

# COMPRENSIÓN DE LOS ALGORITMOS DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

M.<sup>a</sup> JESÚS SALINAS PORTUGAL

## RESUMEN

Partiendo de la creencia de que las matemáticas escolares deben formar parte del componente del conocimiento sobre las matemáticas del futuro maestro, se hizo un estudio sobre dos campos: sistema de numeración decimal y algoritmos usuales de las operaciones aritméticas.

En esta comunicación nos centraremos solamente en el campo correspondiente a los algoritmos. Presentaremos los resultados generales y un análisis de las respuestas de 82 protocolos de una muestra de 467 sujetos correspondiente al plan de estudios de 1971.

## INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos forma parte de nuestra tesis doctoral. Uno de los objetivos de dicha tesis es poner de manifiesto errores conceptuales y lagunas de conocimiento de los alumnos que finalizan magisterio, referidas al sistema de numeración decimal y algoritmos usuales de las operaciones aritméticas. En esta comunicación nos centraremos solamente en la segunda parte: algoritmos usuales de las operaciones aritméticas.

Autores como Llinares (1991, 1993) o Bromme y Brophy (1986) están de acuerdo en que el profesor de Primaria posea una profunda comprensión de las matemáticas escolares. En Carrillo y Climent (1999) se recogen una serie de reflexiones sobre los modelos de formación de maestros, estando las matemáticas escolares presentes en todas las propuestas.

Diríamos con Llinares (1991: 12) que el conocimiento con el que llegan los estudiantes para maestros sobre las nociones escolares es parcelado, desconectado entre sí e incluso algunas veces con errores, extremadamente algorítmico y centrado en el manejo de símbolos.

En nuestro estudio, la mayor parte de los errores que detectamos en los futuros maestros pueden tener su origen en el momento de su aprendizaje institucionalizado (comienzo de la enseñanza Primaria) que es (Kamii, 1992; Verschaffel y De Corte, 1996; Lerner y Sadovsky, 1994; etc.): prematuro, en el sentido de que la capacidad intelectual del alumno aún no está suficientemente desarrollada para adquirir tales conceptos; inadecuado, aún hoy, y a pesar de las investigaciones realizadas en este campo, no hay consenso sobre las metodologías más apropiadas. Por otra parte, estos contenidos no se tratan en los currícula de matemáticas a partir del quinto año de Primaria; pero serán utilizados en la vida diaria, lo cual puede llevar a la persistencia de errores adquiridos, como señala Brouseau (1983; 173-174) [los errores] son persistentes y se manifiestan largo tiempo aún después de que el sujeto haya rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente.

## PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

La población objeto de nuestra investigación comprendía los alumnos de tercer curso de magisterio (plan 1971) que realizaban sus estudios en las tres universidades gallegas en estos centros: Santiago y Lugo, de la Universidad de Santiago; A Coruña de la Universidad de A Coruña; Ourense y Pontevedra. La primera fase del estudio empírico se realizó sobre una muestra de 467 sujetos de las cinco escuelas señaladas

Para nuestro estudio se construyó una prueba de 23 ítems, de los cuales ocho se refieren a los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas, objetivo de la investigación que presentamos en este trabajo.

Hemos analizado las respuestas de 82 protocolos de la muestra total. Los objetivos que nos proponíamos con dicho análisis fueron dos: el primero, determinar los criterios de corrección, y el segundo, hacer un estudio de las respuestas consideradas erróneas. El centrarnos en esta segunda parte de la prueba se debió a que los ítems que la componen, aunque de respuesta breve, ésta no es simple; nos aportan información sobre razonamiento, capacidad de expresión, utilización de lenguaje matemático, tópicos, etc. Por el diseño de la investigación no se pudo realizar entrevistas, por lo que creemos que este análisis puede, en parte, suplir esta carencia.

Los 82 protocolos corresponden a la especialidad de Ciencias Humanas de las cinco Escuelas señaladas antes y a la especialidad de Lengua Española e Idioma Moderno de la Escuela de Santiago. El elegir la especialidad de Ciencias Humanas se debió a que, según nuestras hipótesis, sería la que más dificultades tendría en las respuestas. Con el análisis del grupo de lengua Española e idioma Moderno hemos comprobado que las respuestas correspondían a la clasificación hecha.

Los ítems analizados se distribuyen de la siguiente forma: 16 y 17 corresponden a la suma; 18 y 19 a la resta; 20 y 21 a la multiplicación; 22 y 23 a la división.

RESULTADOS GENERALES CORRESPONDIENTES A LOS ALGORITMOS

Exponemos a continuación los ocho ítems referidos a los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas.

Ítem 16:

$$\begin{array}{r} 379 \\ + 124 \\ \hline 503 \end{array}$$

Hacemos la suma anterior, de la siguiente forma:

$9 + 4 = 13$ , (escribo 3), llevo 1

$7 + 2 = 9$ , (a):  $9 + 1$  que llevo = 10 (escribo 0), llevo 1

$3 + 1 = 4$ , (b):  $4 + 1$  que llevo = 5

¿Qué significan los unos en «negrita» de (a) y (b)?

Ítem 17:

En el ejercicio anterior, ¿por qué sumo el uno en «negrita» en (a) y (b)?

Ítem 18:

$$\begin{array}{r} 462 \\ - 37 \\ \hline 425 \end{array}$$

Restamos así:

Del 7 al 12 van 5 y llevo 1

(a):  $3 + 1 = 4$ , del 4 al 6 van 2

¿Por qué digo 12 si sólo hay un 2?

Ítem 19:

En el ejercicio 19, ¿por qué sumo 1 en (a)?

Ítem 20:

Al realizar el producto:

$$\begin{array}{r} 327 \\ \times 35 \\ \hline 1635 \\ \underline{981} \\ 11445 \end{array}$$

*¿Por qué colocamos el 1 de la segunda fila debajo del 3 de la primera?*

Ítem 21:

*En el ejercicio anterior, ¿podías especificar la propiedad que se utiliza al colocar la segunda fila del producto un lugar avanzado hacia la izquierda?*

Ítem 22:

$$\begin{array}{r} 368 \quad | \quad 7 \\ 18 \quad 52 \\ 4 \end{array}$$

*Decimos:*

*3 entre 7 no cabe, bajo el 6*

*36 entre 7 a 5 (coloco el 5)*

*5x7 = 35, al 36 van 1, etc.*

*¿Por qué empiezo por el 3 y no por el 8 como sucede en las otras operaciones?*

Ítem 23:

*En el ejercicio 22, ¿qué significa 5 en relación a 36?*

## A) RESULTADOS DESCRIPTIVOS

Mostramos en la tabla 1 los resultados generales correspondientes a los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas.

Tabla 1. *Resultados generales correspondientes a los algoritmos*

<i>N</i>	<i>PUNTUACIONES</i>	<i>MEDIA</i>	<i>DESVIACIÓN TÍPICA</i>
467	[0, 8]	1,0236	1,319

Vemos en la siguiente tabla los resultados de cada ítem especificando en cada uno de ellos los aciertos, los fallos y las respuestas en blanco.

Tabla 2. Resultados de cada uno de los ítems referidos a algoritmos

Ítems	N = 467					
	Aciertos		Fallos		Blanco	
	fa	%	fa	%	fa	%
16	95	20,3	329	70,4	43	9,2
17	92	19,7	285	61,0	90	19,3
18	23	4,9	396	84,8	48	10,3
19	12	2,6	350	74,9	05	22,5
20	169	36,2	146	31,3	152	32,5
21	16	3,4	60	2,8	391	83,7
22	21	4,5	266	57,0	180	38,5
23	50	10,7	291	62,3	126	27,0

Como podemos ver en la tabla, en ningún ítem se llegó al 50% de aciertos. El ítem con más porcentaje de aciertos fue el ítem 20 en el que se obtuvo el 36,2% de aciertos. En el que menos porcentaje de aciertos se obtuvo fue el ítem 19 con tan solo el 2,6 por ciento de aciertos.

### B) ANÁLISIS DE RESPUESTAS

Por la extensión del trabajo, sólo presentaremos el análisis de los ítems correspondientes a la suma y a la resta.

Mostramos, para los cuatro ítems de la suma y de la resta, una tabla de frecuencias de los 82 protocolos analizados.

Tabla 3. Resultados del análisis de los ítems de la suma y de la resta

Ítem	N	Aciertos		Fallos		Blanco	
		fa	%	fa	%	fa	%
16	82	12	14,64	61	74,39	9	10,97
17	82	10	12,20	58	70,73	14	17,07
18	82	4	4,88	69	84,15	9	10,97
19	82	6	7,32	60	73,17	16	19,51

### B1) SUMA

#### Ítem 16:

Se aceptaron tres tipos de respuestas correctas:

- $C_1$ : (Esperada): (a) una decena, (b) una centena.
- $C_2$ : Si hace alusión a unidades de orden superior. Son respuestas del tipo: *Que en nuestro sistema de numeración, base 10, hemos conseguido una unidad de orden superior.*
- $C_3$ : La respuesta puede completarse con la del ítem 17. Un ejemplo de respuesta en esta categoría: ítem 16: *A las decenas*; ítem 17:  $9 + 4 = 13$ . *Estoy en el lugar de las unidades (primer lugar), escribo las unidades (3) y 1 le corresponde a las decenas (lo sumo en el lugar siguiente). El diez en segundo lugar son 0 decenas y 1 centena que sumo en el lugar de las centenas.* Aunque en el ítem 16 solo haya contestado parcialmente, podemos ver como en el ítem 17 razona sobre decenas y centenas.

Respuestas erróneas:

- $E_1$ : Aplicación mecánica del algoritmo. Son del tipo: *Al pasar de diez llevamos 1 que sumamos en el siguiente; son las que llevo de atrás.*
- $E_2$ : Consideran decenas todas las llevadas. Estas respuestas son de dos tipos:  
 $E_{2,1}$ : Especifican los dos casos: *En el primer caso una decena y en el segundo otra decena.*  
 $E_{2,2}$ : Responden simplemente: *Las decenas.*
- $E_3$ : Consideran cada columna como un número. Ejemplo: *El uno de la suma del 13.*

Podría pensarse que en la respuesta  $E_{2,2}$  significase, en el apartado (b) del ítem 16, decenas de decenas; se pudo comprobar que, en general, esto no es así, bien por otras respuestas, bien por la respuesta al ítem 17. Un ejemplo de ello podemos verlo en las siguientes respuestas al ítem 16: *El 1 de (a) 10 unidades, el 1 de (b) ... (a) el uno significa una decena (vale 10), (b) el uno significa una unidad (vale 1).*

Exponemos a continuación una tabla de frecuencias de las categorías establecidas para los aciertos y los fallos.

Tabla 4: Frecuencias de las categorías para el ítem 16

Ítem 16 (N = 82)					
Aciertos (n = 12)			Fallos (n = 61)		
Categorías	fa	%(12)	Categorías	fa	%(61)
$C_1$	8	66,68	$E_1$	26	42,62
$C_2$	2	16,66	$E_2$	25	40,98
$C_3$	2	16,66	$E_3$	10	16,40

Ítem 17:

Se aceptaron como respuestas correctas:

- $C_1$ : (Esperada): *El 1 de (a) son decenas que sumo con las decenas. El 1 de (b) son centenas que sumo con las centenas.* Para ilustrar este tipo de respuesta podemos ver el ejemplo del apartado  $C_3$  del ítem 16.
- $C_2$ : ( $C_1$  abreviado): *Sumamos decenas con decenas y centenas con centenas.*
- $C_3$ : *Hacen alusión a sumar unidades del mismo orden, sin decir cuales. Ejemplo: Para agrupar dicha unidad de orden mayor con otras de su categoría.*
- $C_4$ : *Puede ir incluida en la respuesta del ítem 16, para lo cual tienen que hacer referencia a este hecho, o pueden complementarse. Ejemplo: ítem 16: El primer 1 significa que llegué a las decenas y debo sumarlo con las decenas. El segundo 1 significa que llegué a las centenas y debo sumarlo con las centenas; ítem 17: Ese uno corresponde a la unidad siguiente. En este caso la respuesta del ítem 16 incluye a la del 17 y se dan las dos por válidas.*

Respuestas erróneas:

- $E_1$ : *Aplicación mecánica del algoritmo:*
  - $E_{1,1}$ : *Porque lo llevo de atrás. Es lo que sobra del anterior. El resultado es 10 y entonces sumo un 1.*
  - $E_{1,2}$ : *Porque si no se cuenta no estaría correcto. El uno es algo que se puede añadir o no dependiendo de si supera el diez la suma del primer número.*
- $E_2$ : *Consideran decenas todas las llevadas:*
  - $E_{2,1}$ : *Se suman las decenas con las decenas. Son las decenas que llevo.*
  - $E_{2,2}$ : *En las dos los llevaba, llevaba decenas. Solo se supera una decena, si el número fuese 20, le sumaría 2.*

Tabla 5. Frecuencia de las categorías para el ítem 17

Ítem 17 (N = 82)					
Aciertos (n = 10)			Fallos (n = 58)		
Categorías	fa	%(10)	Categorías	fa	%(58)
$C_1$	2	20	$E_1$	39	67,24
$C_2$	2	20			
$C_3$	3	30	$E_2$	19	32,76
$C_4$	3	30			

B2) RESTA

Ítem 18

Se aceptaron como correctas las respuestas:

- $C_1$ : (Esperada): *A la cifra de las unidades del número 362 le hemos añadido diez más.* En este tipo de respuesta caben formulaciones cuya aceptación

depende de la respuesta del ítem 19. De las 82 pruebas analizadas sólo una está en esta circunstancia.

- $C_2$ : *Le quitamos una decena al 6, una decena igual a diez unidades que añadimos a las dos que ya teníamos.* El incluir esta respuesta fue debido a que se detectó un pequeño porcentaje de alumnos que realizaban el algoritmo de esta forma y su aceptación dependía de la respuesta del ítem 19, que debería ser de uno de los siguientes tipos: a) en blanco; b) *Yo diría del 3 al 5*; c) *Según el ítem anterior, no puedo restar así.*

Un 16% de las pruebas analizadas dieron respuestas del tipo  $C_2$ , pero la respuesta al ítem 19 no correspondía a ninguno de los tres tipos señalados en este apartado, por lo que no se consideraron correctas. Ejemplo, ítem 18: *Para restar se toma una decena de las seis de 462*; ítem 19: *Porque ya es una decena que aumenta en la cantidad a la que se va restar.*

Respuestas erróneas:

- $E_1$ : Aplicación mecánica del algoritmo.  
 $E_{1,1}$ : *A 2 no le puedo quitar 7; no se puede restar un número mayor a otro menor.*  
 $E_{1,2}$ : Dan una explicación que corrobora la no comprensión. *Se tiene que restar el número siguiente a partir de la cantidad que me dan, es decir, después del siete la cifra siguiente que tiene un 2 es el 12; cuando el número de arriba es más pequeño que el de abajo se le pone un 1.*  
 $E_2$ : El 2 representa 12. *Las decenas no se colocan hasta el final; sólo se colocan las unidades.*  
 $E_3$ : Son erróneas en función de la respuesta al ítem 19.  
 $E_{3,1}$ : Referidas a sumar 10. Ítem 18: *El dos al ser menor se hace mayor sumándole 10*; ítem 19: *La llevo del número anterior.*  
 $E_{3,2}$ : Referidas a tomar una decena de las seis. Ítem 18: *Deshice una de las decenas que tenía en 10 unidades: 4 5 12*; ítem 19: *Porque así se aprende el algoritmo aunque se ve más claro si lo cambias en el minuendo: 462 = 45 (12).*  
 $E_4$ : Aceptación del mecanismo. *Me enseñaron así.*

Tabla 6: Frecuencias de las categorías para el ítem 18

Ítem 18 (N = 82)					
Aciertos (n = 8)			Fallos (n = 69)		
Categorías	fa	%(4)	Categorías	fa	%(69)
$C_1$	4	100	$E_1$	37	53,62
			$E_2$	11	15,94
$C_2$	0	0	$E_3$	13	18,84
			$E_4$	8	11,60



Ítem 19

Se aceptaron como correctas:

- $C_1$ : Hemos añadido diez unidades, igual a una decena, al minuendo por lo que hay que añadir una decena al sustraendo para que no varíe el resultado.
- $C_2$ : (Explicación matemática):  $a - b = (a + x) - (b + x)$ . En este caso,  $x = 10$  unidades = una decena.

En las pruebas analizadas no aparece ninguna respuesta de la clase  $C_2$ . Las respuestas correctas se aproximaron a  $C_1$  aunque su expresión no sea muy clara. Ejemplo: *Hay que restar las decenas que hipotéticamente se sumaron en la operación anterior.*

Respuestas erróneas:

- $E_1$ : Aplicación mecánica del algoritmo.
  - $E_{1,1}$ : *De doce llevamos una. Se lleva de la cifra anterior.*
  - $E_{1,2}$ : Explicación que corrobora la no comprensión: *Aunque se cuenta 12 está el 2 y se lleva 1.*
- $E_2$ : Hacen referencia a decenas. Parece indicar que siguen el mismo proceso que en la suma: *Al pasar de 10 se lleva una decena. Llevo 1 de la decena anterior; estamos en las decenas y esa es la columna de las decenas.*
- $E_3$ : Están mal en función del ítem 18. Fundamentalmente son del tipo: ítem 18: *Para restar tomamos una decena de las seis de 462; ítem 19: Sumo uno en el número que resta para quitar la decena que utilicé antes.*

Tabla 7. Frecuencias de las categorías para el ítem 19

Ítem 19 (N = 82)					
Aciertos (n = 6)			Fallos (n = 60)		
Categorías	fa	%(6)	Categorías	fa	%(60)
$C_1$	6	100	E1	32	53,34
$C_2$	0	0	E2	17	28,33
			E3	11	18,33

CONCLUSIONES

En cuanto a los resultados del análisis descriptivo de los ocho ítems referidos a los algoritmos, vemos que la media solo alcanza el 12,8 por ciento. Los ítems referidos a la suma y a la resta se complementan; no sucede lo mismo con los ítems

referidos a la multiplicación y división; es por ello que en el primer caso los porcentajes de acierto están equilibrados: más altos en la suma y muy bajos en la resta; por el contrario, en la multiplicación el ítem 20 es el de más alto porcentaje de aciertos y el 21 es uno de los más bajos. En la división también existe una notable diferencia entre el primer ítem (22) y el segundo (23).

En el análisis de respuestas destacamos el alto porcentaje de respuestas en los ocho ítems que incluimos en la categoría: errores derivados de la aplicación mecánica del algoritmo; en los cuatro ítems que exponemos, esta categoría comprende el porcentaje más alto de respuestas erróneas, abarca desde el 42,62% para el ítem 16 al 67,24% para el ítem 17. Así mismo, destacamos, en los ítems relativos al algoritmo de la suma (16 y 17) un grupo de respuestas en el que consideran decenas todas las llevadas. En la resta (ítems 18 y 19), un grupo de respuestas consideran que la cifra del minuendo inferior a la correspondiente del sustraendo representa diez unidades más.

En general, se encontraron muchos fallos de expresión, tanto a nivel lingüístico como matemático; por ejemplo, confusión de términos (cifras por números, órdenes de unidades, etc). Otros fallos pueden ser debidos a no interpretar correctamente la pregunta.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bromme, R. y Brophy, J. (1986). Teachers cognitive activities. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel. (99-139).
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, v. 4 (2), 165 - 198.
- Carrillo, J. y Climent, N. (Eds.). (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva.
- Kamil, C. (1992). *Reinventando la aritmética II*; Madrid. Visor.
- Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: Un problema didáctico, en Parra, C. y Sáiz, I. (Camps). *Didáctica de matemáticas*. Aportes y reflexiones. Paidós. Barcelona.
- Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.
- Llinares, S. (1993). Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje, en L. Montero y J. M. Vez (Eds.). *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela: Tórculo Ediciones. (377-407).
- Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En BISHOP y otros. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.