SOBRE CONJETURAS Y DEMOSTRACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CÉSAR SÁENZ CASTRO

Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Almería, Septiembre 2001

SOBRE CONJETURAS Y DEMOSTRACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

❧

CÉSAR SÁENZ CASTRO
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

RESUMEN

En este trabajo establecemos la siguiente hipótesis: el sistema conjeturas-pruebas-refutaciones constituye la lógica del descubrimiento matemático escolar; bien entendido que en las matemáticas de la enseñanza secundaria el énfasis no puede situarse en la frontera móvil que Lakatos (1978) ha señalado en el trabajo de los matemáticos profesionales, esto es, la frontera demostraciones/refutaciones sino más bien en la frontera anterior, conjeturas/demostraciones. Dicho sistema supera didácticamente al enfoque unidimensional de demostración como prueba formalizada, enfoque tradicional del estilo deductivista en la enseñanza de las matemáticas.

Esta hipótesis surge del análisis de las dificultades epistemológicas, cognitivas y didácticas del concepto de demostración (en particular, de la demostración por reducción al absurdo) y de la revisión de algunos estudios experimentales sobre la práctica escolar de la demostración.

ABSTRACT

In this work we establish the following hypothesis: the conjectures-proofs-refutations system constitutes the logic of school mathematical discovery; on the understanding that in secondary school mathematics the emphasis cannot be placed in the mobile frontier pointed out by Lakatos (1978) about the work of professional mathematicians, that is, no the proof/refutations but more properly in the previous frontier, conjectures/proofs. Such system, in didactic, exceeds the unidimensional feature of proof as formalized demonstration, traditional deductivist style overview of the mathematics education.

This hypothesis emerges from the analysis of epistemological, cognitive, and didactic difficulties about the concept of proof (in particular, the proof by reduction to absurd) and the review of some experimental studies about the school practice of proof.

INTRODUCCIÓN

La demostración es la base del edificio matemático. En el empeño por poner bases sólidas a este edificio los matemáticos se encontraron con la incompletitud y la inconsistencia de la matemática. El concepto de demostración ha variado con el tiempo. La demostración rigurosa que hoy se requiere en cualquier investigación resultaría excesiva para eminentes matemáticos anteriores al siglo XIX. En definitiva, hay controversias sobre la naturaleza de la demostración matemática y problemas con el propio concepto: estas controversias y problemas (con consecuencias didácticas) serán objeto de análisis en el apartado 2 de este artículo.

Nos interesa mucho enfatizar las relaciones, en el quehacer matemático, entre el razonamiento demostrativo y el razonamiento plausible (en el sentido de Polya), entre la demostración y la intuición. Partimos de la afirmación de Wilder (1944): "Demostrar es contrastar, poner a prueba los productos de nuestra intuición... Es obvio que no poseemos y probablemente nunca poseeremos ningún criterio de demostración que sea independiente del tiempo, de la cosa que ha de demostrarse o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplea. En estas condiciones, lo sensato parece ser el admitir que no hay, generalmente, eso que se llama absoluta verdad (demostración) en matemáticas, piense lo que piense el público".

Es necesario insistir en que los matemáticos hacen sus descubrimientos escalonadamente y atendiendo más bien a lo "sustantivo" que a lo formal, prevaleciendo este último aspecto en lo que respecta a la presentación sistemática de resultados, a la reconstrucción y a la instrucción. Las demostraciones no suelen ser un acto de visión o de corazonada. El cómo se hace la conjetura en una primera instancia, cómo se construye la demostración o cómo se llega a entender, son cuestiones que pertenecen a la lógica del descubrimiento. Este proceso de conjetura, prueba, refutación y modificación relaciona la génesis de la demostración con historia y contexto social y cultural. Un todo en devenir dialéctico que, como tal, debe ser contemplado en la enseñanza de las matemáticas.

El reconocimiento de que la intuición, la conjetura intuitiva, desempeña un papel fundamental en la consecución de las verdades matemáticas y de que la demostración desempeña un papel de apoyo justificativo y explicativo nos sugiere una propuesta didáctica de la demostración que consiste fundamentalmente en la presentación de un sistema de conjetura, pruebas y refutaciones como base del trabajo con el concepto de demostración en la enseñanza, concretamente en la educación secundaria. Esta propuesta la presentamos en el apartado 3, a partir del análisis de tres problemas seleccionados de un trabajo de investigación de Hernán (1982).

La demostración por reducción al absurdo es un método de razonamiento deductivo de especial transcendencia en el quehacer matemático y presenta una problemática epistemológica, cognitiva y también didáctica de sumo interés para la investigación en educación matemática. Por ello, dedicamos el apartado 4 a profundizar en esta problemática. A la luz de estos problemas y de la indagación sobre el tratamiento tradicional de este tópico en la enseñanza secundaria establecemos el bosquejo de una nueva didáctica de la demostración por reducción al absurdo

SOBRE LA NATURALEZA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Si en algo coincide la opinión pública con la opinión de los matemáticos es que la demostración es muy importante en matemáticas. Por demostración se entiende el procedimiento en que partiendo de unas ciertas hipótesis y mediante razonamientos lógicos se consigue la conclusión deseada, muchos de los resultados de *Los Elementos* de Euclides están conseguidos de esta manera. Un caso especial es la demostración por reducción al absurdo, de la que hablaremos en el último apartado de este artículo: se supone que lo que se desea demostrar no es cierto y mediante una sucesión de razonamientos lógicos y con el uso de las hipótesis que se hayan establecido se llega a una contradicción flagrante; la consecuencia de esta contradicción es la certeza de la tesis. El propio Euclides demostró que el número de primos es infinito partiendo de que solamente había una cantidad finita de ellos.

Cuando se trata con el infinito algunas demostraciones usan el Principio de Inducción. Para poder usarlo la propiedad que se quiere demostrar tiene que estar ligada a los números naturales. Se comienza demostrando el resultado para un número pequeño, usualmente el 1. Después se asume que el resultado es cierto para un número cualquiera n y se intenta deducir que también será cierto para el número siguiente $n+1$. Si esto se consigue, la propiedad queda demostrada para los infinitos números.

Hernández (1997) distingue entre demostraciones matemáticas sencillas y complicadas. Algunas sencillas ni siquiera necesitan palabras. Por ejemplo Nelsen (1993) da la siguiente demostración gráfica de la fórmula para la suma de los n primeros números impares: $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

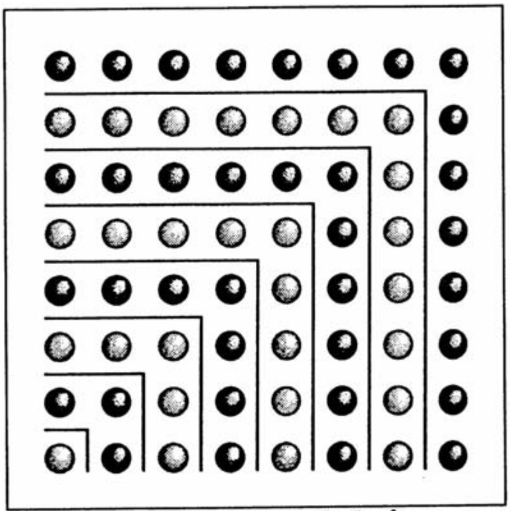


Figura 8. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Por supuesto que hay demostraciones muy complicadas, como la del célebre Teorema de Fermat (1637, aproximadamente): "Es imposible que un cubo pueda ser escrito como suma de dos cubos o una cuarta potencia pueda ser escrita como suma de dos cuartas potencias o, en general, para cualquier número que sea una potencia mayor que la segunda escribirlo como suma de dos potencias similares". Eminentes matemáticos afrontaron el problema pero ninguno lo consiguió hasta que en 1995 Wiles, matemático inglés que trabaja en la Universidad de Princeton, publicó en *Annals of Mathematics* un artículo de 100 páginas con la demostración (el artículo va acompañado de otro más corto que también forma parte de la demostración). Un grupo reducido de matemáticos se repartió el trabajo de comprobar que todas las partes del artículo de Wiles eran correctas antes de que fuera aceptada su publicación.

Una cuestión que suscita gran controversia en la comunidad matemática es la aceptación de una demostración realizada con un ordenador. La cuestión surgió cuando en 1976 Apple y Haken, matemáticos de la Universidad de Illinois, presentaron una demostración con un ordenador de una conjetura contra la que se habían estrellado los matemáticos durante más de 100 años: El problema de los 4 colores consiste en demostrar que todo mapa en un plano puede ser coloreado usando sólo cuatro colores; se exigen los siguientes requisitos: a) dos regiones que tienen frontera común no deben tener el mismo color; b) si dos regiones solamente tienen en común un punto pueden ser coloreadas del mismo color;

c) las regiones pueden tener cualquier forma pero cada una de ellas debe ser un solo trozo conexo. Apple y Haken redujeron el problema a comprobar que cerca de 1800 mapas de tipos esencialmente diferentes se podían colorear con cuatro colores; si lo hacían ellos no terminarían en mucho tiempo, programado en una máquina el resultado se consiguió en varios días.

Hernández (1997) se pregunta si es ésta una verdadera demostración. Argumenta que aunque se pueda repetir el experimento en varias máquinas no podemos estar seguros de que no se haya cometido un fallo en su diseño de modo que el resultado sea sólo aparentemente correcto. Cita el error de una de las primeras remesas de procesadores Pentium del que nadie se hubiera dado cuenta a no ser por los experimentos realizados por un matemático con números muy grandes para comprobar algunas propiedades que él conocía de antemano ¿Qué sucedería si este error no se descubre y alguien presenta una demostración que hace uso fundamental de ese procesador? La demostración con ordenador es una forma diluida de demostración. Mientras que unos la usan y apoyan, otros (el mismo Wiles) prefieren encontrar argumentos tradicionales aunque utilicen el computador para buscar sus conjeturas y hacerse una idea de qué caminos pueden conducir a la demostración.

Hasta el S. XX, la demostración matemática fue un proceso supuestamente claro e indiscutible. Como dice Kline (1985), había sido ignorada durante siglos pero los matemáticos eran absolutamente conscientes de este hecho. El concepto estaba ahí y era considerado como el paradigma y la referencia a la que se adhirieron los matemáticos más o menos explícitamente.

¿Qué fue lo que produjo preocupación e incluso enfrentamiento por la demostración? Los matemáticos se dieron cuenta de que los principios de la lógica tal como los codificó Aristóteles y tenidos como verdades absolutas durante 20 siglos, eran producto de la experiencia tanto como lo eran los axiomas de la geometría euclídea. A partir de aquí se produjo cierta intranquilidad sobre lo que son unos principios sólidos. Así, los intuicionistas se creyeron justificados para restringir la aplicación de la ley del tercio excluso.

Un segundo problema relativo a la demostración, que surgió con la escuela logicista, es el de qué abarcan los principios de la lógica. Aunque Russell y Whitehead no dudaron en introducir los axiomas de infinitud y elección como axiomas de la lógica en la primera edición de los *Principia Mathematica*, en la segunda esos dos axiomas no eran citados al comienzo y su utilización era específicamente mencionada cuando se necesitaba para probar ciertos teoremas.

Otro problema es el concepto de existencia. Por ejemplo, una demostración de que toda ecuación polinómica debe tener al menos una raíz, establece un teorema de existencia. Cualquier demostración que sea consistente es aceptable para los logicistas, formalistas y conjuntistas. Sin embargo, aún cuando una demostración no utilice la ley del tercio excluso, puede no dar un método para calcular el objeto cuya existencia se demuestra. De aquí que tales demostraciones de existencia sean inaceptables para los intuicionistas que por esta razón son renuentes a aceptar los cardinales y los ordinales transfinitos (además, no son objetos intuitivos).

Siguiendo a Kline (1985) diremos que las matemáticas se desarrollan a través de una serie de grandes avances intuitivos que son establecidos no de una sola vez sino mediante una sucesión de correcciones de descuidos y errores hasta que la demostración alcanza el nivel de demostración aceptado en la época correspondiente. Ninguna demostración es definitiva. Nuevos contraejemplos socavan las viejas demostraciones. Las demostraciones son entonces revisadas con lo que se consideran erróneamente probadas para siempre. Pero la historia dice que lo único que esto significa es que aún no ha llegado la hora de un examen crítico de la demostración. A menudo tal examen es deliberadamente aplazado porque los matemáticos están mucho más interesados en establecer sus propios teoremas que en encontrar fallos en los resultados existentes.

De hecho, los matemáticos no confían en las demostraciones rigurosas hasta el punto que generalmente se supone. La intuición puede producir incluso más satisfacción y seguridad que la lógica. Kline (1985) afirma que una demostración rigurosa no significa nada para un matemático si el resultado no tiene sentido desde un punto de vista intuitivo. Si no lo tiene, examinará muy críticamente la demostración. Si la demostración le parece correcta entonces tratará de encontrar lo que está equivocado en su intuición. Los matemáticos desean saber la razón interna del éxito de una cadena de silogismos y sienten que un teorema debe ser verdadero antes de que se haya logrado su demostración lógica; por eso, con frecuencia se contentan con una mera indicación de la demostración, como de hecho hacen, a veces, Fermat y Newton.

El surgimiento de filosofías de las matemáticas opuestas entre sí cada una de las cuales insiste en sus propios criterios de demostración, ha fomentado el escepticismo sobre el valor de la misma pero los ataques a la idea de demostración comenzaron a aparecer antes. Así ya Hardy en 1928 decía: "No hay estrictamente hablando algo que pueda llamarse una demostración matemática... no podemos, en último análisis, hacer otra cosa que señalar, indicar;.....las demostraciones son gas, florituras retóricas diseñadas para afectar a la psicología, dibujos en la pizarra durante las explicaciones, estratagemas para estimular la imaginación de los alumnos" .

Eddington decía una vez: "La demostración es un ídolo ante el que los matemáticos se torturan". Preguntas pertinentes serían: ¿Por qué han de continuar haciéndolo?, ¿Deberían los matemáticos abandonar la demostración deductiva y recurrir simplemente a los argumentos convincentes e intuitivamente sólidos como los de las ciencias físicas?

Nadie que haya estudiado las contribuciones de las matemáticas al pensamiento humano sacrificaría el concepto de demostración. Hay que admitir que la lógica desempeña un papel. Kline (1985) utiliza una analogía: Si la intuición es la señora y la lógica la sirvienta, la sirvienta ha de tener algún poder sobre la señora. La lógica sujeta a la intuición desenfrenada, la intuición puede ser engañosa y la demostración nos proporciona una seguridad relativa. En palabras de Wilder (1944), la demostración es un proceso de comprobación que aplicamos a lo que la intuición nos sugiere. Parece que la demostración sí parece desempeñar un papel importante: minimiza el riesgo de contradicciones. En este sentido, Weil dice que la lógica es la higiene que el matemático practica para mantener sus ideas sanas y fuertes.

En definitiva, el sucinto repaso que hemos dado en esta apartado al concepto de demostración nos muestra que es un concepto poliédrico, complejo, controvertido histórica y epistemológicamente. Ello debe tener consecuencias didácticas en la enseñanza de las matemáticas, consecuencias que abordaremos en los siguientes apartados.

SOBRE EL SISTEMA CONJETURAS-PRUEBAS-REFUTACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Polya (1966) explica que aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo pero apoyamos nuestras conjeturas, nuestras intuiciones por medio del razonamiento plausible. Una prueba matemática es razonamiento demostrativo pero la evidencia intuitiva del físico, la circunstancial del abogado, la documental del historiador y la estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible.

Hay grandes diferencias entre las dos clase de razonamiento. El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, y está más allá de toda controversia. El razonamiento plausible es azaroso, discutible y provisional. Aquél es incapaz de producir un conocimiento esencialmente nuevo sobre el mundo; para aprender algo nuevo necesitamos el razonamiento plausible que es la única clase de razonamiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana. El razonamiento demostrativo tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica (formal o demostrativa), que es la teoría del razonamiento demostrativo. Los modelos del razonamiento plausible son fluidos y no hay teoría de este razonamiento que pueda ser comparada a la lógica demostrativa en claridad o que tenga un consenso comparable.

Sabemos que las matemáticas ofrecen una excelente oportunidad de aprender el razonamiento demostrativo pero los programas usuales de las escuelas no ofrecen una oportunidad semejante de aprender el razonamiento plausible. Desde luego hay que aprender a probar pero también hay que aprender a intuir. Lo importante no será tanto señalar el carácter axiomático subyacente como el carácter de inferencia, mejor aún de explicación, que tiene una demostración. Esto es, demostrar algo será llegar a ello a partir de otros supuestos, generalmente de nivel más bajo, pero sin estar excesivamente preocupado por una rígida ordenación de los niveles. La tarea principal será la de subrayar ese carácter explicativo y no la de llegar a los más elementales supuestos o axiomas.

Los dos razonamientos (demostrativo y plausible) no se contradicen entre sí, se completan uno al otro. En el demostrativo lo principal es distinguir una prueba de una intuición, una demostración válida de un intento sin validez. En el razonamiento plausible lo importante es distinguir entre intuiciones, unas más y otras menos razonables.

Un estudiante seriamente interesado en matemáticas, que pretenda dedicar a ellas su vida, debe aprender el razonamiento demostrativo; es su profesión y el signo distintivo de su ciencia. Sin embargo, para obtener un éxito real debe también aprender el razonamiento plausible; de él dependerá su labor creadora. El estudiante no volcado a las matemáticas debería aficionarse también al razonamiento demostrativo: quizá tenga poca necesidad de usarlo directamente pero con él adquirirá una destreza para identificar las supuestas evidencias de todas clases con que se enfrentará en la vida moderna. Sin embargo, en todos sus esfuerzos necesitará del razonamiento plausible.

Como corolario, diríamos que hay que hacer demostraciones en la clase de matemáticas. Y ello porque la especial contribución de las matemáticas y quizás la justificación última para incluirlas en los programas está en que no tratan de hechos aislados sino que las verdades de las matemáticas dependen lógicamente unas de otras. Este corolario no implica que haya que dedicarse a demostrar lo obvio como sucede a veces en nuestras clases, eso hay que evitarlo.

Hernán (1982) ofrece un esquema operativo para que un estudiante de matemáticas aprenda las dos clases de razonamiento. Afirma que, desde un punto de vista heurístico, pueden señalarse en el proceso de demostración las siguientes etapas:

- descubrimiento de la regularidad de una situación
- sistematización de los ejemplos
- conjetura
- crítica de la conjetura (excepciones, falta de generalidad, imprecisión, casos límite,...)
- nueva conjetura
- demostración de la conjetura
- crítica de la demostración

En el marco de este esquema procesual son varias las preguntas pertinentes para la investigación en Didáctica de las Matemáticas:

- ¿Qué etapas son alcanzadas por los alumnos y cuándo?
- ¿Es la etapa “natural” en la educación secundaria la conjetura o lo es la demostración?
- ¿Qué condiciones han de cumplirse para el aprendizaje de estos aspectos procesuales de las matemáticas?
- ¿Pueden conseguirlo la mayoría de los alumnos?

Vamos a intentar dar algunas respuestas a estas preguntas mediante el análisis de tres problemas que tienen como objetivo preferente estudiar el sistema conjetura-demostración, utilizado por estudiantes de secundaria.

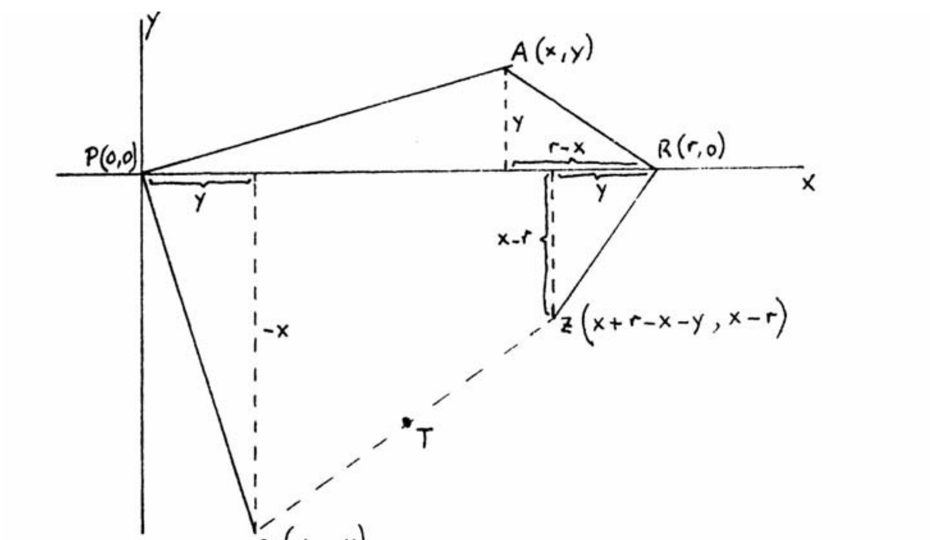
1. El tesoro y el abedul

Roberto ha encontrado un pergamino que muestra una isla desierta donde está enterrado un tesoro. En dicha isla hay tres árboles: un abedul, un roble y un pino.

El pergamino dice así: " Desde el abedul, camina hacia el roble contando los pasos: Bajo el roble debes girar un ángulo recto hacia la derecha y dar el mismo número de pasos. Marca una cruz en el suelo. Vuelve al abedul y camina hacia el pino contando los pasos. Bajo el pino gira un ángulo recto hacia la izquierda y camina el mismo número de pasos. Marca otra cruz en el suelo. Cava en el punto medio de las dos cruces. Allí está el tesoro."

Al ir a buscar el tesoro, Roberto encontró que el abedul había desaparecido, sólo quedaban el pino y el roble. ¿Podrías ayudarle a encontrar el tesoro?

El trabajo fue propuesto a un grupo de 14 alumnos de 3º de BUP, para realizar en casa sin limitación de tiempo y de forma voluntaria. Hubo en la realización de la tarea conjeturas ("el tesoro parece estar en tal punto..."), tanteos, comprobaciones pero ninguna demostración. Es destacable que ninguno de los alumnos tuvo la idea de emplear el método de las coordenadas, cuando se había trabajado ya la geometría analítica.



Hay varias consecuencias didácticas que conviene explicitar:

Demostrar sin intuiciones previas o sin conjeturas trabajadas es una coartada para tener ocupada a una clase. En el caso del problema del tesoro la demostración añade algo porque ya se tiene la intuición del resultado. Es entonces cuando produce una apertura metodológica y una satisfacción intelectual.

Las demostraciones han de ser “intuitivamente” convincentes. Debería procurarse excluir de ellas es carácter “teológico” y hermético que poco contribuye a animar hacia las matemáticas a la inmensa mayoría de los estudiantes.

Hay que educar al alumno en el gusto por la certeza y el alumno ha de ser consciente de la necesidad de demostración. Por ejemplo, en el problema del tesoro es indudable que el procedimiento de resolución utilizando coordenadas demuestra que el tesoro está donde está y justifica y explica por qué la desaparición del abedul no afecta a la búsqueda del tesoro. Hay que insistir con el alumno que el procedimiento *demuestra, justifica y explica.*

El gusto por la certeza y el sentimiento de la necesidad de demostración no son cosas que puedan identificarse (desde un punto de vista psicológico) y las estrategias didácticas para alcanzar uno u otro no han de presentar las mismas características. La convicción de la certeza aparece muy generalmente entre estos alumnos bien cuando han hecho una conjetura razonable, bien cuando la casualidad o la suerte les ha llevado a un lugar de su campo de visión lo suficientemente prominente como para considerarlo único y en el que se detienen como el punto deseado de llegada, sin preguntarse por las condiciones que le confieren ese valor. Piensan, no sin razón, que lo importante es haber hallado el tesoro, no el modo de hallarlo.

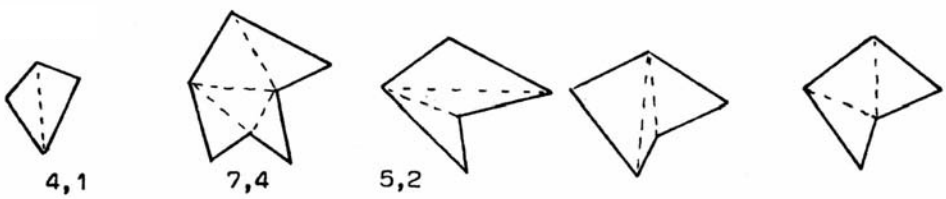
2. Polígonos

1ª Parte:

a) *Dibuja varios polígonos. Dibuja en cada uno de ellos tantas diagonales como puedas (sin que ninguna corte a otras salvo en los vértices).*

b) *¿Ves alguna relación entre el número de lados del polígono y el número de diagonales que no se cortan?*

2ª Parte:



Parece que el número de diagonales (que no se cortan) que pueden trazarse en un polígono es igual al número de lados menos tres. ¿Es cierta esta afirmación para todos los polígonos? Investígalo a fondo y luego expón tus conclusiones y tus razones.

Con el objeto de evitar que la 2ª parte del enunciado influyese en la primera, la 2ª parte sólo era entregada al alumno una vez que éste había dado por terminada la primera.

Hernán (1982) resume los resultados conseguidos:

	Conjetura	Crítica de la conjetura	Demostración	Crítica de la demostración
De los 15 alumnos de 2ºBUP	11	2	5	0
De los 7 de 3ºbuenos	6	0	4	0
De los 18 de 3º malos	2	0	1	0
De los 29 de COU	23	6	1 (y otros 4 intentos incompletos)	0

	Han dibujado sólo polígonos convexos	Han trazado diagonales sólo radiales
De los 15 de 2º	11	10
De los 7 de 3º	7	6
De los 29 de COU	19	12

En la 2ª parte del problema, en la que ya se daban dibujados polígonos no convexos ha sido muy frecuente utilizar la terminología "polígono regular" para significar polígono convexo y "polígono irregular" para significar polígono no convexo.

A título explicativo diremos que Hernán considera crítica de la conjetura ("el número de diagonales es tres unidades inferior al número de lados") la realización de preguntas como "¿He contado todas las diagonales?", "¿Qué es una diagonal?" En los dos tipos de demostración que aparecieron en los trabajos, la "radial" y la de "triangulación", la crítica de la demostración podría tomar las siguientes directrices: el procedimiento de diagonalización radial ¿es el único posible?, si sigo otro procedimiento ¿obtendré otro resultado? Se podrían hacer preguntas análogas para el procedimiento de triangulación.

Hay varias consecuencias didácticas que se desprenden del análisis de este problema:

El concepto ingenuo de diagonal (segmento interior al polígono y que une dos vértices no consecutivos) y el concepto ingenuo de polígono (polígono convexo) se han de transformar en conceptos mejor definidos. Pero la definición no debe venir de la nada, caer sobre el alumno que no ha participado en ella.

Dice Lakatos (1978): "En el estilo deductivista, las definiciones generadas en el curso de las demostraciones son desgajadas de sus ´demostraciones antepasadas´, se presentan esas definiciones de un modo artificial y autoritario como llovidas del cielo. Se ocultan así los contraejemplos globales que indujeron a su descubrimiento. El estilo heurístico, por el contrario, ilumina estos factores. Pone de relieve la situación-problema: subraya la ´lógica´ que dio nacimiento al nuevo concepto".

La crítica de la definición y la crítica de la conjetura van, pues, unidas. Por otro lado, la crítica de la definición y de la conjetura pueden llevar a la crítica de la demostración aunque, en el caso del problema de los polígonos, la crítica de la demostración no ha sido intentada por nadie. Es como si encontrada primero la conjetura y después la demostración de ella, la gratificación psicológica que ello supone inhibe la posterior crítica.

Son muchos los alumnos que estiman como demostración la mera reafirmación de la conjetura. La evidencia empírica parece eximirles de la demostración. Sin embargo, la conjetura es anterior y diferente a la demostración. La práctica tan habitual según la cual el profesor expone demostraciones a alumnos que no han tenido ocasión de hacer conjeturas destina a los alumnos a mirar, hurtándoles la práctica matemática real que es hacer. Y la acción, es decir, el compromiso matemático del sujeto, está en conjeturar y demostrar él. Después puede ser ayudado en la crítica de sus propias conjeturas y demostraciones.

Para criticar los trabajos de otros (los teoremas de los libros de texto) no hay lugar ni tiempo (salvo casos excepcionales) en la enseñanza secundaria. En este punto es ilustrativo reproducir la historia de Mantecón en las memorias de Buñuel (Mi último suspiro): "Recuerdo también las clases de Filosofía, en las que el profesor nos explicaba, con una media sonrisa compasiva, la doctrina del pobre Kant, por ejemplo, que se había equivocado tan lastimosamente en sus razonamientos metafísicos. Nosotros tomábamos notas apresuradas. En la clase siguiente, el profesor llamaba a uno de los alumnos y le decía: ¡Mantecón! ¡Refúteme a Kant!. Si Mantecón llevaba la lección bien aprendida, la refutación duraba menos de dos minutos".

En definitiva, queda claro, a nuestro juicio, que una vez que el estudiante ha conseguido poner en pie una conjetura fuerte muestra una gran proclividad a mantenerse en ella, a considerar que tiene el carácter de una demostración. Y cuando ha elaborado una demostración (o una explicación) de la conjetura parece haber agotado sus recursos. La crítica de las demostraciones propias (en los pocos casos en que tiene lugar) es un proceso ulterior y metodológicamente muy distinto. Conviene advertir que la capacidad de falsar nuestras propias hipótesis es una destreza de alto nivel cognitivo, sujeta a fuertes sesgos del sistema de procesamiento humano (por ejemplo, el sesgo confirmatorio); esta cuestión la trataremos en el apartado 4 al analizar la tarea de las cuatro tarjetas.

3. El número de regiones

N rectas distintas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos distintos. Se parte así el plano en p regiones distintas. Decir si:

$P = 2n$

$P = 2n+1$

$P = n(n+1)/2 + 1$

$P = 4n-5$

Ninguna de esas cosas.

Da razones

22 alumnos de 2ºBUP y 14 alumnos de 3ºBUP, de forma voluntaria, resuelven el problema en casa sin marcarles límite de tiempo.

En cuanto a los resultados, 20 alumnos de 2º deciden que la 3ª expresión es la correcta y 2 afirman que "ninguna es válida" (después de hacer comprobaciones equivocadas). La comprensión correcta del papel de los contraejemplos parece, pues, sólidamente adquirida. Hay 10 alumnos que se limitan a dar por válida la fórmula 3ª mediante la técnica comprobación-contraejemplo. Hay otros 9 que intentan dar algún tipo de demostración, es decir, que quieren aportar otras razones independientes de esa comprobación. Ninguno consigue, sin embargo, una demostración acabada, sino que se limitan a una inducción incompleta.

Por lo que respecta a los alumnos de 3º, 12 consideran la 3ª expresión como válida. De los 2 restantes, uno dice que todas las fórmulas son válidas y el otro que ninguna lo es. 4 de los 12 se dan por satisfechos con la comprobación-contraejemplo. Los otros 8 intentan demostraciones, varias de ellas de gran calidad y alguna muy original.

En cuanto a las implicaciones didácticas de estos resultados, conviene enfatizar el dato de que la diferencia entre comprobación y demostración y la consiguiente necesidad de demostración fue apreciada por 9 alumnos de 2º y por 8 alumnos de 3º. Sin embargo, las razones dadas por los alumnos pertenecen más a la categoría de explicaciones que a la de demostraciones. Dicho de otro modo, se acepta la plausibilidad de la conjetura "cada nueva recta añade tantas regiones a las que ya había como rectas haya" pero ninguno de los alumnos demuestra su conjetura de manera suficientemente satisfactoria, desde el punto de vista lógico. Con lo que vuelve a confirmarse que una vez descubierta por uno mismo la conjetura, la necesidad de una demostración ´acabada´ es un paso bien distinto y de otro orden de dificultad.

La profundidad que muestran los mejores trabajo de 3º es superior a la que logran sus homólogos de 2º. Hay motivo para pensar que una razón para ello es la superior potencia de atención y concentración en una tarea altamente abstracta de la que, en igualdad de condiciones, son capaces los alumnos de 3º.

Como resumen del análisis que acabamos de hacer de los tres problemas, podemos decir que las tareas matemáticas de explorar, formular preguntas, conjeturar y reorganizar las conjeturas, son las áreas más atractivas y aquellas por las que el aprendizaje de las matemáticas puede ser de utilidad para todos. Con todo, es cierto que el pensamiento reproductivo, es decir, el hábito de usar respuestas aprendidas, tiene dos ventajas: es más fácil de enseñar y es más fácil de someter a exámenes. Mientras que el pensamiento productivo, que consiste en crear nuevas situaciones y en usar nuevas organizaciones, es más difícil de enseñar, requiere más tiempo y necesita de otros esquemas de temporalización de la enseñanza y estructura de las clases. Con estos datos hay que contar a la hora de la toma de decisiones didácticas.

En todo caso, con estos tres ejemplos queda bien establecida, a nuestro juicio, la necesidad de trabajar el sistema de conjeturas- pruebas- refutaciones, como metodología de encuentro del razonamiento demostrativo con el razonamiento plausible en la enseñanza secundaria.

OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

Obstáculos epistemológicos

Mediante una demostración en matemáticas se trata de hacer una reconstrucción, a la medida, de ciertas parcelas de pensamiento con el fin de poder comunicar la validez de la construcción o existencia, según los principios filosóficos asumidos, de un objeto abstracto. Usamos una reconstrucción lógica para hacer demostraciones objetivas, que se puedan repetir y contrastar inter-subjetivamente. Poincaré (1902) considera que el entendimiento en su proceder requiere de algún acto adicional: "Es preciso aceptar entonces que el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora y que, por consiguiente, se distingue del silogismo" .

Un caso singular entre los métodos de razonamiento utilizados para transmitir la validez del discurso matemático, que merece una atención especial, es el de *reducción al absurdo.* Se admite normalmente, a veces sin reflexionar demasiado, por la mayoría de los matemáticos y profesores de matemáticas, que para probar la proposición A se supone que es cierta –A, y si sacamos de esta suposición cualquier absurdo, cualquier contradicción con las verdades ya establecidas, se concluye que A es cierta.

El esquema de razonamiento por reducción al absurdo se identifica con el razonamiento hipotético: Sea A el enunciado que pretendemos deducir a partir de los enunciados ya admitidos (T). Suponemos que (-A) entra a formar parte de la base establecida con lo que los enunciados admitidos pasan a ser T+(-A). La estrategia de demostración consiste en deducir un enunciado B formalmente contradictorio con un enunciado ya deducido en T. Es decir, se obtiene en T+(-A) un B tal que su negación (-B) está ya probada en T. Llegados aquí, concluimos que A es deducible en T.

Ahora bien, si ((-A)→B) es deducible, resulta por la regla de inferencia del modus tollens que ((-B)→-(-A)) se puede deducir, con lo cual -(-A) es un teorema de T. En todo rigor, si de la hipótesis suplementaria (-A) deducimos un enunciado contradictorio con cualquier enunciado ya establecido, entonces la negación de la negación de A es deducible. Para concluir la deductibilidad de A se necesita asumir alguna hipótesis suplementaria como por ejemplo -(-A)←→A, lo que los intuicionistas rechazan sin remisión. Esta cuestión es una de las que genera una ruptura dentro de la epistemología de las matemáticas: para un formalista, el enunciado A es absolutamente sustituible por el enunciado -(-A) mientras que para un intuicionista A y -(-A) son cosas distintas.

Obstáculos cognitivos

El ser humano, analizado como un sistema de procesamiento de información, se enfrenta a un problema masivo de reducción de información. Tanto la formación como la manipulación de representaciones mentales deben realizarse de un modo muy selectivo (de información) usando alguna forma de procesamiento heurístico. De manera similar, debemos tener estrategias de búsqueda selectivas, inteligentes, para recuperar de nuestra vasta memoria de conocimientos factuales y procedimentales justo aquellos ítems relevantes al problema a resolver. Por ello es poco sorprendente que un sistema cognitivo tal sea vulnerable a sesgos y errores.

Evans (1989) analiza en profundidad varios estudios experimentales con tareas de razonamiento deductivo e inductivo muy conocidas en la psicología cognitiva, que son consistentes con lo que acabamos de decir. Así, frecuentemente la gente es capaz de comprender y usar bien un principio lógico en una situación e ignorarlo o usarlo mal en otra situación. Otras veces, particularmente en tareas de razonamiento estadístico, parece que los sesgos pueden reflejar una comprensión defectuosa de los principios implicados (una revisión de algunos sesgos del razonamiento probabilístico puede encontrarse en Sáenz, 1998).

La Tarea de Selección de Wason (1966), también conocida como tarea de las cuatro tarjetas, es un buen ejemplo de un tipo de sesgo del razonamiento deductivo (base de la demostración) que viene originado por no aplicar bien un principio que, sin embargo, es comprendido. Efectivamente, aunque los sujetos tengan una razonable comprensión de las condiciones de verdad de un enunciado condicional (A→B), fracasan sistemáticamente en la formulación de una estrategia efectiva para verificar dichas condiciones en la versión estándar de la tarea que dice así:

Hay cuatro tarjetas. Cada tarjeta tiene una letra impresa en un lado y un número impreso en el otro. Dos de las tarjetas muestran letras (una consonante y una vocal) y las otras dos muestran números (uno par y otro impar), así:

A	*H*	*4*	*7*

Se enuncia la siguiente regla: "Si una tarjeta tiene una vocal en un lado, entonces tiene un número impar en el lado opuesto". ¿A qué tarjetas hay que darle la vuelta obligatoriamente para saber si la regla es verdadera o falsa?

Esta tarea se ha convertido en uno de los problemas más estudiados en la historia de la investigación en razonamiento humano. Resulta engañosamente simple pero la gran mayoría de personas no da la solución correcta: dicen, o bien que sería suficiente con darle la vuelta a la tarjeta A, o bien, que sería necesario girar la A y la 7. Sin embargo, las tarjetas que hay que girar son la A y la 4 (o bien, las cuatro tarjetas, dependiendo de cómo se interprete la regla).

¿Por qué es tan difícil la tarea de selección? Una explicación que deberíamos rechazar rápidamente es que se debe a la ambigüedad de la regla. Aunque se dice que una vocal debe tener un impar en el reverso, el sujeto podría interpretar que un impar debe tener también una vocal en el reverso. En este caso el sujeto estaría leyendo la regla condicional como una equivalencia más que como una implicación. Eso no justificaría la selección de A y 7 porque si la regla es interpretada como equivalencia la solución correcta sería elegir obligatoriamente las 4 tarjetas y esa opción no la toma prácticamente ningún sujeto.

La explicación original de Wason (1966) fue que los sujetos mostraban lo que en psicología cognitiva se llama el sesgo de confirmación. En otras palabras, que su error se debía a que intentaban encontrar evidencia que confirmase la regla más que encontrar evidencia que la falsase. (Se ha demostrado que los científicos, con frecuencia, caen en el sesgo confirmatorio, cuestión muy grave para la práctica del método científico).

El problema es que en el método de demostración por reducción al absurdo hay que falsar la tesis como punto de partida y comprender en profundidad un enunciado condicional. A la luz de lo dicho hasta aquí, se puede atisbar lo ilusorio que es pensar que, por ejemplo, el argumento pitagórico acerca de la irracionalidad de la diagonal de un cuadrado (utilizando el método de demostración por reducción al absurdo) constituya una demostración para los estudiantes (de secundaria). A este propósito cabe recordar lo que Hume decía refiriéndose a los argumentos de Berkeley: que no admitían la menor réplica y que no causaban la menor convicción. Nunca hay que dar por supuesto el dominio o la familiaridad con los elementos lógicos que se utilicen en la demostración.

Obstáculos didácticos

En definitiva, si en los campos de la filosofía y de la psicología de las matemáticas hay problemas con el método de demostración por reducción al absurdo, también los hay en el campo de la enseñanza. Cualquiera que haya utilizado este método de demostración en el bachillerato y se haya preocupado un poco de captar las reacciones del alumnado se habrá encontrado con un nivel de desconcierto casi absoluto. La cosa no es para menos: El profesor empieza su discurso diciendo que quiere demostrar que determinada proposición p es cierta y para ello va a partir de la hipótesis de que p es falsa. El pensamiento inmediato del alumno lo lleva a considerar lo absurdo de la propuesta sobre todo cuando tiene acceso a una aproximación heurística de la proposición.

Pero eso no es lo más grave; si la cadena deductiva conduce con éxito a la contradicción, ocurre que ésta tanto se puede referir a la negación de alguna de las hipótesis como a alguno de los resultados obtenidos en los pasos intermedios del razonamiento o incluso a algunos de los teoremas del corpus matemático anteriormente demostrados. Al final, el alumno, que se debate entra la posición autoritaria del profesor y cierta magia del método, aprende la demostración de memoria pero lo cierto es que en el aislamiento de la contradicción no ve temblar el edificio matemático por ninguna parte.

Efectivamente, la utilización del método de demostración por reducción al absurdo no es única y profesores y libros de texto siguen los más diversos patrones de razonamiento cuando invocan el método. García Suárez (1999) dentro de un trabajo experimental preguntó a 50 profesores de bachillerato: "¿Crees que el método de reducción al absurdo debe utilizarse en alguna demostración en BUP o COU? En caso afirmativo cita dos teoremas en los que utilices el método."

Un 52% de los profesores se mostraron partidarios de la utilización del método y entre los teoremas más citados aparecieron los siguientes:

-Irracionalidad de la $\sqrt{2}$

-Unicidad de la expresión de las coordenadas de un vector respecto a una base

-Unicidad del límite

-Teorema de Euclides (no existe un número primo máximo)

-Teorema de Bolzano

A continuación el autor analiza los esquemas de demostración utilizados en cada caso tomando como fuente los libros de texto al uso en los correspondientes niveles:

1. Unicidad de las coordenadas: Sea V un espacio vectorial y $B=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base. Supongamos que $v \in V$ admite las dos expresiones: $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$ y $v = b_1 v_1 + b_2 v_v + ... + b_n v_n$, entonces $0 = (a_1 - b_1)v_1 + ... + (a_n - b_n)v_n$, => (independencia lineal) => $(a_1 - b_1) = 0, ... (a_n - b_n) = 0$ => $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$.

Ésta no es una demostración por reducción al absurdo porque no hay ninguna contradicción

2. Unicidad del límite:

Supongamos que existen dos límites l_1 y l_2 y sea $\in < ABS(l_1 - l_2)/2$, atendiendo a la definición de límite existen d_1, d_2 tales que:

$x \in E^*(a, d_1) => f(x) \in E(l_1, \in)$

$x \in E^*(a, d_2) => f(x) \in E(l_2, \in)$

$d = min(d_1, d_2) => f(x) \in E(l_1, \varepsilon) \cap E(l_2, \in) = \Phi$

Contradicción: el vacío no tiene elementos, como se ve la contradicción se establece en el nivel de los fundamentos (definición de función, de conjunto vacío)

3. Teorema de Euclides: Queremos demostrar que no existe un número primo máximo x. Supongamos que tal x existe. Sea $y = 2.3.5....x + 1$. Si y es primo entonces x no sería el máximo primo. Si y es compuesto deberá tener un divisor z distinto de $2, 3, 5, ..., x$. Pero y es primo o compuesto (principio del tercio excluso) => en cualquiera de los dos casos x no sería el máximo primo.

Éste es el esquema clásico de demostración por reducción al absurdo donde la contradicción se da al negarse la negación de la tesis que se pretende establecer.

Como se desprende del análisis de estos tres casos, al hablar de una demostración por reducción al absurdo se presupone la equivalencia de mecanismos de demostración bastante diferentes entre sí, lo que dificulta la comprensión por parte de los estudiantes. Conclusión: sería necesario introducir en el bachillerato y primeros cursos de facultad contenidos matemáticos dirigidos a conseguir un mínimo adiestramiento en el esquema de demostración. Estos contenidos deben presentarse en bloques compactos para que los objetivos operativos (aprendizaje de contenidos) no eclipsen los metodológicos.

Generalmente, la primera vez que un alumno de secundaria se enfrenta con el método de demostración por reducción al absurdo es para demostrar de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Los libros de texto normalmente hacen una demostración estrictamente formal y concisa de dicho teorema. Un procedimiento típico es el siguiente: Queremos demostrar que no existe ninguna fracción tal que su cuadrado sea igual a 2. Supongamos que si existe y sean *p* y *q* números enteros para los cuales $(p/q)^2=2$, donde podemos suponer que *p* y *q* no tienen factores comunes porque en otro caso podríamos simplificar la fracción. Pero si $(p/q)^2=2$, entonces $p^2=2q^2$ y por tanto *p* es divisible por 2. En este caso p^2 es también divisible por 4, puesto que es el cuadrado de un número par. Así $p^2=4q_1$; esto es, $2q^2=4q_1$ y $q^2=2q_1$. De esto se sigue que *q* debe también ser divisible por 2. Pero esto contradice la suposición de que *p* y *q* no tienen factores comunes. Esta contradicción demuestra que el cociente *p/q* no puede ser expresado mediante un número racional.

Frente a esta demostración estándar y abstracta existen posibles alternativas más adecuadas al desarrollo intelectual de un alumno de secundaria. Por ejemplo la que ofrece Hernán (1982): Si $\sqrt{2}=a/b$, donde *a* y *b* son primos entre sí, entonces $2=a^2/b^2$; $a^2=2b^2$; $b^2=a^2/2$, Ahora bien,

Si *a* termina en	a^2 termina en	b^2 termina en	*b* termina en
1	1; imposible		
2	4	2; imposible	
3	9; imposible		
4	6	3; imposible	
5	5; imposible		
6	6	3; imposible	
7	9; imposible		
8	4	2; imposible	
9	1; imposible		
0	0	5 o en 0	5 o en 0

Así pues, la única posibilidad es que *a* termine en 0 y *b* termine en 0 o en 5, en cuyo caso *a* y *b* tienen como divisor común el 5, contradictorio con el hecho de que *a* y *b* sean primos entre sí.

En resumen, se debe tener presente al tratar de introducir a un alumno en el método deductivo, que en sus esquemas de pensamiento no tiene integrada ninguna de las reglas admitidas para la obtención de teoremas (el modus ponens, el modus tollens,...), tal como hemos señalado al hablar de los obstáculos cognitivos. Por ello, la invitación a la utilización normativa de las reglas de derivación debe ser forzada por alguna cuestión externa al sistema formal, a poder ser, susceptible de reinterpretación física. Así, la demostración del Teorema de Euclides ("no existe un número primo máximo") puede venir motivada por la aplicación que tiene la propiedad enunciada para los mensajes cifrados o las telecomunicaciones debido a la dificultad de descifrar códigos que dependan de la factorización de números obtenidos cómo producto de primos del orden de cien o más cifras.

REFERENCIAS

Evans, J.St.B.T. (1989). *Bias in human reasoning. Causes and consequences*. Hove and London (UK): Lawrence Erlbaum Associates.

García Suárez, X. (1999). *Interacciones contextuales en la didáctica de las matemáticas*. Vigo: Publicaciones de la Universidad de Vigo

Hernán, F. (1982). *Estrategias, conjeturas y demostraciones*. Valencia: Institut de Ciencies de l´Educació. Universitat de Valéncia

Hernández, E. (1997). *Algunos conceptos de la matemática del Siglo XX*. Seminario de Trabajo. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI Editores

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs whithout words*. The Mathematical Association of America

Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothèse*. París: Alcan (Traducción: *Ciencia e Hipótesis*. Madrid: Austral, 1963)

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos

Sáenz, C. (1998). Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental. *SUMA*, 28. Pp. 37-52

Wason, P.C. (1966). Reasoning. En B.M. Foss (Ed.). *New horizons in psychology I.* Harmandsworth: Penguin Books

Wilder, R. (1944). The nature of mathematical proof. *The American Mathematical Monthly,* 51. Pp. 309-23