CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR SUS ESTRUCTURAS NUMÉRICA Y SEMÁNTICA GLOBAL

González Marí, J. L.
Departamento de Didáctica de la Matemática, de las CC.SS. y de las CC.EE. Universidad de Málaga

Resúmen

En los problemas del campo conceptual aditivo, además de los números naturales y enteros, aparece un tercer tipo de nociones numéricas que configuran el campo conceptual de los números naturales relativos. La consideración conjunta de la estructura numérica, haciendo intervenir los tres tipos de números y las operaciones aditivas correspondientes, y de la estructura semántica global, con las tres categorías ya conocidas de cambio, combinación y comparación, permite establecer una clasificación que es compatible con la estructura lógica de las tareas y que abre nuevas perspectivas en la investigación sobre resolución de problemas aditivos de enunciado verbal.

En este trabajo, además de discutir la complejidad de la categorización de tareas en un campo conceptual y exponer algunas reflexiones sobre los criterios generales más adecuados para ello, se exponen las clasificaciones de problemas aditivos que se deducen de la consideración de las dos estructuras mencionadas dentro del marco general propuesto.

Introducción

Estamos convencidos de que indagar en las tareas matemáticas es indagar en el conocimiento y en el pensamiento humanos. Hablar de tareas en el ámbito de la Educación Matemática es hablar de resolutores, de personas que tienen que interpretar, comprender y realizar dichas tareas. Por otra parte, al pensar en las tareas de un campo conceptual nos encontramos con numerosas variables, unas específicas, propias del contenido y del hecho educativo en matemáticas, y otras generales, que dependen de factores que tienen que ver con contextos no matemáticos y no educativos que afectan a la tarea o al resolutor o al entorno sociocultural en el que este se desenvuelve y en el que aquéllas se plantean y desarrollan. En último término, se podría decir que hablar de tareas de un campo conceptual o parcela concreta del pensamiento matemático es hablar de posibles manifestaciones del razonamiento y del conocimiento humanos, tanto a nivel individual como colectivo (conciencia compartida y existencia supraindividual o cultural (Popper, 1979; Davis & Hersh, 1988), de sus múltiples conexiones con otros conocimientos y de los niveles o grados que pueden presentar; algo, evidentemente, muy complejo. Hablar, en consecuencia, de categorizar las tareas de un campo conceptual es hablar de categorías de pensamiento y de criterios para clasificar las diferentes formas bajo las que se puede presentar un conocimiento, una destreza o una competencia matemática específica. Asímismo, podemos decir que hacer referencia a las características de las tareas de un campo conceptual es hacer referencia a las características del pensamiento matemático, tanto individual como colectivo, así como a la multiplicidad de formas y matices que puede adoptar a lo largo de su evolución.

Las consideraciones anteriores, matizables en numerosos aspectos, son un indicador de la complejidad y la relevancia del tema para la investigación en Educación Matemática. La <u>relevancia</u> se justifica en base a los argumentos esbozados en el párrafo anterior y que se condensan en la primera frase del mismo, es decir, indagar en las tareas es indagar en el conocimiento y en el pensamiento humanos, en su estructura, su funcionamiento y sus interpretaciones de la realidad. Resulta evidente, por tanto, la necesidad de indagar en esta dirección, a pesar de las dificultades, para que se produzca un salto cualitativo apreciable en la relevancia y validez de las investigaciones y en la aplicación práctica de los resultados. La <u>complejidad</u>, favorecida entre otros aspectos por la interdependencia entre tareas y entre campos conceptuales diversos, se pone de manifiesto ante las numerosas cuestiones que están aún pendientes de una respuesta clara, si es que la tienen, como por ejemplo: ¿Es posible obtener una categorización exhaustiva y minuciosa de las tareas de un campo conceptual?; ¿merece la pena dedicar esfuerzos a obtener categorizaciones de tal tipo?; ¿cómo pueden afectar dichas clasificaciones a las investigaciones en Educación Matemática?; ¿el conocimiento completo de las tareas de un campo conceptual, mejorará los resultados de la investigación y de la práctica docente?; ¿cuáles son los criterios de categorización más adecuados?; ¿se pueden trasladar los criterios de un campo a otro?. Desgraciadamente, queda aún mucho camino por recorrer hasta encontrar unos criterios sólidos y efectivos para la selección de tareas, de manera que esta no se haga de forma arbitraria o sin la perspectiva suficiente, o hasta conseguir rentabilizar el tiempo invertido en realizar una categorización minuciosa.

Con objeto de exponer brevemente nuestro punto de vista sobre algunas de las cuestiones planteadas en los párrafos anteriores y con el fin de poner de manifiesto la necesidad de complementar y fundamentar algunas investigaciones en unos principios generales y desde una perspectiva un poco más amplia, hemos elegido un camino que va de lo general a lo particular. Para ello comenzaremos por unos planteamientos generales que conducen a una reflexión sobre los criterios más adecuados para iniciar un

proceso que nos pueda llevar a establecer una categorización efectiva y manejable de las tareas de un campo conceptual. De esta reflexión se sigue una propuesta teórica o marco de referencia, que no pretende ser exhaustivo ni acabado, y su aplicación al caso particular del campo conceptual aditivo. Se concluye la exposición con algunas observaciones, a la luz de las consideraciones anteriores, sobre las clasificaciones de problemas aditivos de enunciado verbal. La propuesta que se realiza, centrada en las diferentes estructuras que pueden intervenir y en los distintos enfoques bajo los que se puede observar una tarea, está basada en las nociones de análisis didáctico y campo conceptual, en algunas consideraciones sobre los fundamentos de la Educación Matemática (González,1995) y en los trabajos de investigación en los que venimos colaborando en las Universidades de Granada y Málaga.
Por último, hemos de señalar que los planteamientos generales mencionados serán particularizados, en la medida de lo posible, al caso del campo conceptual aditivo, con la intención de resaltar también la gran diversidad de los tipos de tareas de dicho campo, de las que los problemas de enunciado verbal constituyen tan sólo una pequeña parte. Igualmente, dedicaremos una especial atención al caso de la estructura numérica de los problemas aditivos y a la clasificación que se obtiene al introducir la noción de número natural relativo (González, pp. 195-232) como concepto numérico que interviene, junto a los de número natural y número entero, en el aprendizaje y desarrollo de las nociones propias del campo conceptual aditivo en sus niveles más elementales.

Las nociones de análisis didáctico y de estructura didáctica de un conocimiento matemático

Consideramos que el conocimiento matemático (González, 1995, pp. 160-162):

- es el resultado de la actividad intelectual del ser humano;
- es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, párcial e incompleto que tiene que ver con ideas u objetos conceptuales, independientes de su simbolización o representación, a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias, con una existencia ficticia o convencional que comparte dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida;
- las diferentes corrientes y posiciones epistemológicas relevantes sobre el conocimiento matemático no son más que enfoques parciales, a veces extremos, que atienden exclusiva o prioritariamente a alguno de los aspectos mencionados en el apartado anterior. Todas, sin excepción, tratan

de describir una parte de la verdadera naturaleza y modo de existencia del conocimiento matemático;

- la creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (físicas y fisiológicas, entre otras), las características comunes del medio en el que se desenvuelven los sujetos (físicas y sociales, entre otras) y las características comunes de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros aspectos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

Como consecuencia de las consideraciones anteriores se sigue:

1.- La intervención de los tres factores, mente, medio e interacción entre ambos, se produce en todas y cada una de las interpretaciones sobre la naturaleza, modo de existencia y formas de producción del conocimiento matemático;

2.- El análisis sobre la naturaleza y el modo de existencia del conocimiento matemático, para ser completo desde el punto de vista didáctico, debe tener en cuenta, en relación con dicho conocimiento:

- las características de la mente humana: instrumentos y estructuras conceptuales; funciones cognitivas; formas de representación del conocimiento, entre otras;
- las características del medio: fenómenos, cuestiones y problemas que constituyen el campo de actuación; características de los factores lingüísticos y socioculturales que afectan a la expresión y comunicación del conocimiento, entre otras;
- las características de la interacción: necesidades individuales, socioculturales y científicas; formas de utilización del conocimiento ya existente, entre otras.

Por otra parte, en la investigación en Educación Matemática se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente. De entre ellas, podemos destacar en una primera aproximación:

- la que atiende a los aspectos **psicológicos** de la Educación Matemática, especialmente a los **aprendizajes** en matemáticas;
- la que se ocupa de los aspectos **pedagógicos y curriculares** generales de la **enseñanza** de la matemática;
- la que se ocupa de los procesos de **enseñanza-aprendizaje** propios del hecho educativo real, en los que interactúan diversos factores de los dos apartados anteriores;

Pero, con ser importante, la integración de diversos aspectos psicológicos y pedagógicos como una simple adición de datos obtenidos desde un enfoque multidisciplinar, no es suficiente. Por el contrario, se constata la necesidad de una elaboración compleja en la que se han de relacionar entre sí las informaciones procedentes de las parcelas mencionadas haciendo intervenir otros elementos básicos, como es el caso evidente de la **Matemática**, su **Epistemología** y su **Historia** o de la **Fenomenología** del conocimiento matemático.

Por otra parte, los análisis epistemológicos de la Matemática en el campo educativo deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés primordial no debe estar en desmenuzar el conocimiento matemático hasta sus últimas consecuencias, sin más, sino en obtener información útil y relevante para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Para ello, los estudios epistemológicos se deben hacer pensando en el alumno, en su pensamiento, en sus necesidades y capacidades, en el aula, en las actividades usuales, en los métodos y técnicas que se utilizan cotidianamente, etc.. Y es conjugando la información obtenida bajo este enfoque peculiar y específico, con los planteamientos actuales sobre la naturaleza y existencia de los objetos y teorías matemáticas así como sobre otros factores que afectan al hecho educativo real, como se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia única: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación, no sólo con miras a la simple transmisión del conocimiento matemático sino, lo que es más importante, para que sea posible el perfeccionamiento del conocimiento existente y sobre todo, la creación de nuevos conocimientos*.

Desde este punto de vista la Psicología de la Educación Matemática, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos por parte del sujeto individual, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento matemático y con las determinaciones curriculares que conforman los procesos educativos.

Por otra parte, la Educación Matemática en su vertiente pedagógica, presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas, culturales y económicas, que vienen a mejorar y completar los diseños y desarrollos curriculares. No hay más que recordar, por ejemplo, que todos los elementos curriculares deben depender básicamente de consideraciones psicológicas acerca del individuo que se pretende educar y epistemológicas acerca de los conocimientos que van a constituir el contenido de dicha educación (Gimeno y Pérez, 1983).

Desde el punto de vista de la investigación nos encontramos, por tanto, ante la necesidad de *la integración de los aspectos mencionados (Epistemología, Fenomenología, Cognición y Enseñanza y Currículum)* *en un todo coherente y específico de la Didáctica de la Matemática* dentro de una concepción sistémica específica. La necesidad mencionada puede venir, en nuestra opinión, por varias vías: bien por causa de las características especiales de los conocimientos implicados, por la existencia de un cierto estancamiento en las investigaciones o por ambos motivos combinados; también puede producirse por la situación avanzada de los conocimientos en cuanto a cantidad y calidad de los resultados obtenidos, como ocurre con los casos suficientemente conocidos de las funciones (Harel y Dubinsky, 1992) y de los números racionales (Carpenter, Fennema y Romberg, 1993).

Pero la necesidad de integración no parte, únicamente, del desarrollo de los procesos de investigación; la propia naturaleza compleja de los fenómenos en estudio demanda, igualmente, una metodología integradora que resalte especialmente las múltiples relaciones que indudablemente existen en la Educación Matemática. Las relaciones entre campos diversos, en el marco de una intencionalidad didáctica, e influídos por las características socioculturales del entorno, no sólo aporta matices específicos en términos de nuevas interpretaciones a la información aislada de cada uno de dichos campos, que sigue teniendo validez, sino que permite establecer, además, una estructura propia como conjunto de datos organizados; una estructura que se convierte en un nuevo objeto básico de estudio mediante una metodología metaanalítica y relacional que denominamos "análisis didáctico". Esta metodología, que delimitamos en los párrafos que siguen, puede constituír el instrumento que cohesione los diversos factores y dar respuestas específicas a determinadas necesidades de la investigación en este campo. Veamos en que consiste.

En el tipo de estudios denominado *investigación secundaria o de síntesis* se han venido utilizando dos metodologías diferentes: la revisión integrativa tradicional y la revisión cuantitativa también llamada meta-análisis[1]. Recientemente, debido a la necesidad que se detecta en numerosas investigaciones cualitativas de sintetizar e integrar un número grande de estudios, ha surgido una modalidad de síntesis denominada revisión de bibliografía multivocal o, abreviadamente, **revisión multivocal** (Ogawa y Malen, 1991). Se trata de un procedimiento de síntesis cualitativa "*..dirigido a indagar un fenómeno complejo de interés en el que no se pueden manipular los eventos y del que se tienen múltiples fuentes de datos eminentemente cualitativos, confiando en obtener un retrato detallado del fenómeno que se estudia*". (Fernández Cano, 1995, p. 175).

La revisión multivocal de un tópico se basa en los siguientes criterios, que son similares a los que se proponen para el estudio de casos (op. citada, p.

[1]Para una confrontación de ambas metodologías, ver Fernández Cano, A. (1995, págs. 165 y sgtes.).

176):

1).- Una clara definición del tópico propuesto a indagar a través de:

- consultar múltiples fuentes;
- mantener cadenas de evidencia entre los registros de las fuentes consultadas y las inferencias extraídas;
- incorporar formalmente las reacciones de los informantes a la definición conceptual establecida.

2).- Valorar la fuerza relativa e individual de cada dato utilizando alguno de los siguientes criterios:

- posición y certitud de la fuente (validez externa);
- claridad, detalle, consistencia y factibilidad del contenido (validez interna);
- capacidad para corroborar la información contenida en cada documento con información adquirida de otras fuentes.

3).- Nosotros añadiremos los siguientes criterios procedentes del meta-análisis:

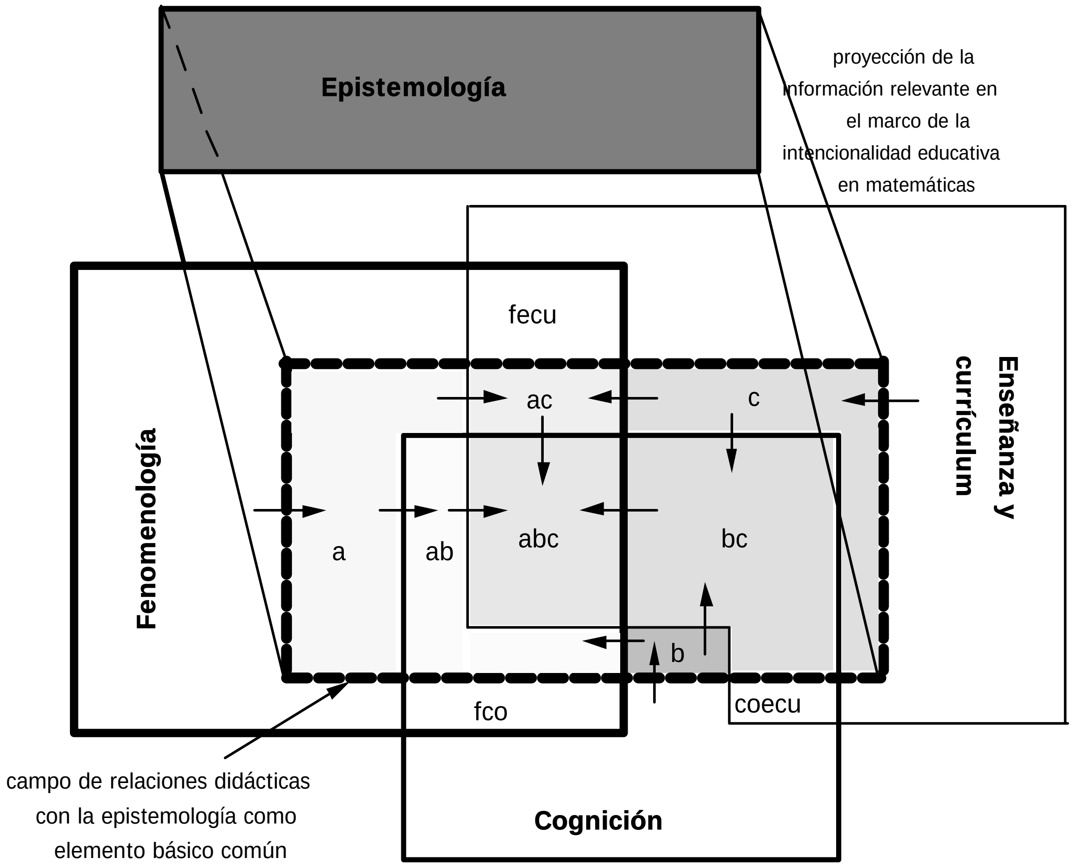
- revisar el mayor número posible de estudios;
- localizar los estudios a través de búsquedas objetivas y replicables;
- no excluir inicialmente estudios en base a su calidad;
- diferenciar y clasificar cada estudio de acuerdo con el grado de incidencia de sus resultados sobre el problema de investigación.

Se configura así un método general, que podemos denominar **meta-análisis cualitativo** en torno al tópico en estudio. La finalidad del meta-análisis cualitativo, como la de cualquier meta-análisis, es:*" la formulación de teorías que expliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones"* (Bisquerra, 1989, pp. 247 - 252); la diferencia en este caso radica en que se trata de una metodología interpretativa. En consecuencia:

Denominamos ***análisis didáctico*** de un tópico o contenido específico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a cuatro áreas básicas de investigación en Educación Matemática: Historia y Epistemología, Aprendizaje y cognición, Fenomenología y, Enseñanza y estudios curriculares (González, 1995, p. 54).

Como consecuencia del proceso integrador descrito se establecen prioridades de investigación, se formulan teorías, se realizan estudios empíricos y comprobaciones experimentales, en su caso, y se deducen consecuencias para futuros estudios teóricos y empíricos. El análisis didáctico procesa, analiza y sintetiza información procedente de diferentes campos interrelacionados entre sí por su objeto de estudio. La técnica utilizada tiene en cuenta la complejidad del campo así como la pluralidad de aproximaciones que se encuentran en la literatura científica al uso y en los resultados de investigación contrastados por la comunidad.

El enfoque sistémico que proponemos trasciende los objetos y métodos de los estudio específicos de cada una de las áreas, consideradas independientemente, de tal manera que la información procedente de las cuatro áreas básicas queda matizada, y no sólo completada, por un conocimiento nuevo, cuya naturaleza y características hacen referencia a un objeto de estudio que creemos que es específico de la Didáctica de la Matemática y que podemos denominar “estructura didáctica de un conocimiento matemático”. El esquema siguiente ilustra esta idea que se explica con detalle más adelante.



a : relaciones entre la Epistemología y la Fenomenología
b : relaciones entre la Epistemología y la Cognición
c : relaciones entre la Epistemología y la Enseñanza y el currículum
ab, ac y bc : relaciones entre tres componentes
abc : relaciones entre las cuatro componentes
las flechas indican el flujo de menor a mayor información sobre la
estructura didáctica de un conocimiento matemático

Se trata de un sistema de información organizada constituído por:

- un conjunto de datos procedentes de cuatro **fuentes** básicas de información científica "primaria" sobre el conocimiento matemático en cuestión, obtenidos mediante la aplicación de los métodos propios de las áreas correspondientes: Epistemología, Fenomenología, Cognición y Enseñanza y Currículum.
- una **red de relaciones** entre los conocimientos anteriores bajo la presencia permanente, como elemento común, de **consideraciones epistemológicas sobre el conocimiento matemático en el marco de una intencionalidad didáctica y en un medio sociocultural determinado**; el núcleo de esta red de relaciones lo constituye el campo de interrelación de las cuatro fuentes básicas;
- un conjunto de **conocimientos de carácter didáctico** obtenidos sobre los diferentes campos de la red de relaciones, mediante la aplicación del

Análisis Didáctico como procedimiento metodológico integrador.

La noción de campo conceptual y su relación con el análisis didáctico

La noción de campo conceptual se refiere, originalmente (Vergnaud, 1993, pp. 97 y sgts.; antecedentes en: 1982, 1983 y 1988), a un *conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar un conjunto de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos estrechamente interconectados*. Se trata de una noción que surge por el interés de extender los estudios generales de Piaget sobre la psicogénesis de los conocimientos al problema de la adquisición y el desarrollo de conocimientos y destrezas específicas, en particular de conocimientos y destrezas matemáticas. Según el autor, esta noción resulta necesaria por los siguientes motivos:

- es difícil estudiar separadamente la adquisición de conceptos interconectados, dependientes entre sí desde el punto de vista matemático y que aparecen simultáneamente en los problemas más elementales;
- desde el punto de vista del desarrollo y de la evolución de los conocimientos en un largo período de tiempo, es conveniente establecer dominios amplios de conocimientos relacionados entre sí, que cubran una amplia variedad de situaciones y que admitan diferentes niveles de análisis;
- en el dominio de una misma clase de problemas se mezclan procedimientos, concepciones y representaciones simbólicas diferentes que hacen posible la existencia de distintos niveles o grados de dominio sobre subclases de problemas y que permiten estudiar la evolución de los conocimientos.

Posteriormente, la noción original de campo conceptual se amplía con una tercera componente en el modelo presentado por Castro (1994) y que se detalla en Rico y Castro (1995, pp. 167). Dicho modelo, establecido para estructurar la línea de investigación denominada *Pensamiento Numérico*, contempla tres elementos fundamentales:

a).- unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
b).- unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
c).- un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Las relaciones de los dos planteamientos, entre sí y con las consideraciones realizadas en el apartado anterior, son evidentes:

1.- La línea Pensamiento Numérico amplía las consideraciones de Vergnaud. Hablar de Pensamiento Numérico es hablar, por tanto, de un campo conceptual numérico (en el sentido ampliado) con la consideración añadida de los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares involucrados en la aplicación, a través de unos *modos de uso y unas funciones cognitivas*, de

un *conjunto de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos* a un *conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.
2.- El análisis didáctico contempla, igualmente, las cuatro componentes anteriores, matizando sus conexiones y resaltando la integración de los conocimientos en un todo coherente.

<u>Algunos criterios para categorizar las tareas de un campo conceptual: Enfoques, factores y estructuras</u>
El análisis y la categorización de las tareas que tienen que ver con un campo conceptual, constituye un aspecto de vital importancia para diseñar y desarrollar investigaciones que aborden directamente los problemas cotidianos y aporten soluciones inmediatamente aplicables a la práctica educativa.
Por otra parte, clarificar estas cuestiones básicas es una tarea con frecuencia necesaria y prioritaria a cualquier otra consideración. Los problemas de la práctica se sitúan en un entramado complejo en el que se pueden distinguir varios factores relacionados entre sí que afectan al hecho educativo y que requieren de un exámen detallado del que a veces se deducen consecuencias que pueden modificar profundamente el contenido y la orientación de una investigación. Desde este punto de vista, las tareas matemáticas en el ámbito educativo también participan de ese entramado complejo, se encuentran afectadas por los mismos factores y deben ser consideradas como elementos integrados en la concepción sistémica esbozada en los apartados anteriores.
En consecuencia, para estructurar las tareas de un campo conceptual proponemos los siguientes criterios y categorías:
- cinco <u>factores</u> y un número por determinar (al menos cinco) de <u>estructuras</u> asociadas a dichos factores;
- cuatro <u>enfoques</u> diferentes bajo los que se puede observar una tarea.

Recordemos brevemente y en primer lugar cuáles son los principales **<u>factores</u>**.
- las características **epistemológicas** y **fenomenológicas** del conocimiento matemático, es decir, el conocimiento en sí mismo, sus propiedades, naturaleza y modo de existencia (una especie de realidad mediata), y el conocimiento contextualizado en una serie de fenómenos y situaciones (campo de actuación y realidad inmediata constituída por fenómenos, cuestiones, problemas y situaciones) que le dan significado y que forman parte del medio en el que se desenvuelve el sujeto.
- la **cognición**, las características cognitivas del sujeto individual que

hacen referencia al aprendizaje y al desarrollo cognitivo. Se trata de aquéllas características funcionales y estructurales de la cognición humana que permiten al sujeto, entre otros aspectos, interpretar y dar sentido a las realidades, utilizar y construir instrumentos y comportamientos, organizar, manipular y responder a las situaciones y fenómenos del entorno o, desde un punto de vista más general, adquirir, construir, representar y estructurar el conocimiento para su utilización en diversos ámbitos.

- las condiciones institucionales en las que entran en juego los tres factores anteriores; nos referimos, en concreto, al medio escolar y a todo aquéllo que conforma el entorno educativo formal, es decir, el **Currículum** y todo lo que determina los momentos preactivos e interactivos de la Educación Matemática, o sea, la **Enseñanza**.
- los cuatro factores mencionados se encuentran dentro de un marco más general que condiciona todas las actuaciones humanas; nos referimos al contexto **sociocultural** y al medio social en el que se encuentra inmersa la institución educativa.

De los cinco factores, a cuál más importante en Educación Matemática, tendremos en cuenta, especialmente, los cuatro primeros, sin perder de vista la indudable influencia que el entorno sociocultural tiene sobre algunos aspectos de los fenómenos, problemas y situaciones, sobre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo y sobre las determinaciones curriculares y el hecho educativo en el aula.

<u>enfoques</u>

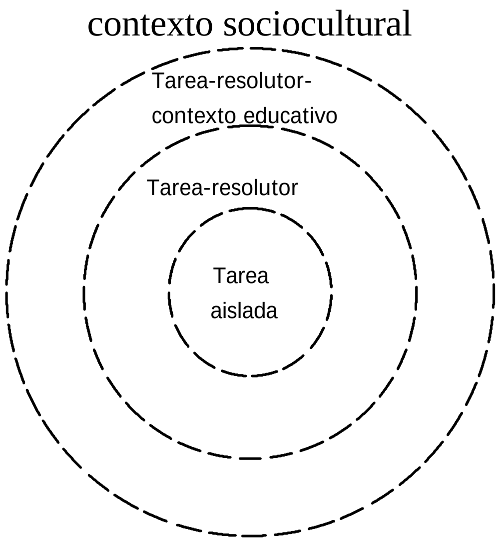
Una tarea o situación didáctica en matemáticas no es sólo un contenido concreto, con tales o cuales características y expresado de tal o cual manera, y unas preguntas a las que el alumno debe responder. Por el contrario, a estas y otras características intrínsecas de la propia tarea, observada aisladamente, se deben añadir otras consideraciones que atienden al resolutor, al contexto educativo formal en el que se propone y desarrolla la tarea y al marco sociocultural en el que se encuentran inmersos los tres elementos anteriores, es decir, la propia tarea, el resolutor y la institución educativa.

Cada tarea de un campo conceptual numérico se puede observar, al menos, desde cuatro puntos de vista, estrechamente relacionados y encadenados entre sí en un esquema que contempla el aumento gradual y concéntrico de la perspectiva. Estos enfoques son los siguientes:

a).- <u>Tarea aislada</u>. Características de los conocimientos y relaciones que intervienen;

b).- <u>Tarea-resolutor</u>. Características de la tarea en relación con las competencias y funciones cognitivas asociadas a la misma y que tendría que poner en juego un posible resolutor o resolutores humanos para aprender

los conocimientos y relaciones que intervienen y realizar con éxito la tarea;
c).- Tarea-resolutor-contexto educativo. Características de la tarea en relación con su situación en la planificación y el desarrollo del currículum que busca educar el pensamiento matemático de un alumno-resolutor, con unas características cognitivas concretas, a través de los conocimientos y relaciones que intervienen en la misma;



d).- Tarea-resolutor-contexto educativo-contexto sociocultural. Características de la tarea que tienen que ver con las claves del entorno sociocultural que puedan afectar a los enfoques anteriores. Se trata del enfoque más general y, por tanto, más complejo de todos.
En cada enfoque se puede observar la dependencia de los anteriores. Los factores relevantes en cada uno de ellos son los siguientes:
a).- (tarea aislada) epistemológico y fenomenológico;
b).- (tarea - resolutor) epistemológico, fenomenológico y cognitivo;
c).- (tarea - resolutor - contexto educativo) epistemológico, fenomenológico, cognitivo y curricular;
d).- (tarea - resolutor - contexto educativo - contexto sociocultural) los cinco factores.
estructuras
Cada factor se identifica y se diferencia de los demás por una serie de estructuras específicas asociadas (cinco al menos, una por cada factor), cuya particularización a cada caso define las características fundamentales de la tarea. Podemos hablar, en consecuencia, de estructura(s) matemática(s) y epistemológica(s), fenomenológica(s), de competencias cognitivas, curricular(es) y sociocultural(es) de una tarea. Estas estructuras asociadas suponen ya un primer escalón de concrección hacia el establecimiento de un sistema de categorías basado en los cinco factores y en los cuatro enfoques

tratados. A modo de ejemplo, veamos a continuación la aplicación parcial de estos esquemas al caso del campo conceptual aditivo.

Tareas del campo conceptual aditivo
Factores y estructuras
Siendo conscientes de la necesidad de continuar en esta dirección y de la existencia de numerosas lagunas, unas por razones obvias y otras debidas a las limitaciones del trabajo, se exponen a continuación algunas de las estructuras que pueden incidir en la categorización de las tareas del campo conceptual aditivo:

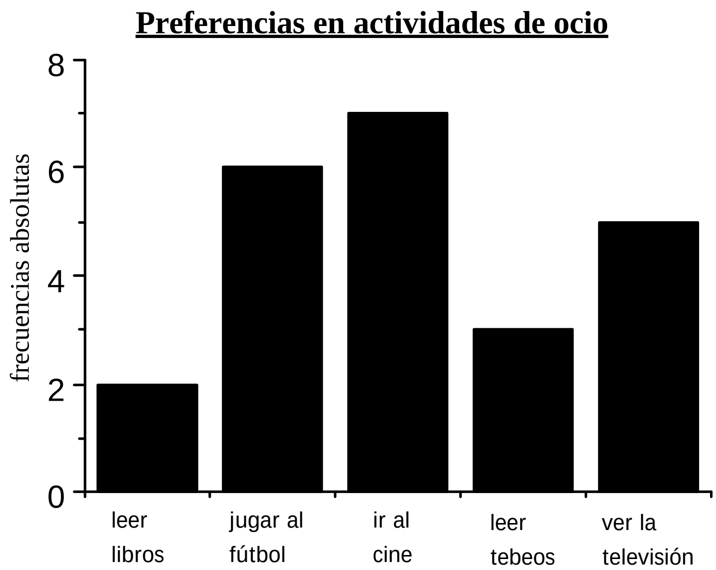
- Epistemología: - Estructura **numérica** (tipo de números)
  Matemáticas - Estructura **aritmética** (operaciones)
  - Estructura **lógica** (proposiciones, relaciones, razo namiento, etc.)
- Fenomenología: - Estructuras **fenomenológicas** (por determinar) (relacionadas con la fenomenología matemática, de aplicación concreta, contexto, etc.)
- Cognición: - Estructura **semántica**
  Representación - Estructura **sintáctica**
  - Estructuras de **competencias cognitivas** (estrategias, estilos, esquemas, comprensión, tra ducción..) (por determinar)
- Currículum: - Estructura **metodológica** (ejercicio, problema,
  Enseñanza juego, manipulación, investigación, etc.)
  - Estructuras **curriculares** (por determinar) (relacionadas con los niveles, contenidos, evaluación)

La diversidad de tareas en el campo conceptual aditivo
Veamos algunos ejemplos en los que interviene la noción de suma de dos números naturales de una cifra (2 + 3 = 5) y/o las relaciones asociadas con ella. Se han fijado, por tanto, las categorías correspondientes a las estructuras numérica (números naturales) y aritmética (suma). El resto de estructuras y algunas de sus posibles categorías se pueden examinar y de- limitar, al menos de forma general, en la mayoría de las tareas.

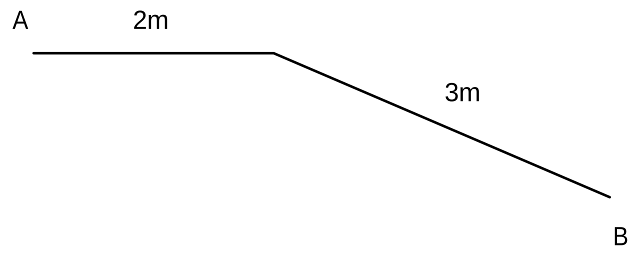
1).- Completa las siguientes igualdades:
5 = 2 + 3 = 4 + = + 1 = 3 + = 5 +

2).- Un ascensor está en el segundo piso y se dirige al quinto. ¿Cuántos pisos tiene que subir?.
3).- Después de un trabajo práctico de Estadística Descriptiva elemental realizado por los propios alumnos en la clase y a propósito de la lectura e interpretación de los datos: ¿Cuántos alumnos de la clase prefieren leer en

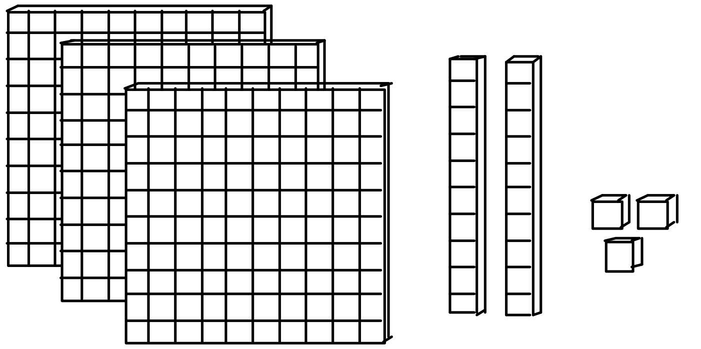
sus horas libres?.

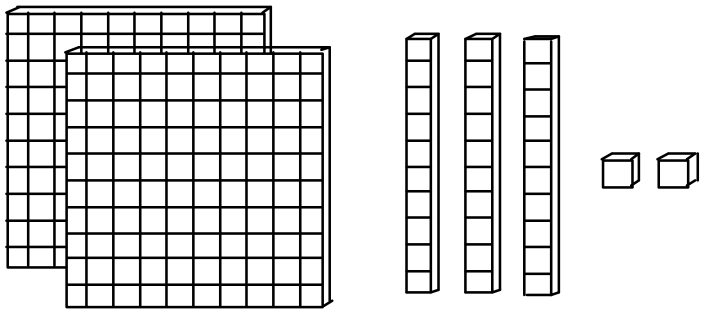


4).- Sobre un trayecto realizado y medido en el patio del Colegio a propósito de un juego: ¿Cuántos metros tiene que andar Pedro para ir desde A hasta B?.



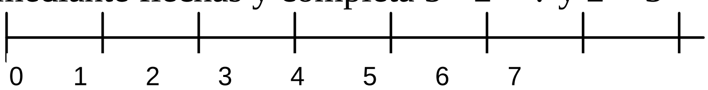
5).- En una actividad manipulativa con los bloques multibase: Efectúa la suma de las dos cantidades siguientes y escribe la operación en tu cuaderno:



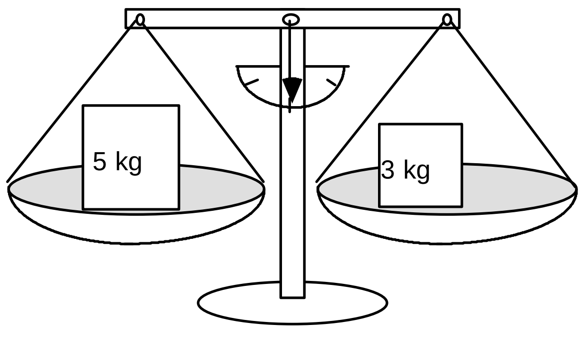


6).- En 3 decenas y 24 unidades, ¿cuántas unidades hay?.

7).- Dibuja mediante flechas y completa 5 - 2 = ? y 2 + 3 = ?

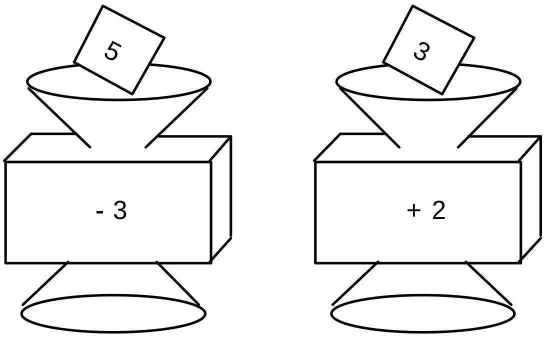


8).- En una actividad realizada en clase con la balanza: ¿Qué ocurre si se coloca un peso de 5 kg en un platillo y uno de 3 kg en el otro?.¿Qué habría que hacer para que en los dos platillos haya el mismo peso?. Prueba con diferentes pesas.

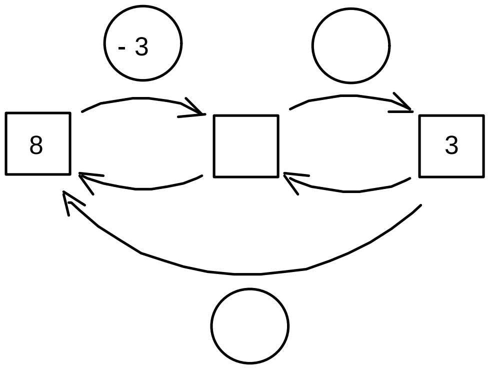


9).- Completa: 2 + 3 = 3 + __ ; 2 + (2 + __) = __ = (2 + __) + 1

10).- ¿Cuál será la salida de estas máquinas?:



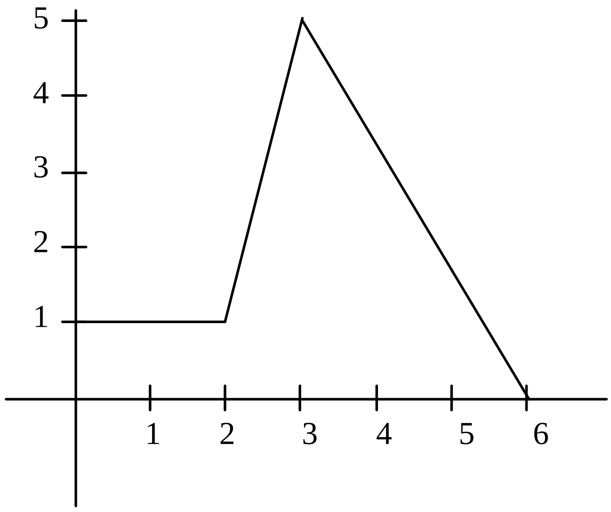
11).- Completa:



12).- A propósito de una actividad práctica con monedas: De estos artículos (varios con precios entre 300 y 700 pesetas) ¿Cuáles puedes comprar si tienes 3 monedas de 100 pesetas y una moneda de 200 pesetas?.
13).- 3 metros y 200 centímetros, ¿cuántos metros son?.
14).- En una actividad de repartir objetos en grupo: Reparte 5 canicas entre tú y tú compañero de todas las formas posibles anotando los resultados en el cuaderno:

5 < 5 < 5 < 5 < . . .

15).- Sea f(t) la función cuya gráfica es la de la figura.

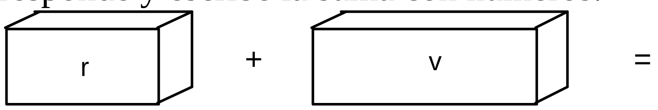


Sea la función definida en R^+:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Calcula **F(3)**.

16).- En una actividad individual con regletas de Cuisenaire: Encuentra la regleta que corresponde y escribe la suma con números:



17).- Razonamiento individual (no observable) de un alumno jugando al parchis (en clase): tengo la ficha en el número 2 y me sale un tres . . cuento 3 o salto al . .

18).- Realiza las siguientes sumas: 2 + 3 =

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{+\ \ 3} \end{array}$$

19).- Inventa un problema que se resuelva haciendo 2 + 3 = 5.

20).- Esta mañana Juan tenía 3 canicas. Su madre le regaló 2 canicas más al mediodía. ¿Cuántas canicas tiene Juan?.

21).- Trabajando con la calculadora: ¿Qué saldrá en la pantalla cuando teclees: 2 + 3 = ?. Escribe primero lo que crees que saldrá y compruébalo luego en tu calculadora.

22).- Actividad de investigación: En la trama cuadrada dibuja seis figuras distintas que tengan de área 5 y que estén formadas por dos triángulos de áreas 2 y 3. ¿Puede haber más?.

23).- Razonamiento individual a propósito de un partido de baloncesto en el patio del colegio: . . hasta ahora he encestado una canasta de 2 puntos y acabo de hacer un triple . . en total he hecho . .

24).- Completa: 2 , __ , 8 , 11 , 14
9 , 7 , 5 , __ , __

A la vista de esta pequeña muestra de tareas, ¿habría que añadir algún enfoque, factor o estructura al esquema propuesto?; ¿es posible delimitar todas las tareas mediante las coordenadas propuestas?; ¿son mutuamente excluyentes las categorías que se pueden deducir del esquema?; etc.

<u>Algunas consideraciones sobre los estudios y clasificaciones de los problemas aditivos de enunciado verbal</u>

Los problemas aditivos de enunciado verbal constituyen, como parece evidente, una parte de las tareas del campo conceptual aditivo. Según el modelo que estamos manejando los problemas corresponden a una de las categorías de una de las estructuras curriculares, en particular la que hemos denominado “metodológica”, si bien con una cierta relación con las estructuras de competencias cognitivas. En lo que sigue, centraremos la exposición en este dominio particular comenzando por las cuestiones más relevantes sobre dos enfoques teóricos básicos: las consideraciones de Vergnaud sobre estados y transformaciones y campos conceptuales, y los trabajos relacionados con las teorías cognitivas del procesamiento de la información y con la estructura semántica de los enunciados de los problemas[1]. A parir de estas consideraciones, entre otras, hemos realizado una investigación que pone de manifiesto la necesidad de considerar un tercer tipo de nociones numéricas en el campo aditivo, junto a las de número natural y número entero, al que hemos denominado "número natural relativo" (González, 1995). La introducción de estos números conduce, como veremos posteriormente, a una nueva distribución del campo aditivo y a una nueva clasificación lógico-semántica de los problemas aditivos de enunciado verbal; clasificación que, según nuestro modelo, está basada en las estructuras numérica y semántica de los problemas.

Los trabajos de Vergnaud y Durand (1976)[2] y de Vergnaud (1981[3] y 1982[4]), continuados posteriormente por Conne (1985), encuadran una parte del aprendizaje y el desarrollo cognitivo numérico en el ámbito de la resolución de problemas de aritmética elemental y dentro de lo que se conoce como 'campo conceptual aditivo'. A través de los conceptos de relación y transformación y teniendo en cuenta la dualidad 'estado-transformación', se analizan los tipos de problemas aditivos y se obtienen evidencias empíricas sobre la diversidad y la amplitud de respuestas de los estudiantes, sobre las dificultades que tienen y errores que cometen.

Aunque los estudios no son exhaustivos y resultan incompletos, pretenden aportar *"un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar"* (Vergnaud y Durand, pp.128). Las cuatro ideas básicas que utilizan los autores son: la inadecuación de la noción de ley de composición interna para caracterizar las relaciones numéricas que aparecen en este tipo de tareas; la necesidad de considerar un campo más amplio para el estudio de las relaciones aditivas; la existencia de dos tipos diferentes de representaciones numéricas bajo la denominación de "estados y operadores"; la distinción entre "cálculo numérico" y "cálculo relacional" como tipos diferentes que responden a características también diferentes; y la existencia de cinco grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: composición de dos medidas, transformación de una medida en otra,

---

[1]Extraído de González, J. L., 1995, págs. 119-128.

[2]*Structures additives et complexité psychogénétique*. Revue Francaise de Pedagogie, nº 36, pp. 28-43. Hay traducción al castellano en Coll, C. (1983). En las referencias que siguen utilizaremos la versión castellana de este trabajo.

[3]L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang. París.

[4]En Carpenter, T. P.; Moser, J. M. y Romberg, T. (eds.) (obra citada).

composición de transformaciones de medidas, transformación de un estado relativo y composición de dos estados relativos.

A partir de las consideraciones anteriores, los autores realizan diversos estudios experimentales sobre problemas de transformación simple y de composición de transformaciones que proporcionan resultados dispares y difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone[1]. Dichos resultados, de los que lógicamente se concluye que *"la aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños (..) e incluso por los adultos"* (Vergnaud y Durand, pp. 124-125), ponen de manifiesto la complejidad de las relaciones que intervienen y dejan abierta la posibilidad de que la categorización establecida no sea la más idónea y que la división entre estados y transformaciones deba ser revisada desde diferentes puntos de vista y, en particular, desde el enfoque epistemológico.

Buena muestra de la necesidad de un replanteamiento teórico de los estudios consultados son los siguientes hechos y consideraciones:

- Con respecto a los modelos de representación, Conne menciona explícitamente la distorsión que se produce en el orden entre dos pérdidas[2] con respecto al orden en el conjunto de los números enteros tomado como modelo para las transformaciones (op. citada, pág. 284).
- La consideración de las transformaciones en un sentido como positivas y en el sentido contrario como negativas no obedece a un criterio uniforme, lo que deja abierta la posibilidad a múltiples confusiones y resultados dispares. Nuestra posición es que dicha asignación es arbitraria (subir-bajar, entrar-salir, etc.), a diferencia de lo que ocurre en los casos de aplicación específica de los números enteros (temperaturas, saldos bancarios, etc.), en los que tal asignación está perfectamente delimitada como consecuencia de la estructura de orden total.
- La propia distinción entre estados y transformaciones o entre número como estado y número como operador, parece que se refiere a dos manifestaciones o papeles diferentes del mismo concepto. Nuestra posición es que existen diferencias más profundas de carácter epistemológico entre dichas acepciones que aconsejan la conveniencia de un análisis más fino, en el que se baraje la hipótesis de la existencia de dos conceptos diferentes que den lugar a estructuras numéricas también diferentes.
- La distinción que se establece entre cálculo numérico y cálculo relacio-

[1]Se han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico.

[2]En un juego, una pérdida de 7 es una pérdida "mayor" que una pérdida de 5, lo que supone una inversión con respecto al orden de los números enteros.

nal, sometidos a reglas distintas según los casos, pone de manifiesto la posibilidad de que se estén mezclando conceptos numéricos de diferente naturaleza, en vista de que *"sobre la misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionales distintos que están muy lejos de ser equivalentes entre sí."* (Vergnaud y Durand, p. 125).

- La necesidad de utilizar tres signos de adición para representar cálculos numéricos de diferente naturaleza (Verganud, 1981, p. 134), plantea serios problemas de legitimidad en la aplicación del conocimiento matemático formal y, por tanto, de compatibilidad entre los conocimientos matemáticos elementales y la aplicación de los mismos en contextos diversos. Se producen desajustes importantes entre las definiciones de las operaciones aritméticas usuales como leyes de composición interna y las aplicaciones concretas, que funcionan en realidad como leyes de composición externa. Así lo ponen de manifiesto cuando afirman: *"El estudio de los problemas de aritmética elemental pone en evidencia otras muchas dificultades que manifiestan la insuficiencia, si no inadecuación, de la noción de ley interna para caracterizar ciertas relaciones numéricas."* (Vergnaud y Durand, p. 106).

De todo ello, resulta dudoso que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros (o en terminología francesa, de los números "relativos") sea, por un lado, un buen modelo para abarcar toda la aritmética de "transformaciones" y, a la vez, un modelo único bajo el que se puedan tratar de manera uniforme todas las situaciones-problema que se consideran en los estudios.

Por otra parte, Bell (1980) expone los resultados de una investigación realizada para poner de manifiesto como influyen diferentes dominios de aplicación de la composición aditiva de números sobre la resolución de problemas aditivos. De sus planteamientos y conclusiones, destacamos los siguientes:

- En las primeras etapas, la interpretación de las operaciones de adición y sustracción no incluye la verdadera composición aditiva. Los niños no ven las operaciones como leyes de composición binarias, sino que distinguen un elemento del otro, el cual actúa como operador aditivo sobre el primero (utilizando la estrategia conocida como "count on") (pp. 114 y 120).
- Aunque el trabajo con números dirigidos proporciona experiencias sobre el modo de combinación de tales números, se observa sorprendentemente que no son integrados en un sistema numérico (p. 121). Esto nos reafirma en nuestra hipótesis de que un dominio sobre los números naturales relativos no supone la realización correcta de tareas equivalentes con números enteros.

Bell sugiere que el estudio de estos problemas puede necesitar de un sim-

bolismo particular diferente de las notaciones matemáticas stándards (p. 141).
En relación con la **estructura semántica** de los problemas aditivos elementales de enunciado verbal se encuentran numerosos trabajos, algunos de cuyos planteamientos básicos son los siguientes:
a).- Se estudian problemas aritméticos de una sóla operación, denominados "problemas de una etapa"; se consideran diferentes componentes de análisis con sus variables correspondientes, entre los que destacan: la estructura lógica de los problemas, la componente semántica y la componente sintáctica (Nesher, 1982, p. 28).
b).- Existen varias categorías de problemas "de una etapa" (Puig y Cerdán, 1988) que varían según los autores y que se deducen del análisis global del significado del texto. Inicialmente, Heller y Greeno (1978), establecieron tres categorías semánticas: Cambio, Combinación y Comparación. Posteriormente, dicha clasificación fué ampliada para incluir los problemas de Igualación (Carpenter y Moser, 1983).
c).- Las estrategias de los niños para resolver los diferentes problemas de adición y sustracción, están fuertemente influenciadas por la estructura del problema, conclusión que es compartida por las investigaciones de Vergnaud y Bell (obras citadas).
d).- En cuanto a la dificultad de resolución medida en porcentajes de éxitos, se han encontrado los siguientes resultados generales: la adición es más fácil que la sustracción; el orden de dificultad en general es: cambio, combinación y comparación, aunque los dos primeros se invierten en el caso de la sustracción.
Algunas de las conjeturas que hemos formulado como consecuencia del análisis de estas investigaciones son las siguientes:
1).- Las categorías de Cambio, Combinación y Comparación, son pertinentes y suficientes para la clasificación de los problemas por su estructura semántica. Tanto la estructura de las relaciones que intervienen, en forma de leyes de composición externa o interna según los casos, como la estructura lógica (Puig y Cerdán, 1988, p. 96) quedan igualmente justificadas mediante las categorías mencionadas.
2).- Teniendo en cuenta el punto de vista anterior, completamos el cálculo relacional de Vergnaud haciendo intervenir un tercer modelo numérico (el de los números "naturales relativos") que permite enlazar dichos aspectos.
3).- En el marco anterior, la cuarta categoría introducida por Carpenter y Moser (1983), denominada de Igualación, resulta ser diferente a las otras tres, por tener una estructura lógica y semántica distinta y más compleja que la que poseen las anteriores.
4).- Es necesario distinguir entre "problemas simples" y "problemas

compuestos”, que no coincide en general con la división usual en problemas de una etapa y de más de una etapa. Las tres categorías del apartado 1 pertenecen al grupo de problemas simples, mientras que los problemas de igualación, pertenecerían al grupo de problemas compuestos. Igualmente, algunos de los tipos de problemas establecidos por Vergnaud, como por ejemplo la composición de transformaciones, pertenecen a esta segunda clase, a diferencia del resto que son simples.

El campo conceptual de los números naturales relativos y la clasificación de problemas aditivos basada en las estructuras numérica, aritmética y semántica

Los desajustes y limitaciones que se han citado en los párrafos anteriores han servido de base, junto a otras consideraciones, para realizar una investigación[1] que ha puesto de manifiesto:

I.- En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

II.- Existe un conjunto de números a los que llamaremos *números naturales relativos* que, con la adición y el orden convenientes, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas*.

III.- El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la “región negativa”; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones “positiva” y “negativa”; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

IV.- Los números naturales relativos abren una nueva via de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio, regulando las estructuras aritméticas aditivas correspondientes.

V.- El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio, que amplian y

[1]Que ha servido de base para la lectura y defensa de la tesis doctoral "El campo conceptual de los números naturales relativos" (González, J. L., 1995).

precisan otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.
VI.- Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria[1], dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales.
Algunas de las consecuencias que nos interesan son las siguientes:
A).- La delimitación del ***campo conceptual de los números naturales relativos*** como la parte del campo conceptual aditivo constituída por:

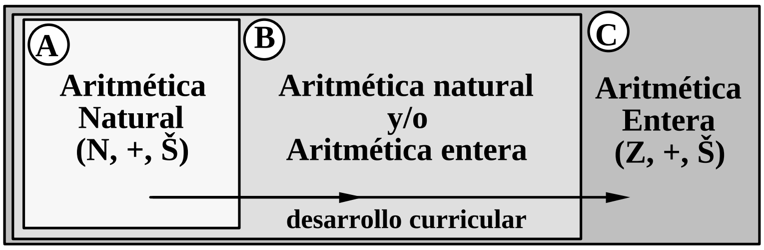
- el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura lógico-formal de los números naturales relativos.
- el conjunto de actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios del sistema simbólico de los números naturales relativos.
- el campo de actuación formado por el conjunto de cantidades y medidas naturales relativas que dan lugar a situaciones y problemas que admiten ser analizados mediante la estructura de los números naturales relativos.

B).- Una nueva ***distribución*** del campo aditivo al diferenciar las tres nociones numéricas que intervienen.
Las diferentes partes que integran la nueva distribución, son las siguientes (ver esquema en la página siguiente):

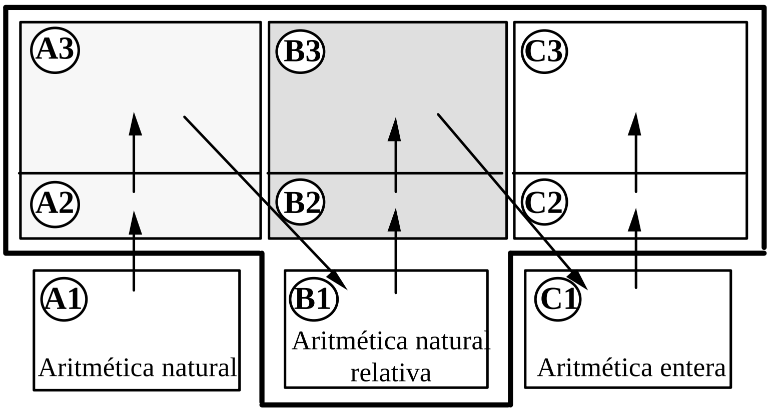
A1.- Combinaciones naturales simples.
A2.- Comparaciones y transformaciones naturales simples.
A3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales simples.
B1.- Combinaciones naturales relativas simples.
B2.- Comparaciones y transformaciones naturales relativas simples.
B3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales relativas simples y composiciones de al menos una relación natural relativa simple con al menos un elemento de A2 o de A3.
C1.- Combinaciones enteras simples.
C2.- Comparaciones y transformaciones enteras simples.
C3.- Composiciones de dos o más relaciones enteras simples; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de A2 o de A3; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de B2 o de B3.

[1]En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8º de Educación General Básica correspondiente a la edad de 14 años.

Dominios de aplicación elemental del campo
numérico aditivo según el proceso didáctico usual



Dominios de aplicación elemental del campo numérico
aditivo como conclusión del estudio teórico



(En línea gruesa: dominios en los que intervienen los números naturales relativos)
(Las flechas indican un posible proceso a seguir en el desarrollo curricular).

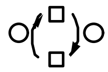
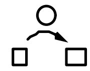
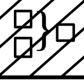
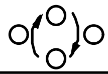
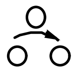
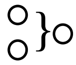
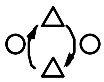
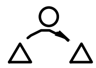
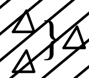
C).- Una nueva ***clasificación de los problemas aditivos*** como consecuencia de la distribución anterior.

***** Se detectan los siguientes tipos de relaciones básicas:

- ***Combinación natural y combinación entera***.
- ***Comparación y transformación naturales***, donde se excluye la combinación natural por no intervenir cantidades/medidas relativas sino únicamente la adición natural.
- ***Comparación y transformación enteras***, donde se excluye la combinación entera por el mismo motivo del párrafo anterior (sólo interviene la adición entera).
- ***Comparación, transformación y combinación relativas***, con particularidades motivadas por el doble cero, el paso de medidas de un signo al otro, etc.

***** Se obtienen 9 tipos de situaciones/problemas aditivos simples. Igualmente, de la composición de los tipos simples entre si, se obtienen 34 tipos de situaciones/problemas aditivos compuestos por dos situaciones simples.

Situaciones relativas discretas simples con estructura aditiva

	comparación simple	transformación simple	combinación simple
natural	$C_{D_N} : D_N \times D_N \rightarrow D_{N_R}$ $(a, b) \rightarrow (a - b)^+ \quad a = b + x \; ; \; x \quad 0$ $(b - a)^- \quad b = a + x \; ; \; x \quad 0$ 	$T_{D_N} : D_{N_R} \times D_N \rightarrow D_N$ $(a^i, b) \rightarrow b + a \; ; \; i = \{ + \}$ $b - a \; ; \; i = \{ - \}$ y a Š b 	**no aparecen números naturales relativos** 
natural relativo	$\oplus : D_{N_R} \times D_{N_R} \rightarrow D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7) 	$\oplus : D_{N_R} \times D_{N_R} \rightarrow D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7) 	$\oplus : D_{N_R} \times D_{N_R} \rightarrow D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7) 
entero	$C_{D_Z} : D_Z \times D_Z \rightarrow D_{N_R}$ $(z, z') \rightarrow \lvert (z' - z) \rvert^-$ z Š z' $\lvert (z - z') \rvert^+$ z' Š z 	$T_{D_Z} : D_{N_R} \times D_Z \rightarrow D_Z$ $(a^i, z) \rightarrow z + a \; ; \; i = \{+\}$ $z - a \; ; \; i = \{-\}$ 	**no aparecen números naturales relativos** 

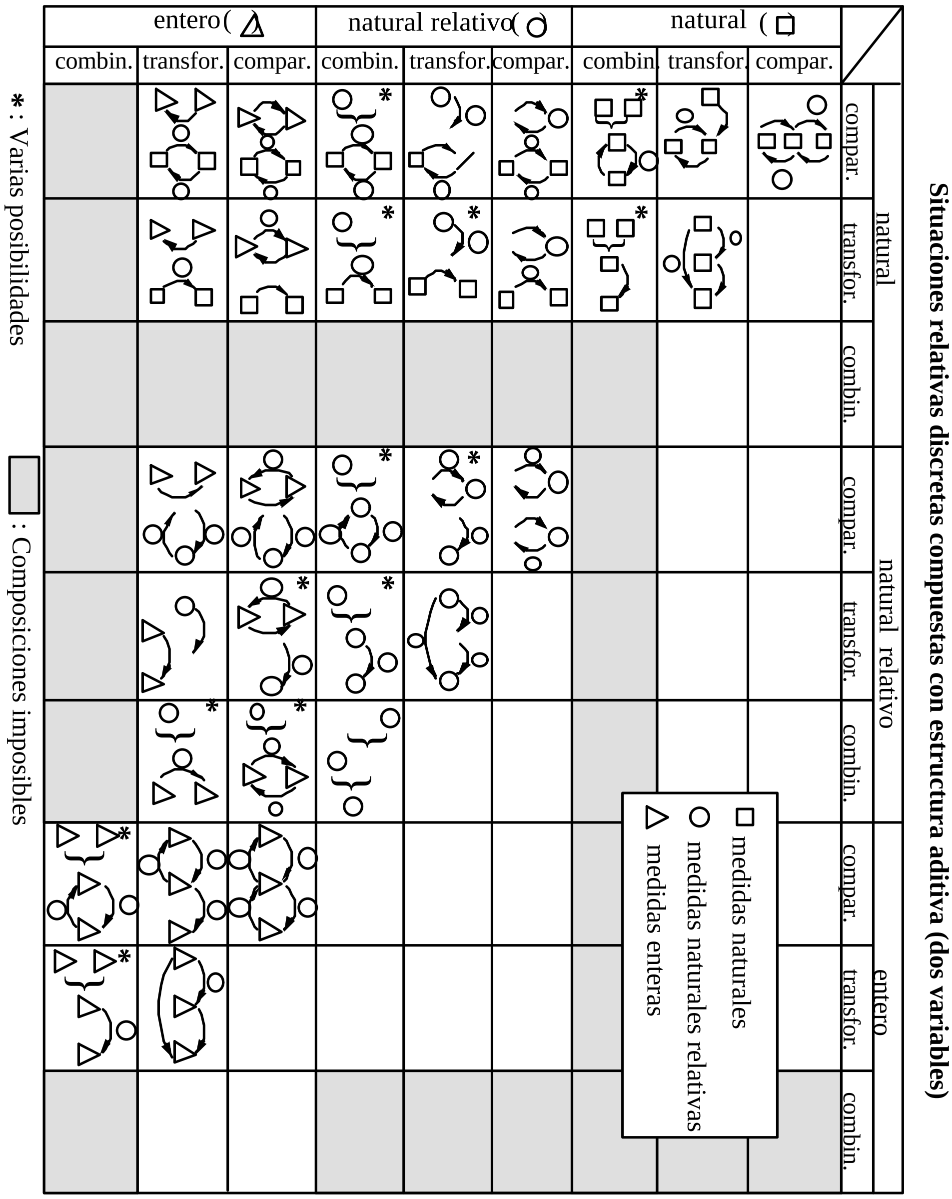
***** Si restringimos la clasificación a las medidas naturales y naturales relativas se obtienen:

1).- ***5 tipos de situaciones relativas simples*** que, unidos a la combinación natural, dan un total de 6 tipos de situaciones/problemas aditivos simples, que contrasta con los cuatro tipos que se proponen en Carpenter y Moser (1982, pp. 10 y sgts.) y con la clasificación que propone Vergnaud (1983, p. 107). Además de la no consideración de los números y medidas naturales relativas como elementos con entidad propia y características específicas diferenciadas de las que poseen los números naturales, hemos detectado los siguientes ***defectos en dichas clasificaciones***:

- la consideración de los problemas de "igualación" como un tipo simple, que en nuestra clasificación se sitúan entre los tipos que hemos denominado compuestos,
- la consideración bajo una misma estructura numérica (la natural) de entes semántica y lógicamente diferentes,
- la consideración, como "composición de transformaciones", de los problemas propios del tipo que hemos denominado combinación natural relativa,
- la consideración, como tipo simple o, al menos, al mismo nivel que el resto de las categorías, de los problemas de composición de transformaciones,
- la atribución de dos papeles o significados diferentes a las medidas naturales relativas: estados relativos y transformaciones,

- la separación expresa entre cálculo numérico y cálculo relacional, obligada por la complejidad de un campo aún sin organizar.

2).- ***18 tipos de situaciones relativas compuestas*** por dos simples.



Los esquemas sintetizan las clasificaciones de problemas aditivos, simples y compuestos por dos simples, que se deducen del estudio[1]. Estas clasificaciones se basan en la **estructura numérica** (natural, natural relativa y entera), la **estructura aritmética** (adición natural, adición entera y adición natural relativa) y la **estructura semántica** (combinación, comparación, transformación), habiéndose fijado, obviamente, la **estructura metodológica** en la categoría de problemas de enunciado verbal.

[1]Nos remitimos a la obra original para una información más detallada.

Referencias

Bell, A. W. Developmental studies in the additive composition of numbers. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 1980; pp. 113-141.

Bisquerra, R., *Métodos de investigación educativa*. CEAC. 1989.

Carpenter, T.; Fennema, E. & Romberg, T. (eds.).- *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1993.

Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. (eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers; 1982.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts. En Lesh, R.; Landau, M. (eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press, New York. 1983.

Castro, E. *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1994.

Conne, F. Calculs numeriques el calculs relationnels dans la resolution de problémes d'arithmetique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 5(3), págs. 269-332. 1985.

González, J. L. (1995) *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral Universidad de Granada. Microfilm: SPICUM Universidad de Málaga.

Davis, P. J., Hersh, R. *Experiencia Matemática*. Labor. 1987.

Fernández Cano, A. *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Síntesis. Madrid, 1995.

Gimeno, J.; Pérez, A. *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Akal Universitaria. Madrid, 1983.

Harel, G.; Dubinsky, Ed. (eds.) *The concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes 25. 1992.

Nesher, P. Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (eds.).- *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey. 1982.

Ogawa y Malen. Towards Rigor in Reviews of Multivocal Literatures: Aplying the Exploratory Case Study Method. *Review of Educational Research,* v. 61(3), págs. 265-286. 1991.

Popper, K. *El desarrollo del conocimiento científico*. Buenos Aires: Paidós; 1979.

Puig, L., Cerdán, F. *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid, 1988.

Romberg, T.; Fennema, E. & Carpenter, T. *Rational numbers.* LEA.

1993.
Vergnaud, G.; Durand, C. Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Francaise de Pédagogie,* 36, pp. 28-43. 1976.
Vergnaud, G. *L'enfant, la Mathématique et la réalité:* Peter Lang; 1981.
Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales. En: Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.).- *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa.* Cinvestav-IPN. México D. F., pp. 88-117. 1993.