

PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO

MARTÍN M. SOCAS
Universidad de La Laguna

INTRODUCCIÓN

El grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico se constituyó como tal por la multiplicidad de vínculos entre los conocimientos numérico y algebraico, enfatizando que los problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje de estos dos campos son similares y que las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen componentes comunes. No obstante, dada la amplitud de ambos campos y a efectos de centrar la discusión en este Panel se han separado para su presentación.

El Pensamiento Algebraico, que entendemos como una línea de estudio e investigación en Didáctica de las Matemáticas, se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el Sistema Educativo y en el medio social; se encuentra inmerso en uno de los muchos dilemas que envuelven al pensamiento matemático: "La cognición es intrínsecamente contextual versus el lenguaje algebraico es intrínsecamente abstracto"

Dada la amplitud del pensamiento algebraico que tiene presencia como contenido matemático en diferentes etapas en el Sistema Educativo, desde la Secundaria Obligatoria hasta la Universidad, me voy a referir concretamente a la Secundaria Obligatoria, etapa 12-16, tomando en consideración, especialmente, las letras con significado algebraico (variables), las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales, dejando los aspectos de dependencia entre variables para la didáctica del análisis.

La organización para su presentación se realiza en torno a las siguientes cuestiones: investigaciones en Pensamiento Algebraico (PA), aportaciones de las investigaciones al desarrollo curricular en PA y agenda de investigación en PA.

INVESTIGACIONES EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO

En estas breves consideraciones sobre las investigaciones en Pensamiento Algebraico haré referencia a resultados que provienen de estudios con enfoques desde la psicología cognitiva, el lenguaje, las calculadoras y los ordenadores, la historia y la epistemología, la enseñanza y el desarrollo curricular, situaciones, obviamente no

disjuntas, que se intersectan en los diferentes trabajos de investigación y, por tanto, también en esta presentación.

Las investigaciones sobre las letras con significado algebraico (variables), las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales están documentadas en trabajos como Wagner y Kieran (1989), Kieran y Filloy (1989), Socas y otros (1989), Kieran (1992), Rojano (1994), Bednarz, N.; Kieran, C. y Lee, L. (eds.) (1996), Palarea (1998).

Mención especial merecen los trabajos de investigación llevados a cabo por los investigadores en Álgebra del "International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME), constituidos en el seno del tercer ICME en Karlsruhe, 1976. Dentro de PME-XIV, de 1990, en México, se constituyó el grupo de trabajo sobre Álgebra: "Procesos y estructuras algebraicas", coordinado inicialmente por Sutherland, al que se incorporan Rojano, Lins y Radford, hasta 1997, que culmina con la redacción de un texto editado por Sutherland, Rojano, Bell y Lins (en prensa). El grupo tiene como objetivo inicial caracterizar los cambios que se han producido en el Pensamiento Algebraico y el papel que juega el simbolismo en este cambio. Recientemente, en el PME XXII, de 1998, de Sudáfrica, se destaca la presencia de las nuevas tecnologías en el Pensamiento Algebraico y la necesidad de profundizar más en los aspectos epistemológicos y cognitivos que están relacionados con la enseñanza y aprendizaje del Álgebra tanto a nivel de papel y lápiz como mediante ordenadores, y se propone la divulgación en Internet de los estudios del Grupo.

En todas estas investigaciones se identifican factores significativos que afectan a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, realizadas desde perspectivas diferentes; están dirigidas especialmente a determinar, por una parte, los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra, en los que se pueden diferenciar dos grandes bloques, de un lado, los procesos cognitivos que se derivan de considerar la aritmética como fundamento del álgebra, y de otro, los procesos específicos del pensamiento algebraico, y por otra, los intentos continuados de los investigadores en desarrollar una teoría de la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

CONSIDERACIONES DESDE LA PSICOLOGÍA COGNITIVA

Un documento de interés es el artículo de Kieran y Filloy (1989), acerca de «El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica» (*Enseñanza de las Ciencias*, 1989, 7 (3), pp. 229-240), donde describen algunas de las contribuciones significativas de investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del Álgebra escolar, entre las que cabe destacar el marco aritmético de referencia. Estas contribuciones ponen de manifiesto la presencia de un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra de Secundaria (variables, expresiones y ecuaciones, resolución de ecuaciones y funciones y gráficas).

En el marco de las consideraciones teóricas, señalan la falta de modelos teóricos paradigmáticos (en el sentido de Kuhn (1962)) en la investigación del Álgebra, y ciñen su atención a los fenómenos didácticos cuyas causas puedan atribuirse a la materia matemática implicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico.

En la mayoría de estas investigaciones sobre variables y expresiones algebraicas se resalta la incidencia de la formación numérica que se pone de manifiesto en situaciones como: dificultades con las convenciones de notación, en especial la concatenación, el uso de paréntesis y las dificultades implícitas de la notación para expresar respuestas algebraicas. De esta manera, en los métodos de simbolizar, la confianza de los alumnos en métodos intuitivos no enseñados y el uso de métodos informales, caracterizados por Booth (1984) como aquellos que son intuitivos, primitivos, limitados por el contexto, indicativos de método incipiente, basado en conteo y adición y que permiten trabajar con ellos sólo con números enteros, hace que se concreten en hallar la respuesta en lugar de prestar atención al método que usan. En definitiva los estudiantes no son capaces de darse cuenta que el procedimiento es a menudo, la respuesta.

En relación a la resolución de ecuaciones como ejemplo de estudios cognitivos, cabe destacar en las investigaciones los distintos enfoques para la resolución de ecuaciones, el uso de técnicas de modelaje, el reconocimiento y uso de estructuras, y las dificultades, obstáculos y errores en el planteamiento y resolución de ecuaciones.

CONSIDERACIONES DESDE EL LENGUAJE

Otro trabajo de especial interés es el artículo de Rojano (1994), en el que resume focos y tendencias en la investigación de los años 80 y 90, de la matemática escolar considerada como lenguaje, en contraste a la de los 70, centrada en la construcción de conceptos. La autora plantea algunas de las implicaciones didácticas de esta nueva localización de la matemática escolar y, en especial, se refiere al lenguaje algebraico por ser el Álgebra simbólica el lenguaje básico de la Matemática y por su trayectoria personal, tal como la propia autora expresa.

Se observa que los aspectos semántico y sintáctico del lenguaje matemático, se han convertido en centro de atención de las investigaciones. Y que la variedad de enfoques de la investigación de carácter lingüístico son consecuencia de que las bases teóricas de éstas se corresponden con diferentes corrientes de la psicolingüística y son, además, una manifestación de la ausencia de un paradigma para el estudio del sistema matemático de signos que abarque sus aspectos sintáctico, semántico, pragmático y sociocultural, como señala Rojano (1994), quien afirma que los acercamientos metodológicos se encuentran aún en evolución y la delimitación de la problemática y

de los objetos de estudio están en proceso de redefinición con las investigaciones recientes sobre la adquisición del lenguaje matemático. Sin embargo, se inclina a tomar como referencia la distinción entre las unidades de análisis en un marco de la psicología piagetiana y en un marco psicolingüístico y sociocultural (Wertsh, 1991).

CONSIDERACIONES DESDE EL USO DE LAS CALCULADORAS Y ORDENADORES

Mención especial, dentro de la revisión de las investigaciones, merecen los recursos de las calculadoras y los ordenadores. En las puertas del siglo XXI no podemos obviar que la presencia de las nuevas tecnologías debe jugar un papel significativo dentro de la enseñanza de las matemáticas. Las calculadoras y los ordenadores representan un recurso didáctico que, bien utilizado, puede ayudar en el desarrollo del aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos.

Podemos considerar que la investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en ambientes computacionales se desarrolla con profusión en la década de los ochenta con investigaciones relacionadas tanto con aspectos operacionales, con ambientes basados en Logo, Pascal, LSE y Basic, como con aspectos estructurales. Por ejemplo, Thomson y Thomson (1987), analizaron un diseño de enseñanza elaborado para que los estudiantes reconocieran la forma o estructura de una expresión algebraica o ecuación en dos formatos: la forma simbólica usual y una representación de árbol, presentada en la pantalla del ordenador. Para cambiar la representación los estudiantes tenían primero que elegir la transformación y entonces con un marcador indicaban la expresión que debía ser representada en forma de árbol. Los autores encontraron un rápido avance de los principiantes en la comprensión de la estructura de esas expresiones y ecuaciones en ese ambiente computacional. Otros estudios se habían centrado en representaciones múltiples o en las habilidades para identificar puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano. También el enfoque curricular es tratado en el estudio de Fey y Heid (1987), basado en funciones para la solución de problemas, que incluye el uso de distintas clases de paquetes computacionales.

En esta última década observamos como programas de ordenador creados fundamentalmente con el objetivo de “hacer matemáticas” - manipuladores simbólicos tales como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA-, utilizados convenientemente pueden ser válidos para enseñar los conceptos del Álgebra. Algunos, cuyos fines no son exclusivamente educativos, como por ejemplo algunas hojas de cálculo (EXCEL, WORKS) han sido utilizados en experiencias educativas destinadas a desarrollar aspectos fundamentales del pensamiento algebraico con algún éxito (Rojano, 1996).

Otros investigadores centran sus trabajos en programas de ordenador, creados con fines educativos más generales, en desarrollar situaciones problemáticas con entornos interactivos mediante los cuales se incita a los alumnos a construir y hacer uso de ideas algebraicas para resolver problemas propuestos, el LOGO, por ejemplo, poniendo de manifiesto que es un ambiente apropiado para propiciar un acercamiento a ideas algebraicas. En Ursini (1994), se estudió la posibilidad de ayudar a alumnos de 12-13 años que no habían tenido un acercamiento previo al manejo de variables a crear un potencial para trabajar con los distintos usos de la variable: número generalizado, relación funcional e incógnita, en el ambiente LOGO; los resultados ponen de manifiesto que antes del estudio formal del Álgebra, los alumnos pueden entrar en contacto con éxito en los diferentes usos de la variable.

También en algunos casos se ha elaborado software específico para la enseñanza del Álgebra, tal es el caso del programa CARAPACE, empleado en el desarrollo de un proyecto de investigación realizado durante 7 años con alumnos de 12-15 años. La consideración que se hace del Álgebra en dicho proyecto es exclusivamente funcional (Kieran, Boileau y Garançon, 1996).

Cedillo (1996) considera que dentro de la metáfora del Álgebra como lenguaje, los símbolos, las gráficas y las tablas pueden considerarse como dialectos, y desarrolla una investigación en el aula en la que explota el modo de programación de una calculadora gráfica (como la TI92) para conseguir que los estudiantes produzcan reglas que gobiernen patrones numéricos. Las actividades se presentan como un juego que consiste en dar una tabla que simula la pantalla de la calculadora y se pide a los alumnos que encuentren las operaciones que efectúa la calculadora sobre un número de entrada para producir el número de salida, que programen la calculadora de manera que produzca una tabla igual a la de la hoja, etc.

Observamos, finalmente, en cuanto a la enseñanza del Álgebra, que los recursos tecnológicos amplían la consideración habitual del Álgebra como un lenguaje. La facilidad de obtener diferentes formas de representación para expresar relaciones cuantitativas influirá tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del Álgebra.

El potencial del ordenador y de las calculadoras de última generación para crear ambientes de aprendizaje que difícilmente podrían ser logrados sin disponer de estos recursos está fuera de duda. Estos ambientes requieren, unas veces, la elaboración de programas o códigos para establecer secuencias que permiten desarrollar aspectos operacionales del conocimiento algebraico, así como hacer predicciones, otras; estos ambientes se centran en las relaciones entre distintas representaciones de objetos matemáticos, poniendo énfasis en los aspectos estructurales, y a veces combinando ambos.

Podemos decir, que, la investigación en ambientes computacionales es un dominio emergente de la investigación en pensamiento algebraico, pero que está aún en sus inicios al no disponer de información respecto a los efectos en el aprendizaje a largo plazo.

CONSIDERACIONES HISTÓRICAS/EPISTEMOLÓGICAS

En las investigaciones desarrolladas en Pensamiento Algebraico, las referencias a consideraciones históricas y el análisis epistemológico es algo inherente a las mismas. Se acepta como punto de partida que la discusión histórica y el análisis epistemológico del pensamiento algebraico juegan un papel esencial a la hora de determinar los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra escolar.

En el análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y sus reglas de transformación se subraya la distinción entre: usar letras para representar incógnitas, en resolución de ecuaciones; usar letras para representar datos, expresando soluciones generales; y, usar letras como herramienta para proveer reglas dominando relaciones numéricas. Estos usos surgen en Lenguaje Algebraico en momentos históricos diferentes.

La relación entre los marcos teóricos históricos/epistemológicos y los psicológicos es habitual en Educación Matemática con relación al Lenguaje Algebraico. Así, la existencia de etapas históricas durante las que varios conceptos matemáticos tales como número y función han evolucionado desde operacional a estructural, ha llevado a Sfard (1991) a crear un modelo conceptual paralelo de tres fases: interiorización, condensación y reificación. La teoría de la reificación se propone como una teoría que puede ayudarnos a comprender las dificultades con que se encuentran los alumnos al efectuar el paso del pensamiento numérico al algebraico, Sfard y Linchevski (1994).

En el análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico se estudia tanto el signo y los tipos de signos, como los procesos de significación y búsqueda de sentido, y su repercusión en los procesos de enseñanza y aprendizaje, Charbonneau (1996), Puig (1994, 96), Radford (1996), Fernández, (1997b).

Algunas investigaciones de carácter cognitivo han apuntado a ciertos cambios conceptuales y/o simbólicos que establecen la diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico, en el individuo. Algunos de estos trabajos tienen que ver con las diferentes interpretaciones de las letras (Kücheman, 1981; Booth, 1984; Kieran, 1992) y convenciones gráficas o simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones (Matz, 1982). Estas observaciones han hecho posible hacer hipótesis sobre ciertas líneas de evolución del lenguaje aritmético al algebraico, las cuales corresponden a las nociones y a las formas de representación de los objetos y operaciones que ocurren en el cambio, gracias a los análisis históricos de las

estrategias y métodos, por ejemplo, de las ecuaciones que se encuentran en los libros de texto de álgebra pre-simbólica de los siglos XIII, XIV y XV -Boncompagni, 1954; Arrighi, 1974 y Hughes, 1981-, citados por Filloy y Rojano (1984) y Filloy y Sutherland (1996).

En definitiva, se pone de manifiesto que las investigaciones de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra se relacionan tanto con el desarrollo histórico/epistemológico de esta disciplina como con el lenguaje habitual. Harper (1987), evidencia que los estudiantes progresan en el aprendizaje del Álgebra a través de los mismos estadios que la propia Álgebra: retórica, sincopada y simbólica. Wheeler (1989), señala que el desarrollo de un lenguaje simbólico especializado - como es el lenguaje algebraico- ha dejado fuera el significado dado por el lenguaje habitual, en que la actividad algebraica es previamente expresada.

CONSIDERACIONES SOBRE ENSEÑANZA Y DESARROLLO CURRICULAR

A modo de síntesis, y, desde la perspectiva de la enseñanza, podemos considerar que las tendencias hasta la década de los ochenta en la enseñanza del Álgebra se puede concretar con relación a la naturaleza del curriculum en:

a) Álgebra como aritmética generalizada y, en consecuencia, las letras forma parte de modelos que permiten generalizar las propiedades numéricas.

b) Álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos: las ecuaciones, donde las letras se consideran como incógnitas específicas a determinar.

c) El Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, que considera a la variable en su sentido completo de variabilidad.

d) El Álgebra como modelo estructural, donde las letras constituyen entes pertenecientes a estructuras algebraicas tales como grupos, anillos, dominios de integridad o cuerpos, a los que se pueden aplicar las propiedades satisfechas por cada uno de los conjuntos en los que se actúe.

(Véase: Mason y otros (1985), Usiskin (1988), Socas y otros (1989))

Con relación al desarrollo curricular en Álgebra, en cuanto a propuestas de enseñanza dentro del campo del álgebra elemental, señalamos en primer lugar los trabajos de Davidov, citado por Freudenthal (1974), donde afirma que la mayoría de los problemas aritméticos, en cuanto traspasan las fronteras del simple cálculo, son enteramente problemas algebraicos lineales o sistemas de ecuaciones lineales.

Los textos de Álgebra del South Notts Projects, Bell y otros (1980) se basan en una «enseñanza con significado», que propone la utilización de modelos concretos

para la resolución de ecuaciones lineales. Asimismo crean situaciones concretas con el propósito de desembocar en el planteamiento de las ecuaciones mencionadas.

Los textos del NMP de 1987, serie inglesa de textos de Matemáticas para la Secundaria, a la que contribuyeron Harper y Küchemann, entre otros, se presenta el Álgebra, como un curso basado en la idea de desarrollar sucesivamente las nociones de letras como incógnitas específicas, y, como datos integrados en una secuencia gradual desde lo procedimental a lo estructural.

El alcance del impacto cognitivo del planteamiento de estos textos no ha llegado a ser investigado, pero sí algunos elementos de este acercamiento; así, Bell (1988) y Bell y otros (1987), han dado como resultados algunos signos prometedores.

Las propuestas de los estándares de la NCTM (1989) coinciden en enfatizar actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales y a su vez expliciten la transición de las concepciones procedimentales a las estructurales. El acercamiento a esta perspectiva, desde la tecnología también se presenta interesante Fey (1989 a, 1989b), Schwarz (1989), Kaput (1989).

En el marco de los estándares de la NCTM (1989) se han desarrollado múltiples conferencias relativas al Álgebra, así como diferentes proyectos de desarrollo curricular a nivel nacional que han abordado de manera específica el Álgebra. Mención especial merece el trabajo "A Framework for Constructing a Vision of Algebra" del grupo de trabajo de Álgebra de la NCTM, Burrill y otros (1994) y el Proyecto Curricular Nacional: "Maths in Context: A Connected Curriculum for Grades 5-8" de la "National Science Foundation, University of Wisconsin and Freudenthal Institute Utrecht University", Romberg y otros (1998).

Las experiencias holandesas en la investigación y desarrollo del currículum en el marco de la Educación Matemática Realista (RME), cuyo objetivo es desarrollar vías significativas para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con sentido, considerando las Matemáticas como una actividad humana (Freudenthal, 1991), y las propuestas de los estándares de la NCTM (1989), forman la base para el enfoque hacia el Álgebra en el proyecto "Las Matemáticas en contextos" (MIC). En este proyecto los estudiantes aprenden a describir las relaciones entre variables con una variedad de representaciones y, además, deben ser capaces de conectar las representaciones. El Álgebra se utiliza para resolver problemas y los estudiantes deben realizar elecciones inteligentes sobre qué representación algebraica utilizar. En la resolución de problemas, el Álgebra (su estructura y símbolos) no es un objetivo en sí mismo, es una herramienta para resolver problemas. Los problemas son problemas realistas que surgen del mundo real y se presentan contextualizados. Podemos señalar que el Pensamiento Algebraico prima sobre la manipulación algebraica (Reeuwijk, 1995).

Las propuestas que se contemplan en los Diseños Curriculares Base del Área de Matemáticas para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) (MEC, 1989; Gobierno de Canarias, 1991) en la Reforma del Sistema Educativo Español (1989), para el Lenguaje Algebraico, trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el álgebra escolar se interpreta como una «aritmética generalizada» y como tal involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. Conviene resaltar que el Álgebra se contempla en estos Diseños como un Bloque Conceptual, además de aparecer de manera transversal a lo largo de todos los Bloques.

El Lenguaje Algebraico lo sitúan en el Bloque Primero de Contenidos: «Números y Operaciones: significados, estrategias y simbolización», subraya que, «El lenguaje algebraico es un contenido donde se recomienda poner especial énfasis, ya que plantea dificultades para gran parte del alumnado; se debe pretender poco más que los objetos algebraicos que se manejen tengan significado para el alumno, reforzando conceptos como los de variable, incógnita, solución, etc., evitándose la manipulación de objetos algebraicos fuera de contexto».

Los contenidos de carácter conceptual se concretan en el último apartado en:

- Significado y uso de las letras para representar números (un número desconocido fijo, un número cualquiera, una relación entre conjuntos de números...). Fórmulas y ecuaciones.

- Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.

Con relación a los Procedimientos, que en conjunto se refieren a utilización de distintos lenguajes, algoritmos y destrezas y estrategias generales, se concretan en:

· Interpretación y utilización de los diferentes lenguajes numérico, gráfico, algebraico.

· Simbolización, mediante letras, números conocidos, desconocidos, etc.

· Expresión algebraica de enunciados de problemas.

· Simbolización de relaciones mediante fórmulas y ecuaciones.

· Desarrollo y síntesis de expresiones literales sencillas.

· Resolución por métodos numéricos y gráficos de ecuaciones de primer y segundo grados, sistemas lineales con dos incógnitas, interpretando las posibles soluciones.

· Realización de operaciones sencillas con expresiones literales para adquirir agilidad en el manejo de funciones, ecuaciones y fórmulas.

· Utilización del razonamiento aritmético para, dada una operación u operaciones, establecer el enunciado de una situación problemática.

Con relación a los contenidos de Actitudes, considera esencial en esta rama de las Matemáticas, la «valoración del lenguaje numérico y algebraico para representar, comunicar o resolver situaciones de la vida cotidiana».

Algunos grupos españoles que interpretan y desarrollan esta propuesta curricular en particular en forma de textos para la Matemática de Secundaria Obligatoria incorporan aspectos relevantes de los resultados de la investigación en lenguaje Algebraico y desarrollo curricular, entre otros cabe citar los textos de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (Coriat y otros 1994, Becerra y otros, 1996)

El documento "Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft", preparado por "Standards 2000 Project writing Group" del NCTM, Ferrini-Mundy y otros (1998), que es un borrador de discusión para la propuesta de los estándares del 2000, aborda el Álgebra en su estándar número 2 y aparece bajo el título "Patrones, Funciones y Álgebra" en las cuatro subdivisiones que propone para la enseñanza no universitaria de las Matemáticas, grados Pre-K-2; grados 3-5; grados 6-8; y grados 9-12. Señala que Los Programas de Educación Matemática deberían dirigir su atención a los "patrones", a las funciones, a los símbolos y a los "modelos", con el objeto de que todos los alumnos:

- Comprendan diversos tipos de patrones y relaciones funcionales.
- Empleen formas simbólicas para representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras.
- Usen modelos matemáticos y analicen los cambios que aparecen tanto en contextos reales como abstractos.

El desarrollo razonable del conocimiento conceptual de ecuación y variable lo sitúa en los grados 6-8., y sugiere la necesidad de presentar el concepto de variable en sus múltiples facetas (Usiskin, 1988).

Un buen ejemplo de la tendencia Italiana lo constituye el trabajo de Arzarello, Bazzini y Chiappini (1995), realizado en diferentes ciudades italianas: Génova, Pavía y Torino, sobre los procesos de adquisición del Lenguaje Algebraico en un entorno cultural y social. Parten de que los procesos de Pensamiento en Álgebra son inseparables de su lenguaje formalizado – el Álgebra no se puede trabajar sin su componente escrita –, de acuerdo con la tesis de Vygotsky, Pensamiento Algebraico y Lenguaje Algebraico son dos aspectos mutuamente dependiente de un mismo proceso. En el modelo teórico presentado en el trabajo consideran además la distinción entre sentido y denotación tomadas de Frege (1962), la noción de "marco conceptual" y la nociones "espacio

social de un sujeto” y “SP: espacio-tiempo didáctico de producción y comunicación”. La conclusión es que los procesos de construcción e interpretación de una fórmula o expresión algebraica sólo pueden desarrollarse inmerso en un SP, donde los estudiantes pueden llevar a cabo una interacción social, que es un cambio interpersonal entre el alumno y el entorno (profesor, matemáticas, ...) junto con los mediadores adecuados (llamados artefactos culturales, como libro, ordenador, ...) que tienen la meta de producir significados. De esta manera los estudiantes pueden aprender Álgebra al tiempo que trabajan en un entorno cultural y social.

Más recientemente Filloy y Sutherland (1996), expresan lo que consideran resultados sustantivos relacionados con el diseño y desarrollo del nuevo currículum del Álgebra. La principal tesis que sostienen estos autores es que el currículum de álgebra tiene que tener en cuenta al profesor y la enseñanza, tanto como los materiales curriculares. Manifiestan que se presenta una falsa disyunción cuando el aspecto relacional del pensamiento matemático quita mérito a su uso instrumental y viceversa; por ejemplo cuando el aspecto de resolución de problemas se separa falsamente del conocimiento matemático.

Por último, desde una perspectiva de enseñanza, el libro de Bednarz, Kieran, y Lee, 1996, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, se sugiere cuatro aproximaciones a la enseñanza del Álgebra en la Escuela Secundaria: generalización, resolución de problemas, modelización y funciones.

APORTACIONES DE LAS INVESTIGACIONES EN LOS ÚLTIMOS 20 AÑOS AL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE ÁLGEBRA

Observamos de los planteamientos anteriores que en el tratamiento relacionado con las investigaciones en Álgebra se pasa así de las versiones simplistas - claramente reflejadas en los programas de estudio y textos tradicionales, que consideraban la enseñanza del álgebra elemental como una mera extensión de la aritmética- a un reconocimiento que en la adquisición del lenguaje algebraico, ciertos cambios de concepción respecto de las operaciones que se realizan y de los objetos operados, juegan un papel fundamental. No obstante, parece necesario hacer una distinción entre la «dificultad cognitiva» de los estudiantes y la «cuestión pedagógica», esto es, qué podemos hacer para ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas. Tendríamos que plantearnos el importante reto de cómo organizar el material para capturar y sostener el interés para que los estudiantes puedan implicarse en los procesos intelectuales, identificados por los análisis cognitivos como necesarios o suficientes para adquirir conocimiento preciso del álgebra. Por tanto, debemos diseñar unidades de estudio que correspondan a unidades manejables tanto por los profesores como por los estudiantes.

Los aspectos de los resultados de la investigación en Didáctica de las Matemáticas que tienen una mayor incidencia en el Desarrollo curricular del Álgebra a tenor de los textos y proyectos analizados se concretan en: contextualización, múltiples representaciones, énfasis en nuevos aspectos: caos (fractales), grafos, etc., análisis de contenidos y tareas algebraicas, enculturación, empirismo y actividades y proyectos "open-ended".

Contextualización

Las diferentes investigaciones ponen de manifiesto la importancia que adquiere en los procesos de significación y comunicación en Educación Matemática "los ambientes en que se desarrolla la actividad matemática".

Los resultados de las investigaciones se ponen de manifiesto en el diseño instruccional de actividades que pretende cubrir tres aspectos esenciales en el Lenguaje Algebraico:

- a) conectar con el conocimiento informal situado de los estudiantes.
- b) preparar el desarrollo más sofisticado, abstracto, del conocimiento formal del Álgebra, y
- c) respetar los principios básicos de la autonomía intelectual del alumnado.

Representaciones semióticas múltiples

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981), que se ha desarrollado con profusión en estos últimos veinte años. Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984).

El papel de las Representaciones Semióticas múltiples en la formación de conceptos ha sido destacado por diferentes investigadores; en este sentido, Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995), Rico, Castro y Romero (1996). Palarea y Socas (1995 y 1998), Socas y Palarea (1996 y 1998), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

El uso de Representaciones Semióticas múltiples constituye una recomendación al desarrollo curricular en casi todas las propuestas en términos parecidos a la recomendación de los estándares: "Los estudios de Matemáticas deben dar oportunidad a los estudiantes para que puedan modelizar situaciones usando representaciones verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas" (NCTM, 1989).

Énfasis en nuevos aspectos: caos (fractales), grafos, ...

En los últimos veinte años la matemática finita se ha convertido en parte integrante de los conocimientos necesarios para diferentes disciplinas científicas, y en particular la matemática discreta, especialmente relacionada con el ordenador. De esta manera tópicos como: combinatoria, grafos, matrices, problemas de optimización, fractales, procesos iterativos y recursivos, etc., aparecen como nuevos contenidos en algunos currículos.

Los sistemas dinámicos nacen del planteamiento de problemas del mundo físico por medio de ecuaciones diferenciales y constituye una matemática próxima a la realidad, pero una barrera infranqueable se levantaba entre la facilidad con que era posible analizar los llamados sistemas dinámicos lineales y la dificultad o imposibilidad de los no lineales. La ruptura de esta situación se produce a causa de los ordenadores que hicieron posible simular el movimiento de los sistemas no lineales, mostrando que generaban una "dinámica caótica" esencialmente distinta a la lineal pero presente en la naturaleza, tal es el caso de la "geometría fractal", que analiza procesos y formas geométricas cada vez más próximas a las generadas por la vida.

Muchos aspectos de esta teoría en sus formas más simples e intuitivas, como los fractales pueden ser utilizados para desarrollar aspectos del Pensamiento Algebraico como la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización.

La teoría de grafos es un lenguaje útil en diversas disciplinas de la ciencia y es una teoría de relaciones, que potencia procesos de modelización que pueden ser expresado en el lenguaje de los grafos y en el Lenguaje Algebraico.

Análisis de contenidos y tareas algebraicos

Se detecta en el Desarrollo Curricular del Álgebra el uso de técnicas, procedimientos y criterios de secuenciación que parten de la estructura del contenido algebraico a enseñar o de los resultados esperados del aprendizaje algebraico o de ambos a la vez. Ambos análisis tienen como finalidad concretar y secuenciar las intenciones educativas para el Álgebra partiendo del análisis del contenido o de los resultados esperados.

Dentro del análisis del contenido aparecen las referencias históricas y epistemológicas del Álgebra y del análisis de tareas sobresale las consideraciones al funcionamiento cognitivo del alumnado en términos de dificultades, obstáculos y errores que subyacen en las secuencia de ejecuciones de las tareas algebraicas.

Enculturación

La noción de socialización en una comunidad o cultura que resalta los valores de la misma, es central en el desarrollo de hábitos y destrezas y en la construcción de

significados en esa cultura. Schoenfeld (1992) llamó “enculturación” a estos valores o formas propias de proceder en la comunidad o cultura matemática. Los alumnos deben ser inculcados en los hábitos y actitudes propios de la comunidad como la perseverancia en el trabajo, el interés, la motivación, la flexibilidad, etc. en la resolución de problemas. Algunos de los currículos revisados proponen ambientes de trabajo que resaltan el espíritu de búsqueda, de investigación, etc., propios del quehacer matemático.

Empirismo

Preponderancia a la experiencias individuales o de grupo del alumnado como principal fuente de la construcción del conocimiento algebraico.

Actividades y proyectos “open-ended”

Cuestiones o proyectos de resolución abierta donde el estudiante puede dar una serie de respuestas correctas. Situaciones en las que se insiste más en el proceso que en la solución.

Podemos considerar dentro de los problemas “Open-ended” a una larga clase de problemas abiertos tanto en los datos como en el objetivo, además de proyectos de trabajos, la mayor parte de problemas de la vida real, el plantear problemas a partir de unos datos, etc.

Las actividades y proyectos “open-ended” presentan cierta complejidad a la hora de evaluar al tener que escoger entre los diversos caminos antes que en las soluciones mismas. Aparecen de este modo aspectos como “la fluidez” entendida como el número correcto de diferentes respuestas o aproximaciones a la resolución del problema; “la originalidad” entendida como presentaciones “poco comunes” de la actividad; o “la flexibilidad” entendida como el número de presentaciones matemáticamente diferentes; etc.

AGENDA DE INVESTIGACIÓN

La educación matemática como disciplina científica se ha abierto camino en el campo de la investigación hasta situarse en medio, entre las investigaciones en Ciencias y en Ciencias Humanas (Rojano, 1985). La problemática específica de la enseñanza del álgebra participa de las ventajas y de las desventajas de esta situación. El soporte teórico de las investigaciones actuales se encuentra fuertemente relacionado con la llamada Ciencia Cognitiva, que busca dar respuesta a los principales interrogantes en torno a la naturaleza de los procesos de pensamiento en todos sus aspectos, y, en particular con relación a la construcción del conocimiento matemático. Dentro de esta nueva ciencia tienen especial relevancia los aportes de la psicología, la lingüística, la inteligencia artificial, la semiótica, la semántica y la antropología, etc. De estas ciencias el enfoque psicológico es el que ha aportado más elementos a los estudios sobre

el aprendizaje del álgebra, aunque en últimas fechas, los estudios basados en la lingüística y en la inteligencia artificial son cada vez más significativos, y hay una tendencia más general que trata de encontrar respuestas a diferentes interrogantes en el contexto cultural de los sujetos, por lo que la semiótica, la semántica y la antropología cada vez aporta más a la educación matemática.

Entre los diferentes documentos que intentan resumir las aportaciones de las investigaciones en Álgebra y las perspectivas de investigación futura, tenemos: «*Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*» que constituye «Una agenda para la investigación del aprendizaje y la enseñanza del álgebra» promovida por el National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) y coordinado por Wagner y Kieran en 1989.

Este documento forma parte de un Proyecto más amplio para cuatro áreas (Álgebra, Enseñanza y evaluación de Resolución de Problemas, Enseñar Matemáticas efectivas y Aprendizaje de conceptos numéricos por los niños de grado medio). Comenzado en U.S.A. en Mayo de 1986, tuvo como objetivo dirigir esfuerzos de investigación hacia las cuestiones importantes y alentar el desarrollo de mecanismos de apoyo esenciales para colaborar con cadenas de preguntas que los docentes e investigadores, se debían formular.

Una de las metas del Proyecto era, por tanto, desarrollar una agenda para la investigación futura en Álgebra y presentarla en una versión elaborada del trabajo del grupo hasta 1988. Las perspectivas investigadoras en Álgebra presentadas en la agenda se basaron en: contenido, aprendizaje, enseñanza, pensamiento algebraico, afectividad, representación, tecnología, desarrollo curricular, evaluación y formación del profesor.

Aparecen muchas ideas en esta Agenda, algunas formuladas como preguntas muy generales; algunos de los apartados de la agenda son de naturaleza empírica y otros están orientados a cuestiones más teóricas, pero sin duda es un buen referente para los investigadores que realizan investigaciones más puntuales y permite desarrollar a partir de ella, propias agendas de investigación a otros grupos.

NOTAS PARA UNA AGENDA NACIONAL

El propósito final de este panel es aportar y discutir ideas para elaborar una agenda de investigación a nivel nacional en España en Pensamiento Algebraico.

La elaboración de una agenda de investigación no es tarea fácil en ningún campo de la Educación Matemática. En lo que concierne al Pensamiento Algebraico presenta un especial interés por varias razones. La primera y principal, es la continua y generalizada dificultad con que los estudiantes y profesores se enfrentan a la materia a pesar de dos décadas de reformas y desarrollos de planes de estudios. La segunda,

obviamente relacionada con la primera, es el carácter del lenguaje algebraico, que podemos formular en la siguiente pregunta: ¿Qué es el pensamiento algebraico y cuáles son las razones esenciales de la actividad algebraica que deben constituir las metas que tenemos para el aprendizaje de los alumnos en este campo?. La tercera, y no menos importante razón, es la que concierne a la riqueza de los diversos hallazgos en la investigación, escasamente coordinados, que existen en este campo tanto a nivel internacional como nacional.

TAREAS DE LA AGENDA

A partir de los análisis realizados la agenda debe afrontar, al menos cuatro tareas básicas:

1. Caracterizar el Pensamiento Algebraico y señalar las metas para la educación de los alumnos.
2. Presentar una visión integrada de lo que hasta ahora nos ha dicho la investigación y la teoría.
3. Proponer marcos de trabajo que permitan hacer estudios rigurosos de los factores que subyacen en las dificultades de los estudiantes y profesores en la transición de la Aritmética al Álgebra, Pensamiento Algebraico y Resolución de Problemas Algebraicos.
4. Fomentar el desarrollo curricular y la evaluación implementando en lo posible los hallazgos de la investigación.

Se aborda finalmente diferentes temas específicos de investigación en Pensamiento Algebraico que se desarrollan en algunas Universidades Españolas y que pueden constituir el germen de una Agenda Nacional de Investigación en Pensamiento Algebraico, en las tareas 1, 3 y 4, anteriormente mencionadas. Los trabajos relativos a pensamiento numérico y a la transición del pensamiento numérico al algebraico, realizados, en diferentes Universidades Españolas, se abordan de manera explícita en el trabajo: "Perspectivas de investigación en Pensamiento Numérico" (Ortiz, 1999), en estas mismas actas.

Con relación a la tarea 1:

· Caracterizar el Pensamiento Algebraico y señalar las metas para la educación de los alumnos.

Universidad de Valencia

Análisis histórico-crítico de las ideas algebraicas y de la idea de problema, métodos de resolución y formas de argumentación. Cerdán (1993), Puig (1994 y 1996), Puig y Cerdán (1991).

Con relación a la tarea 3:

· Proponer marcos de trabajo que permitan hacer estudios rigurosos de los factores que subyacen en las dificultades de los estudiantes y profesores en la transición de la Aritmética al Álgebra, Pensamiento Algebraico y Resolución de Problemas Algebraicos.

Universidad de Valencia:

Elaboración de los componentes formal de competencia, de los procesos cognitivos, de enseñanza y de los procesos de comunicación, de modelos teóricos locales en el ámbito del Álgebra escolar, la pura resolución de problemas y la resolución de problemas y sistemas matemáticos de signos. Cerdán (1993), Puig (1994 y 1996), Puig y Cerdán (1991).

Universidad de La Laguna:

Estudios sobre los aspectos cognitivos, metacognitivos y heurísticos más relevantes del Pensamiento Algebraico en la etapa 12-16.

Estudio sobre las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Palarea (1998), Palarea y Socas (1995 y 1998), Socas y Palarea (1996 y 1998)

Con relación a la tarea 4:

· Fomentar el desarrollo curricular y la evaluación implementando en lo posible los hallazgos de la investigación.

Evaluación

Universidad de Granada:

Caracterización de tareas e instrumentos de evaluación en Lenguaje Algebraico.

Evaluación de competencias y errores en Álgebra, estudios sobre sistemas de representación y Pensamiento Algebraico, en el marco de la Resolución de Problemas. Fernández (1997a y b)

Universidad de La Laguna

Instrumentos de medida (test) relativos al tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico.

Estudio sobre las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Palarea (1998).

Estudios sobre aspectos afectivos hacia la Matemática y el Álgebra. Palarea (1998)

A modo de conclusión, señalamos finalmente, tres aspectos a considerar en la investigación en Pensamiento Algebraico.

El primero, es señalar la evidencia, de que el reto de la investigación en Pensamiento Algebraico es aún: «diseñar estudios que incrementen nuestro conocimiento de cómo pueden los estudiantes llegar a comprender la estructura del álgebra elemental y los métodos algebraicos».

El segundo, es resaltar que el desarrollo curricular en Álgebra debe asumir cuatro grandes retos:

- El desarrollo curricular en Álgebra no debe ser ajeno a los cambios en la disciplina: caos (fractales), grafos, combinatoria, matrices, problemas de optimización, procesos iterativos y recursivos, ...
- El desarrollo curricular en Álgebra no debe ser ajeno a las consideraciones sociales y culturales.
- El desarrollo curricular en Álgebra no debe ser ajeno a la tecnología.
- El desarrollo curricular en Álgebra no debe ser ajeno a los resultados de la investigación en pensamiento algebraico.

Y, el tercero, es que frente a la postura tradicional de mirar el lenguaje algebraico como una generalización de la aritmética, de los datos que aportan las diferentes investigaciones y de los resultados obtenidos en las nuestras, parece razonable aceptar como señalan Campos Lins y Giménez (1997), que la Aritmética y el Álgebra son dos caras de una misma actividad y que la tendencia debe ser a potenciar el desarrollo del "sentido numérico" frente al aprendizaje de la aritmética y a potenciar la producción de significados para el álgebra frente al aprendizaje de álgebra. En este sentido, proponemos "un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numérico y geométrico, en un marco del Álgebra como Lenguaje (en el sentido de Vygotsky, 1962), donde las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante, como un enfoque didáctico coherente". Este acercamiento semiótico debe ser entendido en su triple dimensión: sintáctica, semántica y pragmática, donde los sistemas de representación que se ocupan del significado del Lenguaje Algebraico, además de considerar el carácter instrumental de los signos del álgebra, abordan la necesidad de considerar el Álgebra como una actividad más de los alumnos, y los signos, como un instrumento específico y mediador de la actividad.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- AA.VV. (1987). *NMP Mathematics for Secondary Schools*. Longman. England.
- ARZARELO, F.; BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. En *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.1, pp.119-134. Recife. Brazil.
- BECERRA, M. V. y Otros (1996). *Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria*. McGraw-Hill. Madrid.
- BEDNARZ, N.; KIERAN, C. and LEE, L. (Eds.) (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers. Montreal Canadá.
- BELL, A. (1988). Algebra-Choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.1, pp147-153. Veszprém, Hungary: OOK
- BELL, A. y otros (1980). *Algebra: Ideas and Material for years 2-5 in the Secondary School*. Sout Notts Project. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham, UK.
- BELL, A., O'BRIEN, D. Y SHIU, C., (1980). Designing Teaching in the light of research on understanding. En *Proceedings of the 4th PME*. California.
- BELL, A.; MALONE, J y TAYLOR, P. (1987). *Algebra: An exploratory teaching experiment*. Nottingham, U.K. Shell Centre for Mathematical Education; Perth, Australia: Curtin University, SMEC.
- BOOTH, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. NFER- Nelson: Windsor.
- BURRILL, G.F. y Otros (1994) *A Framework for Constructing a Vision of Algebra*. (Borrador de trabajo del "Algebra Working Group" del NCTM). NCTM. Reston, VA.
- CAMPOS LINS, R. y GIMÉNEZ, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Papirus: Brazil.
- CEDILLO, T. (1996). *Exploring algebra as a language-in-use: A study with 11-12 year old using graphics calculators*. Tesis no publicada. Universidad de Londres.
- CERDAN, F. (1993). El diseño de un Instrumento de Medida para estudiar la puesta de un Problema en Ecuaciones. En Filloy, Puig y Rojano (Eds.). *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebraicas*. pp. 1-9. Valencia, 1991. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- CHARBONNEAU, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to Geometry, Cap.2, pp. 15-38. En BEDNARZ, KIERAN y LEE (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers. Montreal Canadá.
- CORIAT, M. y Otros (1994). *Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria*. Algaida: Proyecto 2000. Sevilla.
- FERNÁNDEZ, F. (1997a). *Evaluación de competencias en Álgebra Elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- FERNÁNDEZ, F. (1997b). Aspectos históricos del paso de la Aritmética al Álgebra. *Uno*, vol.14, pp.75-91.
- FERRINI-MUNDY, J y Otros (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*. Standards 2000 Project writing Group del NCTM. NCTM. Reston. Virginia.

- FEY, J.T. (1989 a). Computer - Intensive algebra. College Park: University of Maryland.
- FEY, J.T. (1989 b). School algebra for the year 2000. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- FEY, J. Y HEID, K., (1987). Effects of computer-based curriculum in school algebra. Paper presented at a meeting of National Science Foundation project directors, College Park, MD.
- FILLOY, E., y ROJANO, T, (1984). From and Arithmetical to an Algebraic Thought. En *Proceedings of the 6th PME-NA. Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp.154-158. Madison. EEUU.
- FILLOY, E.; SUTHERLAND, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. En Bishop et al (Eds.), *International Handbook Mathematics Education*. Kluwer. Academic Publishers. Netherlands.
- FREUDENTHAL, H. (1974). Soviet Research on Teaching Algebra at the Lower Grades of the Elementary School. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 391-412.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.
- FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.
- GASCÓN, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis y síntesis a la génesis del Lenguaje Algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 13(3). 295-332.
- GOBIERNO DE CANARIAS (1991). *Diseños Curriculares Base para Educación Secundaria*. Consejería de Educación Cultura y Deportes.
- HARPER, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Education in Mathematics*, 18, 75-90.
- KAPUT, J. (1989). Linking representations in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston. VA: NCTM. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
- KIERAN, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York.
- KIERAN, C., BOILEAU, A., GARANÇON, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. En N. Bernarz et al (eds) *Approaches to Algebra..* Kluwer Academic Pub. Netherlands, pp. 257-293.
- KIERAN, C. y FILLOY, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.
- KÜCHEMANN, D. (1981). Algebra. En Hart, K. (Ed.): *Children's Understanding of Mathematics*, pp. 11-16. Murray: London.
- KUHN, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. University of Chicago Press: Chicago. Traducción castellana: *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica: México, 1971.
- MASON, J., GRAHAM, A., PIMM, D. y GOWAR, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra*. The Open University Press. Walton Hall, Milton Keynes.

- MATZ, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleeman y J.S. Brown. *Intelligent Tutoring Systems*. Academic Press. New York.
- MEAVILLA, V. (1995). Estudio sobre el comportamiento visual en Álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (1), 97-105.
- M.E.C. (1989). *Diseño Curricular Base para la Educación Secundaria (Área de Matemáticas)*. M.E.C. Madrid.
- N.C.T.M. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA. NCTM.
- ORTIZ, A. (1999). Perspectivas de investigación en Pensamiento Numérico. *Actas del Tercer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Universidad de Valladolid: Valladolid.
- PALAREA, M.M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral no publicada. La Laguna.
- PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1994 a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma. Monográfico Lenguaje y Matemática.*, Vol. 16, pp. 91-98.
- PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1994 b). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement - apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans). *Actes de la 46^{me} Rencontre de la CIEAEM*. Vol II, pp.111-119. Toulouse. (France).
- PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1995). Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas Algebraicos. *Suma*. Vol. 20, pp. 29-35.
- PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1997). Gestion, communication et apprentissage du langage algébrique. Une étude de cas. *C.I.E.A.E.M.* -49, pp.195-202. Setúbal. Portugal.
- PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1998). Operational and conceptual abilities in the learning of algebraic language. A case study. *Proceedings of the PME-22*. v. 3, pp. 327-334. Stellenbosh, South Africa.
- PUIG, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis*, vol. 10, pp. 47-92.
- PUIG, L. (1996). Pupils' Prompted Production of a Medieval Mathematical Sign System. *Proceedings PME-XX*, vol. 1, pp. 77-84. València. España.
- PUIG, L. y CERDAN, F. (1991). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Aprendizaje y Enseñanza del Álgebra*. pp. 35-48. Cuernavaca, Morelos: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- RADFORD, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En BEDNARZ, KIERAN y LEE (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers. Montreal Canadá.
- REEUWIJK, M. VAN (1995). Students' Knowledge of Algebra. *Proceedings PME-XIX*, vol. 1, pp. 135-150. Recife-Brazil.
- RICO, L.; CASTRO, ENC. y ROMERO, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings PME-XX*, vol. 1, pp. 87-102. Valencia. España.

- ROMBERG, T. A. y Otros (1998). Mathematics in Context: A Connected Curriculum for Grades 5-8" de la "National Science Foundation, University of Wisconsin and Freudenthal Institute Utrecht University". Encyclopaedia Britannica. Chicago.
- ROJANO, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias* 12 (1).
- ROJANO, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bernarz et al (eds) *Approaches to Algebra*. Pp. 137-145. Kluwer Academic Pub. Netherlands.
- SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed). *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.
- SCHWARZ, B. (1989). *The use of microworld to improve the concept image of a function: The triple representation model curriculum*. Unpublished Doctoral Dissertation. Weizmann Institute of Science, Israel.
- SFARD, A. (1991). On the dual nature of Mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 22 (1), pp. 1-36.
- SFARD, A., y LINCHEVSKI, L. (1994). The gains and pitfalls of Reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 26, pp.191-228.
- SOCAS, M.M. y otros. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Ed. Síntesis. Madrid.
- SOCAS, M.M. Y PALAREA, M.M. (1996). El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. *Actas del Simposium Internacional sobre la "Matemática actual"*. XXV años de Matemáticas en la Universidad de la Laguna. pp. 507-521. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- SOCAS, M.M. y PALAREA, M.M. (1997). Las fuentes de significados, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno. Lenguajes Algebraicos*, Vol. 14, pp. 7-24.
- SUTHERLAND, T.; ROJANO, T.; BELL, A. y LINS, R. (Eds.) (en prensa). *Algebraic Processes and Structure*. Kluwer. Dordrecht.
- THOMPSON, P. W. y THOMPSON, A. G. (1987). Computer presentations of structure in Algebra. En Bergeron, J.C.; Herscovics, N. y Kieran, C., (eds.), *Proceedings of the 11th International Conference*. PME. Vol.1 pp.248-254. Montreal, Québec, Canadá: Université de Montréal.
- URSINI, S. (1994). *Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in LOGO*. PhD Thesis. University of London Institute of Education.
- USISKIN, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A.F. Coxford, y A.P. Shulte (Eds.). *Ideas of Algebra, k-12*. pp. 8-19. Reston VA: N.C.T.M.
- WAGNER, S. y KIERAN, C. (Eds) (1989). *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Volume 4. N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates. Reston. Virginia. Hillsdale N.J.
- WHEELER, D. (1989). Contexts for research on the teaching and learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds): *Research agenda for mathematics education: vol.4. Research issues in the learning and teaching of algebra*. pp.278-287. Hillsdale, NJ: Erlbaum.