

PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN  
EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS  
INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS

*CARMEN AZCÁRATE*

*Universidad Autónoma de Barcelona*

*MATÍAS CAMACHO*

*Universidad de La Laguna*

*MODESTO SIERRA (PONENTE)*

*Universidad de Salamanca*

**Introducción**

En 1985, en el seno del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), se formó un grupo de trabajo cuyo objetivo era el estudiar la naturaleza del pensamiento matemático avanzado y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall, 1991).

El interés por estos temas se explica por la tendencia de los últimos años en Didáctica de la Matemática donde se considera cada vez más la problemática del aprendizaje de las Matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como simple adquisición de competencias y de habilidades; en efecto, se aprecia una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia las investigaciones más recientes acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades (Azcárate y otros, 1996).

En el año 1996, y dentro del seno de la SEIEM, surge el grupo de Didáctica del Análisis Matemático.

En lo que sigue se hará una breve exposición acerca del llamado Pensamiento Matemático Avanzado, se señalarán algunas de las aportaciones de la investigación al desarrollo curricular y se presentarán las principales investigaciones realizadas por los miembros de este grupo en los últimos años.

### 1. Procesos del pensamiento matemático avanzado

Tal como escribe Dreyfus (1991) ,»comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante» y es el resultado de «una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales». En este sentido ha resultado fundamental la ampliación del campo de los problemas investigados, hasta hace pocos años muy centrado en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria (pensamiento matemático elemental), a cuestiones relacionadas con el llamado «pensamiento matemático avanzado», propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios. El reciente desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal, considerando además los procesos asociados de prueba y demostración, está enriqueciendo actualmente los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos.

Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado pensamos en procesos matemáticos entre los que destaca el de abstracción que se puede definir como la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana. La abstracción no es característica de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar. Pero es evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar y formalizar. Entre los procesos cognitivos de componente psicológica, además de abstraer, podemos destacar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Las investigaciones cognitivas están interesadas en estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera formal lógica de presentar un concepto matemático ante la comunidad de los matemáticos; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

Aunque no sea posible establecer una distinción clara entre las Matemáticas elementales y las avanzadas, sí se pueden señalar algunos rasgos distintivos, uno de los cuales es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla; los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en particular la representación y la abstracción. Además, el éxito en Matemáticas se puede relacionar con la riqueza y la flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos.

## 2. Algunas aportaciones de la investigación en Didáctica del Análisis al desarrollo curricular.

El interés por el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático ha crecido enormemente en la última década. El grupo de trabajo del ICME 7 de celebrado en Quebec en el año 92, "Students' difficulties in Calculus" contó con un amplio número de participantes (aproximadamente 200) de diferentes países con el objetivo fundamental de responder a algunas cuestiones agrupadas en tres aspectos principales (Artigue y Ervynck, 1993):

### *Los objetivos y contenidos:*

¿Cuáles son los objetivos de un curso de cálculo? ¿Cuál es su papel en el currículo de Matemáticas? ¿Cuáles son las relaciones entre los aspectos conceptuales y los aspectos técnicos de los contenidos del curso?

### *Las dificultades de enseñanza y aprendizaje:*

¿Cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del Cálculo? ¿Cuáles son las dificultades específicas de algunos aspectos? ¿Cuáles son las razones de tales dificultades?

### *Las concepciones del Cálculo y de su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias:*

¿Qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza? ¿cuáles han sido los resultados? ¿están de acuerdo los resultados obtenidos con los resultados esperados? ¿es posible explicar las divergencias entre los resultados esperados y los conseguidos?

Muchas de estas preguntas quedaron abiertas y se constituyen en sí mismas como preguntas generales de investigación.

David Tall, en su conferencia plenaria señaló un conjunto de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático, considerando como dificultades esenciales el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de derivada e integral, teniendo en cuenta además otro tipo de dificultades que tienen que ver con el estudio de las funciones, la notación de Leibniz, dificultades asociadas al uso y selección de las distintas representaciones, etc.

En el resto de trabajos presentados, se hace patente la necesidad del estudio de los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de cada uno de los conceptos que dan lugar a todas estas dificultades para poder conseguir implicaciones prácticas en los currículos.

Las modificaciones que han sido incorporadas en los currículos de los diferentes países han sido dirigidas principalmente hacia una introducción del Análisis más intuitiva y experimental incorporando paulatinamente el uso de las nuevas tecnologías.

De esta manera, el movimiento sobre la Reforma del Cálculo que se desarrolla en USA tuvo su influencia en los Estándares Curricularès de los años 90 que han dado lugar a un amplio número de materiales curriculares, en los que las nuevas tecnologías juegan un importante papel. Los materiales del SMP 16-19, representan también un buen ejemplo de esto. En Francia, Artigue (1997) ha hecho un estudio exhaustivo sobre la evolución de los programas de Análisis Matemático, en los cuales se reduce sustancialmente la formalización y se organiza la actividad matemática en torno a la Resolución de Problemas: optimización, aproximaciones de números y funciones, modelización de variaciones discretas y continuas. El orden matemático (límites-continuidad-derivada) es sustituido por una aproximación intuitiva al lenguaje de los límites con el objetivo de que sirva de sustento al concepto de derivada que constituye la noción esencial. Para Artigue, esta reforma tiene las siguientes ventajas:

El campo del Análisis se hace más accesible a los estudiantes que entran muy pronto en contacto con los problemas centrales del Análisis: la optimización y aproximación, dando gran importancia a las dimensiones numérica y gráfica tanto de los conceptos como las técnicas que pueden ser facilitadas por las calculadoras gráficas.

Pero esta reforma también tiene sus inconvenientes, que dan lugar a nuevos problemas, entre los que podemos señalar:

Problemas que surgen por el uso de las calculadoras y de su integración en el aula, la dificultad de conseguir problemas lo suficientemente ricos para organizar una aproximación de este tipo y la pérdida progresiva de matematización que aparece al utilizar definiciones poco rigurosas.

En nuestro país, esta tendencia a reducir lo algebraico también se ha hecho patente en el DCB, que poco a poco se va evidenciando en los materiales curriculares que van apareciendo. Azcárate y otros (1996), presentan una propuesta didáctica con el objetivo de combinar lo gráfico, lo numérico y lo algebraico en la enseñanza de los conceptos fundamentales del Análisis: la derivada y la integral. Proponen, como base imprescindible para abordar la enseñanza y aprendizaje de la derivada de una función, la introducción de los conceptos de variación y tasa media de variación, así como el de pendiente de una recta que deben ser considerados como aspectos básicos de un curso de precálculo. Se utilizan diversas representaciones divididas en varias fases:

En primer lugar un tratamiento gráfico, para posteriormente, con el dominio del concepto de razón, pasar al cálculo de la pendiente de una recta. El desarrollo posterior de las habilidades aritméticas permitirá evaluar áreas numéricamente. En una última fase y en un nivel de representación más abstracto se considera la generalización mediante expresiones algebraicas para las derivadas y las integrales.

En todas estas reformas curriculares, las calculadoras gráficas y los programas de cálculo simbólico juegan un papel importante. En USA se desarrolla desde 1986 el proyecto C<sup>2</sup>PC (Calculator and Computer Pre-Calculus Project) cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículo de matemáticas para la secundaria, analizando para ello las destrezas necesarias para la comprensión del concepto de función, gráficas de funciones y geometría analítica (véase Browning, 1989; Dunham y Osborne, 1991 y Dunham y Dick, 1994). Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, atendiendo a las conexiones existentes entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para la cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad.

Se han realizado distintas investigaciones en las que se trata de comparar las destrezas a la hora de resolver problemas de estudiantes instruidos de forma tradicional y estudiantes preparados usando calculadoras gráficas.

Tall (1996) indica que pese a que los estudiantes muestran preferencia por alguna clase de representación (simbólica, o gráfica), parece ser que los estudiantes con los que se realiza un trabajo experimental con calculadoras gráficas obtienen una mayor comprensión conceptual que aquellos con los que se desarrolla un trabajo tradicional.

Otros experimentos muestran cambios significativos cuando se usan calculadoras gráficas durante varios cursos (Quesada, 1995, citado en Tall, 1996).

Tall (1996) señala además que el uso de estas tecnologías proveen de formas alternativas para aproximarse al concepto de función con ventajas y desventajas, pero que usada con imaginación y bajo el control del estudiante, es evidente una mayor implicación del estudiante en las tareas, aunque las interpretaciones de las representaciones dependan del individuo.

Otro proyecto de investigación importante que debemos mencionar es el proyecto que sobre la utilización de la TI-92 en el aula se desarrolla en la actualidad en Francia. El Ministerio de Educación francés subvenciona un proyecto nacional desde el año 1995 que cubre diferentes niveles de secundaria, mediante el cual trata de analizar la viabilidad de introducir desde el punto de vista institucional las calculadoras en el aula en el que participan profesores de secundaria que han enseñado informática (expertos) e investigadores de Didáctica de las Matemáticas.

Varios grupos, repartidos por ciudades (París, Montpellier, Grenoble y Lyon) se ocupan de distintas parcelas de la investigación. Por ejemplo, los grupos de París y Montpellier se encargan de los aspectos de instrumentación e ingeniería didáctica en relación con las funciones y el cálculo.

Los objetivos generales de la dimensión de instrumentación del proyecto son:

*“Entender cómo se construye la instrumentación de la calculadora, poniendo ésta en relación con las estrategias desarrolladas por los profesores, las condiciones institucionales y las características personales de los alumnos.*

*Analizar los conocimientos que fundamentan esta instrumentación y analizar sus relaciones con los conocimientos esperados por la institución, investigar posibles conflictos y su manejo por parte de los profesores y alumnos”.* (Artigue 1997)

En nuestro currículo de Bachillerato también se aprecian modificaciones dirigidas al uso de las calculadoras. El DCB señala en su introducción que

“con el fin de que el énfasis se ponga en los aspectos intuitivos y gráficos de estas ideas, e instrumentos para el análisis, sería conveniente el trabajo con las calculadoras y/o los ordenadores cuando se quiera minimizar los efectos no deseados de la falta de madurez en el cálculo algebraico (que habría que diagnosticar y tratar aparte en casos de alumnos y alumnas concretos)”

Ahora bien, es claro que con una herramienta como ésta, es necesario analizar el currículo de Secundaria desde otra perspectiva. No se pueden plantear de la misma manera que se hace en la enseñanza tradicional las situaciones y problemas de matemáticas, dado que con una de estas calculadoras los aspectos exclusivamente instrumentales propios (en exceso muchas veces) de las matemáticas, no tendrán sentido si no se orientan de una forma adecuada. Habrá, por tanto que establecer modificaciones en el currículo, y como consecuencia desarrollar investigaciones dirigidas a articular los conocimientos de los alumnos en torno a este nuevo instrumento.

### **3.- Investigación en Didáctica del Análisis en España**

En lo que sigue se va a presentar un resumen del trabajo que se viene realizando en España en Pensamiento Matemático avanzado en la parcela de Didáctica del Análisis. Las Universidades de las que tenemos noticias que trabajan en este campo son: Autónoma de Barcelona, Castilla- La Mancha (Albacete), La Laguna, Pública de Navarra, Salamanca y Valladolid. Vamos a enumerar las tesis doctorales presentadas, proyectos de investigación en curso y otras actividades que se están realizando. También se presentarán las hipótesis y objetivos del proyecto financiado por la DGES y en el que participen investigadores de tres Universidades. Este listado no pretende ser

exhaustivo, pretendiendo únicamente presentar a la comunidad de investigadores en Educación Matemática algunas de las realizaciones en este campo.

**- Tesis doctorales**

Espinoza, L. (1998): Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función". Directora: Dra. C. Azcárate

Delgado, C. (1998): Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite continuidad en universitarios de primer curso. Directora: Dra. C. Azcárate

**- Tesis de maestría:**

Badillo, E. (1999): . Directora: Dra. C. Azcárate Estudio del conocimiento profesional de profesores de Secundaria en Colombia: el caso de la relación entre derivada y velocidad.

Calvo, C. (1997): Bases para una propuesta didáctica sobre integrales. Directora: Dra. C. Azcárate

Garbin, S. (1998): Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de Bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresados en diversos lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Directora: Dra. C. Azcárate

**- Tesis doctorales en curso** en las Universidades Autónoma de Barcelona, La Laguna, Salamanca y Valladolid

**- Proyectos de investigación en curso**

Procesos del pensamiento matemático avanzado. Investigador principal: C. Azcárate. Universidades: Autónoma de Barcelona, La Laguna y Salamanca. DGES: 1998-2000

Diseño, experimentación y evaluación de un proyecto de enseñanza del Análisis Matemático en Bachillerato. Investigador principal: M. Sierra. Universidad de Salamanca. Programa de Ayudas a la Investigación de la Junta de Castilla y León: 1998-2000

Varios Proyectos de investigación finalizados en los últimos cuatro años en la UAB (Generalitat de Catalunya) y en la Universidad de Salamanca.

**Otras actividades realizadas**

\* Grupo de "procesos del pensamiento matemático avanzado" de la Universidad Autónoma de Barcelona:

- Seminario de investigación en Didáctica de la Matemática: los símbolos, las figuras y el discurso como instrumento de la actividad matemática ( Dres Boero, Uni-

versidad de Génova; Brousseau, Universidad de Burdeos; Chevallard, Universidad de Marsella), organizado conjuntamente con el Centre de Recerca Matemàtica, Febrero 1995

- La visualización en el cálculo superior (Dr. Tall, Universidad de Warwick) organizado conjuntamente con el Centre de Recerca Matemàtica, Mayo 1995

-Matemáticas y enseñanza: principios y estado de la cuestión (Dr. Bishop, Monash University Clayton, Victoria (Australia)) organizado conjuntamente con el Centre de Recerca Matemàtica, Septiembre 1995

- Seminario sobre pensamiento matemático avanzado (Dr. Cantoral, CINVESTAV y Dr. Dreyfus, Tel Aviv), Febrero 1998

- Realización de cursos de formación permanente en numerosos ICEs y CPRs del Estado español

- Participación como profesores invitados en Programas de Doctorado de varias Universidades

\*Grupo de Didáctica del Análisis de la Universidad de Salamanca

- Seminario sobre la enseñanza del Análisis matemático en el Bachillerato.

Proyecto subvencionado en el Programa de Cooperación entre Departamentos universitarios y Departamentos de Institutos de Secundaria, del M.E.C, curso académico 95-96

- Curso Didáctica del Análisis en la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Convenio de Cooperación entre el MEC y la Universidad de Salamanca, 1998

- Curso Las calculadoras en el aula. Convenio de Cooperación entre el MEC y la Universidad de Salamanca, 1999

\*Grupo de Didáctica del Análisis de la Universidad de La Laguna:

Seminario con profesores de Bachillerato sobre el uso de calculadoras gráficas en la enseñanza del Análisis

\*Grupo de Didáctica del Análisis de la Universidad de Valladolid.

Seminario con Profesores de Bachillerato para preparar software educativo (proyecto curricular)

**Proyecto de investigación: Procesos del pensamiento matemático avanzado**

Investigadora principal: Dra. Carmen Azcárate

Universidades: Autónoma de Barcelona, La Laguna y Salamanca

Duración: Tres años (1998-2000)



*Hipótesis:*

De acuerdo con la bibliografía que se maneja y de los trabajos ya realizados, se han establecido ocho hipótesis de trabajo. Destacamos entre ellas:

La educación de un pensamiento matemático complejo y flexible consiste fundamentalmente en la posibilidad de usar varias representaciones en paralelo; existe una complementariedad entre los aspectos cognitivos y matemáticos de la representación de estructuras matemáticas.

En el pensamiento matemático avanzado, el mayor objetivo es que los estudiantes desarrollen la habilidad de hacer abstracciones conscientemente a partir de situaciones matemáticas.

La visualización juega un papel esencial en el trabajo matemático y es el proceso mediante el cual las representaciones mentales se pueden hacer presentes.

Es posible transmitir a los estudiantes de bachillerato y de universidad una imagen de las matemáticas como ciencia que incorpora la observación, el experimento y el descubrimiento.

La utilización de medios informáticos (calculadoras, ordenadores, etc.) puede contribuir a mejorar la significatividad del aprendizaje.

*Objetivos:*

La investigación se centra en tres aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los procesos del pensamiento matemático avanzado que, si bien son independientes, al mismo tiempo son complementarios y están teniendo un desarrollo propio muy fecundo:

i) Los procesos matemáticos implicados en el aprendizaje de las matemáticas entre los que destaca el de abstraer, así como los de analizar, categorizar, conjeturar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar que van adquiriendo una progresiva importancia en la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado. Entre los procesos matemáticos que tienen una componente psicológica señalaremos además de abstraer, los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

ii) Los temas de desarrollo cognitivo que provienen de la distinción entre los conceptos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos. Esto nos lleva a distintas teorías como son las relacionadas con: las representa-

ciones mentales, los esquemas conceptuales, la dualidad proceso-objeto de muchos conceptos matemáticos, el pensamiento estructural versus el pensamiento operacional, la noción de "procepto", así como la visualización.

iii) El comportamiento matemático, dentro del cual se estudian diversos aspectos relacionados con la resolución de problemas: la influencia de las creencias de los alumnos en su capacidad para resolver problemas, las estrategias de resolución que los alumnos utilizan cuando se enfrentan a problemas abiertos y a los juegos matemáticos de estrategias y también el papel del monitor interior en la resolución de problemas por parte de expertos.

Por otro lado, puesto que esta línea de investigación se ocupa de enseñanza y aprendizaje, nos encontramos con dos tipos de objetivos:

- Los que se refieren a investigar fenómenos de enseñanza, cuando los sujetos estudiados son los profesores, sus creencias y concepciones acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado y su aprendizaje, su gestión del aula, sus técnicas y herramientas didácticas, el tipo de contrato de relación, que establecen con los alumnos, sus ideas y prácticas acerca de la evaluación, ...

- Los que se refieren a fenómenos de aprendizaje, cuando los sujetos estudiados son los estudiantes, lo que nos permite investigar los procesos cognitivos descritos anteriormente.

#### *Metodología:*

El diseño de investigación que mejor se adapta a los objetivos del presente proyecto es el de estudios de casos múltiples. Las razones para esta elección son las siguientes:

- participación de profesores de diferentes niveles educativos y de distintos centros
- necesidad de tipificar la diversidad tanto de los estudiantes como de los profesores
- importancia de analizar el contexto de las diferentes instituciones educativas
- carencia de estudios previos ricos en información cualitativa

Estas son algunos de los trabajos y líneas de investigación de los investigadores del grupo Didáctica del Análisis de la SEIEM, que constituyen un auténtico "filón" de investigación para los próximos años.

**BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA**

Artigue, M. (1997). La integración de calculadoras gráficas y formales en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. *Actas del RELME 11*. México. (en prensa)

Artigue, M.; Ervynck, G. (eds.) (1993). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME 7*, Québec, Canada.

Azcárate, C.; Casadevall, M.; Casellas, E.; Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Browning, C. A. (1989). Characterizing levels of understanding of functions and their graphs. The Ohio State University, 1988. *Dissertation Abstracts International*, 49, 2957A.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

Dunham, P.H.; Dick, T.P. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, 87, 440-445.

Dunham, P.H.; Osborne, A. (1991). Learning how to see: Students graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(4), 35-49

Quesada, A. R. (1995). On the effects of using graphics calculators in pre-calculus and calculus, part II. En Lum, L. (ed.), *Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 296-300. Reading MA: Addison Wesley.

Tall, D. (Ed) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop, A. J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325. Netherlands: Kluwer.