

SOBRE LA EQUILIBRACION Y LA INTRODUCCIÓN DE TAREAS DE TRANSFORMACIÓN MEDIANTE FLECHAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

PILAR RUESGA
JOAQUÍN GIMÉNEZ
MARIELA OROZCO

RESUMEN

En Educación Infantil se plantean muy pocas tareas de transformación en forma globalizada. Las seriaciones son situaciones de transformación uno a uno, exclusivamente de modo directo, aplicando reglas de transformación, mediante códigos simples. En la investigación desarrollada, se han realizado dos pruebas a 211 niños y niñas de 3,4 y 5 años, para establecer sus estrategias y dificultades frente a una tarea global de transformación de colores en modo directo e inverso. Los resultados obtenidos y los árboles de resolución de las tareas nos permiten observar que en 3 años hay un grupo de alumnos que resuelven ambos modos. Con todo, las diferencias significativas entre modos directo e inverso muestran que no se produce total equilibración en el sentido piagetiano. Al mismo tiempo reconocemos que de 4 a 5 años las diferencias son mínimas.

ABSTRACT

It's unusual to present transformation tasks for kindergarten students in a globalized presentation. The series are one to one transformations, usually evoked in a direct mode, in which students apply transformation rules by means of simple codes. In the research report, we studied the results about 2 tasks with 211 3 to 5 years old children in order to establish their strategies and difficulties face to a global colour transformation task in both direct and inverse modes. The obtained results and trees for strategies showed that unexpectedly an amount of 3 years old children solve both modes. Differences among modes are significant and we observed that piagetian equilibration didn't appear. There is no a significant differences among 4 to 5 years old groups.

1. PRESENTACIÓN Y BASE TEÓRICA

Toda situación problemática resoluble en el ámbito de las matemáticas precisa establecer relaciones por medio de analogías y metáforas. Esta necesidad se hace patente en ámbitos muy diferentes y constituye una característica que hace de la matemática una ciencia que trata de las relaciones (Alsina y otros 1992) que pueden establecerse entre variables y hechos cuantificables. Estas relaciones progresan apoyándose en una lógica de la que forma parte la inferencia.

El análisis del método de demostración progresivo-regresivo por Solow (1992) y algunas estrategias de resolución de problemas propuestas por Polya (1984), ponen de relieve dos modos de establecer relaciones matemáticas, de los cuales estos casos resultan situaciones particulares. Al analizar el método por demostración progresivo-regresivo, Solow (1992) identifica y separa pasajes que el razonador debe resolver respondiendo a dos tipos de preguntas. Uno de estos tipos son preguntas de la forma: «¿qué tengo cuando tengo...?» mientras el otro tipo son preguntas de la forma: «¿qué debería tener para tener...?». La importancia de estos procesos no tiene duda, pero se atribuye su uso al ámbito de las llamadas operaciones formales. En efecto, este proceso aparece en una infinidad de situaciones familiares en matemáticas entre ellas: «la misteriosa elección de expresiones tales como $\epsilon / 2\sqrt{M}$ en las demostraciones de teoremas de límites» (Dubinsky 1994: 105), y es característico de las demostraciones por construcción y razonamientos por absurdo. Desde la perspectiva relacional dichos tipos de preguntas ponen de relieve dos tendencias inversas en cuanto a que, bajo la primera formulación, se camina desde las condiciones suficientes hacia las necesarias, en tanto que bajo la segunda formulación se camina en sentido contrario, esto es, desde las condiciones necesarias hacia las suficientes. El otro progresa en sentido contrario, esto es, en general desde los efectos a las causas. Estas formas relacionales se presentan de forma entremezclada, casi conjunta y componen pasajes que permiten alcanzar el objetivo de la situación problemática a la que pertenecen.

Ambos procesos directo e inverso, son diferentes pero no son independientes sino que por el contrario van intrínsecamente ligados puesto que las proposiciones A_i obtenidas progresivamente han de estar encaminadas a la obtención de la última B_j obtenida regresivamente que de este modo reposicionan continuamente el proceso de razonamiento. Este continuo tránsito entre posiciones progresivas y regresivas, entre causas y efectos, conforma una dualidad bidireccional que necesita darse de forma conjunta y remite a la concepción piagetiana de elaboración del conocimiento en lo que se refiere a la necesidad de presencia de una operación (en sentido genérico) y su opuesta, de forma simultánea, ya sea para: aplicar-descubrir relaciones, buscar equivalencias o razonar progresiva-regresivamente.

El alumnado de Educación infantil no se enfrenta a situaciones en que las inferencias se producen en la forma verbal teórica de la lógica simbólica con uso de condicionales y frases complicadas. Sin embargo, las leyes de inferencia lógica, no dependen de la sencillez de las proposiciones sobre las cuales se aplican. Sobre este universo proposicional simple, tiene lugar el desarrollo de destrezas de razonamiento en las etapas iniciales. En situaciones en las que hay que establecer una relación de pertenencia o transformación a partir de elementos que cumplen esa relación,

¿no estarán el alumnado frente a inferencias simples que deben implementar y tienen la dificultad de implicar modos de razonamiento directo -inverso?

En ese marco de referencia una de las formas elementales de establecer relaciones en ambos modos directo-inverso, que puede desarrollarse en Educación Infantil es la transformación. Pero, ¿hasta qué punto el uso de una tarea de transformación de colores siguiendo un código cíclico lleva inmerso un inicio de razonamiento en modos directo-inverso y qué dificultades tienen los niños de 3-5 años con este tipo de tareas?

2. LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Los diversos ámbitos del conocimiento matemático en los que operan los modos directo e inverso: la modelización, los métodos demostrativos, los cálculos algorítmicos, el intercambio representacional, la axiomatización, la construcción de conceptos y esquemas o la equivalencia proposicional, no son aparentemente de aplicación en la etapa de Educación Infantil. Sin embargo, con ligeras variaciones de contexto, todos ellos representan situaciones que el actual alumno de preescolar tendrá que afrontar en su futura formación matemática. La Educación Infantil debe proporcionar el soporte que las demandas del conocimiento matemático van a requerir en la medida posible. En concreto, el alumnado se enfrenta poco a tareas de transformación. En efecto, se observa simetría más que hacer figuras simétricas, se opera con conjuntos de cantidades, en lugar de tener un operador de suma constante, se identifican códigos en lugar de mirar como cambian... Es decir, en los currículos, no hay habitualmente una atención a la transformación, sino que normalmente se hace énfasis en la identificación. ¿Quiere decir que se piensa que no son capaces de hacerlo o simplemente significa un menosprecio por el valor funcional de muchas situaciones matemáticas?

Los procesos en modo directo e inverso de los que hemos hablado son formas de razonamiento que tienen gran semejanza con los procesos, llamados por Piaget (1975) directo e inverso, constitutivos de la reversibilidad de las operaciones. Pero las tareas piagetianas son diferentes de los modos directo-inverso en matemáticas puesto que muestran ser doblemente inversos: invierten el proceso global e invierten las operaciones parciales en cada paso. Así, para tratar de identificar la reversibilidad en niños pequeños, Piaget (1979) planteaba unas pruebas relativas a operaciones no formales en las que ambos procesos constituyentes consisten en invertir procedimientos no formales. La vinculación que el sujeto establece entre ambos procesos es indicativa de la reversibilidad de pensamiento y, por tanto, estos constituyen condiciones previas al dominio de dichos procesos, pero pensamos que no se centra tanto en la resolubilidad de la situación como problema sino en el reconocimiento del contenido asociado a la tarea.

Por eso, existe una similitud entre los procesos piagetianos directo e inverso con las diversas situaciones matemáticas en las cuales aparecen procesos en los que el razonamiento camina de las causas a los efectos y simultáneamente de los efectos a las causas. Por ello, parece que hay coincidencia en el caso de los cálculos algorítmicos. De hecho, sabemos ahora que es más difícil encontrar la función, dados los estados inicial y resultado en donde se aplica que realizar la aplicación. Nuestra

conjetura es que, en las situaciones no algorítmicas, el modo inverso se distingue de la reversibilidad, y no es simplemente inverso operativamente, porque se da un árbol de resolución más complejo que simplemente un conjunto de pasos contrario al modo directo.

Dado que nos preocupamos por lo que puede ocurrir en las primeras edades en situaciones no formales, nos proponemos ver lo que ocurre si diseñamos tareas de tipo directo-inverso en el sentido de «aplicar una regla (que en nuestro caso, será aplicar un código)» y «descubrir la regla» vinculadas con procedimientos propios de la construcción del conocimiento matemático, y lo haremos desde la visión piagetiana (Flavel 1982). Si bien para niños de esta edad hay estudios sobre la clasificación, sin embargo, no se ha encontrado estudios experimentales relativos a la comprensión ni a la reversibilidad de pensamiento en procedimientos de transformación.

Por ello, estamos interesados en estudiar *cómo se construyen los procesos directo e inverso, a través de su manifestación lógica inferencial sobre tareas de transformación apropiadas para la Educación Infantil relativas a procedimientos de construcción del conocimiento matemático, que implican el uso de códigos y símbolos.*

En el estudio presentado, no pretendemos mostrar el valor e influencia de estos códigos y símbolos.

3. SOBRE EL DISEÑO INVESTIGATIVO. METODOLOGÍA

Consideramos que la bibliografía relativa a actividades para niños de Educación Infantil, olvida las actividades de transformaciones codificadas y menos aún en modo inverso que, por otra parte tampoco forman parte de la actividad en las aulas porque a menudo los docentes piensan que el alumnado no es capaz de resolver este tipo de tareas.

En los primeros años de vida se conforma la inteligencia representativa a través del lenguaje y gracias a la concurrencia de procesos de simbolización. Crecemos en un entorno simbólico que exige un pensamiento representacional, es decir: conocer a través de mediadores y comunicarnos a través de mediadores simbólicos. Así, al diseñar las tareas procuraremos que respeten la actividad natural del niño de esta edad, que es el juego perceptivo (Pérez y otros 1981). De este modo se elige como tarea, un juego de aplicación de reglas presentado de forma simbólica y su correspondiente modo inverso que se plantea como juego de descubrir las reglas previamente aplicadas.

Por ello, hemos llevado a cabo un estudio experimental descriptivo, de tipo exploratorio, con una sola medición, con la cual se realiza un análisis multivariado de proceso. De hecho no pretendemos establecer una muestra totalmente significativa. Participan en la investigación 211 niños y niñas de aulas regulares de Educación Infantil, que corresponde a la práctica totalidad de siete colegios públicos y privados de la ciudad de Burgos. De estos, 70 son de 3 años, 76 de 4 años y 65 de 5 años. Todos ellos son entrevistados individualmente efectuándose grabación filmada. No nos interesamos aquí en variables personales como el género, sino en el desarrollo del razonamiento.

Desarrollamos en la investigación el siguiente diseño esquemático:

OBJETIVO	SUBOBJETIVO	CÓMO	INSTRUMENTOS
Realización de una Prueba	Diseño e implementación	Justificación Descripción experimental exploratoria	Prueba piloto
Desarrollo	Resultados	Registro y análisis de variables	Tablas de Frecuencias Gráficos
	Análisis	Éxito- Dificultad Procedimientos Argumentación	CHI cuadrado Descripción, clases, codificación y tablas de frecuencias

Sobre las tareas propuestas

Se propone la realización de una tarea de transformación en la que un objeto debe transformarse en otro por cambio de color de las piezas que lo componen. Los resultados obtenidos sobre el grupo piloto (Ruesga 2003) pusieron de manifiesto que la forma perceptiva de conocimiento que tiene lugar en este período evolutivo, condiciona las posibilidades de éxito. Así se comprueba que, el aspecto de la figura que hay que transformar es un condicionante importante para las posibilidades de respuesta. Cuando esta presenta un aspecto compacto -de tal modo que sus elementos integrantes guardan una posición relativa en la constitución de la figura- los resultados de acierto son considerablemente menores que cuando la figura se descompone en elementos o unidades simples. Es decir, la globalidad de la figura origen es un obstáculo en la comprensión y aplicación del operador transformación que, desaparece en gran medida cuando la transformación se plantea punto a punto, siempre con el mismo operador. Se introducen en la prueba la variable tipo de construcción que se representan como de tipo CC¹ que representa un árbol y su maceta construido con triángulos, o de tipo CS² constituida por una hilera de lápices independientes uno de otro. En primer lugar, se plantea la tarea en modo directo sobre CC y, sólo si el niño no tiene éxito en esta versión, se plantea sobre la versión CS. Trascurrido un tiempo, se plantea la tarea en modo inverso, únicamente sobre la versión CC si el niño tuvo éxito en modo directo sobre esta versión.

Consideramos que el niño tiene éxito sobre la versión CC cuando es capaz de construir a la derecha de la construcción origen, la construcción imagen por sí solo. La posible intervención del entrevistador, para evitar bloqueos debidos a la falta de comprensión del código de transformación o de la falta de dominio espacial son valoradas como no éxito y registrado el tipo de causa. En el caso de la figura CS, se valora que el niño tiene éxito cuando puede colocar, por sí solo, debajo de cada

¹ CC = «Construcción compleja»

² CS = «Construcción simple»

lapicero aquél en el que se transforma por efecto del código. Las pruebas se realizan individualmente *sin límite de tiempo*.

La tarea se comienza mostrando los dos códigos de transformación cíclica de color (Dienes 1987: 136) para que elija uno con el que jugar. Observemos —a continuación— como explicamos inicialmente el juego para que sea bien interpretado.

E. *Ahora vamos a jugar a cambiar. Mira, yo tengo estas tarjetas que sirven para cambiar los colores. Te las voy a enseñar. Esta, sirve para cambiar el color rojo por el azul [E indica con el dedo el color rojo, la flecha y el color azul en el extremo de la flecha] ...El azul por el amarillo... [E indica con el dedo el color azul, la flecha y el color amarillo al extremo de la flecha] ...Y el amarillo por el rojo. [E indica con el dedo el color amarillo la flecha y el color rojo al extremo de la flecha]. Entonces mira cómo voy a jugar. Si yo tengo un triángulo rojo... [E coloca el triángulo rojo grande sobre la mesa] ...El rojo lo cambio por... [E indica en la tarjeta el rojo, la flecha y el amarillo].*

N. *Azul.*

E. *Entonces pongo el azul aquí. [E coloca el azul a la derecha del rojo inicial] Y si tengo este azul... [E coge azul pequeño y le coloca debajo del rojo grande] ... Pues, como es azul, le cambio por... [E indica sobre la tarjeta el azul, la flecha y el amarillo].*

N. *Amarillo.*

E. *Claro porque el azul cambia por amarillo. [E indica el triángulo pequeño azul y el pequeño rojo a su derecha] [E deja la tarjeta sobre la mesa y coge la otra tarjeta de cambio]... Y mira, esta pone que lo rojo lo cambio por el amarillo, el amarillo por el azul y el azul por el rojo... [E va indicando cada uno de los colores] ... La flecha indica por cuál le cambio, ¿ves? (Asiente).*

A continuación, presentamos la acción que deberá desarrollarse, mostrando las tarjetas que participarán en el juego, y pidiendo que escoja una y, posteriormente, mostramos una figura que debe ser transformada.

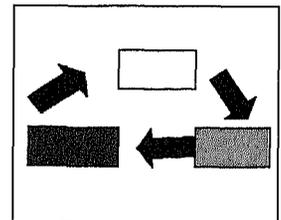
Elige una tarjeta de cambiar. (Mira las dos y apunta una de ellas).

E. *¿Con esta quieres jugar?*

(Asiente. La mira).

[Elige de rojo a azul, de azul a amarillo y de amarillo a rojo]

E. *Entonces, yo voy a hacer un árbol.*



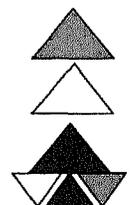
[E realiza la figura despacio]

E. *Pues mira, ahora con estos otros triángulos, tu tienes que hacer un árbol como este, aquí...*

[E señala el espacio a la derecha de la figura]

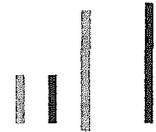
... Pero cambiando los colores como dice la tarjeta.

(N Se queda parado).



En la tarea CS, que se plantea cuando la CC no ha sido resuelta, la situación es similar, pero más discretizada y con los elementos separados. Usamos lapiceros.

E. *Mira, con la tarjeta que tu has elegido, vamos a cambiar de color estos lápices. ¿Ves? [E coloca los seis lápices verticalmente uno tras otro] Mira están todos en fila y, ahora tu con estos otros... [E da al niño otros seis lápices iguales a los colocados]. Son iguales ¿a que si?*

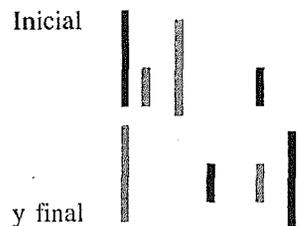


N. *Si.*

E. *Bueno pues tienes que ir poniendo debajo de cada uno la pintura en la que cambia pero fijándote muy bien en lo que dice la tarjeta ¿vale?*

La tarea de modo inverso consiste en determinar la tarjeta que corresponde a una transformación, ya realizada por el entrevistador, mostrando las figuras inicial y final. La tarea se presenta así:

E. *Ahora vamos a ver si tu adivinas. Mira, he puesto todos los lápices en fila. Y ahora cada uno le voy a cambiar por otro y le voy a poner debajo. A ver si tu adivinas cómo los cambio [E hace la hilera transformada debajo, muy despacio]*



E. *¿Qué te parece?*

Variables

Las variables que se analizan para describir los resultados de la tarea en modo directo son, sobre cada tipo de figura las siguientes: *Comprensión* del operador. *Dificultad*. Valora si aplica correctamente el operador y la causa del error detectado en caso contrario. *Argumentación*. Valora el tipo de razonamiento que el niño da a su acción.

Tras la acción de colocar cada una de las piezas en la figura imagen, se pregunta «¿Por qué pones esa?». El acierto o error, en cada caso, juntamente con la expresión que el niño utiliza para responder a la pregunta, se utilizan como indicadores de la *Comprensión* del operador, de la *Dificultad* y de la *Argumentación*.

Se establecen las siguientes categorías de análisis en cada una de ellas:

- *Comprensión* del operador:
 - SI cuando transforma correctamente al menos dos piezas de diferente color de forma justificada (dado que el tercero puede ser cambiado por exclusión).
 - NO en caso contrario.

- *Dificultad* se establecen las siguientes categorías:
 - Correcto (S).
 - Error debido a la falta de comprensión del operador (C).
 - No construye la figura imagen correctamente.
 - Olvida la construcción inicial (CI).
 - Construye la figura hasta cierto momento (E).
 - Error debido a la confusión de posiciones inicial y final (CP).
 - Error debido a la interpretación de las flechas indicativas, en sentido opuesto (G).
- *Argumentación*: se establecen las siguientes categorías:
 - No argumenta (1).
 - Imprecisa (2).
 - Posición de símbolos (3).
 - Verbaliza posiciones (4).
 - Referencia símbolo (5).
 - Verbaliza la relación (6).

Las variables establecidas para describir los resultados de la tarea en modo inverso, en ambas versiones son: *Reconocimiento de cambio*: Valora si se reconoce un cambio entre las figuras inicial y final. *Reconocimiento del operador*. Valora si se reconoce la tarjeta simbólica de la transformación efectuada entre las dos transformaciones cíclicas de color posibles. *Argumentación*. Valora el tipo de justificación que se expresa.

Sobre las construcciones inicial y final se pregunta «¿Te parece que están igual?». La respuesta del niño es el indicativo para la variable *Reconocimiento de cambio*.

Como indicador de la variable *Reconocimiento del operador* se toma la respuesta a las siguientes preguntas con las siguientes acciones. Una vez seleccionada por el niño una de las tarjetas simbólicas se pregunta «¿Porqué lo sabes?». La respuesta puede ser imprecisa o hacer referencia al cambio de colores que la tarjeta indica, en este caso, se pregunta «¿Eso he hecho?, ¿Dónde lo ves?» y se pide el mismo reconocimiento sobre otro cambio de color mediante la pregunta «¿Qué más dice la tarjeta?»... «¿Dónde lo ves?».

En el estudio se establecen las categorías de resultados siguientes:

- *Reconocimiento de cambio* se establecen las categorías:
 - Si (S): Si reconoce que la figura inicial y final no son iguales.
 - No (N): En caso contrario.
- *Reconocimiento del operador* se establecen las categorías:
 - Si (S): Identifica la tarjeta con el código de transformación empleado.
 - No (N): No puede identificar la tarjeta de transformación empleada.
- *Argumentación* se establecen las siguientes categorías:
 - Imprecisa (1).
 - Reconoce por posicionamiento (2).
 - Verbaliza colores correspondientes (3).
 - Verbaliza relación (4).

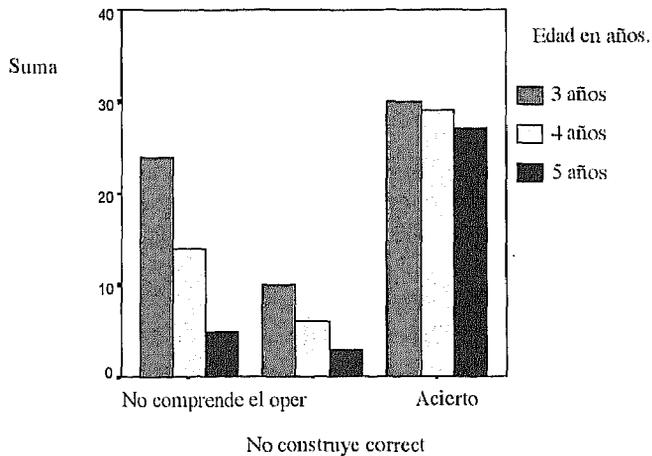
4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los logros del alumnado por cada grupo de edad y modo, se muestran en la siguiente tabla y permiten afirmar que la tarea de transformación de modo inverso resulta significativamente más difícil de resolver que su correspondiente en modo directo, confirmando así el supuesto relativo a la dificultad, por razones del modo.

EDAD	ACIERTO							
	Modo directo				Modo inverso			
	CC (N = 210)		CS (N = 148)		CC (N = 62)		CS (N = 153)	
	N	% grupo						
3	5	7,2	30	46,9	5	100	21	33,9
4	27	35,5	29	59,2	23	85,2	28	52,8
5	30	46,2	27	77,1	27	90,0	24	63,1
Total	62	29,4	86	58,1	55	88,7	73	47,7

A los 148 niños que no tuvieron éxito sobre CC se planteó la tarea sobre CS; tienen éxito el 58,1% (86 niños, que supone el 41% del total) este acierto sabemos que es significativo en función de la edad. El 29,1% (43 niños, que supone el 20,5% del total), continúa mostrando falta de comprensión del operador y el 12,8% (19 niños, que supone el 9% del total) no pueden construir la figura imagen. En el caso de la versión CC, los resultados de acierto dependen significativamente de la edad: a medida que la edad incrementa se produce un aumento en los aciertos al resolver la tarea. Todos los grupos de edad muestran un comportamiento similar en la respuesta ($\chi^2_4 = 8,681 P \leq 0,070$). La gráfica muestra los resultados obtenidos por grupos de edad:

Transformación sobre CS: modo directo. Acierto y causas de error

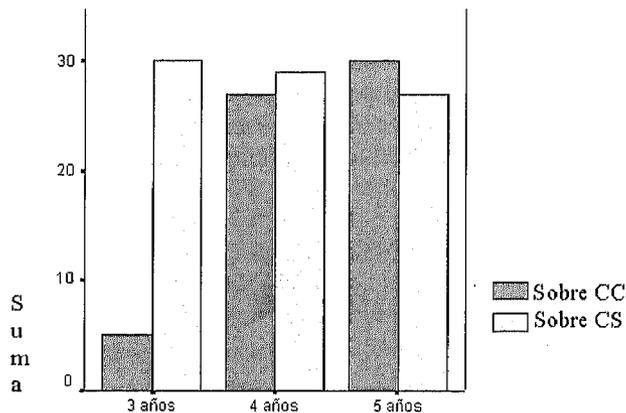


El problema de comprensión del operador que fue del 24,3% sobre CC, desciende al 20,5% (del total de la muestra). De modo que, de los 51 niños que presentaron problema de comprensión del operador sobre CC, 8 lo comprenden al plantear la tarea sobre CS.

Aunque estas diferencias entre los grupos de edad no son estadísticamente significativas ($\chi^2_2 = 1,351$ $P \leq 0,509$), la diferencia en las dificultades encontradas evidencian la importancia de la figura objeto de transformación. Al resolver la tarea sobre CS, en todos los grupos de edad desaparecen dos tipos de dificultades que se presentan ante CC: el olvido de la construcción inicial y el bloqueo que produce la complejidad de la figura CC, que impiden que finalicen su construcción.

La tarea en modo directo sobre CC parece ser excesivamente difícil para el grupo de 3 años; sólo 5 niños la realizan correctamente. Sin embargo, la presentación de la figura origen supone un elemento metodológico que facilita el éxito en la tarea. La gráfica muestra los resultados obtenidos en cada grupo de edad según la versión CC y CS.

Aciertos relativos a la tarea de transformación en modo directo sobre CC y CS por grupos de edad



La repetición de la tarea sobre la versión CS, supone un incremento del acierto, ya sea por efecto de la presentación CS o por la experiencia e introduce el aspecto metodológico como relevante. Al resolver la tarea sobre CS, en todos los grupos de edad desaparecen dos tipos de dificultades que se presentan ante CC: el olvido de la construcción inicial y el bloqueo que produce la complejidad de la figura CC, que impiden que finalicen su construcción. En la siguiente tabla se muestran las dificultades que aparecen durante el proceso resolutivo en las versiones CC y CS:

Transformación modo directo. Distribución de tipos de dificultades para construir correctamente la figura imagen, por grupos de edad.

Tipos de dificultad para construir correctamente la figura imagen	3 años				4 años				5 años			
	CC		CS		CC		CS		CC		CS	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Olvida la construcción inicial	1	1,4			3	3,9			10	15,4		
Interpreta los signos de flecha del operador en sentido contrario	13	18,6	3	4,3	8	10,5	1	1,3	2	3,1		
Construye la figura hasta cierto momento	9	12,9			18	23,7			11	16,9		
Confunde posiciones inicial y final	11	15,7	7	10	5	6,6	5	6,6	6	9,2	3	4,6
Total	34	48,6	10	14,3	34	44,7	6	7,9	29	44,6	3	4,6

La diferencia en las dificultades encontradas evidencia la importancia de la figura objeto de transformación.

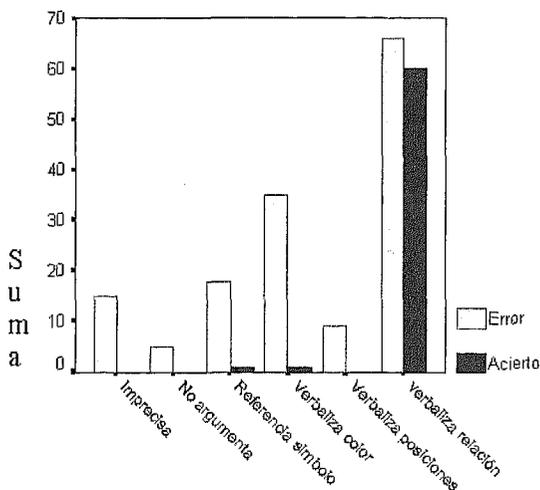
De los 62 niños a los que se planteó la tarea de transformación inversa sobre CC, 55, o sea el 88,7% (que supone un 26,2% de la muestra total), pudieron identificar el operador empleado. Todos los grupos de edad incrementan los resultados de acierto en transformación inversa obteniéndose los siguientes resultados:

Resultados de la tarea de transformación modo inverso sobre CS.

	3 años			4 años			5 años		
	N	% válido	%	N	% válido	%	N	% válido	%
Acierto	21	33,9	30	28	52,8	36,8	24	63,2	37
Error	41	66,1	58,6	25	47,2	32,9	14	36,8	21,5
Total	62	100	88,6	53	100	69,7	38	100	58,5
(missing)	8		11,4	23		30,3	27		41,5
Total	70		100	76		100	65		100

En modo directo y en ambas versiones, la argumentación está vinculada con el éxito en la tarea de manera que el grupo de acierto, utiliza la categoría que revela la comprensión del operador a través de la verbalización precisa, mientras en el grupo de error esta se muestra dispersa. Sin embargo, como puede verse en el gráfico, esta no es condición suficiente al existir un alto porcentaje de casos que, mostrando este tipo de argumentación, no tienen éxito, lo que revela que, además de la comprensión del operador hay otros factores que intervienen en el logro.

Distribución de categorías de argumentos en la tarea de transformación sobre CC: modo directo en función del acierto o error.



En modo inverso y en ambas versiones, sin embargo, la diferencia de medias entre el acierto en la tarea y la categoría argumentativa «Verbaliza la relación» no es significativa ($22 = 16,564 P \leq 1,000$), es decir que, en esta modalidad, el acierto en la tarea está vinculado con el tipo de argumento o sea, con la verbalización precisa del operador, lo que no ocurría en modo directo sobre CC ni sobre CS; en ambas versiones del modo directo, sólo la mitad del alumnado que utilizan este tipo de argumento tienen éxito.

5. CONCLUSIONES

La práctica de las tareas en modo inverso precisa abstraer relaciones de los objetos mediante la llamada por Piaget abstracción reflexiva, supone descartar posibilidades mediante inferencia cuando la concreción se contradice con la hipótesis, no son necesariamente activas (así ocurre con la tarea de transformación inversa), al contrario que sus correspondientes directas y si, básicamente reflexivas, por cuanto la argumentación que se desprende de la solución exitosa de las mismas revela la presencia del razonamiento inferencial con mayor garantía que en el caso de sus correspondientes directas que pueden obedecer a factores de tipo perceptivo. Los resultados hallados muestran que las estructuras de conocimiento en juego sobre la tarea de transformación no están equilibradas pues el proceso inverso resulta ser más difícil que el directo. Esta condición, necesaria de acuerdo a la concepción piagetiana, para la construcción del conocimiento matemático, puede verse favorecida por la práctica de situaciones relacionales de modo inverso que muestran ser la causa del desequilibrio.

Del análisis de la tarea en modo inverso se desprende que este contiene acciones y observaciones diferentes a las de modo directo. La acción necesaria de observar simultáneamente dos elementos (un triángulo y su transformado) no existe en modo directo, así mismo la acción de seleccionar un código de los dos posibles, necesario en la solución en modo inverso, tampoco existe en modo directo. En modo inverso las acciones nunca tienen lugar sobre un solo elemento particular (sobre un solo triángulo o un solo lápiz) y además de esta simultaneidad es preciso considerar el código de transformación. Esto explica la mayor dificultad de la tarea en modo inverso: para resolver con acierto el modo inverso, es preciso no sólo descubrir las reglas, sino realizar las acciones correspondientes, o sea, utilizar procesos de aplicación de las mismas.

Además el modo inverso muestra inducir categorías de argumentos más elaboradas que los directos y, por tanto, más interesantes desde el punto de vista del ejercicio del razonamiento matemático que implican, que los directos.

Las estrategias metodológicas, se revelan como un factor esencial para permitir el acceso a esta práctica en relación con procedimientos de transformación. La eliminación de aspectos no relevantes y la presentación de la tarea como una transformación punto a punto proporcionan unos porcentajes de acierto que muestran este tipo de actividad como accesible en la etapa.

Esta práctica reflexiva, no es habitual en las aulas de Educación Infantil, más allá de la vinculada a la acción. Sin embargo, los resultados obtenidos en la investigación permiten conjeturar que la práctica habitual mejoraría los resultados escolares actuales.

6. LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DEL ESTUDIO

Las condiciones en que la experiencia tuvo lugar impusieron la necesidad de realizar todas las pruebas en una sola sesión. De esta forma la separación entre pruebas en modo directo e inverso no se realizó en dos días diferentes como estaba propuesto. El efecto de una separación mayor en el tiempo está por determinar. Por otra parte, la aplicación individualizada de las tareas, requirió sacar a cada niño de su clase en el momento para responder a preguntas formuladas por alguien desconocido para ellos, por lo que el factor empatía también podría tener alguna influencia no determinada que, probablemente en este caso haya jugado en contra, por lo que se considera que los resultados hallados son mínimos.

Las limitaciones anteriores, de igual modo impusieron no extender las pruebas hacia otro tipo de contenidos, concretamente seriaciones y ordenaciones, ni plantearlas con otras variables. El atributo color, y los símbolos de sus valores, tienen un alto poder perceptivo. Se eligió este atributo buscando niveles de dificultad más bajos para la tarea de clasificación en modo directo, dado que las programaciones consultadas (Santos Asensi y otros, 1992) destinan esta tarea a edades comprendidas entre los 5 y los 7 años. El efecto de otros atributos menos perceptibles (la forma y el grosor, por ejemplo) está por determinar. De igual modo está por determinar el efecto de variables no bivalentes. Conservando la

estructura de la actividad, las posibilidades inferenciales aumentan cuando los valores posibles son trivalentes y tetravalentes, por ejemplo (como ocurriría entre el color y la forma).

Los resultados de acierto hallados sobre la tarea de transformación deben tener en cuenta la nula experiencia del alumnado entrevistados en este tipo de tareas y permiten predecir una respuesta mucho más exitosa si la transformación fuera una actividad habitual. De igual modo el efecto de transformaciones no biyectivas, o de otras que, siendo biyectivas no sean cíclicas o no varíen todos los valores, o varíen atributos con otro número diferente de valores o valores diferentes del color está por determinar.

También a causa de la nula experiencia del alumnado sobre tareas en modo inverso, se impuso la necesidad de plantearlas, en primer lugar en modo directo. Resultó imposible pensar en una forma de explicar la tarea inversa sin hacer referencia a su propia solución. La influencia de los hábitos de razonar en forma inversa, sin la previa introducción de la directa, abre otros campos muy distintos que pueden llegar hasta a la posibilidad de encontrar las piezas que entran en el juego, sin necesidad de tenerlas presentes en el momento. Esto es lo que ocurre con los problemas matemáticos cuando se presentan fuera del contexto de las lecciones o temas a los que están asociados.

Así pues, circunscribiéndonos al ámbito del material que representan los bloques lógicos, las dos tareas experimentadas son a penas dos casos particulares de los cientos que pueden experimentarse. Todos ellos diferentes pero, entre ellos, algunos estructuralmente iguales.

El destacado porcentaje de acierto sobre la única tarea en la que el alumnado entrevistados tenían una cierta experiencia, la de clasificación en modo directo, permite plantear el interrogante sobre las posibilidades reales del alumnado de esta etapa sobre los demás tipos de contenidos así como sobre los modos inversos.

En el trabajo no se ha desarrollado un análisis sobre el valor y significado de los símbolos utilizados y su interpretación. Este análisis semiótico enriquecería el trabajo. El material puede ser releído desde ese punto de vista para reconocer, por ejemplo, como el gesto supe o complementa la acción verbal para mostrar una comprensión más apropiada del código flecha. Notemos que tampoco hemos comparado la acción de flechas individualizadas con el uso de cartas de tipo cíclico como la que hemos implementado.

Por otra parte, el derecho a una educación individualizada que propicie el desarrollo de todas las capacidades, al máximo de sus posibilidades para cada sujeto, supone atender los casos de diversidad en aquellas ocasiones en que, como en el caso de algunos niños de 3 años, estas están por encima de la media de su edad.

BIBLIOGRAFÍA

- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona. Graó.
- Davis, P. J. y Hersh, R. (1989). *Experiencia Matemática*. Madrid.Labor-M.E.C.

- Dienes, Z. P. (1987). *Los primeros pasos en matemática. Tomo I Lógica y juegos lógicos*. Barcelona. Teide
- Dubinsky, E. (1994). *Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Advanced Mathematical Thinking*, cap. VII. Dordrecht, Netherlands. Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Peter Lang-Universidad del Valle.
- Flavel, J. H. (1982). *La psicología evolutiva de J. Piaget*. Barcelona. Paidós.
- Guzmán, M. (1997). *Para pensar mejor*. Madrid. Pirámide.
- Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas.
- Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. París. Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. (1979). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante I*. Buenos Aires. Huemul.
- Ruesga, P. (in press). About logical reasoning in kindergarten. En J. Giménez, G. Fitzsimons y C. Hahn (eds) *Mathematics and globalization*. Proceedings CIEAEM 54. Vilanova I la Geltrú.
- Santos Asensi M. C. Ingelmo, E. y Mena, A. (1992). *Los bloques lógicos de Dienes en Educación Infantil y primaria (Diseño experimental y programa para alumnos de 5 a 7 años)*. Salamanca. Amarú.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Morata.
- Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. Limusa. México
- Wartofsky, M. W. (1987). *Introducción a la Filosofía de la Ciencia*. Madrid. Alianza.