Investigación en razonamiento inductivo numérico y algebraico

Alfonso Ortiz Comas
José Luis González Marí
Universidad de Málaga

RESUMEN

Uno de los problemas de la investigación en Didáctica de la Matemática es la diversidad de resultados. Resultados que al no estar integrados en un todo coherente no trascienden a la práctica docente. Otro problema es que la mayor parte de los modelos y teorías que son referentes en los diseños curriculares no tienen en cuenta estos trabajos puntuales. Desgraciadamente la pluma de muchos autores aporta más que la investigación. Podemos decir que existen modelos y planteamientos teóricos necesitados de verificación empírica. Este estado es lo que aconseja aunar esfuerzos para desarrollar líneas de investigación coherentes en cuanto al contenido, los fines, los planteamientos y los métodos. Los investigadores en Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico pretendemos desarrollar una línea de investigación cuyos resultados posibiliten la construcción de un modelo teórico de desarrollo evolutivo del razonamiento inductivo en aritmética y álgebra.

1. INTRODUCCIÓN

Realizadas las búsquedas bibliográficas necesarias en las diferentes fuentes de documentación científica, podemos llegar a la conclusión siguiente: no existe en Didáctica de la Matemática una línea de investigación cuyo objeto sea el Razonamiento Inductivo, que no sea la que estamos presentando.

Por otra parte, sí existen propuestas curriculares en las que se considera el razonamiento inductivo como imprescindible para la comprensión y construcción por parte de los escolares del conocimiento matemático: Winter y Ziegler (1975), Rico (1978, 1982), Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática del N.CT.M. (1991).

También nos encontramos autores que proponen situaciones didácticas para que los alumnos trabajen el razonamiento inductivo: Shanon and Austin (1992)

Desde la propia investigación matemática se concluye la trascendencia e importancia de la inducción y del razonamiento inductivo: Godement (1948), Lakatos (1978), Diudonné (1989), etc.

Éstas y otras son justificaciones suficientes para iniciar una línea de investigación cuyo objeto sea indagar el papel del razonamiento inductivo en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, en concreto de la inducción numérica y el estudio de patrones en el aprendizaje de las diferentes estructuras numéricas.

Considerando que una línea de investigación debe especificar en lo posible los problemas a investigar, me veo en la necesidad de explicar los orígenes y la situación actual de nuestro campo de investigación. También consideramos necesario orientar cómo conseguir los objetivos definidos en un marco teórico, exponiendo un marco metodológico.

2. ORÍGENES TEÓRICOS Y EMPÍRICOS DE LA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: SU OBJETO

En sus inicios, esta línea de investigación se ha sustentado en tres ámbitos de investigación: Epistemología de las Ciencias y la Matemática, Psicología del Aprendizaje y Educación Matemática.

Consideramos la Epistemología de las Ciencias y la Matemática como fuente inagotable de reflexión didáctica y de análisis del conocimiento matemático, por ello, en los marcos teórico de las diferentes investigaciones hemos de poner en relación el problema a investigar con las características Matemáticas, Lógicas y Epistemológicas del Razonamiento Inductivo: Bacon (1620), Descartes (1638), Mill (1843), Jevons (1873), Peirce (1867, 1901, 1910, 1918), Poincaré (1902), Russell (1912), Keynes (1921), Cohen (1931), Popper (1933), Carnap (1950), Polya (1944,1953, 1962-64), Piaget (1953, 1956, 1967, 1971, 1974, 1979,1980, 1985), Piaget y Morf (1970), Hempel (1966), Stebbing (1967), Black (1974), Chalsmers (1976), Lakatos (1978, 1987), Manzano (1981), Dancy y Sosa (1992), Kiaer (1995)

El objeto de las indagaciones epistemológicas es profundizar en lo que se ha entendido y se entiende por razonamiento inductivo en distintas ramas del conocimiento científico y cuál es su papel elaborador en las mismas, para construir modelos que se ajusten al desarrollo de los razonamientos aritméticos y algebraicos en los escolares: *"El objeto de este análisis es la búsqueda de modelos* *inductivos que sirvan para plantear hipótesis e interpretar resultados de una fase empírica"* (Ortiz, 1997)

En cuanto a la Psicología del aprendizaje, decir que nos hemos acercado a este campo de investigación con dos intenciones claras: La primera, ver el papel que juega la inducción en los modelos interpretativos de la inteligencia del ser humano y la segunda, obtener información de las técnicas de investigación utilizadas.

Desde la perspectiva psicológica nuestros primeros trabajos (Ortiz, 1993) consideraron las teorías y autores del cuadro adjunto.

INDUCCIÓN EN PSICOLOGÍA	Conductismo clásico: Teoría continuidad (E-R)	Inducir por asociaciones	Hull, 1920
	Cognitivismo: Teoría discontinuidad Paradigma mediacional	La inducción de reglas procedimiento en el aprendizaje de conceptos:	Mayer, 1985
		La inducción como una capacidad:	Pellegrino, 1976
		Análisis de procesos cognitivos:	Holtzman, 1983
		Elaboración de la información:	Stemberg, 1986
		Errores del razonamiento inductivo:	Ross, 1981
	Constructivismo de J. Piaget	La inducción como instrumento intelectual: La inducción como generalización de estructuras	Piaget, 1955 Oléron, 1963 Sastre y Moreno, 1983
	Psicometría	La inducción como instrumento de medida (Test de inteligencia):	Guilford, 1959

Debemos tener en cuenta que cada perspectiva psicológica modifica la intencionalidad de una investigación, por tanto introduce matices a tener en cuenta que pueden modificar las hipótesis, los objetivos y la metodología.

Por último, en cuanto a la Educación Matemática, tal y como hemos expuesto en la introducción, no existe en Didáctica de la Matemática una línea de investigación en Razonamiento Inductivo; a pesar de ello el tema ha sido de interés, como lo avalan los trabajos publicados en los últimos 30 años, los cuales hemos organizado de acuerdo con los siguientes apartados:

a) Método de inducción completa.

Hay una gran cantidad de publicaciones: Macarow (1972); Avital (1972); Malcom (1974); Pinker (1976); Hirsch (1976); Higgins (1990). En ellas se ha considerado el método de inducción completa como componente del conocimiento matemático y, por tanto, estas publicaciones se centran en trabajos experimentales con alumnos de cursos avanzados para estudiar y analizar el dominio que poseen del método de inducción completa. En la mayoría de los casos son estudios experimentales.

b) Modelos lógicos

Desde la modelización lógica del razonamiento inductivo, Dubinsky (1986) amplía los trabajos del apartado anterior al considerar la regla del "modus ponens" en un modelo denominado descomposición genética de la inducción matemática.

c) Modelos cognitivos

Desde una perspectiva psicológica se ha considerados la inducción de patrones desde el punto de vista del procesamiento de la información: Lee (1982), Ropo (1987).

En el momento actual y en Educación Matemática son relevantes las investigaciones en relación con el papel de la representación en la construcción escolar del conocimiento matemático (Tall (1991), Vinner (1983)). En este sentido, dentro del grupo de Pensamiento Numérico destacan trabajos como el de Castro (1995), en el que se ve la importancia de las representaciones gráficas para interpretar y descubrir patrones en sucesiones numéricas. En la misma línea, Cuoco (1992) expone el significado de la Matemática Inductiva en un contexto visual.

d) Propuestas curriculares

Se han realizado propuestas didácticas de la inducción numérica para Primaria y Secundaria, como la desarrollada por Christiansen (1970). También, desde una perspectiva de orientación curricular, podemos considerar los resultados obtenidos por Castro (1995).

Existen publicaciones como la de Maurer (1995) que no constituyen investigaciones en relación con la inducción, pero que, sin embargo, sugieren aspectos concretos que pueden ser de utilidad para el profesor desde un punto de vista de la práctica docente.

3. LÍNEA DE INVESTIGACIÓN EN INDUCCIÓN NUMÉRICA Y ALGEBRAICA

Con esta línea de investigación se pretende ampliar nuestro conocimiento sobre los procesos cognitivos del razonamiento inductivo. Su objeto es la relación entre los procesos de razonamiento inductivo en los sujetos y la construcción-aprendizaje de las diferentes estructuras numéricas.

Hasta el momento solo hemos investigado sistemas inductivos de Peano (Sistemas que son modelos de los axiomas de Peano de los números naturales (Manzano (1981)). Las series numéricas son ejemplos de estos sistemas y constituyen el soporte material de las investigaciones realizadas.

Considerando *el razonamiento inductivo numérico como un razonamiento en el que intervienen procesos mentales, lógicos, aritméticos o algebraicos, implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series numéricas, así como los conceptos y propiedades del número que se utilizan en dichos procesos,* hemos construido un modelo teórico del razonamiento inductivo numérico desde una perspectiva evolutiva. Para describir el modelo hemos considerando la construcción escolar de las estructuras numéricas a nivel aritmético y algebraico (Ortiz 1997)

Una síntesis del modelo se expone en el cuadro adjunto. Los descriptores utilizados para los diferentes bloques consideran la aritmética elemental. En las distintas investigaciones se pretende relacionar los diferentes bloques con las características epistemológicas, lógicas y psicológicas del razonamiento inductivo.

Hasta el momento sólo se han investigado los bloques Numérico y Aritmético y desde una perspectiva finita (sin consideración del infinito). Hemos demostrado que en Educación Primaria (6-12 años) la capacidad en razonamiento inductivo numérico de los alumnos evoluciona de acuerdo con seis niveles. Simultáneamente se ha obtenido un test para clasificar a los alumnos de Educación Primaria según estos niveles.

MODELO TEORICO DE DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO

BLOQUES	ESTADOS	CARACTERISTICAS LOGICO-MATEMATICAS
GENERAL No inductivo	Estado 1: Topológico	Linealidad y orden topológico
	Estado 2: Etiquetaje	Asignar un nombre, objeto, símbolo, etc. a cada elemento de la serie.
PRENUMERICO	Estado 3: Infralógico-simbólico	Alternancias, ritmos, periodos, etc con signos numéricos
	Estado 4: Simbólico-cuantitativo	Percibir el aumento y disminución de cantidades discretas (cantidades de cifras en las representaciones)
NUMÉRICO	Estado 5: Representacional o simbólico-ordinal	Dominio ordinal de la serie numérica básica. Contar de n en n, con n=10.
	Estado 6: sintáctico-numeral	Contar de n en n con n>10, basándose en la serie numérica básica y en las regularidadesdel sistema de representación.
ARITMÉTICO	Estado 7: Aritmético-Aditivo	Progresiones aritméticas aditivas y sustractivas
	Estado 8: Aritmético-multiplicativo	Progresiones geométricas multiplicativas y partitivas
ALGEBRAICO	Estado 9: Algebraico	Término general Generalización algebraica

Ortiz (1998)

4. MARCO TEÓRICO: ALGUNAS CUESTIONES CENTRALES

Consideramos que el marco teórico de una línea de investigación es cuestión de planteamientos y de postulaciones previas que dan sentido y significación, rigor, completitud, exactitud, coherencia (tanto interna como externa) y validez de constructo (Bizquerra (1989), Fernández Cano (1995)) a las investigaciones concretas.

Partimos de la consideración de que todo conocimiento científico tiene dos características básicas: una extensión y una comprensión (Stegmuller (1970), Mosterin (1980)).

En cuanto a la extensión, en toda disciplina, y por tanto en Matemáticas, siempre las fronteras son difusas. Difícilmente podemos desde la propia Matemática interpretar toda su extensión (Gödel, 1931) y en consecuencia este problema siempre está abierto. La conclusión holística a la que llegamos es que los conocimientos no están claros y por tanto el acceso al conocimiento es un misterio difícil de dilucidar. En tal sentido, la investigación en Didáctica de la Matemática debe esclarecer algunas cuestiones centrales.

El problema de la comprensión tiene que ver con los orígenes de los conocimientos. Para algunos autores todo conocimiento nuevo se construye a partir de uno viejo. Nuestra pregunta en Aritmética la podemos formular: ¿Cuales son las nociones y procesos básicos en los comienzos de la aritmética que supeditan las construcciones posteriores?.

Para responder a esta pregunta hay que tener en cuenta la diversidad Matemática, debido a la cual un mismo concepto puede obtenerse a partir de sistemas axiomáticos distintos. Esto ocurre en Aritmética como en cualquier otra rama del saber matemático.

También hay que tener en cuenta al sujeto cognoscente, planteándonos un nuevo problema: el de la objetividad y subjetividad. Consideramos la objetividad como una adaptación a unas hipótesis de partida y a un método, ambos condicionados por la subjetividad que los fija a partir de un sistema conceptual que determina lo que pensamos y condiciona nuestros juicios y las conclusiones a las que podamos llegar. Estos juicios dependen a su vez de los conceptos que disponemos en un momento determinado y de la capacidad de razonamiento individual. A todo ello, hay que añadir que la verdad depende del tipo de verdad (Hessen (1925) que pretendemos obtener.

Debemos tomar una postura que minimice problemas como los planteados y, por tanto, consideramos que una postura evolutiva es propia para la investigación en Didáctica de la Matemática. Ver el conocimiento matemático como algo cambiante tanto cualitativamente (comprensión) como cuantitativamente (extensión). El enriquecimiento intelectual no sólo es cuestión de descubrir nuevas verdades, sino cambiar las perspectivas del propio conocimiento; ello nos lleva a considerar el conocimiento desde el punto de vista de su desarrollo.

Pretendemos encontrar en grupos determinados de escolares españoles distintos estados de razonamiento inductivo en numeración, aritmética y álgebra, marcando las pautas de su evolución progresiva.

5. MARCO METODOLÓGICO

En relación con los planteamientos del Marco Teórico, debemos ser consecuentes, buscando un marco metodológico adecuado o que sea lo más adecuado posible. Nosotros pretendemos medir de alguna manera la evolución de los conceptos y las estrategias de razonamiento en los escolares, construyendo instrumentos que posibiliten determinar tanto el estado global de un núcleo de escolares (evolución tanto de los conceptos como de las estrategias por edades y cursos) como el estado en que se encuentra un escolar determinado.

Por el momento y desde una perspectiva evolutiva, pretendemos construir escalas acumulativas con modelos paramétricos (Guttmann (1950), Ellis y Wollemberg (1993), Mokken (1971), Molenaar (1982, 1983, 1986, 1994), Molenaar y Sijtsman (1987,1999)), que permitan diferenciar a los alumnos por niveles de comprensión, conceptualización y razonamiento. Por este motivo las investigaciones deben utilizar una metodología mixta, combinando métodos cuantitativos para la construcción de escalas, y cualitativos (entrevistas, etc.) para obtener los perfiles cognitivos de los distintos niveles. Para la construcción de las escalas es necesario un análisis y validación empírica de tareas.

En los inicios de la línea de investigación y para organizar los conocimientos que intervienen y plantear nuestro modelo evolutivo hemos seguido una metodología no empírica, como es el Análisis Didáctico (González, 1995, Fernández Cano, 1996), que incluye estudios históricos y curriculares. En las cuestiones pendientes de investigar no es necesario indagar en los antecedentes, sí exponer el estado de la cuestión. Ello posibilita una mayor eficacia en la investigación produciéndose un efecto multiplicador de resultados.

Pretendemos llegar a un método lo más sistemático posible por el bien de la investigación en Didáctica de la Matemática. En cada investigación particular, una vez definido el problema a investigar como consecuencia del estado de la cuestión, el proceso a seguir podemos ordenarlo en tres fases:

1ª fase: Análisis y validación empírica de tareas

El problema a resolver es cómo observar lo más fielmente posible la situación real de las competencias de los escolares de distintas edades y cursos, en razonamiento inductivo.

Encontrar las tareas que posibiliten al investigador descubrir pautas y regularidades que discriminen a los alumnos. Tareas que sean idóneas, exigiéndoles requisitos de funcionalidad en la recogida de información como en el tratamiento posterior de la misma. No es un estudio piloto.

Las constantes que se puedan extraer a partir de los resultados obtenidos con las tareas idóneas nos llevan a considerar los conocimientos que intervienen y localizar empíricamente el problema.

2ª fase: Construcción de una escala

Las tareas se aplican a una muestra significativa para obtener una escala acumulativa que discrimine a los escolares. De acuerdo con un diseño previo en el que se han fijado las variables a tener en cuenta, se estudia si la escala obtenida discrimina por edades y cursos, viendo qué factores los determinan, previo un estudio piloto.

3ª fase: Estudio cualitativo

Para confirmar e interpretar los niveles obtenidos, se preparan actividades complementarias con el fin de validar la escala obtenida, determinando el perfil de los escolares de cada nivel. La escala se confirma si alumnos de niveles diferentes, al razonar, utilizan esquema inductivos diferentes, y alumnos de un mismo nivel esquemas equivalentes.

Existen razones teóricas y prácticas que aconsejan un mismo marco teórico y metodológico para aunar resultados. Consideramos fundamental la uniformidad teórica y empírica en la investigación en Didáctica de la Matemática para obtener modelos interpretativos de los procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

6. AGENDA DE INVESTIGACIÓN

Tenemos por delante dos etapas diferenciadas:

primera etapa: culminar la investigación en sistemas inductivos de Peano en las distintas estructuras numéricas tanto a nivel finito como infinito.

segunda etapa: Pasar a otros sistemas inductivos.

Restringiéndonos a la primera etapa, nos hemos planteado los siguiente objetivos:

a) Terminar de confirmar el modelo evolutivo de Razonamiento Inductivo Numérico tanto en niveles superiores como inferiores a la Educación Primaria. Con la consideración de la generalización aritmética , el paso al álgebra y al infinito para los niveles superiores.

b) Introducirnos en estructuras numéricas como los números relativos, racionales y reales

c) Completar los perfiles en Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico de los diferentes niveles.

7. INVESTIGACIONES EN CURSO DE REALIZACIÓN

A continuación exponemos brevemente las investigaciones en curso de realización. En su mayor parte están terminando la primera fase o iniciando la segunda, por lo que esperamos obtener resultados de aquí a un par de años.

1) *Análisis del Razonamiento Inductivo Numérico a partir de series numéricas naturales complejas.*

El objetivo fundamental de este trabajo es el de determinar estrategias y procedimientos de descubrimiento de regularidades numéricas utilizados por los escolares de Educación Secundaria y estudiar su desarrollo, determinando una escala que discrimine evolutivamente a los alumnos.

En Educación Secundaria el curriculum en aritmética se orienta más al Álgebra que a profundizar en una aritmética avanzada del número, por ello se plantean a los alumnos tareas de continuar series cuyos criterios no son elementales.

2) *Evolución del Razonamiento Inductivo Numérico en las sucesivas ampliaciones del campo numérico.*

En la enseñanza de la aritmética del número natural se omite el número natural relativo, lo que aumenta considerablemente el problema de comprensión en el aprendizaje de los números enteros.

A partir de situaciones de inducción en situaciones relativas simples, que son situaciones en las que intervienen tres medidas referidas a una misma magnitud, de las cuales una de ellas es una medida natural relativa (González, 1995), se pretende evaluar la evolución del Razonamiento Inductivo Numérico considerando los números naturales, los naturales relativos y los números enteros.

3) *Razonamiento Inductivo Numérico en la transición de la Aritmética al Álgebra.*

Considerando que en el paso de la aritmética al álgebra se producen dos fenómenos básicos como son la generalización de las propiedades aritméticas y un cambio de representación desde un lenguaje natural a un lenguaje simbólico-algebraico, se pretende caracterizar el proceso cognitivo de generalización de series numéricas, desde el descubrimiento de criterios hasta la generalización algebraica de los mismos mediante sus términos generales.

4) *Relaciones Lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia Numérica en niños de 3 a 6 años.*

Se confrontan dos planteamientos clásicos como son el modelo piagetiano, que se preocupa fundamentalmente de la madurez cognitiva, y el enfoque de procesamiento de la información, que favorece la precocidad y la cuantificación de lo adquirido.

Desde la perspectiva piagetiana se considera la secuencia numérica sobre la base de la estructura operatoria de seriación (Piaget y Szeminska (1941), Flavell (1982), Kamii (1982), Fuson (1988).

Desde el modelo de integración de habilidades o procesamiento de la información se considera la secuencia numérica como una componente del conteo (Siegler y Robinson (1982), Fuson (1982, 1985, 1988), Fuson y Hall (1986), Gelman y Gallister (1978), Richards y Briards (1982), Wagner y Walters (1982), Saxe (1977, 1981, 1989), Song y Ginsburg (1988), Klahr y Wallace (1976), Sofhian (1977), Acredolo (1982).

Teniendo en cuenta los trabajos correspondientes a los dos planteamientos anteriores, nuestra investigación está centrada en el estudio del establecimiento de relaciones ordinales en la secuencia numérica. Trabajamos con niños que dominan parcial o totalmente el conteo o recitado de la secuencia numérica para poder determinar la evolución de las relaciones ordinales.

5) *Usos y significados del signo igual en Aritmética y Álgebra.*

A partir de un estudio de los usos y significados de la igualdad y del signo igual en la vida cotidiana, en los libros de texto, en Lógica y Matemáticas, se pretende investigar la evolución de la igualdad en los escolares desde las primeras identidades numéricas hasta las identidades algebraicas, pasando por las transformaciones aritméticas.

Este trabajo ha surgido por necesidad para interpretar ciertas relaciones inductivas planteadas en las investigaciones anteriores. No es un trabajo en razonamiento Inductivo Numérico pero sí de interés para interpretar perfiles cognitivos en los diferentes niveles de Razonamiento Inductivo Numérico.

REFERENCIAS

Ackerman, R. :1961,: «*Simplicidad inductiva*», en *Philosophi of Science*, vol. 28, (1961) pp. 152-161. Compilación de P.H. Nidditch. (Trad. cast. de V.M. Suárez Davila: «*Filosofía de la ciencia*¨. México. Fondo de Cultura Economica 1975).

Adler, J. E. :1980, «*Criteria for a Good Inductive Logic*». Oxford Clarendon PR, págs. 379-405.

Avital, S. :1972, «*Induction and Deduction in a Unit of Early Algebra*». *School Science and Mathematics*. V. N. 8, págs. 692-696.

Avital, S.:1976, «*Mathematical Induction in the classroom*». Educational Studies in Mathematics, 7, págs. 399-411.

Avital, S.:1978, «*Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues*». *Educational Studies in Mathematics*, 9, págs 429-438.

Bacon, F.:1620, «*Novum organum, sive indicia vera de interpretacione nature et regio hominis*». (Trad. cast. de Cristobal Litran: «*Novum organum. Aforismos sobre la interpretación de la naturaleza y el reino del hombre*». Barcelona. Fontanella 1985)

Bisquerra, R. :1989, «*Métodos de Investigación Educativa*». Barcelona Ediciones C.E.A.C..

Black, M. :1974, «*The Justification of Induction*». Oxford University Press. (Trad. Cast. « *La justificación del razonamiento inductivo*» Madrid. Alianza . 1976)

Blieszner, R.:1981, «*Training Research in Aging on the Fluid Ability of Inductive Reasoning*». *Journal of applied developmental psychology* 2, págs. 247-265.

Boulger, W. :1989, «*Pythagoras Meets Fibonacci*». *Mathematics Teacher*." Vol. 82, April. Págs. 277-282.

Briand, J.:1993, *L´enumaration dans le mesurage des collectións*. Thése. L'Université de Bordeaux.

Brumfiel, C. :1974, «*A note on Mathematical Induction*». *Mathematics Teacher*. Vol. 67, N 7. Págs 617-618.

Burks A, W.:1980, «*Enumerative Indutión versus Eliminative Induction*». Oxford: Clarendon PR. Págs 172-189.

Carlson, J.:1974, «*The relationship between multiplicative classification and inductive reasoning*». *The Journal of Genetic Psychology*. N 125, Págs 265-272.

Carnap :1950, «*Logical Foundations of Probability*». Chicago.

Carpenter, T.P.:1980, «*Research in cognitive development* «. *Research in Mathematics Education* N.C.T.M. Reston. Virginia. Págs 146-206.

Castro, E.:1994, «*Exploraciones de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14)*» Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cohen, M.R.:1931, «*Reason and nature*» New york. Harcourd Brace and Company.

Cohen, L.; Manion, L. :1990, «*Métodos de investigación educativa*». Madrid. Muralla

Colberg, M et All.:1982, «*Inductive Reasoning In Psychometrics: A Philosofhical Corective*». Intelligence. V. 6, N. 2, Apr-jun, Págs. 139-164.

Cornell, R.H.-Siegfried, E.:1991, «*Incorporating Recursion and Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum*». En *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12*. Year Book. N.C.T.M.

Costa, N.C.A.:1987, «*Outlines of a system of inductive logic*». *Teoría* 2/1987.

Christiansen, B.:1969, «*Induction and deduction in the learning of mathematics and in mathematical instruction*». *Educational Studies in Mathematics* 2 (139-149).

Dancy, J., Sosa, E. :1992, «*A Companion to Epistemology*». Blaskwell Companionsto Philosophy. Edited by Jonnathan Dancy and Ernest Sosa. Oxford.

Dieudonné J. :1989, «*En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*» Madrid. Alianza Universidad.

Dofson, E. L. y Summers, G. F.:1982 «*Como elaborar escalas técnicas de Guttman*». En Summers, C.F. : «Medición de actitudes». México. Trillas. Cap. 11)

Dubinsky, E. :1986, «*Teaching mathematical induction*» *Journal of Mathematical Behavior.V*. 5/3, Dec. Págs. 305-317.

Ernest, P.:1984, «*Mathematical Induction: A pedagogical discussion*». *Educational Studies in Mathematics 15*. Págs. 173-189.

Fernández Cano, A.:1995, «Metodologías de la investigación en Educación Matemática». En «Investigación en el aula de matemáticas». Berenguer, L., Flores P. Editores. Edita Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. S.A.E.M. Thales. Págs. 47-65.

Fischbein, E. (1989): «*Introduction*». En Nesher, P. ; Kilpatrick, J. (eds). *Mathematics and cognition.* Cambridg University Press. pp 1-13.

Fraisse, P. Piaget, J. :1967, «*Traité de Psychologie Expérimentale (VII) L'Intelligence*». Presses Universitaire de France. (Trad. cast. de Victor Fichman,»*Tratado de psicologia experimental-VII La Inteligencia*». Barcelona: Paidós 1983).

Gawronski, J.D.: 1972, «*Deductive and inductive learning styles in junior high school mathematics: an exploratory estudy". Journal for Research in Mathematics Education*. Vol.3, Nov. 1972. Págs. 239-247.

Ginsburg, H.P; Kossan,N.E.:1983, «*Protocol methods in researh on mathematical thinking*». En «*The Development of Mathematical thinking*» Academic Pres National.

Goetz J. P. y LeCompte, M. D.:1988, «*Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*». Madrid. Morata.

González, J.L.:1995, «*El campo conceptual de los números naturales relativos*». Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Guttman, L.:1947, «*The Cornell technique for scale and internsity analysis*» Educational and Psychological Measurement 7: 247-280.

Guttman, L.:1941, «*The phi coefficient and of item validity*». Psychometrika 6: 11-19.

Hempel C.G. :1965, « *Aspects of scientific explanatión and other essays in the Philosofhy of Science*». New York. Free Press. (Traducción castellana de Frasineti, G. M. y Otros: «*La explicación cientifica*». Barcelona. Paidós. 1988).

Hempel, C. G.:1956, «*Sobre la naturaleza de la verdad matemática*» En «*El mundo de las matemáticas*». Barcelona. Grijalbo. 1969. Págs. 7-23.

Hempel, C.G.:1966, «*Philosofhy of Natural Science*». New Jersey: Prentice-Hall. (Traducción castellana: «*Filosofía de la Ciencia Natural*». Madrid. Alianza Universidad. 1989).

Hessen, J.:1925, «*Teoría del conocimiento*» Caracas. Editores Mexicanos Unidos.

Higgis, A. W.:1990, «*An interesting example using induction*» *Mathematics and Computer Education* , V. 24/2 SPR, Págs. 130-134.

Hirsch, C. R.:1976, «*Making Mathematical Induction Meaningful*» *School science and Mathematics.* V. 76/1, Jan. Págs. 27-31.

Holzman, T. G.:1976, «*Process training derived fron a computer simulation theory*». *Memory and Cognition, 4*,pág. 349-356.

Holzman, T.G., Pellegrino, J.W. , Glaser, R.:1983, «*Cognitive variables in series completion*». *Journal of Educational Psychology*, 75, págs. 603-618.

Howson, C.:1984, «*La metodología de las disciplinas no empíricas*». En Feyerabend, P. «*Estructura y desarrollo de la ciencia*». Madrid. Alianza. Págs. 291-300.

Inhelder, B., Piaget, J.:1955, «*De la logique de l'enfant á la loguique de l'adolescent*» París, PUF. (Versión castellana: «*De la lógica del niño a la lógica del adolescente*». Buenos Aires. Paidós. 1972)

Jevons, W.S.:1873, «*Principles of Sciencie*» (Trad. Cast. de Carlos E. Prélat: «*Los principios de las ciencias*». Madrid. Espasa Calpe, 1946).
Keeves, J. P. (Edit).:1988, «*Educational Research, Methodology and Measurement*». An International Handbook. Oxford. Pergamon.
Keynes.:1921, «*A tratise on Probability*». Londres.
Klauer, K. J.:1990, «*A Process Theory of Inductive Reasoning Tested by the Theaching of Domaing-Specific Thinking Strategies". European Journal of Psicology*. Vol. V, n 2, Págs. 191-207.
Klotz, F. S.:1987, «*Turtle Graphics and Mathematical Induction». Mathematics Teachers*. November 1987. Págs. 636-639.
Lakatos, I.:1978, «*Mathematics, Science and Epistemology*» *Fhilosophical Papers*. Vol. 2. Cambridge: University Press. (Trad. cast. de Ribes Nicolás, D.: «*Matemáticas, Ciencia y Epistemología*». Madrid. Alianza, 1981).
Lakatos, I.:1978, «*Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*». Madrid. Alianza.
Lakatos, I.:1987, «*Historia de la ciencia*». Madrid. Tecnos.
Lee, S. S.:1982, «*Acquisition of Inductive Bicondicional Reasoning Skills: Training of Simultaneous and Sequential Proccessing*». *Contemporary Educational Psychology*. 7, págs. 371-383.
Lingoes, J. C. L.:1963, «*Multiple Scalogram Analysis». Educational and Psychological Mesurement*», XXIII. Págs 501-523
Macarow, L. :1972, «*Mathematical Induction». School Science and Mathematics* V. 72, N 7, págs. 647-648.
Malcom, P.S.:1974, «*The Well-Ordering Property as an Alternative to Mathematical Induction*» *School science and Mathematics*. V. 74/4, Apr. págs. 277-279.
Martinez Arias, R.; Rivas, M. T.:1991, «*Análisis de Escalas Acumuladas: Modelo probabilístico de Mokken para ítems dicotómicos». Psicotema*, Vol 3, nº 1, págs. 199-218.
Mayer, R. E.:1981, «*The promise of cognitive psychology*» Freeman & Company. (Trad. cast. de Antonio Maldonado Rico: «*El futuro de la psicología cognitiva*». Madrid. Alianza Universidad 1985).
Mayer, R.E.:1983, «*Thinking, Problem Solving, Cognition*». Nueva York: Freeman and Company. (Trad. cast. de Graziella *Baravalle* «*Pensamiento, resolución de problemas y cognición*». Barcelona: Paidós 1986)
Mill, J. S.:1843, «*System of Logic*». Londres. (Traducción castellana de eduardo Ovejero y Maury: «*Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva*» Madrid: Daniel Jorro Editor. 1917)
Moreno, M. & Sastre, G.:1983, «*Aprendizaje y desarrollo intelectual*». México. Gedisa.
Neubert, G.A. and Binko, B.:1992, "*Inductive Reasoning in the Secundary classroom*". Washington, D.C. National Education Association of the United Stade.
Nickerson, R. S.:1985, ¨*The teaching of the thinking*» Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. (Trad. cast. de L. Romano y C. Ginard: «*Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual*». Barcelona: Paidós 1987).
Oléron, P.,1967, «*Las actividades intelectuales*». En Trité de Psychologie Expérimentale (VII) L'Intelligence. Presses Universitaire de France. (Trad. cast. de Victor Fichman. «*Tratado de psicología experimental-VII La Inteligencia*». Barcelona. Paidós. 1983)
Ortiz, A.:1993, «*Series numéricas y razonamiento inductivo*» Epsilon. nº 27. págs. 95-96.
Ortiz, A.:1993, «*Series numéricas y razonamiento inductivo*». Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada
Ortiz, A.:1994, «*Numerical Series and Inductive Reasoning*». First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education. Modena (Italy). Edited by Nicolina A. Malara and Luis Rico. Págs. 67-72.

Ortiz, A.: 1997, "Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria". Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Peirce, C. S.:1901-1910, «*The collected papers of Charles Sanders Peirce*». Hardvard Cambridg University Press. 1965. (Trad. cast. de José Vericat: «El hombre, un signo». Barcelona. Critica. 1988).

Peirce, C. S.:1867, «*On the Natural Classification of arguments», Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 7 p.p. 284-312. (Trad. cast. de Pilar Castrillo Criado: «Escritos lógicos». Madrid. Alianza. 1988).

Peirce, C. S.:1878), "*Popular Science Monthly, XII y XIII*" (Trad. cast. de Juan Martin Werner. « *Deducción, Inducción e Hipotesis*». Buenos Aires. Aguilar. 1970)

Piaget J. & Morf, A.:1970, «*Estructuralismo y psicología*». Buenos Aires. Nueva Visión.

Piaget, J.:1953, «*La genese de l'idée de hasard chez l'enfant*». Paris. P.U.F..

Piaget, J.:1979, «*Naturaleza y Métodos de la Epistemología*». Madrid. Paidós.

Piaget, J.:1956, «*Régularités Sériales et Proportions*». En «*Epistémologie et psychologie de la Fonction*». Paris. Dunod.

Piaget, J.:1967, «*Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*». Neuchatel: Delachaux & Niestlé. (Trad. cast. de M. Riani: «*El juicio y el razonamiento en el niño*». Buenos Aires. Guadalupe. 1977)

Piaget, J.:1971, «*Essai de logique opératoire*». París. Dunod (Trad. cast. de Morales M. R.: «*Ensayo de lógica operatoria*». Buenos Aires. Guadalupe. 1977).

Piaget, J.:1974, «*La prise de conscience*». Paris. Presses Universitaire de France. (Traducción castellana: «*La toma de conciencia*». Madrid. Morata. 1981).

Piaget, J.:1985, «*Introducción a la epistemología genética*». Tomo 1. "*El pensamiento matemático".* México. Paidós.

Piaget, J. y otros.:1980, «*Recherches sur les correspondances*» (E.E.G. XXXVII). Paris. Presses Universitaire de France. (Traducción castellana «*Investigaciones sobre las correspondencias*». Madrid. Alianza Editorial. 1982).

Piaget, J., Szeminska, A.:1964, «*Le genèse du Nombre chez l'enfant*". Editions Delachaucx et Niestlé. Neuchatel (Suisse). (Tradución castellana de Sara Vassallo: «*Genesis del número en el niño*». Buenos Aires. Guadalupe. 1982)

Piaget, J.; García, R.:1989: «*Implicaciones y significaciones aritméticas*» en «*Hacia una lógica de significaciones*». Barcelona. Gedisa. Págs. 47-58

Pinker, A.:1976, «*Induction and Well Ordering*». *School Science and Mathematics*. V. 76/3, Mar., págs. 207-214.

Pirie, S.:1989, «*Through the recursive eye: Mathematical unthertanding as a dynamic phenomenon*» *Psychology of Mathematics Education*. Actes de la 13º conference internationale P.M.E. 13. Vol. 3, págs. 119-126.

Poincare H.:1902, «*La science et l'hipothèse*». (Trad. cast. de Besio A.B. y Banfi J.»*La ciencia y la hipótesis*» Madrid. Espasa-Calpe 1963).

Polya, G.:1944, «*How to solvet it*». Princeton: University Press. (Trad. Cast.: «*Cómo plantear y resolver problemas*». México. Trillas. 1985).

Polya, G.:1953, «*Mathematics and Plausible Reasoning*». New Jersey. Princeton University Press. (Trad. Cast. de Abellan, J. L: «*Matemáticas y Razonamiento Plausible*». Madrid. Técnos. 1966).

Polya, G.:1962-1964, «*Mathematical Discovery*». New York. Jhon Wiley and Sons.

Popper, K. R.:1934, «*The Logic of Scientific Discovery*». Londres. Hutchinson. (Traducción castellana de Sanchez de Zavala: «*La lógica de la investigación científica*». Madrid. Tecnos. 1985).

Popper, K. R.:1972, «*Objetive Knowledge*». Oxford. The Clarendon Pressxfoll. (Traducción castellana de Carlos Solis: «*Conocimiento objetivo*». Madrid. Tecnos. 1974)

Rico, L.:1997, «*Fundamentos teóricos para el currículum de matemáticas en secundaria*». Madrid. Sintesis. Rico editor.

Rico, L.:1997, «*Reflexiones sobre los fines de la Educación Matemática*» Suma . N. 24, Págs. 5-19

Ropo, E.:1987, «*Skills for Learning: A Review of Studies on inductive Reasoning*». *Scandinavian Journal of Educational Reseaach*. V. 31, nº 1, Págs. 31-39.

Ross, L.:1982, «*The establisment of social games among toddleis*». *Developmental and Memory*, 18, págs. 509-518. Referenciado en Nickerson, R. S. (1985).

Ross, L.:1981, «*The teaching of the thinking*». Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. Referenciado en Nickerson, R. S. (1985).

Runkle, S. & Tansey, P.:1976*,* «*Logic: A United for 4-8 Graders, Especially Gifted and Talented*». For related document, see 162, 443- 448 Guides-Classroom Use-guides (for Teachers). (144 págs.)

Russell, B:1912, «*Problems of philosophy*». Oxford. University Press. (Trad. cast. de J. Xirau: «*Los problemas de la filosofía*». Barcelona. Labor 1988).

Salmon, W. C.:1968, «*Who needs inductive acceptance rules*?»*.* In «*The problem of inductive logic*». Imre Lakatos (ED), 139-144. Amsterdam. Noth-Holland.

Sastre, G. & Moreno, M.:1980, «*Descubrimiento y construcción de conocimientos*». Barcelona. Gedisa.

Shannon, K.M. and Austin, H.M.:1992, "A *problem to foster critical thinking in mathematics*" . *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology*. Vol. 23; Nº 4. Pág. 543-547.

Sijtsma,K. and Verweij, Anton C.:1999, "*Knowledge of Solution Strategies and IRT Modeling of Items for Transitive Reasonoing*"*. Applied Psychological Measurement,* Vol. 23 Nº 1, March 1999, 55-68. Sage publications. Inc.

Schwartz, D. & Black, J.:1990, «*The Induction of Rules fron Analog, Mental Models*». *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Boston. (29 págs).

Suchman, E. R.:1950, «*The scalogram board technique for scale analysis*»*.* Págs. 91-121. En Stouffer y col.: «»*. Measurement and Prediction*. Vol. 4, Princeton University Press. Studies in social phychology in world war II

Shye, S.:1988, «*Inductive and Deductive Reasoning: Astructural Reanalysis of Ability Tests*»*. Journal of Aplied Psychology*. Vol. 73, N 2, págs. 308-311.

Sloane, N. J. A.:1973, «*A handbook of integer sequences*». San Diego. Academic Press.

Steffe, L. P.:1988, «*Children's Construction of Numbers Sequences and Multiplyng Schemes*».

Stegmüller, W.:1970, «*Probleme und Resultate der Wissenschafstheorie und Analytischen Pilosofhie Band II: Theorie und Erfahrung*». Heidelberg. Springer-Verlag. (Traducción castellana: « *Teoría y experiencia*». Barcelona. Ariel 1979).

Sternberg, R. J.:1982, «*Selection and Implementation of Strategies in Reasoning by Analogy. Journal of Educational Psychology*. Vol 74, N 3. Págs. 399-413.

Sternberg, R. J.:1986, «*Beyond IQA Triarchic theory of human intelligence*». Cambridge: University Press. (Trad. cast. de Bordas López M.T: «*Más alla del cociente intelectual*». Bilbao. Desclee de Bouwer. 1990).

Sternberg, R. J.:1989, «*If dancers ate their shoes: Inductive reasoning with factual and counterfactual premises*». Memory & Cognition 17(1), págs. 1-10.

Sternberg, R. J.:1983, «*Unities in Inductive Reasoning*». *Journal of Experimental Psychology*. General. Vol. 112, N 1, págs. 80-116.

Summers, G. F.:1982, «*Medición de actitudes*». México. Trillas

Toby, J. y Toby, M.L.,1954, «*A method of selecting dichoto mous items by cross tabulation*». En Riley,M. y col. «*Sociological Studies in Scale Analisis*». New Brunsvick, New Jersey. University Press.

Tomic,W. and Kingma,J.:1996, "*On the relation Between Seration and NumberLine Comprehension: A Validation Stud". Corporate Source: The Open University*. P.O. box 2960. 6401 DL Herlen the Nedherlands

Trigg, C. W.:1989, «*Polygonal Repdigits*». *Journal of Recreational Mathematics*». Vol. 21 N. 1. Págs.52-53.

Vanlehn, K.:1986, «*Arithmetic Procedures are Induced from Examples*» En *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaun Associetes. James Hiebert (Edit).

Vergnaud, G.:1980, «*Problemática y metodología de la investigación en Didactica de la Matemática*». En «*Métodos de observación y análisis de los procesos educativos*». Materiales del IX Seminario de Investigación psicopedagógica. Barcelona. Coordinador César Coll.

Vergnaud, G.:1990, «*Epistemology and Psychology of Mathemattcs Education*». I.C.M.E. Study Series. Mathemathics and Cognition. Cambrige. University Press.

Wheatley, G. H.:1991, «*Constructivist Perpectives on Science and Mathematics Learning*». *Science Educatión*, 75 (1), págs. 9-21.

Wiscamb, M.:1970, «*A geometric introduction to mathematical induction*». *Mathematics Teacher.* V. 63, N. 5, págs 402-404.

Word, K. J.:1988, «*Instructional sequence effects of recursión and Mathematical Inductión in college algebra*». Masthers Thesis. University of Texas at Austin. Michigan. U.M.I.