# Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos

ALICIA BRUNO
*Universidad de La Laguna*

## RESUMEN

*En esta exposición se ofrece inicialmente una síntesis de las principales investigaciones realizadas sobre Pensamiento Numérico y Algebraico en la Universidad de La Laguna, y, posteriormente, se presentan dos investigaciones realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje de los números negativos. Estas últimas investigaciones han abarcado diferentes objetivos, de los que se enfatizarán los resultados sobre la resolución de problemas aditivos, en concreto los procedimientos de resolución de los problemas por parte de estudiantes de secundaria y el estudio de dos métodos de enseñanza de estos problemas.*

## 1. INVESTIGACIONES EN PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO EN LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA (ÁREA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS)

En Universidad de La Laguna se han desarrollado distintas investigaciones relacionadas con el Pensamiento Numérico y Algebraico: resolución de problemas aritméticos verbales, adquisición del lenguaje algebraico, resolución de problemas mal definidos, procesos de generalización y números negativos. Estas investigaciones han culminado, o culminarán en breve, en tesis doctorales. A continuación comentamos brevemente cada una de ellas, excepto la última, que corresponde a la segunda parte de esta exposición.

La investigación sobre la *resolución de problemas aritméticos verbales*, desarrollada por la profesora J. Hernández, bajo la dirección de M. Socas, ha tenido como objetivo el análisis de las habilidades de alumnos de primaria en la resolución de problemas aritméticos verbales, cuando son instruidos en un modelo de competencias que usa dos sistemas de representación yuxtapuestos. Además, se han estudiado las actitudes que tienen los alumnos hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, estudiando también la implicación del profesorado en la instrucción y en la propia investigación. Los resultados de esta investigación se recogen en la tesis doctoral de Hernández (1997).

La *adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años* constituye la tesis de la profesora M. Palarea (1999), dirigida por M. Socas. Señalamos sus objetivos principales: estudio de las habilidades cognitivas de carácter operacional y de carácter conceptual más relevantes del pensamiento algebraico, con alumnos de 12 a 14 años; estudio del uso y comprensión de los registros y sistemas de representación autosuficientes; elaboración de un test que considere todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular "global"; estudio de aspectos afectivos de los alumnos con relación a las Matemáticas en general y al Álgebra en particular; estudio y organización de dificultades, obstáculos y errores que se dan en el lenguaje algebraico; elaboración de una propuesta curricular que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra.

La *resolución de problemas mal definidos* (problemas en los que sobran o faltan datos) es la investigación en la que trabaja A. Noda (bajo la dirección de J. Hernández y M. Socas), y corresponde al desarrollo del proyecto de su tesis doctoral. La intención principal de este trabajo es construir un modelo de competencia formal para problemas de encontrar, bien y mal definidos, que permita analizar los comportamientos de los resolutores en la fase de "preparación", es decir, estudiar cómo identifican los resolutores las situaciones problema en términos de bien y mal definidos, cómo las caracterizan, cómo establecen relaciones entre los datos y el objetivo en este tipo de situaciones, etc., con el objetivo de ver la existencia, o no, de comportamientos regulares (invariantes) de los resolutores. Además, se estudian las justificaciones que utilizan los alumnos para validar o refutar un problema de encontrar, bien o mal definido (Noda et al., 1999).

El profesor J.A. García Cruz (1998) realizó su tesis doctoral sobre *procesos de generalización* desarrollados por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal (bajo la dirección de A. Martinón). Los aspectos que han tratado en su investigación son los siguientes: acciones y esquemas de la acción mediadores del proceso; invariantes establecidos por los alumnos; caracterización de la noción de estrategia empleada, así como sus particularidades: visual, numérica y mixta; una primera aproximación al esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal; caracterización de los tres niveles constituyentes; modos de argumentar sobre soluciones a problemas de generalización lineal empleados por los alumnos; descripción de un proceso de enseñanza basado en el uso de normas sociales y sociomatemáticas de interacción en el aula; y, por último, sugerencias para el tratamiento en clase del tema, así como de pautas cuadráticas.

## 2. ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA–APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Presentamos ahora dos investigaciones que tienen como núcleo común la enseñanza–aprendizaje de los números negativos. No se hablará de una única metodología, aunque las investigaciones tienen, evidentemente, antecedentes comunes. La primera investigación forma parte de la tesis doctoral *La enseñanza de los números negativos desde una perspectiva unitaria* (Bruno, 1997); la segunda investigación trata sobre métodos de enseñanza de la resolución de problemas aditivos con números negativos.

### 2.1 Los números negativos desde una perspectiva unitaria

En el momento de iniciar nuestra investigación sobre la enseñanza–aprendizaje de los números negativos, hace aproximadamente diez años, los trabajos que encontramos publicados sobre el tema respondían a intereses distintos. Sin hacer una clasificación exhaustiva, se puede decir que un amplio grupo de publicaciones mostraban modelos (muchos de ellos gráficos o manipulativos) en los que apoyarse para ayudar a los estudiantes a comprender las reglas operatorias de los números negativos. Algunos de estos trabajos, estaban acompañados de estudios empíricos en los que se contrastaba la efectividad de algunos modelos (Liebeck, 1990; Lytle, 1994). Otro grupo de investigaciones tenía un corte histórico–epistemológico (Glaeser, 1981; Schubring, 1986). Y un tercer grupo informa sobre cómo estudiantes de primaria y secundaria resuelven problemas aditivos con números negativos, entre los que destacamos los de Bell (1986), Vergnaud y Durand (1976) y Vergnaud (1982).

A partir del primer análisis de estos trabajos concluimos que la mayoría de ellos se refieren a la introducción de Z, es decir, se preocupan de la extensión de los números enteros no negativos $Z_+$ al sistema de los enteros Z. Además, con el fin de hacer esta extensión más comprensiva, se propone recurrir a modelos en los que apoyar la enseñanza, que en general son válidos para Z, pero no para otra clase de números.

Dado que muchos estudiantes manifiestan un conocimiento no integrado de los distintos sistemas numéricos (Robinet, 1986), nos planteamos la necesidad de contemplar la enseñanza de los números negativos integrada en un único conocimiento numérico, lo que hemos denominado *perspectiva unitaria del conocimiento numérico* y que se explica brevemente en el apartado siguiente.

#### 2.1.1 *Una perspectiva unitaria*

Planteamos que la enseñanza de los números debe contemplarse dentro de un marco que denominamos perspectiva unitaria del conocimiento numérico. La idea es que lo que se aprende acerca de los números a lo largo de la escolaridad debe ir conformando un único conocimiento numérico, que debe tener un hilo conductor que lo unifique, de forma que los alumnos realicen las extensiones de los conjuntos numéricos, integrando y conectando el nuevo conocimiento con lo que ya conocen sobre los números. Ello implica que la enseñanza debe poner énfasis en ciertos elementos que ayuden a esta unificación. Así, se hace necesario utilizar situaciones numéricas, representaciones gráficas, modelos, propiedades numéricas, etc., que permitan a los alumnos establecer las conexiones entre las distintas clases de números.

Alrededor del concepto de número hay un conjunto de ideas que tienen distintas manifestaciones: lo operativo y abstracto, las situaciones concretas y las representaciones gráficas, entre las que existen múltiples relaciones. La noción de *campo conceptual* (Vergnaud, 1990) nos resultó útil como marco en el que explicar estas ideas. Se entiende como *campo conceptual* al conjunto formado por las situaciones que se corresponden con una idea, así como por los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Así, Vergnaud habla de *campo conceptual aditivo* o *campo conceptual multiplicativo*. Sin embargo, el conocimiento numérico es más amplio, en cierta forma se sitúa en el *campo conceptual numérico* (González, 1995).

Para reflexionar sobre los elementos del campo conceptual que rodean al concepto de número, distinguimos entre tres *dimensiones* del conocimiento numérico (ideas adaptadas de los trabajos de Sasaki, 1993 y Peled, 1981). (1) La *dimensión abstracta* (conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y a las formas de escritura de los números); (2) la *dimensión de recta* (representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma); (3) la *dimensión contextual* (aplicaciones, situaciones concretas en las que se usan los números). El *conocimiento numérico* abarca, no sólo lo relativo a cada una de las tres dimensiones, sino también a las transferencias entre ellas.

El inicio del aprendizaje numérico se produce en el sistema de los números enteros no negativos y concluye con el de los números reales. Varios son los caminos posibles a recorrer; es decir, varias son las *secuencias de extensiones* que podrían realizarse:

$$\begin{tikzcd} Z_+ \arrow[r] \arrow[d] & Q_+ \arrow[r] \arrow[d] & R_+ \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Q \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

Pensamos que seguir secuencias de extensiones que avancen hacia R sin retrocesos facilita el conseguir una perspectiva unitaria del conocimiento numérico. Además, en el momento de realizar las ampliaciones numéricas se debe enfatizar los aspectos que son comunes a los distintos sistemas numéricos, y ello en cada dimensión, ya que contribuiría a configurar una visión unitaria de los números.

La incorporación de los números negativos supone dar un paso en las secuencias de extensiones que puede hacerse de $Z_+$ a Z, de $Q_+$ a Q, o de $R_+$ a R. En la dimensión abstracta, lo más relevante de esta extensión es que en el sistema ampliado todo número a tiene un opuesto -a, de modo que a – b = a

+ (-b) y a + b =a - (-b), es decir, las nociones de suma y resta se identifican mediante el uso de la noción de opuesto de un número: restar b es sumar –b, el opuesto de b.

En la dimensión de recta esta ampliación tiene un significado simple: los números conocidos (los positivos) se representan a la derecha del 0 y los nuevos números son sus simétricos respecto de 0 a la izquierda.

En la dimensión contextual se producen las mayores dificultades. Las ideas de suma y resta en los números positivos tienen significados contrarios: sumar es añadir, unir..., mientras que restar es quitar, separar... Con los negativos deben identificarse tales significados, de modo que sumar y restar se correspondan con la misma idea. Es por ello que la resolución de problemas aditivos juega un papel fundamental en la enseñanza en el momento de realizar la extensión.

Al comenzar la investigación no encontramos ningún antecedente que analizase la posibilidad de realizar secuencias de enseñanza que "avancen hacia R". Con respecto al uso de la recta, las investigaciones realizadas con números positivos indicaban algunas dificultades que tenían los alumnos para representar operaciones aditivas abstractas. También algunas investigaciones la estudiaban como modelo para introducir los números negativos, sin embargo, no encontramos trabajos que analizaran su papel en la enseñanza de los negativos relacionándola con las otras dimensiones. En cuanto a las investigaciones en la dimensión contextual, utilizamos principalmente los trabajos sobre problemas aditivos con números negativos de Vergnaud (1981), Conne (1985) y Bell (1986). En ellos se trataba aspectos relacionados con las tres dimensiones y nos sirvieron de base para analizar la resolución de problemas aditivos, y para realizar una clasificación de problemas aditivos (Bruno y Martinón, 1997).

### 2.1.2 *Objetivos de la investigación*

A partir de las reflexiones anteriores, se perfilaron los objetivos de investigación que se concretan a continuación:

*Objetivo 1. Secuencia de extensiones*. De las posibles maneras de introducir los números negativos, se optó por: $Q_+$ Æ Q. Se planteó averiguar si tal extensión producía en los alumnos un peor conocimiento de los números enteros que el que adquieren los alumnos que siguieron la extensión $Z_+$ÆZ.

*Objetivo 2. Contextos*. Estudio de los contextos en cuanto a la dificultad de las actividades, especialmente en las correspondientes a problemas aditivos.

*Objetivo 3. Estructuras*. Análisis del conocimiento de los alumnos sobre aspectos *funcionales* de los números: uso y representación de los *estados*, *variaciones* y *comparaciones*.

*Objetivo 4. Identificación de la suma y la resta*. Se trató de conocer de qué forma lograban los alumnos la identificación entre las dos operaciones, no sólo en la dimensión abstracta, sino principalmente en la contextual.

*Objetivo 5. Resolución de problemas aditivos*. Estudio de cómo influyen el contexto, la estructura y el dato desconocido en la resolución de estos problemas.

*Objetivo 6. La recta*. Análisis del uso de la recta cuando se trabaja con números

negativos, haciendo uso de la representación puntual y de la vectorial, especialmente en la resolución de problemas.
*Objetivo 7. Relación entre las dimensiones.*Estudio de los procesos de transferencia entre las tres dimensiones.

2.1.3 *Metodología, diseño y fases de la investigación*

Las cuestiones de investigación requerían una intervención directa en el aula, ya que su análisis no se podía realizar con alumnos que hubiesen aprendido los números negativos siguiendo una secuencia de aprendizaje tradicional en España, por lo que se realizó un trabajo de *campo*. Se elaboró un material curricular que seguirían los alumnos y que reunía las condiciones para poder analizar los objetivos de investigación. El método de análisis de datos que se siguió fue cualitativo.

A continuación presentamos de forma esquemática las fases de la investigación:

*PRIMERA FASE*

· *Planteamiento de las cuestiones de investigación.* Planteamiento inicial de seis de los objetivos de investigación: Objetivos 1, 2, 3, 5, 6 y 7.
· *Elaboración de un material curricular.* Se elaboró un material curricular a seguir por los alumnos y que recogía las características de los números negativos que permitían responder a las cuestiones a investigar.
· *Primera experiencia en el aula.* Realizamos una primera experiencia que se desarrolló durante dos meses con 5 grupos de séptimo de E.G.B., de 12-13 años de edad, pertenecientes a dos escuelas, durante el curso 1992-93. De los grupos participantes en la experiencia, 4 grupos siguieron el material curricular elaborado por nosotros y el otro grupo sirvió como grupo de *referencia*. A lo largo de esta experiencia, los alumnos respondieron a distintas pruebas escritas. Además, los profesores de los grupos realizaron observaciones en el aula.
· *Entrevistas.* Una vez terminada la experiencia seleccionamos 5 alumnos a los que realizamos entrevistas grabadas en vídeo.
· *Análisis de los datos*. Los datos de las pruebas y las entrevistas se analizaron en función de las cuestiones de investigación.
· *Resultados y nuevas cuestiones de investigación.* Los resultados mostraron la necesidad de profundizar en el planteamiento de la suma y la resta, a partir de ahí, surgió el objetivo de investigación 4: identificación de la suma y la resta. Además, se observó la necesidad de profundizar en el objetivo 7 y de ratificar algunas conclusiones.

*SEGUNDA FASE*

· *Revisión del material curricular*. Se revisa y modifica el material curricular en función de los resultados de la experiencia.
· *Segunda experiencia.* Se realiza una segunda experiencia en el aula durante el curso 1993-94 durante dos meses. Se plantearon todas las cuestiones de investigación. En este caso, participaron 5 grupos, 3 de ellos siguieron el material curricular y 2 sirvieron como grupos de referencia. Los grupos pertenecían a 3 colegios distintos. De nuevo, a lo largo de la experiencia se realizaron pruebas escritas y los profesores realizaron observaciones de aula.

· *Entrevistas.* Una vez finalizada la experiencia en el aula, se seleccionó a 11 alumnos pertenecientes a los 3 grupos que siguieron el material curricular, a los que se realizó entrevistas sobre los objetivos de investigación.
· *Análisis de los datos*. Se realizó un estudio descriptivo de las pruebas y se analizaron las entrevistas en función de las cuestiones de investigación.
· *Conclusiones de investigación.* Una vez finalizado el análisis de los datos se plantearon las conclusiones de la investigación.

Dadas las limitaciones de la exposición, exponemos las conclusiones relativas a la resolución de problemas aditivos. Las restantes conclusiones se recogen ampliamente en Bruno y Martinón (1996, 1999) y Bruno (1997).

2.1.4 *Resolución de problemas aditivos*

Nuestras principales aportaciones se centran en haber analizado problemas aditivos en contextos diferentes a los que ya se habían tratado en la literatura, como *nivel del mar, carretera, ascensor*, *cronología* y haberlo hecho conociendo cómo los alumnos aprendieron los números negativos. Además, hemos analizado el papel de la recta en la resolución de problemas y su influencia en la comprensión y en los planteamientos de las operaciones abstractas con números negativos, asunto del que se tenía poca información. También hemos seguido los pasos que los alumnos dan para llegar a la solución de los problemas, de forma que podemos dar razones de algunos de los errores en estos problemas y dónde está la principal dificultad de los mismos. Por último, establecimos una agrupación de los alumnos según los procedimientos de resolución de los problemas que emplean.

Sobre los problemas aditivos se concluye que la dificultad está determinada por la posición de la incógnita más que por el contexto y por la estructura. Por otro lado, el uso de la recta depende más del contexto que de la estructura o de la posición de la incógnita.

Las entrevistas realizadas a los estudiantes mostraron que la forma de llegar a la solución del problema cambia según los alumnos y la comprensión que posean de las operaciones de suma y resta. Se observaron tendencias en los alumnos a utilizar la recta, o no, y en estas tendencias no parecía influir el nivel de conocimiento de los alumnos.

Encontramos tres procedimientos de resolución de los problemas, que hemos denominado (1) *orden de los datos,* (2) *adaptar la operación a la recta* y (3) *usar números positivos*, los cuales comentamos a continuación.

*- Orden de los datos*

Cuando los alumnos resuelven los problemas con una operación, en muchas ocasiones escriben los números siguiendo el mismo orden en que aparecen en el enunciado del problema y con los signos que indican las situaciones. Por ejemplo, ante el problema *Juan tiene en su casa 10 pesetas y debe a un amigo 15 pesetas, ¿cuál es su situación económica?*, plantean, la operación 10-15. Seguir este procedimiento en todos los problemas indica una ausencia de comprensión de las diferencias entre las estructuras de los problemas.

*- Adaptar la operación a la recta*

En este caso, el alumno primero resuelve el problema en la recta, y a continuación busca una operación cuyo resultado coincida con el obtenido previamente en la recta. En ocasiones, realiza varios intentos antes de conseguir la operación adecuada.

Esta forma de actuar se produjo, especialmente, en aquellos problemas en los que los alumnos no veían la operación inmediatamente.

Este tipo de comportamiento muestra que los alumnos tienen más seguridad en los resultados que obtienen en la recta que el que encuentran con la operación. Asimismo, indica la dificultad para dar sentido a las operaciones con números negativos.

*- Usar números positivos*

Algunos alumnos resolvieron los problemas aditivos planteando una operación con números positivos, e interpretando la solución de forma cualitativa, es decir, indicando cómo es el estado, la variación o la comparación. En ocasiones, previamente lo habían resuelto en la recta, o parecían tener una imagen del problema.

Esta forma de resolver los problemas indica que determinados alumnos no ven la necesidad de dar un resultado en el que aparezcan los números negativos, o bien puede ser una forma de evadir la dificultad de poner una operación con números negativos, ya que los alumnos que siguieron este procedimiento plantearon operaciones con números negativos en otros problemas.

El uso o no de estos procedimientos llevó a clasificar a los alumnos entrevistados en tres grupos, que indican distintos niveles de comprensión de los problemas aditivos.

En el estudio de la resolución de problemas se encontraron también otros razonamientos de los alumnos: *cambiar la estructura del problema, llegar al cero, interpretar incorrectamente el resultado* y *representar los números de forma aislada en la recta.*

## 2.2. MÉTODOS DE ENSEÑANZA DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

La anterior investigación realizada dejó abierta algunas cuestiones, entre ellas el cómo mejorar la enseñanza para conseguir que la relación entre la dimensión abstracta y la contextual se establezca de forma correcta al resolver problemas aditivos. Muchos de los alumnos que participaron en la investigación anterior tenían dificultades para plantear una operación correcta con números negativos y algunos de ellos recurrían a la recta como medio para dar una respuesta. También se comprobó que el tipo de estructura influye en el éxito de la resolución, sin embargo, la posición de la incógnita es el factor que presenta más dificultades para los alumnos. Por lo tanto, esto es un indicador de que la enseñanza de los problemas aditivos debe incidir sobre la estructura de los problemas y sobre la posición de la incógnita.

Nos planteamos entonces profundizar en cómo debía ser el trabajo en el aula para conseguir mejoras en la resolución de problemas aditivos por parte de alumnos de secundaria. La investigación que mostramos ahora tuvo como finalidad analizar dos métodos de enseñanza de los problemas aditivos con números negativos.

Rudnitsky *et al.* (1995) realizaron una investigación con problemas aditivos de números positivos en la que analizaban y contrastaban la efectividad de tres métodos de enseñanza. (1) *Método resolver*: los alumnos realizaron prácticas continuas y sistemáticas de resolución de problemas aditivos con números positivos, con distintas estructuras y variando la posición de la incógnita. (2) *Método redactar*: los alumnos redactaron los problemas que posteriormente aprendieron a clasificar según sus estructuras, los intercambiaban con sus compañeros para resolverlos, y en ocasiones se les pedía escribir los tres problemas de una misma estructura, correspondientes a cada una de las posiciones de la incógnita. (3) M*étodo control*: metodología *tradicional*, sobre la que no ejercieron ninguna influencia, en la que la resolución de problemas aditivos ocupó la práctica habitual de los profesores participantes. Los resultados indicaron que los alumnos que siguieron el método de *redactar* obtuvieron mejores resultados a largo plazo que los alumnos de los otros métodos.

Nos planteamos si una conclusión similar se podía establecer para los números negativos, es decir, si una metodología de enseñanza de los números negativos en la que los alumnos escriben los problemas aditivos y los clasifican según sus estructuras, lleva a un mayor éxito en la resolución de los mimos. Por ello, realizamos una investigación que en su base coincide con la de Rudnitsky *et al.*, aunque con algunas diferencias. También nos interesó analizar qué tipo de problemas escribían los alumnos en el método *redactar*, con el objetivo de ampliar la información sobre la forma en que los alumnos entienden estos problemas.

La investigación se realizó con alumnos de segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (de 13-14 años de edad). Participaron 9 grupos de alumnos, de tres colegios diferentes; en la tabla 1 se resume la información referente al método de enseñanza utilizado, número de grupos, alumnos, profesores y colegios participantes.

| Método de enseñanza | Redactar | | | Resolver | | | Control | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupos | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 | G7 | G8 | G9 |
| Nº de alumnos por método | 57 | | | 74 | | | 55 | | |
| Nº de alumnos por grupo | 17 | 17 | 23 | 30 | 22 | 22 | 19 | 20 | 16 |
| Profesores | P1 | P1 | P2 | P2 | P3 | P4 | P5 | P5 | P5 |
| Colegios | C1 | C1 | C1 | C1 | C2 | C3 | C4 | C4 | C4 |

Tabla 1. Distribución de los grupos en los métodos

En los métodos *redactar* y *resolver*, la experiencia se desarrolló en 10 horas de matemáticas de su horario habitual (2 horas semanales, durante cinco semanas). El primer día se realizó una prueba *inicial* que contenía 9 problemas aditivos con números negativos y el día 10 una prueba *final* con el mismo número de problemas y con iguales estructuras, aunque con diferentes contextos. Cuatro meses más tarde de la finalización de la experiencia se pasó una prueba de *retención*, del mismo tipo de las dos pruebas anteriores. Los alumnos de los grupos del método *control* siguieron las actividades propuestas por su profesor y su libro de texto, en el cual había problemas aditivos al final del tema. Estos alumnos también resolvieron las pruebas *inicial*, *final* y de *retención*. Por otro lado, en el método *redactar* se recogieron todos los días de clase los problemas escritos por los alumnos.

Con las pruebas escritas se realizó un estudio estadístico descriptivo de las variables de interés para nuestra investigación: dificultad de los problemas y estrategias de resolución; y una ANCOVA para verificar si había diferencias significativas entre los métodos. También se hizo un análisis de tipo cualitativo de los textos de los problemas escritos por los alumnos del método redactar.

Los resultados de esta investigación mostraron que un trabajo sistemático de los problemas aditivos con números negativos, como ha sido el de los métodos *redactar* y *resolver*, produjo mejoras en la resolución de los mismos. Mientras que el método, bastante extendido, de resolver problemas al final del tema, como aplicación de las reglas estudiadas previamente (método *control*), no hizo que los alumnos obtuvieran resultados tan buenos.

Por otro lado, los resultados del método *redactar*, que es el que presenta más novedades en el aula, no fueron tan buenos como los obtenidos por Rudnitsky *et al*. con números positivos. Además, no se ha mostrado más efectivo que el método *resolver*, aunque los resultados están próximos, y sí se ha mostrado mejor que una enseñanza en cierta forma "tradicional". Es por ello que no lo descartamos como una alternativa de enseñanza.

En los tres métodos ha quedado patente que los problemas aditivos de números negativos se resuelven con más facilidad usando una recta o una operación con números positivos, y que es más complejo resolverlos con números negativos. Es decir, que ante un problema aditivo de números negativos, entender la situación y encontrar la solución no siempre va unido a saber expresar formalmente un cálculo con números negativos que lo resuelva.

El método *redactar* es una alternativa de enseñanza, pero necesita más tiempo que otros métodos. Quizás con una metodología prolongada a lo largo de un curso escolar, y no concentrada en un período corto de tiempo, se consigan mejores resultados. Lo que necesitamos profundizar es si con este método se consiguen mejorar otros aspectos importantes para el conocimiento matemático de los estudiantes, entre ellos, reflexionar sobre un enunciado, no responder de forma mecánica o aprender que no todos los problemas son iguales en cuanto a su estructura.

En el análisis de los textos escritos por los alumnos del método *redactar* se tuvo en cuenta, principalmente, cómo clasificaron los problemas respecto a las estructuras, cómo los resolvieron, determinados aspectos lingüísticos y formas de expresar situaciones que pudieran aportar conocimiento sobre la comprensión de las situaciones por parte de los alumnos.

Los resultados indican que los alumnos no tienen dificultad para clasificar los problemas según su estructura. También encontramos que muchas respuestas incorrectas de los problemas no se producen por una falta de comprensión del enunciado, sino que la principal dificultad estriba en asociar la suma o la resta adecuada, y en el caso de la resta, el orden de los términos. Es decir, que falla la relación entre la dimensión contextual y la abstracta, como ya quedó patente con otros métodos de enseñanza en Bruno y Martinón (1996).

La metodología *redactar* ha sido útil para entender determinadas dificultades de algunos alumnos con estos problemas, como en los problemas relativos a la suma/resta de dos cambios sucesivos. La forma de redactar los problemas por parte de los alumnos nos indica muchas veces qué idea tienen de los mismos. La importancia de los aspectos lingüísticos en la resolución de problemas se manifiesta cuando el uso de una palabra con connotaciones negativas les lleva, en ocasiones, a escribir una resta. Incluso cómo determinadas expresiones provocan respuestas erróneas. Un estudio más amplio de estos aspectos se puede encontrar en Bruno (1999).

## REFERENCIAS (PARTE 1)


Hernández, J.: 1997, *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

Gracía Cruz, J.A.: 1998, *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

Noda, A., Hernández, J. y Socas, M.M.: 1999, Study of justifications made by students at the "preparation stage" of badly defined problems, *Proceedings of the XXIII Conference PME*. Israel.

Palarea, M.: 1999, *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en el álgebra cometidos por alumnos de 12 a 14 años*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.


## REFERENCIAS (PARTE 2)


Bell, A.: 1986, 'Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros', *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

Bruno, A., Martinón, A.: 1996, 'Les nombres négatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droite', *Petit x*, 42, 59-78.

Bruno, A., Martinón, A.: 1997, 'Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos', *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.

Bruno, A., Martinón, A.: 1999, 'The teaching of numerical extension: the case of negative numbers', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789-809.

Bruno, A.: 1997, *La enseñanza de los números negativos desde una perspectiva unitaria*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

Bruno, A.: 1999, 'Escribiendo problemas: una experiencia con números negativos', *Actas de las IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas*, CEFECOP de Lugo, Lugo, pp. 352-354.

Conne, F.: 1985, 'Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5, 3, 269-332.

Glaeser, G.: 1981, 'Epistemologie des nombres relatifs', *Recherches en Didáctique des mathématiques*, 2(3), 303-346.

González, J.L. y otros: 1990, *Números enteros*, Síntesis, Madrid.

González, J.L.: 1995, *Los números enteros relativos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Liebeck, P.: 1990, 'Scores and forfeits - an intuitive model for integer arihmetic?', *Educational Studies in Mathematics*, 21, 221-239.

Lytle, P.: 1994, 'Investigation of a model on neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction', *Proceedings of the XVIII PME*, Lisbon., 192-199.

Peled, I.: 1991, 'Levels of knowledge about signed numbers', *Proceedings of the XV PME*, pp. 145-152.

Robinet, J.: 1986, 'Les réels: quels modèles en ont les élèves?', *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.

Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, J.M., Gilbert, T.: 1995, 'Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach', *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5) 467-486.

Sasaki :1993, 'The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching', *Proceedings of the XVII PME*, 2, University of Tsukuba, Japón, pp. 262-268.

Schubring, G.: 1986, 'Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs', *Petit x*, 12, 5-32.

Vergnaud, G.: 1982, 'A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T., Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, LEA, New Jersey.

Vergnaud, G.: 1990, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique de Mathémtiques*, 10, 2-3, 133-170.

Vergnaud, G., Durand, C.: 1976, 'Structures additives et complexité psychogénétique', *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.