ALGUNOS APUNTES SOBRE EL USO DE GRÁFICAS CARTESIANAS

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid

RESUMEN

Lo que sigue tiene dos partes bien diferenciadas: una primera que presenta unas notas elaboradas *in situ* sobre la exposición de E. Lacasta y otra más elaborada, que más que una réplica pretende dar una visión algo diferente sobre el uso de las gráficas cartesianas. La reflexión personal y el concurso de las nuevas tecnologías marcan el enfoque que aquí se describe.

0. ALGUNAS NOTAS

Parece lógico pensar que una adecuada utilización de los gráficos produce un impacto en la actitud de los alumnos por la matemática, apreciando su lenguaje gráfico sobre todo en propuestas innovadoras que ya son las referenciadas en los trabajos del Shell Center, aunque éstas fueron pioneras y su valor es incuestionable. Estos gráficos cartesianos ya han pasado a la literatura y, en cierto modo, han dejado su interés a representaciones de evolución con impacto social, por ejemplo: puntuaciones de baloncesto, control del balón en futbol, velocidades en carreras ciclistas, etcétera. Es evidente que los gráficos cartesianos permiten ver las características globales de las funciones y también, ¿por qué no las locales?, pero en ambos casos, sobre todo en el segundo, es necesaria una instrucción específica.

FIGURA 0

Asumiendo la idea de que la variedad de representaciones de un concepto supone mayor profundización en su significado, cuando se conocen varias representaciones cartesianas de un saber, éste será más profundo. Así por ejemplo las gráficas cartesianas sobre el concepto de límite que muestra la figura 0 complementan la que usan habitualmente los manuales para ilustrar el concepto de límite. La primera de ellas, atendiendo al proceso, da respuesta a cómo debe ser la función y la segunda tiene en cuenta el cálculo como aproximación.

En otro orden de cosas y, teniendo presente investigaciones realizadas en la Universidad de Valladolid, parece que las cuestiones sobre gráficos como iconos no son las más difíciles para los alumnos, aunque una clasificación sin establecer previamente índices de dificultad puede resultar engañosa. La representación cartesiana puede y debe ser un medio de reflexión para los alumno, marcando el punto de partida de un proceso y no la culminación del mismo. Así lo entienden los coordinadores de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de la Universidad de Valladolid, que en Pruebas de Acceso a la Universidad permiten el uso de calculadoras gráficas.

1. ORIGEN, FUNCIONES Y CURRÍCULO

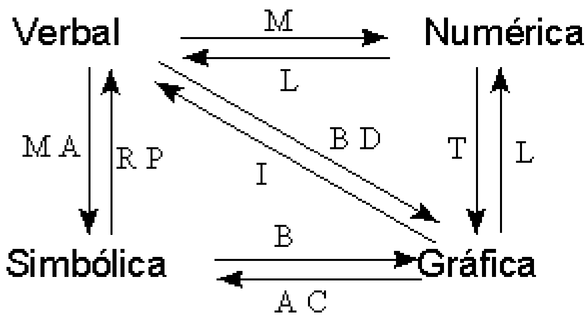
Considerando que las funciones pueden ser representadas verbalmente, es claro que el principio de Arquímedes (278-212 a.C.), *"El empuje es el peso del volumen que desaloja"*, determina una función, cuya forma algebraica es E=P(v).

Por otra parte, Apolonio de Perga (S. III - S. II a C.) ya había considerado sistemas de coordenadas, pero Nicolas de Oresme (1325-1382) representó ¿por primera vez? una cantidad variable en un sistema cartesiano y sugirió funciones trascendentes.

Utilizando términos propios de la matemática, una representación gráfica es una función de un conjunto de significantes en un conjunto de significados.

Además de construir una especie de memoria artificial que permite registrar en particular diferentes características de una función, las representaciones cartesianas también puede ser instrumentos para la investigación y para la búsqueda de soluciones a ciertos problemas, así como representaciones de conceptos y constituir verdaderas demostraciones. La didáctica de los gráficos y la orientación educativa pueden otorgar otras funciones.

Mi experiencia como coordinador de las PAU de Valladolid me indica que una creencia arraigada entre buena parte del Profesorado de Secundaria es que las funciones no se puede expresar sólo en modo gráfico y, por tanto, "necesitan su fórmula" y, sin duda, los problemas proceden de la traducción del simbolismo algebraico al simbolismo gráfico, más que del carácter *polisémico* de la escritura simbólica.



En los currículos actuales de los países europeos y en el propio currículo español se insiste en la importancia de las traducciones entre los cuatro modos de representación.

El alumno es capaz de traducir a condiciones y conceptos algebraicos los "rasgos gráficos globales", actividad contemplada en el currículo español, que en el BOE 152 de 26/6/91 en el Real Decreto 16442 de Enseñanzas Mínimas de ESO, en los criterios de evaluación del bloque 4, en el punto 4, señala:

"Este criterio supone el manejo de representaciones gráficas, tanto para obtener información a partir de ellas como para expresar relaciones de distinto tipo. La información obtenida a través de las gráficas ha de ser tanto global (aspectos generales de la gráfica, crecimiento etc.), como local (obtención de pares de valores relacionados, etc.).

2. LA INSTRUCCIÓN

E. Lacasta (1998) cita como R. Duval distingue los registros de representación de un mismo objeto matemático y su tratamiento cognitivo diferente.

E. Castro y E. Castro (1997), al hablar de pensamiento visual, dicen que es posible educar a los niños y adolescentes para que su capacidad visualizadora se desarrolle y citan como Zimmermann (1991) considera que se puede adquirir habilidad visualizadora. Asimismo y en la misma obra, estos autores señalan como una de las conclusiones de las investigaciones de Kaput, Goldin, Duval, Glaesenfelg y Vergnaud es que "el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos". Así pues, parece lógico pensar que las concepciones gráficas tienen bastante que ver con la visualización y, según Castro E. y Castro E. (1997, pág 104) no parece que los estudiantes puedan inventar o interpretar por sí mismos las representaciones convencionales, sino que han de ser instruidos y educados en su uso y comprensión. Así, el uso que se hace para resolver un problema de intersección de gráficas de funciones es, en general, distinto del que se hace para resolver un problema de extrapolación y, como manifiesta la experiencia que se muestra a continuación, la instrucción juega un papel fundamental. A 18 profesores de Educación Secundaria, que no habían sido instruidos, se les preguntó si ellos creían que las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica, recíprocas una de otra, de base $a>1$ se cortan. La respuesta fue unánime: NO.

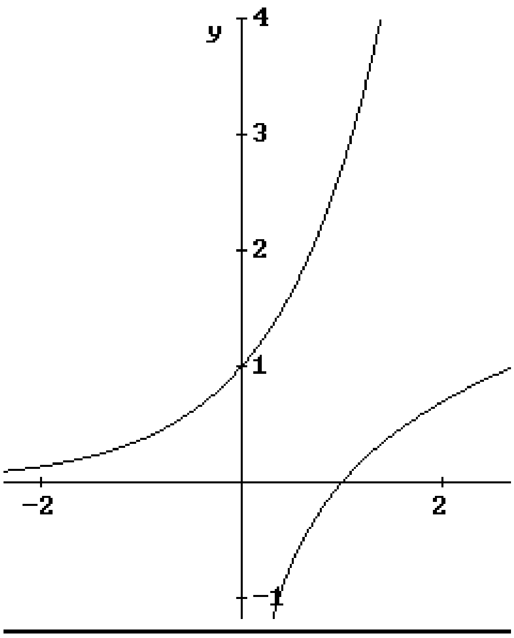


FIGURA 2

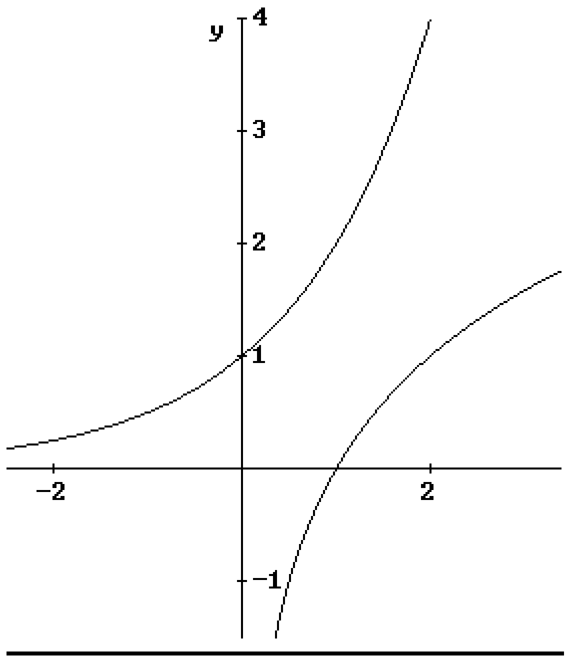


FIGURA 3

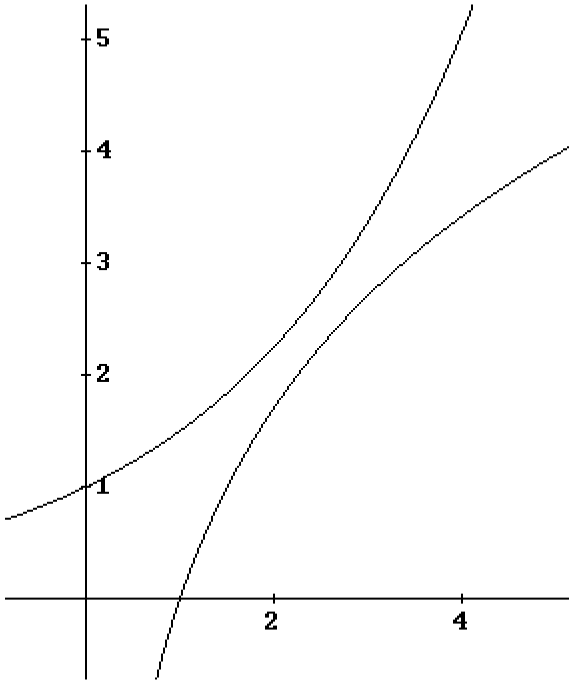


FIGURA 4

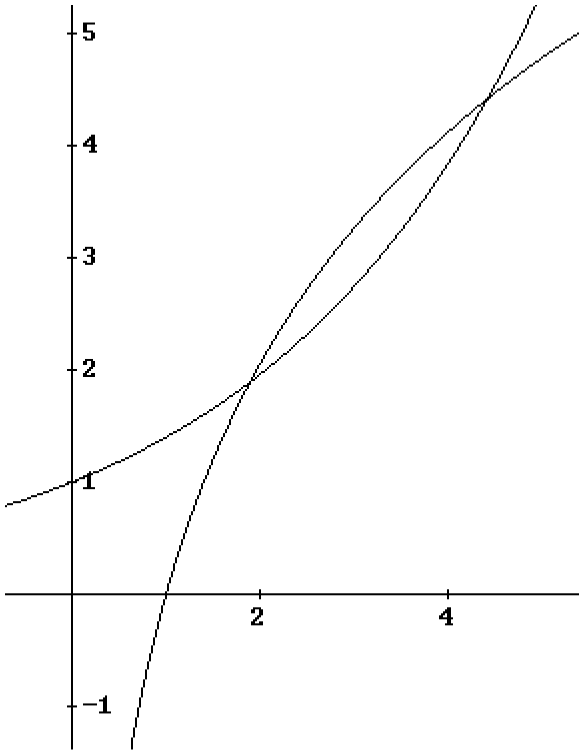


FIGURA 5

Tras mostrar las figuras 2, 3, 4 y 5 la respuesta y su convencimiento fueron unánimes: SI.

El uso que se hace de los gráficos para resolver un problema de intersección de gráficas de funciones no es ni parecido al uso de los mismos para resolver un problema de extrapolación.

Así pues, parece que con una instrucción adecuada los gráficos proporciona *per se* las condiciones necesarias para la adquisición de nuevos conocimientos.

En la investigación que venimos desarrollando en la Universidad de Valladolid desde hace unos años sobre la didáctica del concepto de límite, después de trabajar los diferentes lenguajes, hemos encontrado que el gráfico es la vía más eficaz de transmisión de saberes.

3. EL GRÁFICO COMO ÁBACO

Depende de la precisión del gráfico. Si éste es poco preciso -el procedimiento de construcción es manual- puede ser una fuente de errores, figura 6, mientras que si se dibuja con medios informáticos el resultado es muy diferente, figura 7.

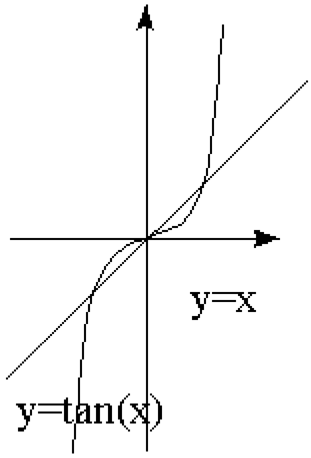


FIGURA 6

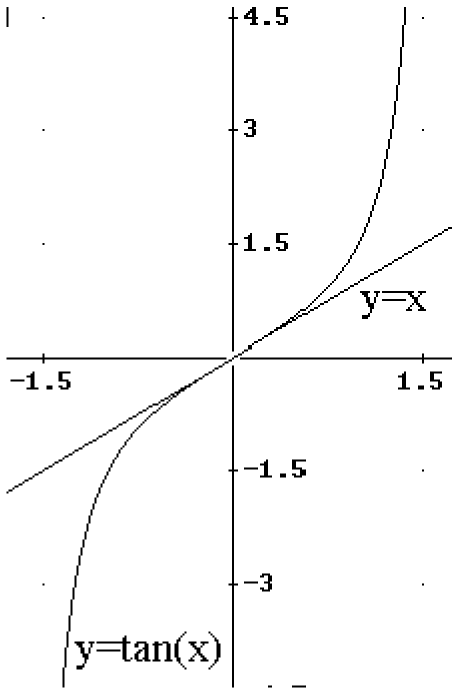


FIGURA 7

Una construcción manual puede ser más un esquema que una representación de una función y los alumnos suelen conceder más credibilidad a estos que a las deducciones Schoenfeld (1988).

La precisión que actualmente se consigue a través del uso de los recursos gráficos de la alta resolución es algo que se debe tener en consideración (Tall 1997). El gráfico de la figura 8 muestra con absoluta claridad, entre otras cosas, que las funciones y=tan(x), - p/2<x< p/2 e y=x sólo se cortan en el origen.

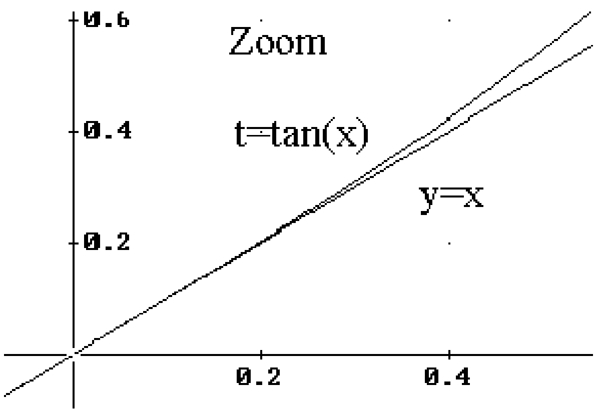


FIGURA 8

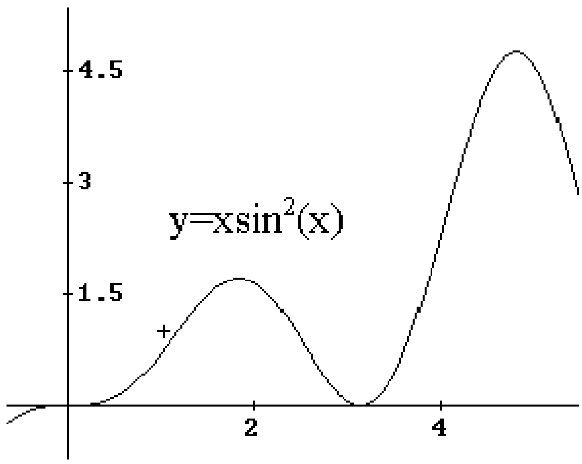


FIGURA 9

La lectura “directa” no siempre es fácil y tiene bastante que ver con la instrucción recibida. Por ejemplo, en una experiencia ante Profesores y Licenciados en Matemáticas, Valladolid (1992-1993), se les pidió que obtuvieran las abscisas de la función representada en la figura 9. Estos profesores nunca habían sido instruidos en medir y utilizar las escalas de los ejes coordenados y la respuesta dada por buen número de ellos fue sorprendente. Ellos creían que las abscisas eran p/2 y 3p/2 y no atribuyeron ningún efecto al factor *x*.

La orientación de los gráficos cartesianos es otra variante que con cierta frecuencia hace que los alumnos hagan interpretaciones erróneas. Un estudio de 4 casos con alumnos brillantes de 15, 17, 18 y 19 años sobre el gráfico de la diferencial, Valladolid (1997-1998). Disponiendo ellos del segmento diferencial en una curva convexa se les pidió que hicieran lo propio en una curva como la de la figura 10. Uno señalo AE, otro BF, un tercero CD y AE y el restante sólo CD. Los tres que cometieron su error lo justificaron porque, según ellos, *no puede estar la curva en el medio, y, por simetría, el segmento tiene que estar al otro lado*. En las entrevistas desvelaron que los tres achacaron su error al cambio de orientación de la curva y dijeron: “Ahora está hacia abajo y nos despista”.

4. GRÁFICOS INTERACTIVOS. EL ORDENADOR

Se puede concebir al gráfico como un objeto susceptible de ser transformado mediante traslaciones, $f(x)+c$ y $f(x-c)$, reflexiones, $-f(x)$, y estiramientos, $f(x)$, (Confrey, 1992), tomado de Tall (1997) y es evidente que el uso de software aclara los problemas de interpretación de estos significados que causan grandes dificultades a los alumnos (Dreyfus y Eisember, 1987, tomado de Tall 1997).

Se puede lograr una aproximación visual potente usando ordenador mediante el agrandamiento del grafo de una función. Este proceso usa la misma idea fundamental del análisis no estándar de que *el grafo de una función diferenciable en un agrandamiento infinito es una recta*. En versión computacional cuando el grafo se agranda se ve menos curvado, parece una recta y, entonces, el gradiente de la curva se representa por la pendiente de la línea de la pantalla.

Tales aproximaciones están sujetas a las limitaciones gráficas del ordenador, notando que sólo se puede ver una aproximación al concepto mental. Sin embargo, también conviene notar que la alta resolución gráfica ha supuesto un salto cualitativo importante en esta aproximación. Según Tall (1997), esta característica hace que el concepto de límite implícito en el *zoom* de software adecuado es un procedimiento mejor que el explícito de la definición formal.

El entorno juega un papel fundamental. El ordenador permite explorar el concepto de función y, por tanto, los rasgos globales y según Cuoco (1994), tomado de Tall (1997), los estudiantes que dibujan los gráficos de funciones usando papel y lápiz los ven como una forma geométrica mientras que los que utilizaron programas de LOGO (de forma continuada) alcanzaron significativas destrezas de interpretación.

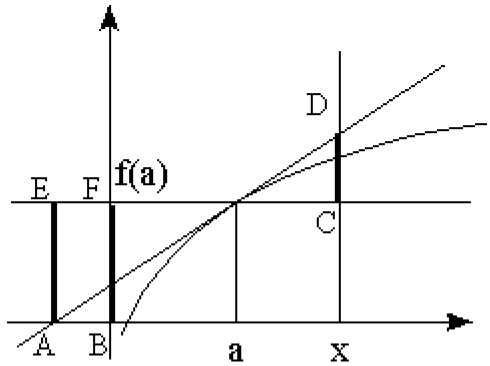


FIGURA 10

El proceso de almacenar información resulta más estático que otra cosa y no parece que sea el más natural. En el proceso de construcción de la matemática lo primero que se concibe es la idea, ésta se representa, después se estudia explorando y conjeturando, y, finalmente, resulta la formulación simbólica. Así, la idea de recta tangente está implícita en la propia curva, ya que el grafo de una función diferenciable es suave y en un agrandamiento infinito es una recta (figura 8). Se puede dar una versión computacional de esta idea usando el *zoom*, ya que cuando el grafo se agranda se ve menos curvado, parece una recta y, entonces, el gradiente de la curva se representa por la pendiente de la línea de la pantalla.

Según Tall (1997) el concepto de límite implícito en el *zoom* es un procedimiento mejor que el explícito de la definición formal. La gráfica 8, que recoge el *zoom* de la recta tangente a la gráfica de la función y=tan(x) en x=0, muestra el resultado de este proceso.

El uso adecuado de las gráficas es la clave de que estas aporten luz sobre muchos conceptos, que hasta hace poco tiempo era impensable. Según Tall (1993), Schneider (1993) informa, que al intentar calcular las sumas de Riemmann bajo la curva $y=x^3$, algunos alumnos creían que el área de los rectángulos no se podía sumar, ya que se reducen segmentos y su área es cero.

Sierpinska (1984; 1987) describe los obstáculos conceptuales implícitos en los procesos de límite, entre ellos, que el límite es inalcanzable.

Según D. Tall (1997) los alumnos pueden aprender a discutir estos conceptos mediante magnificaciones y lo ejemplifica con el Teorema Fundamental del Cálculo aplicando la idea de que todo grafo continuo "se hace plano" mediante estiramientos horizontales. David Tall representa en un rectángulo de tamaño fijo una zona de la grafo manteniendo constante la escala del eje de ordenadas y haciendo estiramientos en el eje de abscisas (h 0), con DERIVE es una simpleza, y los alumnos ven que las áreas no son nulas. La figura 12 muestra el estiramiento de una zona de la gráfica representada en la figura 11, la zona está incluida en el rectángulo.

{Área} over h = {A(x+h)-A(x)} over h f(x)

FIGURA 11

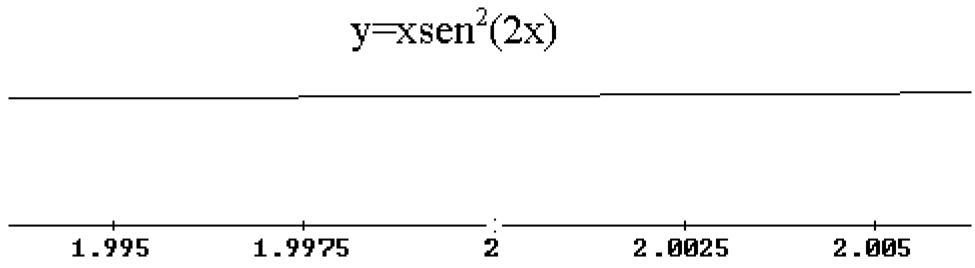


FIGURA 12

Estas representaciones no eliminan todos los problemas de comprensión y nuevamente surgen obstáculos cognitivos ligados al concepto de límite.

5. LOS GRÁFICOS COMO PRUEBAS

Teniendo en cuenta los fines de la demostración descritos por A. Bell (1972) -verificación, iluminación y sistematización- y el posterior desarrollo debido a M. de Villiers (1994), -verificación/convicción, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación- la pregunta de si ciertas representaciones gráficas se pueden considerar demostraciones sigue abierta. R. B. Nelsen (1993), tras exponer un resumen de 144 publicaciones de "pruebas sin palabras", deja abierta esta pregunta. Él ha inspirado la siguiente "demostración".

Enunciado: Dado un producto de dos números positivos, la suma de estos es mínima cuando ambos son iguales

Prueba: está implícita en la figura 13.

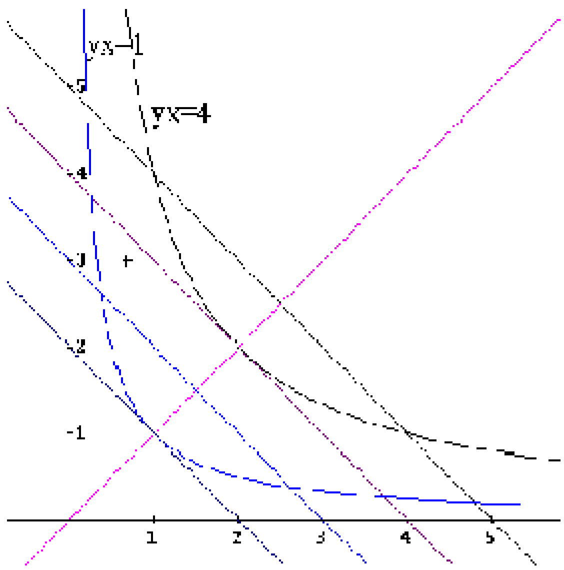


FIGURA 13

6. GRÁFICOS CONCEPTUALES

Lo mismo que las funciones pueden ser expresadas en un lenguaje gráfico, mediante su grafo cartesiano, los conceptos del análisis pueden expresarse en este lenguaje mediante el correspondiente gráfico cartesiano como un lenguaje de representación.

Es fácil imaginarse los gráficos cartesianos que expresen los conceptos de aproximación, límite, continuidad, derivabilidad, diferencial, tangente, asíntota, crecimiento, extremos, convexidad, t. de Bolzano, t. de Weierstrass, t. de Darboux, t. de singularidad, t. del valor medio, teorema fundamental del cálculo, ...

¿Es un lenguaje universal? ¿Que problemas surgirían al interpretar el lenguaje simbólico y viceversa? ¿Constituirían por sí solos una herramienta de transmisión de saberes? ¿Qué papel jugarían en la adquisición del conocimiento? ... Sólo son preguntas, pero quizás conviniera hacer alguna reflexión sobre ellas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1987): L'Évolution Récente de l'Enseignement des Mathematiques en France: Entre Principes et Réalité. *Actas de las VIII^{as} JAEM.* Salamanca

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990): *Funciones y Gráficas.* Síntesis, Madrid.

Azcárate, C., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996): *Cálculo diferencial e integral.* Síntesis, Madrid.

Boyer, C. (1986) Historia de las Matemáticas.Alianza. Madrid

Castro E. Y Castro, E. (1997): Representaciones y modelización. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori. Barcelona.

Cornu, B. (1983) : *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Grenoble: L´Université scientifique et Medical de Grenoble.

Duval, R. (1993): Graphics et équations, l'articulatios de deux registres, "Les representations graphics dans l'enseignement et la formation". *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle.* 1-3. Université de Caen, pp. 57-72. Caen.

Guzmán, M. (1996): *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Madrid: Ediciones Pirámide.

Janvier, C. (1982): Les representations graphiques. *Actas de las Primeras Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Institut de Ciènces de l'Educació. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.

Janvier, C. (1982): Les graphiques cartesians: des traductions aux chtoniques. "Les representations graphics dans l'enseignement et la formation". *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle.* 1-3. Université de Caen, pp. 17-37. Caen.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998): *Las Funciones en los Gráficos Cartesianos.* Síntesis. Madrid.

Lacasta, E. (1990): L'Interpétation des graphes des fontions par les élèves du secondaire. Mémoire de DEA. Universidad de Burdeos I. Burdeos.

N.C.T.M. (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* S.A.E.M. Thales. Sevilla.

Rico, L. (1998): *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Sístesis. Madrid.

Shell Centre (1990): El Lenguaje de Funciones y Gráficas. M.E.C. -Centro de Publicaciones- y Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. Bilbao.

Sierpinska, A (1985) Obstacles epistémologiques relatifs a la notión de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* Vol. 6, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1992): Theoretical perspectives for development of the function concept. In G. Harel & E. Dubinski (eds.) *The concept of functión: spects of Epistemology and Pedagogy,* MAA Notes 25, pp. 23-58. Whasington DC: MAA.

Tall, D. (1997): Funtions and Calculus. *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London.

Villiers, M. de (1990): “The role and function of proof in mathematics”. *Pythagoras, 24, 17-24.*