

APROXIMACIÓN A UN MARCO TEÓRICO
Y METODOLÓGICO ESPECÍFICO
PARA LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MARÍ
Didáctica de la Matemática
Universidad de Málaga

Resumen: De las tres partes (problema, método y resultados) de que constan la mayoría de las investigaciones en Educación Matemática, en particular las tesis doctorales, las dos primeras creemos que son, con diferencia, las más difíciles y específicas, puesto que involucran a la propia naturaleza compleja de los fenómenos en estudio, las más importante y delicadas, en la medida en que se trata del núcleo de la investigación, y, en nuestra opinión, las más descuidadas y necesitadas de una profunda revisión. Una atención especial a dichas fases, realizada desde la preocupación por la justificación y continuidad de lo que hacemos así como por la disparidad y excesiva dispersión de tendencias, enfoques y resultados, nos ha conducido a identificar algunas de las debilidades de la práctica usual y, sobre todo, a comprobar la necesidad de dirigir una parte de los esfuerzos hacia la delimitación de un marco teórico y metodológico específico e integrador que permita alcanzar en un futuro un cuerpo de conocimientos ampliamente compartido. La aportación que aquí presentamos, de la que se incluye un breve resumen de sus fundamentos y principales características así como algunas consideraciones sobre su aplicación concreta, no pretende erigirse en el germen de una nueva teoría o tendencia general alternativa; más bien se trata de un enfoque o tipo de investigación, necesariamente compatible con los ya existentes, basado en la consideración de cuatro componentes básicas y sus relaciones en el marco de la intencionalidad didáctica y en la introducción de una metodología cualitativa específica, no empírica y de carácter meta-analítico a la que hemos denominado "Análisis Didáctico". Con ello se trata de atender a la estructura compleja común de los fenómenos, contemplar de manera efectiva la especificidad del campo, situar las investigaciones en un contexto más amplio mediante la integración sistemática de informaciones, enfoques diversos y disciplinas relacionadas, y sistematizar las tareas y decisiones propias de las primeras fases del trabajo.

Introducción

En el panorama actual de la investigación en Educación Matemática observamos la existencia de diversas tendencias o enfoques, sin una aparente conexión entre ellas, junto a una multiplicidad de investigaciones puntuales entre las que es difícil identificar aspectos comunes y establecer relaciones significativas si no se observan desde una perspectiva más amplia y con una intención integradora. Una de las principales consecuencias / causas de dicha situación es la ausencia de claridad, acuerdo y especificidad en lo que se refiere a la evaluación y a la calidad de los trabajos; como afirma Rico (1999):

“Los criterios para evaluar la investigación en educación matemática no son específicos... Aún no se ha dado respuesta satisfactoria a la cuestión de la calidad... La dependencia de los criterios generales de valoración muestra cierta debilidad teórica. La especificidad matemática no queda recogida explícitamente... Tampoco las condiciones propias de la educación matemática” (op. cit., pág. 6).

La situación descrita es, en buena medida, consecuencia de la diversidad de planteamientos epistemológicos existentes sobre la disciplina. Desde la discusión sobre las relaciones con otras disciplinas afines (Steiner, 1985) hasta la polémica aún vigente sobre el grado de normatividad o científicidad del conocimiento generado (Bishop, 1992), pasando por las diversas posiciones sobre el carácter holístico (Arzarello, 1999; Zan, 1999) o fragmentable (PME), interdisciplinar (Kilpatrick, 1992) o sistémico (Brousseau, 1986) de los fenómenos, encontramos una excesiva variedad de posiciones y tendencias, muchas de ellas necesarias, que compiten por la hegemonía en el campo de estudio sin que se aprecien esfuerzos significativos de integración o acercamiento, de análisis de las estructuras comunes al amparo de las regularidades que indudablemente existen o de constitución, como creemos necesario y posible¹, de un cuerpo de conocimientos ampliamente compartido. Por el contrario, es frecuente apreciar un interés especial por marcar las diferencias y delimitar espacios propios así como por establecer nuevas tendencias, concebidas y presentadas normalmente por oposición a otras, cuya superioridad se defiende a veces con criterios más comerciales que científicos y cuyos beneficios suelen ser más personales que comunitarios.

Por otra parte, la mayoría de las tendencias vienen utilizando métodos usuales en Psicología, Pedagogía y otros campos afines (Romberg, 1992) sin un soporte teórico específico que delimite claramente los factores y las relaciones que intervienen, justifique las determinaciones adoptadas y permita construir modelos fundamentados.

¹ La necesidad es evidente si se desea mejorar la efectividad, utilidad, relevancia y calidad de la labor investigadora. La posibilidad creemos que se sustenta en la suficientemente probada existencia de regularidades.

Dichos métodos, apropiados para parcelas específicas del saber, útiles en enfoques muy particulares y eficaces cuando se emplean en estrecha relación con modelos teóricos bien fundados, son, la mayoría de las veces, insuficientes para abarcar la complejidad de los fenómenos analizados, en los que intervienen múltiples factores interconectados entre sí mediante relaciones que es preciso identificar y analizar previamente en un marco de conjunto que trasciende los planteamientos usuales del enfoque interdisciplinar (González, 1998). El análisis de dichas relaciones dentro de una estructura teórica general y siguiendo un procedimiento sistemático específico puede poner al descubierto aspectos esenciales de los fenómenos, proporcionar conocimientos nuevos, detectar lagunas y deficiencias, construir modelos y establecer prioridades, valorar la situación de los conocimientos disponibles y elaborar programas y agendas de investigación. Nuestra posición se puede resumir así: Dedicemos una parte de nuestra atención a la reflexión teórica previa de carácter integrador sobre la naturaleza de los fenómenos y estaremos en mejor disposición para afrontar las nuevas investigaciones; disponemos para ello de información suficiente en muchos casos y la experiencia nos dice que una tarea de tal tipo siempre redundará en beneficio de la formación del investigador y de la disciplina.

Pero la necesidad de buscar el marco mencionado no sólo está justificada por la propia naturaleza de los fenómenos, la especificidad del conocimiento, la elección de los métodos más apropiados, la calidad, la efectividad o la planificación a medio y largo plazo. La evolución de la investigación en los últimos años, desde las consideraciones realizadas por Fischbein (1987), hasta las reflexiones de Romberg (1992), Bishop (1992) o las más recientes incluidas en Sierpinska y Kilpatrick (1998), ha sido de tal naturaleza que son necesarios nuevos esfuerzos de integración de la multiplicidad de enfoques y resultados existentes. Mientras que esto no se realice podemos seguir inmersos en un proceso excesivamente lento, en el que se invierta demasiado tiempo y esfuerzo en investigaciones de escasa rentabilidad o en trabajos "con pies de barro", es decir, impecables, disciplinados y cuidados desde el punto de vista operativo o técnico, pero aislados, parciales o defectuosos en lo que se refiere a la fundamentación y a la validez, efectividad y relevancia de los resultados.

En los apartados que siguen, después de una breve reflexión sobre algunas cuestiones críticas, se expone un resumen de las principales ideas que sustentan la aproximación que proponemos así como unos breves comentarios sobre su aplicación a investigaciones ya realizadas (González, 1995; Ortiz, 1997) y a otras actualmente en curso en la Universidad de Málaga².

² Estudios de Tercer Ciclo y Proyectos de Investigación subvencionados por la Universidad de Málaga y la Dirección General de Enseñanza Superior del Ministerio de Educación y Cultura (PB97-1066).

Algunas cuestiones críticas sobre la investigación en Educación Matemática Inconvenientes, dificultades y necesidades

Excesiva diversidad y disparidad de tendencias, enfoques y trabajos puntuales aislados, cuyo análisis permite apreciar la existencia de aspectos comunes y lagunas bajo una cierta confusión a nivel lingüístico y teórico.

Ante la ausencia de un marco global específico se aprecian dificultades para la justificación de las decisiones adoptadas (Ej.: Elección y delimitación precisa del problema de investigación o su ubicación en un marco referencial amplio), supeditadas con frecuencia a las modas, creencias personales, limitaciones de la formación, preferencias de cara al desarrollo previsible del trabajo o a las condiciones en las que se va a desarrollar.

Son pocas las investigaciones que tratan de situar el problema en unas coordenadas generales o que alcanzan una validez de constructo aceptable en sus instrumentos de recogida de datos, lo que favorece la ausencia de un esquema organizativo propio, un vocabulario común y unos criterios compartidos para evaluar la calidad. Como consecuencia, pocas veces se discuten las relaciones entre varios aspectos de un problema o se deciden razonadamente las prioridades. En este sentido, creemos necesario trabajar con sucesivas aproximaciones a la realidad mediante modelos cada vez más completos que nos permitan manejar la complejidad, justificar las decisiones, rentabilizar los resultados y desarrollar líneas de investigación claras y coherentes.

Limitaciones en los hallazgos y escasa relevancia de los resultados. Con frecuencia, los resultados son excesivamente puntuales y restringidos a condiciones muy particulares, con lo que se produce una relativa ineficacia de las propuestas y una reducida o nula incidencia en la práctica.

El problema de la selección y el tratamiento de los antecedentes. Desde un punto de vista general, las búsquedas retrospectivas suelen ser exhaustivas y bastante completas, aunque con frecuencia se circunscriben exclusivamente al problema específico, ignorando informaciones relacionadas sin una justificación clara. Asimismo, se aprecia una cierta arbitrariedad incluso en el tratamiento de los antecedentes específicos, en el que se toma una parte de ellos y se desestiman otros sin causa justificada o apelando a criterios poco objetivos sobre su calidad y relevancia.

Por otra parte, se pueden distinguir dos tipos de investigaciones extremas en este sentido: las que son una continuación estricta de trabajos anteriores (líneas de investigación consolidadas, como la resolución de problemas de enunciado verbal (Castro, 1994)) y las que parten de trabajos diversos e introducen suficientes elementos

nuevos como para constituirse en líneas de investigación o en nuevos enfoques particulares. En el primer caso puede ser necesario revisar los planteamientos y resultados anteriores ante la aparición de teorías, datos y relaciones nuevas. En el segundo caso, resulta imprescindible considerar los antecedentes en un sentido amplio (no sólo específicos) y revisar sus fundamentos antes de decidir qué investigar y cómo hacerlo.

Tendencias, escuelas y puntos de vista

Las diferentes investigaciones han sido agrupadas en tres tendencias o tradiciones básicas (Bishop, 1992): filosófica, pedagógica y empírico-científica, con diversas variaciones, supuestos teóricos y "escuelas". Todas ellas han realizado y realizan aportaciones valiosas y todas identifican y tratan aspectos importantes de los fenómenos; son dignas de consideración y la importancia de su contribución al campo de estudio está fuera de toda duda. Sin embargo, los planteamientos y resultados son a menudo parciales o sesgados y las investigaciones presentan algunos inconvenientes como los que exponemos a continuación sobre las tres tradiciones mencionadas.

a).- Las investigaciones dentro de la tendencia empírico-científica (Ej.: la mayoría de los trabajos presentados en los encuentros anuales del grupo PME), centran su atención en los aprendizajes y otros aspectos cognitivos, cuidando especialmente el método y aportando resultados útiles en un proceso lento pero seguro. Sin embargo, salvando las diferencias existentes entre los diversos tipos de trabajos, se han realizado, entre otras, las siguientes críticas:

- la complejidad de los problemas hace imposible el control de todas las variables significativas, lo que induce a poner en duda la credibilidad y científicidad del conocimiento generado (Arzarello, 1999);

- los estudios se realizan a menudo en condiciones de laboratorio, con la consiguiente distorsión de las situaciones que podemos llamar "naturales"; esto pone en duda la utilidad práctica de los resultados, es decir, su capacidad innovadora o de transformación efectiva de la realidad;

- los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se encuentran claramente influenciados por la epistemología y la fenomenología del conocimiento involucrado, aspectos que a menudo no intervienen o intervienen parcialmente. Se utilizan modelos rígidos e insuficientemente justificados o se emplean consideraciones históricas y epistemológicas de forma ocasional o anecdótica y sin una justificación clara en un esquema de conjunto (González, 1995);

- es frecuente observar una escasa justificación de las tareas empleadas o de los criterios de construcción de los instrumentos, en muchos casos arbitrarios o procedentes de estudios anteriores en los que tampoco se encuentra mucha más información en tal sentido (conclusión del autor).

b).- Desde un punto de vista general y un tanto reduccionista, la conocida "escuela francesa" centra su atención en el conocimiento matemático y en los aspectos socio-pedagógicos de los fenómenos en estudio, presentando, entre otros, los siguientes inconvenientes:

- dificultades para justificar comportamientos observables, establecer regularidades y deducir consecuencias de tipo práctico en aquéllas investigaciones en las que se utilizan las nociones de obstáculo, concepción o ingeniería didáctica;

- cierto descuido del aprendizaje, la cognición y, en general, de los estudios que se vienen desarrollando dentro de la tradición psicológica;

- afán de construcción prematura de un marco teórico exhaustivo, en parte útil y en parte excesivo (todo hay que definirlo con precisión), que provoca una tendencia hacia la autosuficiencia y, como consecuencia, a la exclusión de estudios útiles; ello provoca también un cierto rechazo de algunos investigadores que prefieren tener una mayor libertad de acción y de exigencias teóricas;

- cierto desequilibrio entre teoría, resultados empíricos e incidencia real en las aulas;

- potencialidad explicativa alta sobre algunos fenómenos (contrato didáctico, papel del profesor, enseñanza, etc.) pero insuficiente sobre otros (errores, aprendizaje, actitudes, etc.)

- complejidad tratada de manera global y específica desde el principio, en contraposición a otras tendencias que prefieren afrontar los problemas y teorizar paso a paso;

- afán de especificidad extrema con una cierta desconsideración hacia teorías, resultados y prácticas útiles en disciplinas afines, pero sin una metodología específica digna de consideración.

c).- La tradición empírica naturalista, etnográfica u holística, en la que podemos situar a la reciente tendencia italiana denominada "investigación para la innovación" (Arzarello, 1999), que propugna abordar la realidad educativa directamente y en toda su extensión sin teorías sistémicas ni modelos globales preconcebidos, proporciona un conocimiento situado, rico y profundo, a pesar de lo cual se observan también dificultades como las siguientes:

- prioridad a los aspectos socioculturales y de interacción profesor-alumno, pero descuido o exclusión de la interacción entre iguales, de la dimensión cognitiva individual o la investigación sobre el profesorado, entre otros aspectos;

- dificultades para la interpretación de los hechos observados, la justificación de las tareas elegidas, la sistematización del trabajo y la generalización y replicabilidad de los resultados;

- Carácter excesivamente local y personal de los conocimientos generados. Los proyectos proporcionan experiencias innovadoras puntuales de gran valor para los profesores y alumnos participantes, pero débiles desde el punto de vista de su credibilidad y de su capacidad para ser compartidos, sistematizados y acumulados, si no es a través de estudios metaanalíticos, y de ser replicados y validados, es decir, de su capacidad para constituirse en conocimientos científicos;

- necesidad de participación numerosa y comprometida de profesores en ejercicio como investigadores, lo que plantea problemas de formación y de coordinación de los trabajos;

- necesidad de compatibilizar las experiencias innovadoras con el desarrollo curricular ordinario, lo que introduce restricciones en la planificación y el desarrollo de la investigación.

fases y procedimientos usuales

De forma muy simplificada, se puede decir que el desarrollo de la mayoría de las investigaciones en Educación Matemática, en particular las tesis doctorales, presentan dos partes diferenciadas: Una primera, constituida por la investigación en sí, y una segunda, en la que se dedica la atención, básicamente, al «cierre» del proceso y a la redacción, presentación y difusión del informe. A su vez, la primera parte presenta las tres fases conocidas como «problema»³, «método»⁴ y «resultados», constituyendo las dos primeras el «núcleo» de la investigación, la parte más delicada y, como veremos, la más necesitada de una atención especial en nuestro campo.

Desde un punto de vista más detallado, Romberg (1992, p. 51) resume el procedimiento usual en un desarrollo lineal poco realista, aunque útil para los propósitos de la exposición, consistente en diez pasos o actividades, de las que el autor concede una especial importancia a las cuatro primeras: Situación de las ideas propias sobre un

³ Se identifica un fenómeno de interés, se revisa y analiza la literatura, se hacen explícitas las conjeturas, se decide qué investigar y se realiza una primera formulación del problema.

⁴ Plan de trabajo y su desarrollo operativo mediante el empleo de las metodologías más apropiadas.

problema (1.- identificar un problema de interés y 2.- construir un modelo preliminar), relación con el trabajo de otros expertos (3) y decisión sobre qué investigar (4.- preguntas y conjeturas); las restantes actividades (de la 5 a la 10) reflejan la parte operativa o técnica del proceso (figura 1). Pero, mientras que existen más de veinte procedimientos para el desarrollo de esta segunda parte, que el mismo autor clasifica en cuatro grandes categorías (pp. 52 y sgtes.), encontramos que *las actividades supuestamente más importantes del proceso, para las que además no existe ningún procedimiento sistemático, parecen estar fundamentadas, única y exclusivamente, en la intuición y formación del investigador, en la tradición sobre el problema o fenómeno a investigar y en los conocimientos generados con anterioridad por la comunidad de expertos* (Bishop, 1992, pp. 712-714). Estas consideraciones serían suficientes para garantizar la calidad y relevancia de los resultados si los fenómenos y problemas no fueran tan complejos como realmente son, si estuviera suficientemente claro cuáles son los antecedentes relacionados con el problema, si se hicieran intervenir los aspectos fundamentales en términos de relaciones y si se contemplara una cierta integración de las diversas perspectivas y tradiciones más allá de la mera interdisciplinariedad; condiciones que o no se cumplen con plena satisfacción o existen serias dudas de que así sea. Como se verá más adelante, la aproximación que proponemos trata de paliar los inconvenientes indicados mediante la introducción de un mecanismo de control sistemático en las primeras fases del trabajo.

Tipos de disciplinas por el énfasis en el método o el problema

De los dos posibles tipos de disciplinas (Bishop, 1992; Zan, 1999), a saber, las que ponen un mayor énfasis en el método (method-led) (Ejemplo: Psicología), supeditando a él los problemas susceptibles de ser investigados, y las que se orientan fundamentalmente al problema (problem-led), considerando el método como dependiente del tipo de problema, se puede decir que las investigaciones en nuestro campo se suelen considerar encuadradas dentro de esta última categoría. Sin embargo, esta relación de dependencia no debe ser tan rígida como se supone. Antes bien, creemos que es posible hablar de un modelo mixto basado en las siguientes consideraciones:

- el problema, el método y el marco teórico no son totalmente independientes; los problemas no son tan diferentes como para requerir métodos diferentes; presentan aspectos diferenciales, pero también presentan una estructura común que sugiere un planteamiento mixto (énfasis en parte en el método y en parte en el problema) más acorde con la naturaleza de los fenómenos;

- la estructura común es específica y demanda una metodología también específica; en este sentido la disciplina se orienta parcialmente al método;

- la estructura "diferencial" depende de cada tipo de problema y su tratamiento requiere de las diferentes metodologías usuales en la investigación educativa; en este sentido, la disciplina se orienta, parcialmente también, al problema;

- el problema y el método son inseparables en lo común, de manera que el método, en la medida en que proporciona una visión de conjunto, determina en parte el problema a investigar; a su vez, en lo que a la parte diferencial se refiere, el método depende parcialmente del problema;

- la orientación parcial al método impone al menos dos restricciones a la investigación: limitación a la estructura común y dependencia de la información existente hasta el momento (antecedentes) sobre los distintos aspectos de dicha estructura común;

- es posible hablar de un marco teórico común identificador de la disciplina y estrechamente unido al marco metodológico. El marco teórico general debe presentar también, en cada caso, una parte común y una parte diferencial o específica del tipo de problema investigado.

Marco Teórico y metodológico: Una aproximación

Se exponen a continuación, agrupadas en seis apartados, las principales ideas que caracterizan el marco teórico y metodológico en el que venimos trabajando; no son las únicas ni se encuentran aquí convenientemente desarrolladas, pero constituyen una muestra suficientemente representativa para los propósitos del seminario.

Consideraciones generales

1.- Si aceptamos que la investigación en el campo de la Educación Matemática es científica y, por tanto, "indagación sistemática con fines epistémicos" (Rico, 1999), es evidente que los enfoques, métodos, supuestos, interpretaciones, conocimientos generados y otras características de dichos procesos de indagación van a depender, básicamente, de las determinaciones que se adopten con respecto a la naturaleza de los fenómenos. Estas determinaciones deben surgir, en el seno de un proceso dialéctico entre la teorización y construcción de modelos y los conocimientos empíricos, es decir, deben depender de los conocimientos generados en anteriores investigaciones, sean del signo o tendencia que sean, y no sólo de los modelos teóricos empleados. En este sentido, las diferentes aproximaciones no pueden ser antagónicas, incompatibles o independientes, como a veces se quieren presentar, sino que se encuentran relacionadas y se pueden valorar e integrar en un esquema de conjunto, buscando lo que tienen de común, lo que las une, lo que las hace útiles y débiles al mismo tiempo, y no sólo lo que tienen de específico, diferenciador, defectuoso o lo que las separa.

2.- Los fenómenos del campo de la Educación Matemática son complejos y sistémicos; en ellos interactúan numerosos factores cuyas relaciones deben ser analizadas en un marco de integración de perspectivas y procedimientos (Begle, 1961);

3.- En dichos fenómenos intervienen aspectos generales, que forman parte también del interés de otras disciplinas, y aspectos que son específicos y que introducen diferencias en el modo de abordar los mismos problemas desde otros campos del saber. Esta especificidad parcial del campo de estudio está fundada en la intervención decisiva/determinante del conocimiento matemático y de sus características en el marco de una "intencionalidad didáctica" así como de sus relaciones con otros campos (idea apuntada ya por Vergnaud, 1990, pp. 22-23);

4.- Las características específicas del conocimiento matemático impregnan todas las facetas de los fenómenos educativos en matemáticas, dotando de *personalidad propia* a los diferentes campos que intervienen y a las relaciones entre ellos. Como consecuencia, se constata la insuficiencia de la aproximación interdisciplinar y la necesidad de la consideración conjunta de conocimientos, enfoques y tradiciones diversas, lo que supone una inversión en los supuestos que consideran la Didáctica de la Matemática como una prolongación o rama especializada de la Didáctica General o de la Psicología de la Educación (Fischbein, 1990, pp. 6-12).

5.- El análisis de los problemas debe partir de lo más específico, como es el conocimiento matemático, siendo necesario revisar el proceso usual (Romberg, 1992, p. 51) para incluir un doble punto de vista: Un enfoque genuino, para fundamentar y organizar el campo mediante un procedimiento específico, y un enfoque operativo interdisciplinar en el que se aborden los aspectos puntuales que se deducen del estudio anterior mediante las estrategias y métodos "importados" de áreas afines. Estos últimos son adecuados para propósitos particulares, pero no son suficientes ni prioritarios y se deben supeditar a los resultados del análisis previo indicado.

Sobre el conocimiento matemático

6.- El conocimiento matemático es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, parcial e incompleto y tiene que ver con ideas u objetos conceptuales a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias. Estos objetos son independientes de su simbolización, tienen una existencia ficticia o convencional y comparten dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida (Popper, 1979).

7.- Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos, sus propiedades, las acciones sobre ellos y las propiedades de estas acciones, pertenecientes todos ellos a un mundo único en expansión que contiene los productos de la cognición humana y, en particular, los productos de la actividad matemática (Puig, 1997, pág. 67).

8.- La creación / descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (fisiológicas, entre otras), del medio (físicas, sociales, culturales, entre otras) y de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio). La intervención de los tres factores (mente, medio e interacción) se produce en todas las interpretaciones sobre la naturaleza y el modo de producción del conocimiento matemático (González, Pascual y Flores, 1994).

Sobre la Educación Matemática, sus factores y relaciones

9.- El campo de la Educación Matemática está constituido por el conjunto de fenómenos relacionados con las actividades humanas, sociales y culturales ordenadas y orientadas a hacer posible, desarrollar y optimizar la personalización, transmisión y creación de la cultura matemática considerada como experiencia colectiva organizada. Una de las finalidades básicas es la preparación de la intervención del individuo en la sociedad. El sistema convencional de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Steiner, 1984), la formación de profesores y el Área de Didáctica de la Matemática constituyen partes importantes del campo de la Educación Matemática.

10.- El análisis de los fenómenos del campo de la Educación Matemática debe incluir los análisis epistemológico, sociocultural, cognitivo y fenomenológico, que se han de relacionar entre sí y con un análisis sobre la enseñanza y el currículo como aspectos específicos y terminales.

11.- Los factores que intervienen se pueden agrupar en torno a tres grandes áreas: la que corresponde al **conocimiento**, como elemento fundamental de las interacciones mencionadas en el apartado 8, en la que hemos de destacar, a su vez, cuatro subáreas relacionadas: El conocimiento en sí (*sobre Matemáticas* o sobre *Didáctica de la Matemática*), su *Historia*, su *Epistemología* y su *Fenomenología*; el área que hace referencia a los **sujetos**, atendiendo al aprendizaje y a la cognición bajo el dominio de la *Psicología*; el área que atiende a los **medios** en el que se producen las relaciones entre las dos áreas anteriores, con dos subáreas importantes: el medio sociocultural, bajo el ámbito de la *Sociología*, la *Antropología* y la *Cultura*, y el medio educativo formal, que engloba todo lo relacionado con la *Enseñanza* y el *Currículum*.

12.- Los análisis epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos en Educación Matemática deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés se debe centrar en obtener información relevante para la enseñanza y el aprendizaje, lo que supone tener presente al alumno, sus necesidades y capacidades, el aula, las actividades, los métodos y técnicas didácticas usuales, etc.. Con la información obtenida bajo este enfoque peculiar se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia común: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación.*

13.- Se sitúan en una posición privilegiada las relaciones entre la Epistemología y la Psicología, que, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento y con las determinaciones curriculares. Asimismo, la vertiente socio-pedagógica presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas o culturales que vienen a completar una visión global y específica en lo fundamental del campo de estudio. Las múltiples relaciones existentes demandan una integración previa que no debe agotarse en una simple adición de datos (concepción interdisciplinar), sino que requiere de una elaboración compleja a través de una metodología específica que proporcione nueva información.

Sobre la Didáctica de la Matemática, sus factores y relaciones

14.- La Didáctica de la Matemática es un Área de conocimientos sobre los fenómenos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación de las matemáticas (fenómenos de la Educación Matemática) en la institución educativa y en el medio social. Forma parte del campo más general de la Educación Matemática y una de sus principales finalidades es identificar y resolver los problemas que surgen en la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación de conocimientos matemáticos para optimizar los procesos correspondientes. Dos de sus principales tareas, relacionadas entre sí, son: **a)** la investigación o indagación metódica y disciplinada con fines epistémicos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y **b)** la investigación y el desarrollo de la formación de profesores de matemáticas.

15.- Bajo el epígrafe a) se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, las siguientes parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente: los aprendizajes y aspectos cognitivos, la enseñanza y los procesos reales en el aula. Las tres se encuentran relacionadas bajo el denominador común de la Psicología y la Sociología de la Educación Matemática (Fischbein, 1990, pp. 6-12), en lo que constituye un primer nivel de relación en torno a las finalidades educativas y a las características generales del conocimiento. A su vez, este primer nivel depende

de otros factores básicos, como son: la Matemática, su Epistemología y su Historia o la Fenomenología del conocimiento matemático, en lo que constituye un segundo nivel de relación, más específico, centrado tanto en finalidades como en contenidos matemáticos.

16.- Los factores o componentes básicas de los fenómenos del tipo a) son: Los conocimientos “de” y “sobre” las Matemáticas, su Epistemología, Historia y Fenomenología; los aspectos socioculturales relacionados; el aprendizaje y la cognición en relación con las matemáticas; la enseñanza y los aspectos curriculares en relación con el conocimiento matemático.

17.- Los factores o componentes básicas de los fenómenos del tipo b) son: La Didáctica de la Matemática o Área de Conocimientos sobre los fenómenos del apartado anterior (conocimientos relacionados con la Educación Matemática), abarcando: los conocimientos “de” y “sobre” la Educación Matemática, la Historia, la Epistemología y la Fenomenología de la Educación Matemática; los aspectos socioculturales relacionados con el campo de la Educación Matemática y con el sistema de enseñanza de las matemáticas; el aprendizaje y la cognición de los profesores en formación y en ejercicio en relación con los fenómenos de la Educación Matemática; la enseñanza y los aspectos curriculares específicos de los planes de formación de profesores.

18.- Las tres áreas básicas (conocimiento, sujetos y medios) y los factores mencionados se constituyen también en fuentes de información para los diseños curriculares correspondientes, de tal manera que es posible justificar, situar y completar los organizadores curriculares (Rico, 1997) dentro del marco teórico que estamos describiendo. Es decir, el marco teórico que proponemos aporta información útil sobre fuentes, componentes y estructuras para la elaboración de diseños curriculares en Matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas (González, 1999, pp. 129 y 141).

Sobre la investigación y la metodología

19.- Las áreas y factores indicados en los tres puntos anteriores constituyen fuentes de información primaria sobre cada uno de los dos tipos de fenómenos señalados. Dicha información debe siempre ser analizada en el marco general de la **intencionalidad didáctica** para los fenómenos del tipo a) y de la **intencionalidad formativa profesional** para los del tipo b); ambas son diferentes y dotan de personalidad propia a las investigaciones correspondientes.

20.- La información primaria o básica sólo comienza a adquirir el carácter de información específica y a profundizar en la naturaleza compleja y sistémica de los fenómenos cuando se le hace intervenir en una **red de relaciones** entre las áreas y

factores en juego (González, 1995) bajo el denominador común de la intencionalidad didáctica (básica o profesional) (figura 1). El análisis cualitativo de las relaciones permite integrar informaciones aisladas proporcionando conocimientos y modelos teóricos nuevos y abriendo nuevas perspectivas.

21.- El análisis mencionado se puede realizar de manera sistemática mediante el método que hemos denominado "Análisis Didáctico" (González, 1995, 1998; Ortiz, 1997). Algunos autores (Freudhental, 1983; Puig y Cerdán, 1988, pág. 74) utilizan la misma terminología para indicar «..el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos..» (Puig, 1997, pág. 61). En nuestro caso nos referimos a un procedimiento sistemático para las primeras fases de la investigación.

22.- El Análisis Didáctico se constituye en una de las principales tareas en los inicios de la investigación, lo que supone la introducción de tres nuevas actividades (3.1, 3.2 y 3.3 de la figura 2) en el esquema de Romberg.

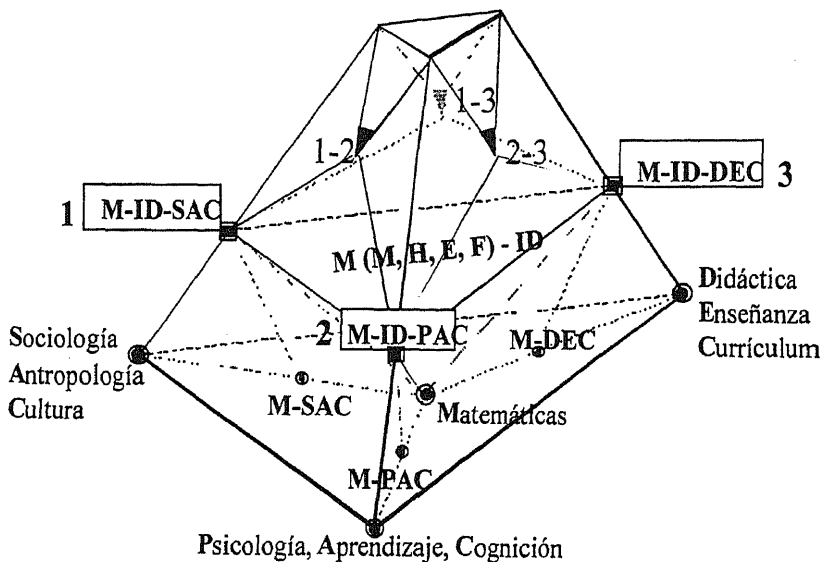


Figura 1.- Áreas y relaciones

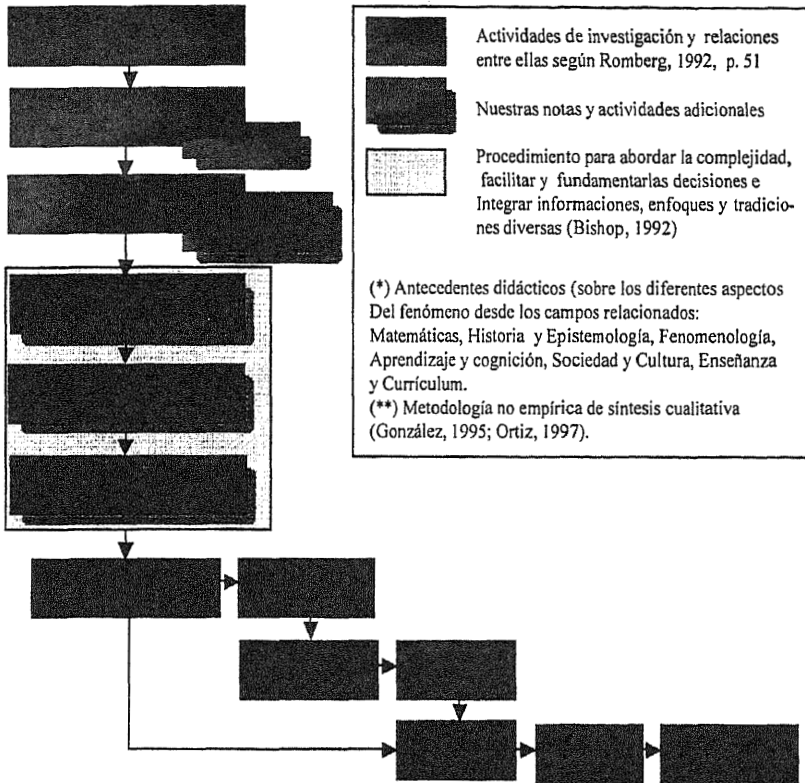


Figura 2.- Tareas según Romberg y modificaciones propuestas

23.- El empleo del Análisis Didáctico, la intervención de las tres áreas básicas y sus componentes en el marco de la intencionalidad específica y la red de relaciones como núcleo generador de modelos, no intervienen en la aproximación interdisciplinar usual. Estos elementos delimitan, por tanto, una nueva aproximación por la que se establece una parte específica que organiza el campo de fenómenos, facilita la toma de decisiones y proporciona un marco en el que también deben tener cabida las investigaciones, los métodos y resultados de otras aproximaciones.

Sobre el Análisis Didáctico como metodología específica

En el tipo de estudios denominado *investigación secundaria o de síntesis* se han venido utilizando dos metodologías diferentes: la revisión integrativa tradicional y la revisión cuantitativa, también llamada meta-análisis⁵. Recientemente, debido a la necesidad que se detecta en numerosas investigaciones cualitativas de sintetizar e integrar un número grande de estudios, ha surgido una modalidad de síntesis denominada *revisión de bibliografía multivocal* o, abreviadamente, **revisión multivocal** (Ogawa y Malen, 1991). Se trata de un procedimiento de síntesis cualitativa “..dirigido a indagar un fenómeno complejo de interés en el que no se pueden manipular los eventos y del que se tienen múltiples fuentes de datos eminentemente cualitativos, confiando en obtener un retrato detallado del fenómeno que se estudia”. (Fernández, 1995, pág. 175).

La revisión multivocal de un tópico se basa en los siguientes criterios, que son similares a los que se proponen para el estudio de casos (op. citada, pág. 176):

1).- Una clara definición del tópico a indagar, a través de: consultar múltiples fuentes; mantener cadenas de evidencia entre los registros de las fuentes consultadas y las inferencias extraídas; incorporar formalmente las reacciones de los informantes a la definición conceptual establecida.

2).- Valorar la fuerza relativa e individual de cada dato utilizando alguno de los siguientes criterios: posición y certitud de la fuente (validez externa); claridad, detalle, consistencia y factibilidad del contenido (validez interna); capacidad para corroborar la información contenida en cada documento con información adquirida de otras fuentes.

Del meta-análisis nos interesan particularmente los siguientes criterios:

3).- Revisar el mayor número posible de estudios; localizar los estudios a través de búsquedas objetivas y replicables; no excluir inicialmente estudios en base a su calidad; diferenciar y clasificar cada estudio de acuerdo con la incidencia de sus resultados en el problema de investigación.

La consideración conjunta de los criterios anteriores configura un nuevo enfoque que hemos denominado **meta-análisis cualitativo**. La finalidad del meta-análisis cualitativo, como la de cualquier meta-análisis, es: “.. la formulación de teorías que expliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones” (Bisquerra, 1989, págs. 247 - 252); la diferencia en este caso radica en el empleo de criterios que son característicos de una metodología interpretativa.

⁵ Para una confrontación de ambas metodologías, ver Fernández (1995), págs. 165 y siguientes).

Denominamos **análisis didáctico** en Educación Matemática al procedimiento metodológico que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a las tres áreas y los siete campos siguientes: **Conocimientos** (Matemáticas (Didáctica de la Matemática), Historia de la Matemática (de la Educación Matemática), Epistemología de la Matemática (de la Educación Matemática), Fenomenología del conocimiento matemático (de la Educación Matemática), **Sujetos** (Aprendizaje y cognición en relación con el conocimiento matemático (con la formación de Profesores de Matemáticas)) y **Medios** (Cultura y Sociedad en relación con el conocimiento matemático y con la Educación Matemática (con la formación de Profesores de Matemáticas), Enseñanza y estudios curriculares en relación con las matemáticas (con la formación de Profesores de Matemáticas)). El proceso secuenciado consta de las siguientes fases:

Primera fase.- Revisión primaria de la información en todas y cada una de las áreas, siguiendo los siguientes pasos: a) análisis y clasificación de acuerdo con los criterios establecidos; b) obtención de datos relevantes; c) análisis de las relaciones entre los datos relevantes, síntesis y conclusiones; d) conjeturas y prioridades de la investigación dentro del área en relación con el tópico; e) evaluación de la revisión por área. La profundidad de la información y el grado de atención a cada una de las áreas vienen delimitados por las características del problema de investigación así como de los estudios realizados previamente dentro de este marco teórico y metodológico.

Segunda fase.- Análisis de las relaciones entre áreas siguiendo el siguiente procedimiento: f) estudio de las relaciones a partir de la información de los apartados c), d) y e) en cada área; g) conclusiones; h) conjeturas y prioridades; aspectos a investigar; i) resultados generales y evaluación del estudio completo. La profundidad de cada uno de estos análisis y el grado de atención a los distintos tipos de relaciones dependerá de las características del problema así como de los estudios realizados previamente sobre el área problemática dentro de este marco teórico y metodológico.

Hasta ahora, como regla general, se ha considerado la combinación de los análisis epistemológicos (didácticos) y fenomenológicos como elementos básicos, a los que se añaden informaciones complementarias de carácter cognitivo, sociológico y curricular, si bien se observa la conveniencia de delimitar previamente el peso relativo de cada componente así como el grado de generalidad de la información requerida en cada caso; asimismo, los estudios teóricos se han complementado con estudios empíricos exploratorios "ad hoc", dependiendo del problema. A lo largo del proceso se confrontan los datos y se realiza una síntesis explicativa global, buscando una

interpretación coherente con los resultados de investigaciones anteriores. Como consecuencia, se establecen prioridades de investigación, se formulan teorías, se construyen modelos, se realizan estudios empíricos y comprobaciones experimentales y se deducen consecuencias para futuros estudios. *El análisis didáctico procesa, analiza y sintetiza información procedente de diferentes tendencias y campos interrelacionados entre sí por su objeto de estudio, proporcionando una síntesis que permite detectar carencias y limitaciones en los trabajos anteriores y organizar adecuadamente el desarrollo futuro de la investigación. La técnica utilizada tiene en cuenta la complejidad del campo así como la pluralidad de aproximaciones que se suelen encontrar en la literatura científica al uso y en los resultados de investigación contrastados por la comunidad.*

Aplicación a dos estudios particulares: Números enteros y razonamiento inductivo numérico.

La investigación sobre números enteros (González, 1995, 1998) ha sido el origen del marco teórico y metodológico que presentamos. La revisión de los antecedentes se inició en 1988 para la preparación del libro de la editorial Síntesis sobre Números enteros (González y otros, 1990), tomando en consideración los pocos estudios específicos disponibles en aquel momento así como las publicaciones con una orientación didáctica (Freudhental, Colectivo Periódica Pura, etc.), los libros de texto y las publicaciones de matemáticas elementales. Pronto se apreciaron las limitaciones de la información, constatándose la necesidad de clarificar los aspectos históricos, epistemológicos y fenomenológicos para tratar de encontrar respuestas a los interrogantes planteados sobre la naturaleza y las conexiones con la aritmética natural. Se acudió entonces a la historia y a la epistemología (Glaeser, Russell, entre otros) que inmediatamente remitieron, por un lado, a consideraciones sobre la medida, la cantidad y el número (Husserl, Stegmüller), y por otro, a estudios relacionados con el álgebra, el paso de la aritmética al álgebra, la ampliación de los conjuntos numéricos y las construcciones de los números enteros. Así surgió la necesidad de relacionar, por ejemplo, la construcción formal con la comparación y el orden así como con el proceso usual de metrización y de formación de los conceptos científicos, algunos de ellos alejados del campo de la investigación en Educación Matemática.

Las relaciones de la información anterior con la procedente de los estudios cognitivos sobre la cantidad, el número natural y la medida o la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal, a la luz de los pocos trabajos específicos sobre los números con signo, así como con el análisis de la enseñanza usual y otros aspectos curriculares, permitieron detectar la existencia de un campo de nociones métricas y

numéricas diferentes (números naturales relativos) situado entre N y Z. Las diferencias estructurales entre las tres nociones en juego, se pusieron también de manifiesto en el terreno cognitivo, cuando una muestra intencional de sujetos, a través de un estudio empírico cuantitativo, asignaron términos y significados diferentes a los números naturales relativos y a los números enteros cuando intervenían en situaciones cotidianas de aplicación de ambos tipos de números. El estudio ha permitido identificar un nuevo campo numérico desde el punto de vista didáctico, elaborar una nueva organización didáctica para el campo conceptual aditivo (González, 1999), detectar algunas lagunas en estudios anteriores sobre el campo conceptual aditivo (Vergnaud y Durand, 1976) y sobre resolución de PAEV, proporcionar una nueva clasificación de estos problemas y abrir nuevas perspectivas a los trabajos sobre números enteros, el paso de N a Z y de la aritmética al álgebra.

En la tesis doctoral titulada "Razonamiento Inductivo Numérico" (Ortiz, 1997), se realizó un desarrollo parcial del Análisis Didáctico. La delimitación del problema y los primeros estudios empíricos se habían realizado ya cuando se decidió continuar la investigación dentro del marco teórico y metodológico que presentamos, por lo que algunos aspectos y sus relaciones estaban ya fijados de antemano. Para empezar, se continuó el estudio ya iniciado sobre historia y epistemología de la inducción y de las series numéricas, se realizó una revisión crítica de tareas inductivas con series de números naturales en libros de texto, tanto antiguos como actuales, se sistematizaron y analizaron los datos de los estudios empíricos previos, en los que se construyó una escala acumulativa de Mokken para alumnos de 9 a 12 años (Ortiz, 1993) y se realizó un análisis de las tareas de continuación de series a la luz de los conocimientos, habilidades y destrezas involucradas así como de los resultados conocidos sobre aprendizaje y cognición en el campo numérico natural, con especial atención a los estudios de Piaget y colaboradores. Con toda la información indicada se construyó un modelo teórico de razonamiento inductivo en tareas de continuación de series para el rango de edades de Educación Primaria, se confirmó empíricamente la bondad del modelo, se obtuvo una escala acumulativa de Guttman para los niveles estudiados y se realizó una indagación cualitativa para confirmar las regularidades y profundizar en sus causas.

Aplicación a otras investigaciones en curso

El interés se centra en la actualidad en la continuación de los dos estudios anteriores, actualización de los antecedentes, análisis de las nuevas relaciones en su caso y tratamiento de algunos de los problemas pendientes. Asimismo se han iniciado nuevos estudios, algunos de los cuales se exponen brevemente a continuación. La dispa-

ridad de los temas y las diferencias notables en la orientación pueden sorprender si se examina la globalidad del trabajo desde perspectivas centradas en tendencias o enfoques particulares, en los contenidos matemáticos como referentes de líneas de investigación, en áreas problemáticas específicas o problemas puntuales o en algunos de los componentes del análisis didáctico (cognición, currículum, aspectos culturales, etc.). Sin embargo, hemos de reiterar que el interés que nos guía presenta una cuádruple vertiente: La búsqueda de un marco teórico y metodológico específico, el tratamiento de los antecedentes, la integración de información en un todo coherente en el que las relaciones tengan un papel relevante y la comprensión y cognición en general como núcleo de la indagación a medio y largo plazo. Veamos brevemente cómo se ponen de manifiesto estas consideraciones en tres de las investigaciones ya iniciadas en la Universidad de Málaga.

A) La comprensión del conocimiento matemático en alumnos sordos y oyentes integrados en aulas ordinarias: Identificación y tratamiento de algunos espacios comunes.

El trabajo se está llevando a cabo en dos frentes: uno empírico, de carácter exploratorio, y otro teórico simultáneo mediante el desarrollo del Análisis Didáctico sobre el área problemática. En el primer caso se han realizado estudios exploratorios específicos sobre enseñanza con un fuerte apoyo visual y reduciendo al mínimo indispensable el lenguaje hablado así como sobre la comprensión del concepto de función ante tareas de varios tipos en las que el lenguaje común y los sistemas de representación han jugado un papel relevante. En ambos casos se ha constatado que se mantiene el nivel de comprensión de los alumnos oyentes y que los alumnos sordos superan a los oyentes en aquéllas tareas en las que no interviene el lenguaje ordinario, mientras que, tal y como ocurre en condiciones normales, los alumnos sordos se encuentran muy por debajo de los oyentes en el resto de las tareas (enunciado verbal y representación mixta). Con respecto al análisis didáctico, se ha realizado la revisión de los antecedentes y su primera clasificación de acuerdo con el esquema de la figura 3, en el bien entendido que bajo el término "comprensión" hemos incluido también toda la información relativa a aprendizaje y cognición. Las primeras conclusiones se refieren a la notable escasez de estudios específicos y a la abundancia de estudios relacionados (psicología, necesidades especiales, lenguaje, didáctica general, atención a la diversidad, cultura, etc.), a la amplitud y complejidad del problema y a la previsible necesidad de un desarrollo a largo plazo que obligaría a centrar el trabajo inicial en algunos de los aspectos prioritarios que deben surgir del análisis de las relaciones y del esquema

conceptual que resulte como consecuencia del mismo. Por otra parte, el estudio se encuentra directamente relacionado con otros que se están llevando a cabo sobre comprensión del conocimiento matemático⁶.

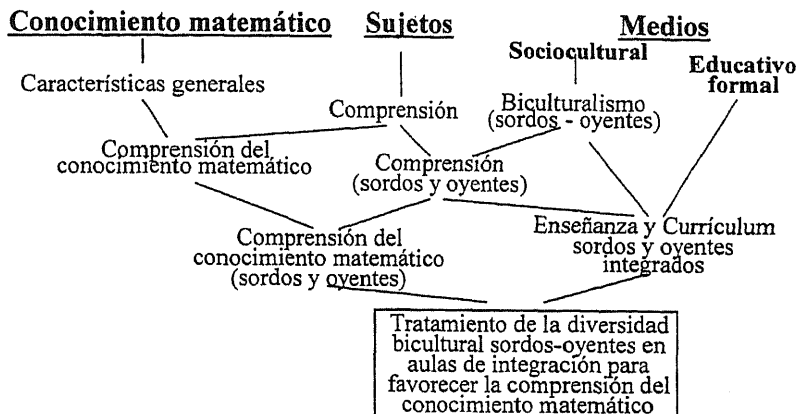


figura 3- Esquema inicial de componentes y relaciones

B) Comprensión del concepto de límite desde el punto de vista del Análisis no Estándar

A diferencia del trabajo anterior, en el que el núcleo del estudio se encuentra en las relaciones entre la cognición, la cultura y el medio educativo formal, nos encontramos aquí con una investigación en la que la mayor parte de la atención se dirige al conocimiento y a la enseñanza y aspectos curriculares (figura 4). Puesto que se trata de un tema novedoso no contemplado en los diseños curriculares actuales, es necesario considerar ambos puntos de vista (clásico y no estándar) y su comparación a través de estudios de carácter experimental o de innovación curricular. La búsqueda de antecedentes específicos y relacionados, fase en la que nos encontramos en la actualidad, está aportando información relevante en todo lo relativo al concepto de límite desde el punto de vista clásico (conocimiento, cognición y enseñanza y currículum) así como en lo que se refiere al análisis no estándar desde el punto de vista matemático, histórico y, en

⁶ Proyecto PB97-1066 de la DGES; años 1999-2001.

menor medida, epistemológico. De lo realizado hasta ahora podemos destacar tres conjeturas con respecto al desarrollo del trabajo y sus aspectos más relevantes: La urgente necesidad de realización del análisis didáctico como estudio previo a cualquier otra consideración, que además creemos que en este caso tiene entidad y sentido suficientes como para constituirse en uno o varios estudios teóricos independientes (téngase en cuenta que la información didáctica desde el punto de vista del bloque de conocimientos es escasa, sobre todo en lo que se refiere a la epistemología, la fenomenología y las relaciones entre componentes dentro del bloque)), la necesidad de aproximaciones empíricas de carácter exploratorio en las primeras fases del estudio, tomando como referencia los resultados de los trabajos realizados desde el punto de vista clásico, y la especial dificultad que previsiblemente van a tener los trabajos de carácter curricular (diseño, desarrollo y evaluación), dado que las modificaciones suponen cambios importantes en los conocimientos relacionados con el tema.

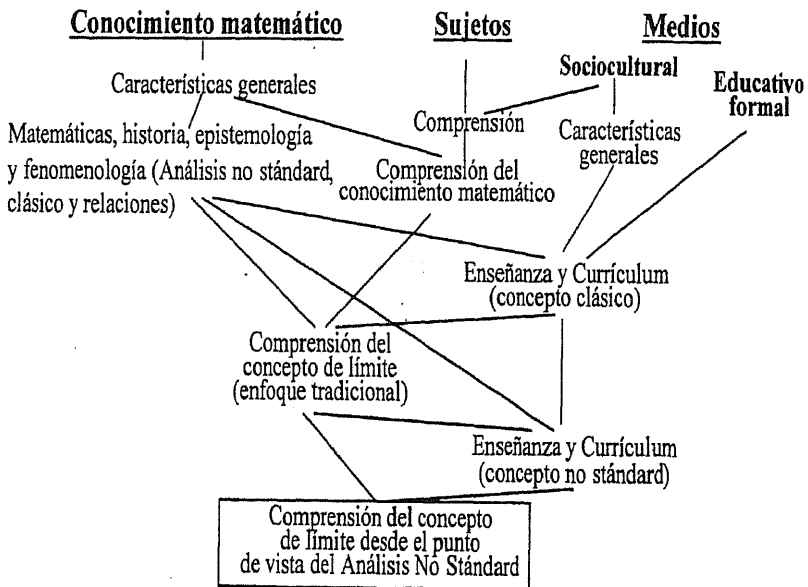


figura 4.- Esquema inicial de componentes y relaciones

C) *Comprensión de los sistemas de numeración: Errores y dificultades en las tareas de traducción entre los sistemas de representación escrito y hablado del número natural*

El origen de esta investigación se encuentra en las diferencias estructurales existentes entre el sistema de numeración decimal ordinario (simbólico escrito) y el que se utiliza para leer y escribir números mediante palabras del lenguaje ordinario (hablado), el tratamiento didáctico diferenciado de ambos sistemas así como las lagunas que se pueden detectar en el mismo y las evidentes dificultades que muestran tanto niños como adultos en la utilización y comprensión de ambos sistemas y, sobre todo, en las tareas de traducción – interacción entre ellos. Hasta ahora (figura 5) se ha completado la revisión y el procesamiento de la información, tanto de estudios específicos como relacionados, y se han comenzado a analizar las relaciones entre algunos campos (matemáticas, epistemología, historia y fenomenología de los sistemas de numeración) con respecto a la representación (Janvier, 1987), los modelos de comprensión conocidos (Duffin y Simpson, 1997; Hiebert y Carpenter, 1992; Van-Hiele, Jan de Lange, 1996; DeMarois y Tall, 1997; etc.) y los estudios de Piaget y colaboradores sobre la génesis del número.



figura 5.- Esquema de componentes y relaciones

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Arzarello, F. (1999).- Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Un quadro di riferimento teorico. Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española. Santarem (Portugal), 6-10 de julio.
- Begle, E. (1979).- Critical variables in Mathematics Education. MAA. NCTM. Washington, D. C..
- Bishop, A. J. (1992).- International perspectives on research in Mathematics Education. En: Grouws, D. A. (eds.)- Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 710-723). New York: MacMillan Publishing Company.
- Bisquerra, R. (1989).- Métodos de investigación educativa. CEAC. Barcelona.
- Castro, E. (1994).- Resolución de problemas de comparación multiplicativa. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- DeMarois; Tall, D. (1997).- Facets and layers on the concept of function. XXI Annual Meeting of the PME group. Lahti (Finland).
- Duffin, J.; Simpson, A. (1997).- Towards a new theory of understanding. XXI Annual Meeting of the PME group, vol. 4, pp. 166-173.
- Fernández Cano, A. (1995).- Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía. Síntesis. Madrid.
- Fischbein, E. (1987).- Intuition in Science and Mathematics. An educational approach. Holland: Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company.
- Fischbein, E. (1989).- Introduction. En: Nesher, P.; Kilpatrick, J. (edit.)- Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press; pp. 1-13.
- González, J. L. (1995).- El campo conceptual de los números naturales relativos. Colección Monografías de Investigación. SPICUM Universidad de Málaga.
- González, J. L. (1998).- Números naturales relativos. Colección Mathema. Editorial Comares. Granada.
- González, J. L. (1999).- Proyecto Docente. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga. Inédito.
- González, J. L. (1999).- Comentarios a la ponencia "Ingranaggi e cerchi". Actas Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española. Santarem (Portugal), 6-10 de julio. En prensa.
- González, J. L.; Pascual, J. R.; Flores, P. (1994).- Epistemología y Educación Matemática. Capítulo en: Rico, L.; Gutiérrez, J., editores (1994).- Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. pp. 25-39.

- González, J. L. y otros, (1990).- *Números enteros*. Madrid: Síntesis.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992).- *Learning and Teaching with understanding*. Capítulo 4 en: Grouws, D. A. (Ed.).- *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan Pub. Co.: New York.
- Ogawa, R.T.; Malen, B. (1991).- *Towards rigour in reviews of multivocal literature: Applying the exploratory case study method*. *Review of Educational Research*, 61(3), pp. 265-286.
- Ortiz, A. (1993).- *Series Numéricas y Razonamiento Inductivo*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Ortiz, A. (1997).- *Razonamiento Inductivo Numérico*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Popper, K. R. (1989).- *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.
- Puig, L. (1997).- *Análisis fenomenológico*. En: Rico, L. (ed.).- *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. ICE-Horsori. Barcelona.
- Rico, L. (1997).- *Los Organizadores del Currículo de Matemáticas*. En: Rico, L. (ed.).- *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. ICE-Horsori. Barcelona.
- Rico, L. (1999).- *Educación Matemática, Investigación y calidad*. Contribución al Panel: "Qualidade da Investigaçao". *Actas Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española*. Santarem (Portugal), 6-10 de julio. En prensa.
- Rico, L.; Castro, E.; Sierra, M. (1999).- *Didáctica de la Matemática*. documento inédito. Autores.
- Romberg, T. (1992).- *Perspectives on Scholarship and Research Methods*. In: Grouws, D. A. (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 49-64). New York: MacMillan Publishing Company.
- Scriven, M. (1988).- *Philosophical inquiry methods in Education*. En: Jaeger, R. M. (ed.) *Complementary Methods for Research in Education*. Washington: AERA.
- Sierpinska, A.; Kilpatrick, J. (eds.) (1998).- *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer.
- Steiner, H. G. y otros (eds.) (1984).- *Theory of Mathematics Education*. ICME 5. Institut für Didaktik der Mathematik. Universität Bielefeld.
- Vergnaud, G. (1990).- *Epistemología y Psicología de la Educación Matemática [Capítulo 1]*. En: Neshet, P.; Kilpatrick, J. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press; 1990: pp. 14-30.
- Vergnaud, G.; Durand, C. (1976).- *Structures additives et complexité psychogénétique*. *Revue Française de Pédagogie*, 36, pp. 28-43.
- Zan, R. (1999).- *Panel: La qualità della ricerca*. *Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española*. Santarem (Portugal), 6-10 de julio.