ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA EN TORNO A LAS TÉCNICAS DE DERIVACIÓN EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA[1]

Cecilio Fonseca, *Universidad de Vigo*

Josep Gascón, *U. Autónoma de Barcelona*

RESUMEN:

Con objeto de describir la *organización* (o *praxeología*) *matemática* (OM) en torno a la *derivación de funciones*, tal como se lleva a cabo en Secundaria (S), y para proponer modificaciones de dicha organización fundadas en el análisis didáctico-matemático, se utilizan las nociones de *OM puntual* y *OM local* (Chevallard, 1999). Se muestra que la derivación de funciones en S aparece como una *amalgama de* OM puntuales *aisladas* y *rígidas* en el sentido que se describe en Fonseca y Gascón (2000 y 2002). Se hace un esbozo de una posible *OM local* (minimal) que contiene todas las tareas y las técnicas directamente relacionadas con la derivación de funciones en S. El trabajo finaliza con unas notas breves sobre la organización de un posible *proceso de estudio* en S de dicha OM local. Se enfatiza la necesidad de estructurarlo a partir del planteamiento

[1] Algunas ideas preliminares sobre este tema fueron presentadas en el IV Simposio de la SEIEM (Huelva, septiembre de 2000) dentro de las sesiones del grupo de trabajo DMDC.

sistemático de *cuestiones tecnológicas* relativas al *alcance*, al *coste* y a las *limitaciones de las técnicas de derivación*, así como a sus *relaciones con otros tipos de técnicas*. Dicho proceso de estudio tomará pleno sentido en el seno de la reconstrucción escolar de una OM mucho más amplia en torno a la *variación de funciones*.

1. Algunas notas sobre las organizaciones matemáticas puntuales y locales

Las nociones de *tarea* y *técnica* son primitivas en el estado actual de desarrollo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), son nociones relativas a la institución de referencia **I** y, además, presentan la siguiente dualidad: en **I** sólo puede considerarse como un "tipo de tareas", **T**, aquel para el que se dispone de algún tipo de técnica, τ, con su entorno tecnológico-teórico, $[\theta/\Theta]$, más o menos explícito. Así, por ejemplo, en Secundaria la descomposición en factores primos de números "pequeños" es una *tarea*, pero la de números "grandes" no lo es. Recíprocamente, las técnicas siempre responden a tareas planteables en **I** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Chevallard, 1999).

Diremos que una *organización* (o *praxeología*) *matemática*, OM = $[T/\tau; \theta/\Theta]$, es *puntual* (OMP) si está generada por lo que en **I** es considerado como un único *tipo de tareas*, **T** o, dualmente, si está generada por lo que en **I** es considerado como una única técnica τ. Resulta, por tanto, que la noción de OMP es relativa a la **I** y está definida, en principio, a partir del bloque técnico-práctico $[T/\tau]$. En general las OMP se integran en *OM locales* (OML) para poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de *cuestiones problemáticas* que no se podían resolver completamente en ninguna de las OMP de partida. A lo largo del *proceso de estudio*, que es a la vez un proceso de (*re*)*construcción* de la OML, se va desarrollando un *discurso tecnológico* común que permite *describir*, *interpretar*, *justificar*, *explicar* y *relacionar* las antiguas *técnicas matemáticas*, así como *producir técnicas* "*nuevas*". De hecho, en el paso de un conjunto de OMP a una única OML, se pone en funcionamiento y toma protagonismo el *discurso tecnológico* θ que caracteriza la OML en cuestión. Cuando en una institución determinada **I**, y para un tipo de tareas **T**, se tiende a privilegiar una única técnica $\tau_{I}(\mathbf{T})$ que es considerada en **I** como "la manera evidente e incuestionable de resolver las tareas del tipo **T**", entonces se dificulta el desarrollo de dicha técnica y se frena su integración en OM más amplias. Estas técnicas $\tau_{I}(\mathbf{T})$ suelen asumir un carácter *autotecnológico*, esto es, se considera que no requieren ningún tipo de justificación más allá de la "evidencia" de que funcionan correctamente (Chevallard, 1999).

2. La derivación de funciones en Secundaria

La OM *empírica* en torno a la derivación de funciones, tal como se lleva a cabo en Secundaria, OM(D), no puede ser considerada como una OMP porque contiene diversos tipos de técnicas y de tareas aunque éstas puedan describirse mediante un enunciado formalmente común: *Calcula la derivada de la función f*. En efecto, en S para derivar funciones se apela de forma más o menos explícita a técnicas diferentes (esto es, consideradas diferentes en S). Entre dichas técnicas podemos citar: la *definición* (que comporta calcular el límite del cociente incremental); las técnicas que se obtienen del *álgebra de derivadas* (*regla de la suma*, *del producto*, *del cociente* y *de las funciones potenciales* de exponente natural); la *regla de la cadena* (para derivar funciones compuestas) y la técnica de *derivación logarítmica* para derivar funciones potenciales-exponenciales.

Por otra parte, la citada OM(D) tampoco puede considerarse como una OML porque las diferentes tareas que contiene no están integradas en la práctica que se lleva a cabo en S, las técnicas se presentan bastante independientes entre sí y, sobre todo, no existe un discurso tecnológico unificador que tenga una incidencia efectiva sobre el desarrollo de la práctica matemática. Podríamos decir que OM(D) es una amalgama de OMP rígidas, no integradas y poco desarrolladas, más que una verdadera OML[2].

[2] Hemos dicho que una OML viene caracterizada por un *discurso tecnológico* común a todas las OMP que integra. Podemos adelantar una caracterización más operativa para distinguir las OM *locales* de las OM *puntuales* (en I): una OM *local* debe contener los tipos de tareas, las técnicas, los elementos tecnológicos y todas las relaciones entre dichos componentes que hagan posible llevar a cabo una actividad matemática no sujeta a las restricciones que provoca la rigidez de las OMP (los aspectos de dicha rigidez serán descritos a continuación). Las OML de una I también pueden caracterizarse en términos de los *momentos didácticos* o *dimensiones del proceso de estudio* que se requieren necesariamente para reconstruir (estudiar) OML en I.

Cada una de las citadas OMP presenta ciertas características que hemos descrito en otro lugar (Fonseca y Gascón, 2000 y 2002) y que pueden resumirse en un conjunto de características que hacen referencia a los diferentes aspectos de su rigidez.

(1) Se observa una fuerte invariancia de la nomenclatura (x siempre es la variable independiente e y la variable dependiente) lo que hace presuponer que las técnicas de derivación dependerán de esta nomenclatura. Dado que no se suelen plantear tareas tales como la de derivar la función

$$s = \frac{at^2 + 2t + p^3}{(pt + 2)^5}$$

respecto de la variable *t* (ni, mucho menos, la tarea de comparar la derivada respecto de *t* con la derivada respecto de *p*), es previsible que aparezcan graves dificultades cuando las variables no sean *x* e *y*, especialmente en problemas de *modelización*[3].

(2) El "dominio" de las diversas técnicas de derivación en S no incluye la *interpretación del resultado* ni, mucho menos, la *interpretación del proceso.* Aparece únicamente una interpretación local muy estereotipada, limitada a la pendiente de la recta tangente; muy *raramente se interpreta la derivada como la variación de la función.*

(3) Dadas funciones concretas como, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{5}{x^2} \quad y \quad g(x) = \frac{x}{7}$$

En S se suelen derivar como un cociente de funciones en lugar de derivar la primera como una potencia y la segunda como el producto de una constante por una función. Postulamos la *ausencia de dos o más técnicas diferentes* para derivar cada una de estas funciones es una consecuencia de la *ausencia de un cuestionamiento tecnológico* imprescindible para comparar la *eficacia*, la *pertinencia* y el *coste* de las

[3] En este trabajo nos limitamos a describir y completar la OM en torno a la *derivación de funciones*, tal como se lleva a cabo en Secundaria. Es por esta razón que utilizamos la misma nomenclatura que aparece en dicha institución. Pero en el diseño del *proceso de estudio* de esta OM deberán aparecer tareas que comporten una *utilización mucho más flexible de la nomenclatura*.

técnicas potencialmente útiles para llevar a cabo una tarea matemática concreta.

(4) En S se separan escrupulosamente (incluso en “temas” diferentes) las técnicas de derivación de las técnicas de integración. En el momento que aparecen las técnicas para calcular primitivas de ciertos tipos de funciones se supone que las técnicas de derivación ya han sido anteriormente flexibilizadas y que ya son dominadas por los alumnos. No se tiene en cuenta que la *inversión de las técnicas* constituye un *aspecto esencial de su flexibilización.*

(5) Faltan situaciones abiertas que requieran un trabajo de *modelización* utilizando el cálculo de derivadas. En particular, no se trabaja sistemáticamente la interpretación de la derivada como límite de la *Tasa de Variación Media* en situaciones mucho más generales que la clásica del paso de la velocidad media a la velocidad instantánea.

3. Esbozo de una posible OML minimal en torno a la derivación de funciones en Secundaria

Ante todo hemos de preguntarnos si es posible construir una OML que contenga todas las tareas y todas las técnicas de derivación de funciones que existen en la OM empírica de S, OM(D). Se trata de una cuestión abierta que sólo podremos responder de manera constructiva. Para ello vamos a esbozar la estructura y la dinámica interna de una OM que, conteniendo las tareas y las técnicas que aparecen en la OM(D), permita llevar a cabo una actividad matemática no sujeta a las restricciones que provoca la rigidez de las OMP. Lo más razonable es pensar, además, que *no existe una única* OML generada en S por las técnicas de derivación de funciones; pueden existir diferentes OML que, junto a los componentes de OM(D), contenga otras tareas, técnicas y elementos tecnológicos que no aparecen en S[4] aunque podrían aparecer.

[4] Ésta es una de las razones por las que no es posible poner ejemplos “conocidos” de OML; las OML deben ser “reconstruidas” explícitamente con toda su complejidad, porque no suelen aparecer completas en las instituciones escolares y, en caso de que lo estén, tampoco son fácilmente visibles (delimitables) puesto que nunca han sido utilizadas para describir los conocimientos matemáticos. Se trata de la situación contraria a la que se encuentran los “teoremas” y las “definiciones de conceptos” matemáticos que, al haber sido utilizados tradicionalmente por la *epistemología euclidiana* todavía dominante en la “cultura matemática”, parecen poseer una realidad objetiva, independiente de la forma de interpretar y describir el conocimiento matemático.

Es muy importante subrayar que, aunque la OML que vamos a esquematizar podría vivir en S, en este trabajo *vamos a diseñar únicamente la OM*, pero *no la Organización Didáctica asociada*. Esto quiere decir que, por el momento, *no pretendemos describir el proceso de estudio* en S de la OML que vamos a esbozar[5].

3.1. Descripción y completación relativa, en S, de la OMP=< τ_1 >

Para describir una posible OML en torno a la derivación de funciones partiremos de una OMP en S: la generada por el cálculo de la derivada de una función polinómica de primer grado (en un punto concreto), mediante la técnica del cálculo del límite de la tasa media de variación de la función en un intervalo, cuando la longitud de éste tiende a cero. Llamaremos τ_1 a esta primera técnica.

¿Qué otras clases de funciones pueden ser derivadas utilizando dicha técnica con un "*coste*" razonable? Esto es, cuáles son los problemas de derivación que forman parte de esta OMP en S? Esta pregunta requiere, en primera instancia, una respuesta fundamentada en los datos empíricos. Una revisión de los libros de texto más utilizados en S muestra que sólo unas pocas clases de funciones son derivadas utilizando τ_1. Dichas clases son, además de las funciones polinómicas de primer grado, las siguientes:

(a) Las polinómicas de segundo grado y algunas de tercer grado como, por ejemplo:

$$h(x) = x^2 - 6x + 8 \quad \text{y} \quad i(x) = x^3 - 5$$

(b) Algunas funciones racionales sencillas como, por ejemplo:

$$j(x) = \frac{5}{2x+3}$$

---

[5] El diseño y experimentación de un proceso de estudio de una OM en torno a la *variación de funciones* (que contiene ampliamente a la OML en torno a las técnicas de derivación que vamos a esbozar) es uno de los objetivos principales de la investigación de la que forma parte este trabajo.

(c) Y, por último, algunas funciones irracionales sencillas como, por ejemplo:

$$k(x) = \sqrt{x+2}$$

A fin de *flexibilizar* la técnica $\square_1$, lo que debería permitir desarrollarla y relacionarla con otras técnicas (cosa que raramente se realiza en S), planteamos en este momento *cuestiones tecnológicas* relativas a $\square_1$: ¿Para qué tipo de funciones $\square_1$ resulta demasiado *costosa* (en términos de esfuerzo, tiempo y posibilidad de cometer errores)? ¿Cuál es, en definitiva, el *alcance* y las *limitaciones* de $\square_1$? ¿Es posible modificar ligeramente $\square_1$ de manera que se amplíe el campo de problemas al que es aplicable? ¿Qué modificaciones son necesarias?

El primer tipo de modificación que puede proponerse es el relacionado con la *dependencia de la nomenclatura* (y, en general, de los *objetos ostensivos* que intervienen). El trabajo técnico rutinizado con $\square_1$ para obtener la derivada de una función en puntos concretos, hace emerger la siguiente cuestión tecnológica: ¿es posible calcular con $\square_1$, *de una vez por todas*, la derivada de una función en un punto cualquiera? Tecnológicamente aparece la noción de *función derivada*; técnicamente se trata de un cambio de nomenclatura: allí donde antes poníamos un punto concreto $x = 2$ ó $x = -1$, ahora pondremos $x = a$ ó, simplemente, "x".

A partir de este momento surge la técnica $\square_{11}$, obtenida variando $\square_1$ en la forma indicada; se trata de una técnica que permite calcular la *función derivada* de determinadas funciones concretas. A medida que se continúa trabajando $\square_{11}$ aparece una segunda cuestión tecnológica: ¿es posible calcular con $\square_{11}$, *de una vez por todas*, la función derivada de todas las funciones de una clase como, por ejemplo, las funciones lineales (o cuadráticas)? Tecnológicamente aparecerán las primeras *fórmulas de derivación*; técnicamente se trata, de nuevo, de eliminar otro aspecto de la *dependencia de la nomenclatura*: allí donde antes poníamos una función concreta $l(x) = x^2 - 6x + 8$ ó $m(x) = x^3 - 5$, ahora pondremos una función cualquiera (o un modelo algebraico) de las funciones de esa clase: $n(x) = ax^2 + bx + c$ ó $p(x) = ax^3 + b$.

Así, el *trabajo de la técnica* (Bosch y Gascón, 1991, 1992 y 1994) se manifiesta una vez más como un trabajo “creativo”, esto es, *productor de nuevas técnicas* y hasta de técnicas que permiten resolver cuestiones planteadas a nivel *tecnológico* respecto de la técnica inicial. En concreto, con la τ_{11} modificada se obtienen las fórmulas siguientes:

$$D(a) = 0; \quad D(ax + b) = a; \quad D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b; \quad D(ax^3) = 3ax^2$$

$$D\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{-a}{(ax+b)^2}$$

$$D\left(\sqrt{ax+b}\right) = \frac{a}{a\sqrt{ax+b}}$$

Denominaremos τ_{12} a la técnica que consiste en aplicar estas fórmulas para obtener, sin necesidad de calcular un límite en cada caso, la función derivada de funciones pertenecientes a determinadas clases. Si ahora intentamos responder una de las cuestiones anteriores: ¿Cuál es el *alcance* (o *dominio de validez*) y las *limitaciones* de τ_1, incluyendo sus variaciones τ_{11} y τ_{12}?, nos encontramos con que τ_{11} resulta *demasiado costosa* para derivar, por ejemplo, la función:

$$f(x) = 5x^3 + 7x^2 - \sqrt{6x + x}$$

pero τ_{12} permitiría resolver el problema con un *coste razonable* si pudiésemos relacionar la derivada de la suma de dos o más funciones con las derivadas de las funciones sumandos. Aparece así la posibilidad de que la técnica τ_1 aumente extraordinariamente su *alcance* y surge, de manera natural, una tercera cuestión tecnológica: ¿la técnica τ_{11} permite relacionar la derivada de la función suma con las derivadas de las funciones sumandos?

La respuesta es positiva obteniéndose un resultado “tecnológico” (en el sentido que será utilizado para *producir* nuevas técnicas).

$$D(f + g) = D(f) + D(g)$$

En efecto, combinando este resultado tecnológico y la técnica $\square_{12}$, obtenemos una nueva técnica que denominaremos $\square_{13}$ que permite resolver la tarea conflictiva anterior. Por lo tanto campo de problemas continúa ampliándose.

El "coste" de la técnica $\square_{11}$ aumenta muy rápidamente cuando se trata de derivar funciones que son producto de otras funciones como, por ejemplo:

$$g(x) = (x^2 - 4x)^2; \quad h(x) = (x^4 + 2x + 7)(2\mathrm{x} + x^5); \quad \text{o incluso} \quad j(x) = x^9$$

Necesitamos técnicas más potentes y eficaces para disminuir dicho coste. En principio tenemos dos caminos posibles para generar las técnicas que precisamos. El primer camino consiste en utilizar $\square_{11}$ para obtener una relación entre la derivada de la función producto y las derivadas de las funciones factores. Se obtiene así la *regla del producto*:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

que, de manera análoga a como sucedía con la *regla de la suma*, genera una nueva técnica $\square_{14}$ que aumenta la potencia de la técnica $\square_{1}$ porque permite calcular las derivadas de productos de funciones siempre y cuando dispongamos de fórmulas para derivar las funciones que juegan el papel de factores:

$$\mathrm{D}((x^2 - 4x)(x^2 - 4x)) = 2(x^2 - 4x)(2x - 4)$$

$$\mathrm{D}((x^4 + 2x + 7)(2\mathrm{x} + x^5)) = (x^4 + 2x + 7)(2 + 5x^4) + (4x^3 + 2)(2\mathrm{x} + x^5)$$

$$\mathrm{D}(x^9) = x\mathrm{D}(x^8) + x^8 = x^2\,\mathrm{D}(x^7) + 2x^8 = \ldots = x^8\,\mathrm{D}(x) + 8x^8 = 9x^8$$

$$D((5x^3 \,\square\, 7x^2)(\sqrt{4x+2})) = (5x^3 \,\square\, 7x^2)\cdot D(\sqrt{4x+2}) + D(5x^3 \,\square\, 7x^2)\cdot\sqrt{4x+2}$$

$$D\left((2x-5x^3+x^7)\left(\frac{1}{3x-5}\right)\right)=(2x-5x^3+x^7)\cdot D\left(\frac{1}{3x+5}\right)+D(2x-5x^3+x^7)\left(\frac{1}{3x-5}\right)$$

Podemos decir, en resumen, que el tipo de funciones tales que el cálculo de su derivada es una tarea que forma parte de la OMP = **< τ_1 >** generada en S por la técnica τ_1 contiene, como mínimo, todas las funciones que pueden obtenerse como suma o producto de un número limitado de funciones polinómicas de grado “pequeño” (no mayor que 3) y funciones racionales e irracionales “sencillas” tales como las descritas anteriormente.

Las técnicas obtenidas en S como variaciones limitadas de τ_1 y que, por tanto, consideramos que forman parte de la OMP = **< τ_1 >,** continúan presentando graves limitaciones (esto es, un *coste excesivo*) incluso para derivar funciones tales como:

$$k(x) = (x^3 + x + 5)^{10}$$

y todavía más graves para realizar la tarea de derivar funciones potenciales de exponente no natural como, por ejemplo:

$$l(x)=\frac{6}{\left(x^4+9\right)^5} \qquad\qquad m(x)=\sqrt[3]{(x-2)^8}$$

3.2. Integración de la OMP = < τ_1 > en una OML minimal que podría existir en Secundaria

Las técnicas de **< τ_1 >** únicamente son “eficaces” (en el sentido de verdaderamente “*económicas*” y “*fiables*”) para derivar el producto de unas pocas funciones que, además, han de ser elementales. Existe un desarrollo de la técnica que es mucho más traumático pero tiene mucho mayor alcance. Dicho desarrollo parte de la constatación de la asimetría entre la regla para derivar una suma de funciones y la regla para derivar un producto. Para eliminar la dificultad del producto de funciones, podemos convertirlo en una suma tomando *logaritmos neperianos* antes de intentar calcular la función derivada[6]:

$$L(g(x)) = 2\, L(x^2 - 4x) \quad \Rightarrow \quad L'(g(x)) = 2\, L'(x^2 - 4x)$$

$$L\,(h(x)) = L(x^4 + 2x + 7) + L\,(2x + x^5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; L'(h(x)) = L'(x^4 + 2x + 7) + L'(2x + x^5)$$

$$L\,(j(x)) = 9\, L(x) \quad \Rightarrow \quad L'(j(x)) = 9L'(x)$$

De esta forma no sólo disminuye el coste de derivar un producto de funciones sino también el de derivar cualquier *función potencial* (a condición de que sepamos calcular la derivada del logaritmo neperiano de una función) como, por ejemplo:

$$L(l(x) = L(6(x^4 + 9)^{-5}) = L(6) - 5L(x^4 + 9) \Rightarrow L'(l(x) = 0 - 5L'(x^4 + 9)$$

$$L(m(x)) = L\left((x-2)^{\frac{8}{3}}\right) = \frac{8}{3} L(x-2) \Rightarrow L'(m(x)) = \frac{8}{3} L'(x-2)$$

La nueva dificultad está relacionada con el cálculo de la derivada del logaritmo neperiano de una función y abarca tres niveles de generalidad:

(i) ¿Cómo se relaciona la derivada de una función compuesta $f(x) = v(u(x))$ con las derivadas de las funciones componentes $v(y)$ y $u(x)$?

(ii) ¿Cómo calcular la derivada del logaritmo neperiano $L(f(x))$ de una función $f(x)$ cualquiera?

(iii) Y, en particular, ¿cuál es la función derivada de la función $L(x)$?

---

[6] Esta técnica existe en la Enseñanza Secundaria (De Guzman y otros, 1988, p. 239). Nunca se plantea, sin embargo, la *cuestión tecnológica* siguiente: ¿Es correcto tomar el logaritmo de funciones cualesquiera, cuyo signo desconocemos, para simplificar el cálculo de derivadas o para justificar ciertas reglas de derivación? ¿En qué casos se puede resolver el problema cambiando $L(f)$ por $L(|f|)$? Dado que estas manipulaciones se hacen con la intención de derivar $L(|f|)$, ¿qué sucede en los puntos x en los que $f(x)=0$?

La respuesta a la pregunta **(i)** la proporciona la *regla de la cadena*, que llamaremos τ_2:

$$f(x) = v(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Esta regla puede utilizarse directamente como *técnica* o bien puede jugar un papel *tecnológico* (en el sentido de productor de nuevas técnicas). Así, una vez hemos obtenido, aplicando la técnica τ_{11}, la función derivada de la función

$$f(x) = L(x)$$

$$D(L(x)) = L'(x) = \frac{1}{x}$$

y haber respondido a la pregunta **(iii)**, podemos utilizar "tecnológicamente" la regla de la cadena para obtener la *regla de derivación del logaritmo neperiano* de una función derivable cualquiera, con lo que responderemos la pregunta **(ii)**:

$$f(x) = L(u(x)) \Rightarrow D(f(x)) = L'(u(x)) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Denominaremos τ_3 a esta nueva técnica cuyo *dominio de validez* es enorme (incluye todas las funciones potenciales –no sólo las de exponente entero– y, como veremos, puede extenderse a las exponenciales). Su eficacia para calcular la derivada de funciones potenciales continúa siendo, sin embargo, limitada. Dada, por ejemplo:

$$f(x) = (x^4 + 2x + 2)^8$$

cuya derivación mediante la regla del producto presenta un *coste excesivo*, la nueva técnica τ_3 simplifica ligeramente los cálculos (aunque el coste *no es mínimo*):

$$f(x) = (x^4 + 2x + 2)^8 \Rightarrow L(f(x)) = 8\,L(x^4 + 2x + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'(f(x)) = 8\,L'(x^4 + 2x + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 8 \cdot \frac{4x^3 + 2}{x^4 + 2x + 2} \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot (x^4 + 2x + 2)^8 \cdot \frac{4x^3 + 2}{x^4 + 2x + 2}$$

análogamente, la técnica τ_3 permite calcular las funciones derivadas de las funciones potenciales siguientes, aunque con un *coste no minimal*:

$$l(x) = \frac{6}{\left(x^4 + 9\right)^5} \qquad\qquad m(x) = \sqrt[3]{\left(x - 2\right)^8}$$

Tenemos, en resumen, una OM que contiene ampliamente la OMP de la *derivación de sumas y productos de funciones elementales*:

$$\underline{<\tau_1> \subset <\tau_1, \tau_2, \tau_3>}$$

3.3. Completación relativa de la OML minimal generada por $<\tau_1, \tau_2, \tau_3>$

Hemos visto que la regla de la cadena, τ_2, utilizada directamente como técnica, permite calcular la derivada de las funciones potenciales de exponente entero (porque pueden ser interpretadas como funciones compuestas) y, también, las de exponente real no entero. Pero la complejidad de los cálculos y, sobre todo, la necesaria identificación de las funciones componentes hace aumentar excesivamente el "*coste*":

$$f(x) = v(u(x)) = (x^4 + 2x + 2)^8$$

$$u(x) = x^4 + 2x + 2 = y \Rightarrow u'(x) = 4x^3 + 2$$

$$v(y) = y^8 \Rightarrow v'(y) = 8\, y^7$$

$$f'(x) = v'(u(x))\, u'(x) = 8(x^4 + 2x + 2)^7\, (4x^3 + 2)$$

Cuando el exponente no es un número natural, la técnica τ_3 permite, como ya hemos dicho, calcular la función derivada pero su *coste no es minimal*:

$$m(x) = \sqrt[3]{(x-2)^8}$$

$$L(m(x)) = \frac{8}{3} \cdot L(x-2) \Rightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \Rightarrow m'(x) = \frac{8}{3} \cdot (x-2)^{\frac{8}{3}-1}$$

La rutinización de τ_3 con funciones potenciales (de exponente real cualquiera) sugiere una *fórmula de derivación*, que llamaremos τ_{31}, mucho más directa y sencilla para derivar esa clase de funciones.

$$f(x) = (u(x))^r \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r(u(x))^{r-1}$$

En este punto se empieza a poner de manifiesto la *potencia tecnológica* de τ_3 como generadora y justificadora de nuevas técnicas de derivación de funciones. Así, por ejemplo, τ_3 permite *justificar* de manera muy sencilla las reglas de derivación del producto y del cociente de funciones:

$$D(L(f \cdot g)) = D(L(f)) + D(L(g)) \Rightarrow$$

$$\frac{D(f \cdot g)}{f \cdot g} = \frac{D(f)}{f} + \frac{D(g)}{g} \Rightarrow D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

$$D\left(L\left(\frac{f}{g}\right)\right) = D(L(f)) - D(L(g)) \Rightarrow \frac{D\left(\frac{f}{g}\right)}{\frac{f}{g}} = \frac{D(f)}{f} - \frac{D(g)}{g} \Rightarrow D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot D(f) - f \cdot D(g)}{g^2}$$

Y, además, permite *generar nuevas técnicas* útiles para derivar nuevas clases de funciones como, por ejemplo, la clase de funciones que se expresan como producto:

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$$

Tomando logaritmos neperianos y derivando en los dos miembros se obtiene la fórmula:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right)$$

que consideraremos como la técnica τ_{32}. Esta técnica puede ser muy útil para derivar funciones del tipo:

$$f(x) = \sqrt{5x^4 - 7x^2} \cdot (3x^5 + 6x^4 - x^2 + x) \cdot \sqrt[3]{2x^6 - x^3 + x - 1}$$

que puede generalizarse si aparecen factores en el denominador de la función que se quiere derivar:

$$f(x) = \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_m(x)}$$

sin más que añadir algunos términos a la fórmula anterior:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} - \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} - \frac{g'_2(x)}{g_2(x)} - \ldots - \frac{g'_m(x)}{g_m(x)} \right)$$

Llegados a este punto en el desarrollo de la OM se plantea una cuestión tecnológica crucial: ¿el *alcance* o *ámbito de validez* de la técnica τ_3 se circunscribe a las *funciones potenciales*, esto es, a funciones derivables elevadas a un exponente real cualquiera? ¿Es posible utilizar una variante de τ_3 para derivar funciones *exponenciales*?

Dado que la técnica τ_3 se ha obtenido a partir de la regla de la cadena y de la derivada de la función $y = L(x)$ y dado que la función exponencial $y = e^x$ es la inversa de dicha función, parece lógico pensar que τ_3 será útil para derivar funciones exponenciales y, en efecto, aplicando τ_3 se obtiene:

$$D(L(e^x)) = D(x) = 1 \Rightarrow \frac{D(e^x)}{e^x} = 1 \Rightarrow D(e^x) = e^x$$

Surge, de esta forma, una nueva variación de la técnica τ_3, que llamaremos τ_{33} aplicable a las *funciones exponenciales* que tengan por exponente una función $g(x)$ derivable, esto es, $f(x) = b^{g(x)}$.

$$D(L(f(x)) = D(g(x)\cdot L(b)) = L(b)\cdot D(g(x)) \Rightarrow \quad f'(x) = b^{g(x)}\cdot L(b)\cdot g'(x)$$

ya sea aplicando directamente la fórmula o bien aplicando, paso a paso, la técnica τ_{33}.

El desarrollo de esta técnica nos lleva, de manera natural, a las funciones *exponenciales-potenciales* tales como:

$$f(x) = h(x)^{g(x)}$$

Esta técnica que denominaremos τ_{34} se llama, a veces, "método de *derivación logorítmica*". Tenemos, en resumen, una *OML minimal*[7] en torno a las técnicas de derivación de funciones en Secundaria que está generada por las técnicas τ_1, τ_2 y τ_3 junto con sus variaciones τ_{11}, τ_{12}, τ_{13}, τ_{31}, τ_{32}, τ_{33} y τ_{34}.

4. Algunas notas sobre el proceso de estudio en S de la OML = < τ_1, τ_2, τ_3 >

4.1. Una forma empezar a "*independizar*" *las técnicas de derivación de la nomenclatura* habitual sería interpretando una parábola como el conjunto de puntos del plano sobre los que se anula una función de dos variables. Podría continuarse considerando otras muchas gráficas de funciones como el conjunto de ceros de otras funciones de dos variables. Podría introducirse aquí la técnica de la *derivación implícita* e interpretar las derivadas parciales en un punto respecto a cada una de las dos variables.

[7] Afirmamos que se trata de una OM *local* porque postulamos que su estructura y su dinámica interna (tal como ha sido esbozada más arriba) permitirá llevar a cabo una actividad matemática no sujeta a las restricciones características de la rigidez típica de las OMP. Afirmamos, asimismo, que se trata de una OML *minimal* porque no parece que sea posible construir otra OML que estando contenida en ella contenga estrictamente todas las tareas y las técnicas de derivación que aparecen en S. En este punto sería preciso describir detalladamente la tecnología θ que la caracteriza como OML.

4.2. A fin de empezar a tomar en consideración la *interpretación del resultado* obtenido al aplicar una técnica de derivación como un aspecto importante del dominio de dicha técnica, es imprescindible considerar las expresiones analíticas de las funciones como *modelos matemáticos de situaciones* que pueden ser “*extramatemáticas*” (económicas, físicas, biológicas, de ingeniería, químicas, ...) pero que también pueden ser situaciones “*intramatemáticas*” (aritméticas, geométricas, probabilísticas, ...). Postulamos la OM en torno al estudio de la *variación de funciones* (dentro de la cual tomará sentido la OML en torno al cálculo de derivadas que hemos esbozado aquí) se construirá a partir de un proceso de modelización.

4.3. Para que el proceso de estudio tenga continuidad y no se rompa en actividades atomizadas deben plantearse, como uno de los objetivos principales del estudio, abordar *cuestiones tecnológicas* del tipo siguiente: de entre las diferentes técnicas de derivación aplicables a cada una de estas funciones, ¿cuál será la mejor en cada caso? (la más *económica*, la más *segura*, la *mejor justificada*).

Otro tipo de tareas, relacionado con el cuestionamiento tecnológico de las técnicas, consiste en proponer que el estudiante derive una función mediante dos (o más) técnicas diferentes y que a continuación compare (con determinados criterios) ambos procesos y ambos resultados. Así, por ejemplo, se le podría proponer que derivara la inversa de la función:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{4x + 5}$$

mediante dos técnicas diferentes. Ya sea calculando previamente la función inversa y después derivándola, o bien utilizando (más o menos implícitamente) el teorema de la función inversa. Esto nos llevaría a plantear *cuestiones tecnológicas relativas al alcance y las limitaciones de esta técnica* (¿para qué tipos de funciones podemos aplicar esta técnica?, ¿porqué no se puede utilizar en algunos casos?) y a *relacionar las técnicas de derivación con otras técnicas* tales como la que permite obtener la inversa local, la que sirve para caracterizar las funciones inyectivas, la que relaciona las gráficas de una función y con la de su inversa, la que relaciona la gráfica de una función con la gráfica de la función derivada, etc.

4.4. ¿En qué casos una técnica de derivación es *invertible* directamente para obtener una técnica útil para calcular primitivas? ¿Cómo se pueden caracterizar, por ejemplo, la clase de *funciones que tienen como derivada una función racional*? ¿Y las funciones racionales que son la derivada de una función "elemental"? ¿Cómo podríamos utilizar esta caracterización como técnica para calcular primitivas de cierto tipo de funciones?.

Referencias bibliográficas

Bosch, M. y Gascón, J. (1991): Prácticas en matemáticas: el trabajo de la técnica, comunicación presentada en el "*Tercer simposio internacional sobre Investigación en Educación Matemática*", Valencia.

Bosch, M. y Gascón, J. (1992): Una nova activitat docent: les pràctiques a la llicenciatura de matemàtiques, Actes de les Jornades celebrades a Bellaterra, abril de 1992 sobre *L'Autònoma i la innovació docent*, pp. 153-160.

Bosch, M. y Gascón, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

Chevallard, Y., Bosch, M. Y Gascón, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

De Guzmán, M. y Otros, (1988): *Matemáticas. Bachillerato 3*, Anaya: Madrid.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, *XIV Jornadas del SIIDM*, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino.htm

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002): Ausencia de Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).