dicho enunciado, Albert empieza utilizando el editor de deducciones para escribir la conjetura (acciones 5 y 6) de que las áreas de los dos triángulos que se pretende comparar son iguales.

5. Albert: Deducción:  $area\ dam = area\ amb$

6. Agente mediador:  $área\ dab = área\ amb: cierta$

El agente mediador no sólo le ha permitido establecer esta conjetura, sino que se la ha validado. Albert duda si introducir esa sentencia como deducción final. No lo hace porque sabe, por las experimentaciones previas que ha tenido con el *AGENTGEOM*, que el agente tutor se la validará pero le exigirá una argumentación. Estamos planteando a los estudiantes la demostración como forma de comprender por qué las conjeturas que se establecen son verdaderas, a la que hace referencia Ángel Gutiérrez en las conclusiones de su ponencia. Así, Albert es consciente que ha de iniciar una situación de validación en la que ha de ir justificando las aportaciones que haga hasta comprender por qué la

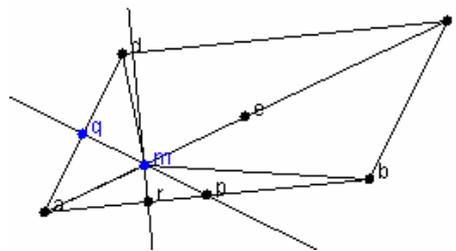
conjetura que establece es verdadera.

Albert ha hecho al inicio del proceso de resolución lo que casi ningún alumno hace, es decir, utilizar directamente el área deductiva del *AGENTGEOM*. Ha realizado una aportación temática –expresar la igualdad de las áreas de los triángulos que se comparan- decisiva para el desarrollo posterior del proceso de resolución. Parece que Albert ha sabido comprender las ventajas que le proporciona el sistema y se ha aprovechado de ellas. A partir de ahora ha de empezar a justificar la intuición que ha tenido, haciendo aportaciones que el sistema ha de validar.

b) *El trazado de rectas perpendiculares*

En el inicio de este episodio Albert tiene dudas y realiza acciones sin una intencionalidad aparentemente definida: vuelve a leer el enunciado, traza la otra diagonal  $db$  del paralelogramo, identifica el punto donde se cortan las diagonales, vuelve a borrar esa diagonal, señala líneas, crea el segmento  $am$ , etc. Albert ha iniciado la utilización del área gráfica. Sabe que sus sentencias deductivas han de utilizar objetos gráficos que estén construidos en dicha área, y, por tanto, no podrá construir su argumentación si no empieza a crear elementos auxiliares que complementen la figura inicial. La acción 16 marca el comienzo de una serie de acciones que parecen tener una finalidad concreta: la expresión de las áreas de los triángulos  $abm$  y  $amd$  (Figura 2) en función de sus bases y alturas.

16. Albert: *Traza la perpendicular a  $da$  por  $m$  con nombre  $pm$*



**Figura 1.**

Albert ha empezado a trazar perpendiculares (acción 16). Eso pone en alerta al *agente tutor* sobre la posibilidad de que trace las alturas de los triángulos, pero las acciones 16, 17 y 18, en las que Albert traza la perpendicular  $pm$  al lado  $da$  e identifica sus intersecciones con los lados  $da$  y  $ba$ , no están en ninguna de las estrategias que resuelven el problema. Por eso, el *agente tutor* responde a esas acciones enviando un mensaje de nivel 1 (acción 19)

17. Albert: *Crea intersección de la línea  $pm$  con  $ab$  de nombre  $p$*

18. Albert: *Crea intersección de la línea  $pm$  con  $da$  de nombre  $q$*

19. *Agente tutor: "Trata de comparar las alturas de los triángulos  $ABM$  y  $AMD$ "*

La comunicación entre Albert y el *agente tutor* empieza a producirse. Por el contenido del mensaje, Albert piensa que está en el buen camino, pero en realidad no ha sabido interpretar esta comunicación. El hecho de que el *agente tutor* haya respondido con un mensaje ha de interpretarse como que las acciones no siguen ninguna estrategia que lleve a la solución del problema. Albert continúa con su idea inicial de trazar las alturas correspondientes a los lados  $da$  y  $ba$ , para, como dice el mensaje, poder compararlas.

En las interacciones profesor-alumno, cada uno de los interlocutores, sobre todo si trabajan juntos con frecuencia, saben interpretar las formas de comunicación verbales o no verbales. Ahora el *agente tutor* ha respondido con un mensaje a las acciones gráficas de Albert, y éste no ha sabido interpretar, no su

contenido, sino la presencia del mensaje. Posiblemente los alumnos y el *AGENTGEOM* necesiten un periodo mayor de adaptación mutua para acabar de comprender sus procesos comunicativos.

La persistencia de Albert en el desarrollo de la estrategia que ha elegido, hace que el *agente tutor* le envíe otro mensaje (acción 25), ahora de nivel 2 y de cambio de estrategia: “Podrías pensar alguna forma de descomponer el paralelogramo en triángulos, por ejemplo, trazando paralelas que pasen por *M*”. Este mensaje es mucho más concreto y aporta una información matemática considerable aunque no decisiva, como hemos tenido oportunidad de comprobar con otros alumnos. Al final de este episodio, Albert cumple su objetivo de construir las alturas sobre los lados *ba* y *da* de los triángulos *abm* y *amd* para llegar a compararlas (acciones 29 y 31)

29. Albert: Deducción: línea *qm* = línea *mr*

30. Agente mediador: línea *qm* = línea *mr*: falsa

31 Albert: Deducción: línea *qm* = línea *mr*\*2

32. Agente mediador: línea *qm* = línea *mr*\*2: falsa

El *agente mediador* no valida ninguno de los dos intentos de comparación de Albert, y éste empieza a pensar en un cambio de estrategia.

Resumiendo este episodio podemos decir que Albert ha insistido en desarrollar la estrategia que ha elegido hasta el final, animado por la interpretación que hace del primer mensaje que le envía el *agente tutor*. Además, sus acciones son proactivas y generan elementos gráficos auxiliares – trazado de las alturas de los triángulos- para su aplicación en las sentencias deductivas, que no han sido validadas por el sistema. Además, Albert no ha atendido la sugerencia que el *agente tutor* le ha enviado en su segundo mensaje.

### c) El trazado de rectas paralelas

El *agente tutor* sabe que Albert no ha tenido en cuenta su último mensaje (acción 25). No sólo no ha hecho ninguna acción gráfica o deductiva en la dirección que le marca el mensaje sino que las tres últimas acciones no han sido reconocidas por el *agente tutor* (acción 26, en la que traza el segmento *mr*, la 29 y la 31). En estas circunstancias el *agente tutor* puede repetir el mismo mensaje. Es lo que hace en la acción 32, envía a Albert la sugerencia de que descomponga el paralelogramo en triángulos, trazando paralelas que pasen por *M*.

A partir de este momento se inicia un nuevo episodio del que resaltamos dos fases claramente diferenciadas en el desarrollo de la estrategia que marca el trazado de rectas paralelas a los lados del paralelogramo. En la primera fase, que abarca casi 11 minutos, la respuesta de Albert al mensaje emitido por el *agente tutor* es inmediata, posiblemente porque se encuentra en una situación de bloqueo. Sus acciones, que son claramente reactivas a ese mensaje, puesto que mira varias veces la ventana del tutor para ver si sigue correctamente sus indicaciones, son todas de naturaleza gráfica: trazado de rectas paralelas a los lados del paralelogramo, intersección de dichas rectas con todos los lados e identificación de todos los segmentos posibles de la figura que resulta. Son continuos los diálogos con el *agente mediador*, que rechaza la nomenclatura que Albert asigna a los objetos que va creando. Durante toda esta fase del proceso de resolución Albert se ha olvidado de utilizar el área deductiva. Al final, parece que vuelve a estar bloqueado. Este bloqueo lo manifiesta obsesionándose en crear nuevos segmentos e líneas, algunas de ellas no reconocidas por el *agente tutor*, que acaba enviándole un nuevo mensaje: “Identifica los triángulos nuevos que se han formado”.

Este mensaje es una insinuación al alumno para que continúe con la estrategia que ha iniciado, y es el inicio de la segunda fase de este episodio que conducirá a Albert a la justificación de su conjetura. En el área gráfica no se pueden identificar triángulos, puesto que el *agente mediador* los crea

automáticamente cuando el alumno crea el segmento que cierra dicho triángulo. Albert interpreta correctamente el mensaje y reacciona, tras un par de acciones gráficas de intersección de líneas, empezando de nuevo a crear sentencias deductivas, intercaladas con algunas acciones gráficas que completan la figura que había hecho en la fase anterior. Las sentencias deductivas comparan áreas de paralelogramos, de triángulos, y de sumas de áreas de triángulos que se han formado con el trazado de las paralelas y otras líneas auxiliares. Todas son correctas y, por tanto, validadas por el *agente mediador*, aunque muchas de ellas no son sentencias que contribuyan a justificar su conjetura. Al final, Albert introduce la sentencia que da el resultado final y el *agente mediador* se la da por justificada con un 35 % de acciones reconocidas. El *AGENTGEOM* da por buena una argumentación cuando el alumno supera el 30% de las acciones gráficas o deductivas que desarrollan la estrategia que ha seguido (porcentaje fácilmente modificable por el profesor), que son las acciones reconocidas para esa estrategia, y sabe diferenciar entre todas las acciones validadas, las que contribuyen a justificar la conjetura que ha establecido de las, aún siendo correctas, no contribuyen a esa justificación.

Resumiendo, podemos decir que en este episodio las aportaciones temáticas de Albert han sido dirigidas por los mensajes del *agente tutor* (acciones reactivas), y, por tanto, podemos considerar que la interacción entre Albert y el *AGENTGEOM* ha sido guiada por éste. Esta dirección ha conducido a Albert a realizar, primero, sólo acciones gráficas, y, después, a combinar las acciones gráficas y las deductivas para desarrollar su proceso argumentativo.

### Conclusiones generales

Con esta experiencia hemos puesto de manifiesto que el *AGENTGEOM* puede ser una herramienta auxiliar del profesor, que le puede ayudar en sus necesidades de atender a la diversificación de alumnos con la que se encuentra cada día. A ello contribuye la capacidad que tiene el profesor, a través del *AGENTGEOM*, de adaptar los problemas y los mensajes a las características cognitivas de cada uno de sus alumnos.

El *AGENTGEOM* colabora, creando las condiciones necesarias de manera casi autónoma, en el desarrollo de las competencias de los alumnos, relacionadas con los procesos de resolución de problemas, con el desarrollo del razonamiento geométrico, y con la utilización del lenguaje matemático en los procesos comunicativos. Para ello, hemos diseñado el *AGENTGEOM* de forma que tiene dos áreas -gráfica y deductiva-, cuya utilización conjunta permite a los alumnos crear objetos matemáticos genéricos, es decir, desvinculados de las medidas concretas de sus elementos, para utilizarlos en las sentencias deductivas, que han de ser escritas siguiendo las normas propias del lenguaje matemático. Así pues, los alumnos desarrollan su capacidad de abstracción y se apropian de la idea de demostración matemática, gracias a la desvinculación de los objetos gráficos de sus medidas concretas, a la construcción de las sentencias deductivas tomando como referentes dichos objetos, y a la necesidad, que impone el *AGENTGEOM*, de no dar por válida una argumentación hasta que no haya habido un número mínimo de acciones reconocidas.

Además, el *AGENTGEOM* contribuye al avance en el proceso de resolución del problema haciendo sugerencias que orientan al alumno, pero proporcionándole, en cada momento, sólo la información estrictamente necesaria, de forma que sea el propio alumno el que resuelva realmente el problema.

### Referencias

- Balacheff N. (1999). Apprendre la preuve. En Salattin, J. Szczecniarz, J.J. (eds.). *Le concept de preuve à la lumière de l'Intelligence Artificielle*, pp. 197-236. Paris: PUF.
- Balacheff N. (2000). Teaching, an emergent property of eLearning environments. In *Proceedings of the International Conference on Intelligent Tutoring Systems 2000*, Nice. Retrieved at <http://www-didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/IST2000.html>.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactique'*.Grenoble: La Pensée Sauvage
- Bunt A and Conati C. (2002). Assessing Effective Exploration in Open Learning Environments Using Bayesian Networks. In *Proceedings of the International Conference on Intelligent Tutoring*

*Systems 2002*, Biarritz. Retrieved at <http://www.cs.ubc.ca/%7Eeconati/my-papers/its2002BuntConati.pdf>.

- Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea S. A.
- Calsamiglia y otros (1997). *La parla com a espectacle: una anàlisi de "La vida en un xip"*. Publicacions de Universitat de Barcelona.
- Cobo, P. (1998). [Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos \(16-17\) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos](#). Tesis doctoral inédita. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Cobo, P. (2004). *Disseny d'agents pedagògics intel·ligents per millorar les competències estratègiques de l'alumnat en la resolució de problemes de matemàtiques*. Memoria inédita de la llicència de estudios concedida por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (DOGC, núm. 3926 de 16-7-2003).
- Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140.
- Cobo, P., Fortuny, J. M., Puertas, E., y Richard, P. (2005). *AGENTGEOM: a multiagent System for Pedagogical Support in a Geometric Proof Problem*. (manuscrito sometido a publicación en *Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning*).
- Cole, M. (1996). *Cultural Psychology. A one and future discipline*. Harvard University Press.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages Intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Festinger, L. (1957). *A Theory of Cognitive Dissonance*. Stanford University Press.
- Festinger, L. (1989). The arousal and reduction of dissonance in social contexts. In Schachter, S. et Gazzaniga, M. (Eds.) *Extending Psychological Frontiers: Selected Works on Leon Festinger*. New York: Russell Sage Foundation, 238-257.
- Fortuny J.M. y Murillo, J. (1999). Un modelo de utilización de una red electrónica como soporte instruccional en la enseñanza de la geometría en la E.S.O. *Rev de educación*. V. 1.
- Kieran, C. (2001). The Mathematical Discourse of 13-year-old Partnered Problem Solving and Its Relation to the Mathematics that Emerges. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140.
- Laboratoire Leibniz (2003),. Baghera Assessment Project: Designing an hybrid and emergent educational society'. In Soury-Lavergne S. (ed.), *Rapport pour la commission européenne, Programme IST, Les Cahiers du Laboratoire Leibniz n° 81*, Grenoble.
- Lakatos, I. (1984). *'Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique'*. Hermann. Paris.
- Levy, P. (1994). *L'intelligence collective. Pour une anthropologie du cyberspace*. París: La Découverte.
- Llinares, S. (1994). "La enseñanza de las matemáticas . Perspectivas tareas y organización de la actividad". En *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*. Ediciones Rialp S. A. Madrid.
- Luengo, V. (1999). *A semi-empirical Agent for Learning Mathematical Prof.* Artificial Intelligence in Education . SP.Lajoie and M. Vivet (eds.). IOS Press.
- Meavilla, V. y Fortuny, J. M. (1999). Interacciones verbales y enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Núm. 21. 81-104.
- Moschkovich, J. (2004). 'Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor'. *Educational Studies in Mathematics* 55: 49-80.

- Newman, D., Griffin, P. and Cole, M. (1989). *The Construction Zone: Working for Cognitive Change in School*, Cambridge University Press, Cambridge.
- O'Daffer, P. (1995). *Problem solving: Tips for Teachers*. NCTM, Reston.
- Recio, T. y Rico, L. (2005). *El informe PISA y las matemáticas*. El País, 24-01-2005.
- Richard, P. R. (2004a). *Modélisation du comportement en situation de validation*. Peter Lang, Berne
- Richard, P. R. (2004b). 'L'inférence Figureurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique'. *Educational Studies in Mathematics*. In press.
- Richard, P. R., Aïmeur, E., Fortuny, J. M., Gravier, S., Caron, F. (2004). *Vérification de l'extension de modèles théoriques à un système tutoriel intelligent pour l'apprentissage interactif de la géométrie à l'école secondaire*. Université de Montréal.
- Rodríguez, R. (2003). [L'aprenentatge de les matemàtiques com a participació en una pràctica d'una comunitat virtual](#). Tesis doctoral inédita.
- Schoenfeld, A. H. (1985) *'Mathematical problem solving'*, Academic press. Orlando.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition?. En A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdal, NJ: Lawrence Erlbaum, 189-215.
- Stacey, K. y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: Estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático*. Narcea, S. A. Ediciones. Madrid.
- Webber, C., Bergia, L., Pesty, S., Balacheff, N. (2002). 'The Baghera project: a multi-agent architecture for human learning'. In *Proceedings of the Workshop Multi-Agent Architectures for Distributed Learning Environments (AIED2001)*, 12-17, San Antonio.
- Vygotsky, L.S. (1978), 'Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes', in M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner and E. Souberman (eds.), Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Wells, G. (1999). *'Dialogic Inquiry: Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education'*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

<sup>i</sup> Véase la comunicación ponencia de Olimpia Figuras sobre la utilización de las tecnologías de la información y de la comunicación.

<sup>ii</sup> <http://blues.uab.es/~ipdm4/Agenta.htm>

<sup>iii</sup> En su ponencia, Ángel Gutiérrez profundiza sobre las finalidades que pueden perseguir los estudiantes cuando realizan acciones de arrastre.

<sup>iv</sup> <http://www.nexusconcepts.com/flashcam/>