CLASIFICACION DE PAEV ADITIVOS DE UNA ETAPA CON CANTIDADES DISCRETAS RELATIVAS

Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A.
Universidad de La Laguna

Introducción

Los estudios sobre resolución de problemas matemáticos, y en particular la resolución de problemas arirméticos, han desarrollado, en estos últimos treinta años, diferentes líneas de investigación centradas en el estudio global o parcial de las tareas de resolución de problemas, analizando las influencias que determinadas variables, lingüísticas, estructurales o semánticas, ejercen sobre las dificultades en la resolución de los problemas.

En la actualidad la literatura disponible para los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) que se resuelven con una suma o una resta es abundante e informan acertadamente sobre las diferentes variables que intervienen en la resolución de un PAEV aditivo, especialmente cuando son formulados con cantidades discretas absolutas.

No sucede lo mismo cuando los PAEV son formulados con cantidades discretas relativas.

Si consideramos los problemas siguientes:

-*Juan tiene 6 boliches y juega una partida con Luis y pierde 8 boliches. ¿Cuántos boliches debe Juan a Luis?.*

-*En el recreo, Juan ganó 6 canicas y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántos canicas ganó Pedro,.*

y los analizamos desde los enfoques teóricos básicos: categorías semánticas (Carpenter y Moser, 1983) o campo conceptual aditivo (Vergnaud, 1982), no pertenecerían a ninguna categoría semántica, salvo que aceptáramos en el segundo la comparación entre variaciones, y tampoco estaría identificado en las categorías establecidas por Vergnaud para el campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas, al tratarse en el primer caso de un problema de la forma STR y en el segundo del tipo TRT (relación entre transformaciones), categorías no identificadas por Vergnaud.

En estos modelos más representativos que regulan el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, encontramos que las categorías semánticas se limitan a situaciones donde las magnitudes son discretas absolutas y las categorías de Vergnaud dejan fuera diferentes problemas

que tienen interés en el contexto escolar o sitúan en la misma categoría problemas que aparentan tener estructuras diferentes.
Plantearse la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas y tratar de caracterizarlo para determinar un marco instrumental y explicativo que dé respuestas homogéneas a las diferentes situaciones parece adecuado.

A partir del estudio de los aspectos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos que configuran el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas se analizan los elementos y relaciones que se dan en el campo y se propone un modelo de competencias. El modelo de competencias es un modelo formal caracterizado por los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual, que aborda tanto las magnitudes escalares discretas absolutas como las relativas y considera al grupo aditivo y ordenado de los números enteros como un buen modelo para los fenómenos que se dan en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas bajo el cual se pueden dar explicaciones homogéneas a las diferentes situaciones y problemas que se dan en el estudio.
Este estudio presenta una organización exhaustiva y aporta una nueva clasificación de las situaciones y problemas, basada en las cantidades, medidas y números enteros, del dominio de aplicación del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Problemas aritméticos aditivos. Finalidad del estudio.
Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) y, en particular, los problemas aditivos, constituyen, hoy en día, un dominio de investigación con entidad propia como se pone de manifiesto en múltiples publicaciones (Fuson, 1992). Una primera revisión en nuestro país la encontramos en Puig y Cerdán (1988). Posteriormente, Castro, Rico y Gil (1992) han realizado una revisión actualizada de los diferentes enfoques y corrientes de investigación, distinguiendo tres enfoques principales para los problemas aritméticos aditivos de enunciado verbal, centrados en el estudio de: las variables lingüística, las variables estructurales y las categorías semánticas.
Entre estos enfoques teóricos básicos que organizan este dominio de investigación cabe destacar el enfoque de las categorías semánticas de los enunciados de los problemas que se sustenta fundamentalmente en las teorías cognitivas del procesamiento de la información y su estudio se centra en el análisis global del significado del texto mediante el que se enuncia el problema (Heller y Greeno, 1978; Carpenter y Moser, 1983; Nesher 1982), y el enfoque desde las relaciones aditivas que se dan en los

problemas verbales aritméticos con magnitudes discretas relativas, mediante el uso de medidas, transformaciones y relaciones estáticas, en el marco de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud y Duran, 1976; Vergnaud, 1982).

En el estudio de los problemas aritméticos aditivos de una sola operación existen varias categorías de problemas. Inicialmente, Heller y Greeno (1978) establecieron tres categorías semánticas: cambio, combinación y comparación. Posteriormente, Carpenter y Moser (1983) añaden la categoría de igualación, llegándose a enumerar 20 situaciones diferentes. Fuson (1992) aumenta el número de problemas aditivos estructuralmente diferentes a 22. En su construcción ha tenido en cuenta, las cuatro categorías semántica: combinación, cambio, comparación e igualación; la relación entre las cantidades que intervienen, distinguiendo las relaciones de aumento y disminución para las tres últimas categorías y las relaciones estática y dinámica para la categoría de combinación; y la posición de la incógnita, diferenciado tres posibilidades para la incógnita en las tres últimas categorías y sólo dos posibilidades para la categoría de combinación.

Nesher (1982) aborda el estudio de los problemas aritméticos desde tres componentes principales: la estructura lógica, la componente sintáctica y la componente semántica, donde cada una de ellas implica variables operacionales diferentes. La estructura lógica incluye las operaciones aritméticas implicadas así como las informaciones irrelevantes. La componente semántica incluye la variable contextual (aspectos estáticos, dinámicos y de comparación) y la variable léxsico (palabras claves y formas verbales). Y la componenete sintáctica que incluye elementos de la estructura superficial del problema como la longitud (número de palabras), número de sentencias, orden de las sentencias y posición de la incógnita. Los resultados obtenidos con relación a las categorías semánticas son similares a los anteriores.

Los trabajos de Vergnaud y Duran (1976) y Vergnaud (1982) sitúan la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales y enteros dentro de lo que se denomina campo conceptual aditivo. Establecen las diferentes relaciones estáticas y obtienen ciertas evidencias empíricas sobre las respuestas de los estudiantes, las dificultades que tienen y los errores que cometen.

Vergnaud y Duran (1976) pretenden aportar "un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar" (pág. 128). Entre otros aspectos, Vergnaud (1982, pp. 43-45) plantea la existencia de seis grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: I. Composición

de medidas, II. Transformación de una medida en otra medida (STS), III. Relación estática entre dos medidas (SRS), IV. Composición de dos transformaciones (TTT), V. Transformación de una relación estática (estado relativo) en otra relación estática (estado relativo) (RTR), y VI. Composición de dos relaciones estáticas (estados relativos) (RRR) y realizan diferentes estudios experimentales, fundamentalmente sobre problemas de la Categoría II y IV, obteniendo resultados dispares que son difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone, por ejemplo, han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico. Estos resultados les llevan a concluir que: "La aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños e incluso por los adultos" (Vergnaud y Duran, 1976, pp. 124-125).
La finalidad del estudio es ampliar el marco teórico existente y mostrar que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros es un buen modelo que caracteriza el campo conceptual de las magnitudes discretas, y que las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de los problemas.

Nociones básicas.
Precisamos ahora algunas nociones básicas que utilizaremos en la propuesta de organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, como campo conceptual, modelos de competencias, conceptos numéricos y de medida y el esquema partes-todo.

Campo conceptual y modelos de competencias
Vergnaud (1993) indica que un campo conceptual está formado por dos conjuntos básicos: Un conjunto de situaciones y el conjunto de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas.
La organización de los campos conceptuales tienen como finalidad explicitar los significados completos que aparecen durante los procesos de enseñanza-aprendizaje, por tanto, estos deben ser un marco global que combine tanto las exploraciones formales como funcionales. Hay, pues, dos componentes esenciales: la componente formal, que procede de todas las evidencias acumuladas tanto de la lógica de la disciplina como de las tendencias de los sujetos en un campo conceptual, y la componente funcional que procede del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje.
Para su análisis parece necesario considerar estas dos componentes como modelo de competencias (MC) y modelo de ejecución (ME), respectivamente.

El modelo de competencias se referiría al aspecto formal del campo conceptual tanto en su aspecto epistemológico como en sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.
Ahora bien, un problema importante para la educación matemática es saber como ejecuta el usuario real las acciones propias de ese campo conceptual, donde las creencias extramatemáticas, concernientes al ejecutor y a la situación donde tiene lugar la actividad, juegan un papel fundamental en la determinación de como se realiza, se identifica y se comprende el campo conceptual tratado.
Es necesario distinguir con claridad entre la función y las propiedades del modelo de competencias (MC) y del modelo de ejecución (ME), ambos relacionan signos y significados, pero ME se sirve de informaciones que están más allá de la asociación signos-significados y de las estructuras cognitivas que subyacen, determinadas por el modelo de competencias, y opera bajo los condicionamientos de la memoria, del tiempo, de la organización de estrategias perceptivas, condicionados por el contexto y por creencias extramatemáticas, etc, que no son asuntos del MC.
En este sentido, debemos señalar los planteamientos de Filloy (1990) que propone concentrarse en modelos teóricos locales adecuados a fenómenos específicos, pero capaces de tomar en consideración todos los elementos: gramática, lógica matemática, modelos de enseñanza, modelos cognitivos y pragmática, organizados en torno a tres componentes: modelos de enseñanza, modelo de los procesos cognitivos implicados y modelos de competencias formal, que arrojan luz sobre las interrelaciones y las oposiciones que ocurren durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada una de las tres componentes.

Los conceptos numéricos y de medida

El desarrollo del conjunto de situaciones y de los conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, según las teorías de Piaget (1978), se encuentra ubicado en el periodo de las operaciones concretas (7-11 años).
El punto de partida lo constituye la idea de que cualidad y cantidad son inseparables, y ello tanto desde el punto de vista genético como desde el punto de vista del análisis lógico o axiomático.
Piaget caracteriza a las operaciones elementales de reunión y separación compatibles con la cuantificación intensiva y con las estructuras cognoscitivas llamadas agrupamientos. El agrupamiento es una estructura híbrida entre la de grupo y retículo y es la estructura psicológica que formaliza las organizaciones del pensamiento natural. Hay nueve

agrupamientos diferentes que describen la organización de las operaciones lógicas (es decir, las operaciones que se ocupan de las clases y las relaciones lógicas): un agrupamiento menor y ocho mayores. Estos agrupamientos se adecuan también a la organización de lo que Piaget llama operaciones infralógicas, que define como acciones cognoscitivas vinculadas con las relaciones de posición y distancia y de parte-todo, que atañen a objetivos y configuraciones espacio-temporales concretos (Flavell, 1981, pág. 189). Así, a cada agrupamiento lógico le corresponde uno infralógico. Las operaciones lógicas tienen como síntesis el número y las operaciones infralógicas la medición.

A modo de resumen señalar que el grupo aditivo de los números enteros es, pues, el producto de una fusión operatoria entre los agrupamientos cualitativos de las clases y las relaciones asimétricas, pero por abstracción de las cualidades diferenciables sobre las que se hacen estos agrupamientos. Las clases, las colecciones asimétricas y los números forman un sistema operatorio coherente, a la vez único por sus mecanismos y diferenciado por las tres posibilidades de coordinación de las semejanzas, las diferencias o ambas al mismo tiempo.

Y desde el punto de vista del aprendizaje matemático podemos interpretar que debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos numéricos y métricos y ello viene avalado tanto por el isomorfismo existente entre sus estructuras como por la equivalencia del proceso de construcción seguido.

El esquema partes-todo

La noción de esquema es de gran importancia en la psicología cognitiva actual, se considera como un elemento fundamental dentro de la estructura cognitiva. Sus orígenes, sin embargo, son lejanos. Retomamos en este trabajo la idea inicial de Piaget, referenciada en Flavell (1981), y que caracteriza al esquema como una estructura cognoscitiva que se refiere a una clase semejante de secuencias de acción, las que forzosamente son totalidades fuertes, integradas y cuyos elementos de comportamiento están íntimamente interrelacionados. En resumen, el esquema es el contenido de la conducta organizada y manifiesta que lo designa, pero con importantes connotaciones estructurales que no son intrínsecas al mismo contenido concreto. Aunque las palabras esquema y concepto no son intercambiables, Piaget, reconoció que había cierta semejanza entre ellas.

Resnick (1983, pp. 114-115) presenta la siguiente figura como el esquema parte-todo que ha sido utilizado en diferentes investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento del número natural (Briars y Larkin, 1981; Resnick, Greeno y Rowland, 1980; Riley, Greeno y Heller, 1983) y en la resolución de problemas aritméticos verbales (Riley, Greeno y Heller, 1983; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982; Vergnaud, 1982).

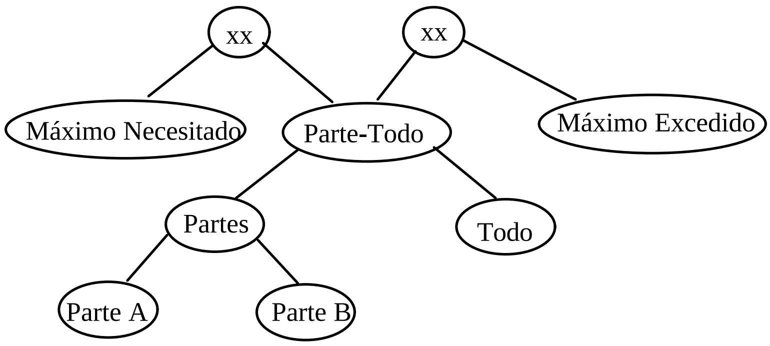

Figura 1

El esquema especifica que una cantidad (el todo) puede ser dividida (en partes), mientras que la combinación de partes, que no excedan ni falten en el todo. Por implicación las partes pueden ser incluidas en el todo. El esquema parte-todo proporciona una interpretación del número que es similar a la definición del concepto operacional del número dada por Piaget (1941), y proporciona una herramienta útil en la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales.

Después de estas breves consideraciones se nos plantea el problema de caracterizar mediante una representación gráfica estas organizaciones y reglas de acción que se dan en los procesos numéricos y de medida en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas.

De forma gráfica representaremos las relaciones entre las partes y el todo con el diagrama siguiente:

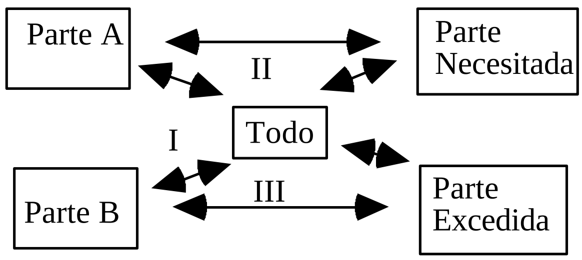

Figura 2: Diagrama aditivo del esquema partes-todo

El esquema se organiza en tres grupos (I, II, III), donde el I representa todas las operaciones aditivas posibles de unión entre las partes y de separación del todo, y los grupos II y III, las relaciones asimétricas, es decir, las relaciones entre la parte y el todo expresado por sus diferencias ordenadas. Hemos mantenido en el esquema la diferencia entre parte$_1$ necesitada y parte$_2$ excedida, no sólo por mantener la simetría del mismo, sino por entender como Resnick que la parte necesitada implica un proceso

que va de la parte menor a la mayor (el todo) y está asociada a los procedimientos más primitivos de contar progresivamente y la parte excedida que va de la parte mayor (Todo) a la parte menor y está asociada al procedimiento de contar regresivamente.
Es claro que este diagrama aditivo del esquema partes-todo, que tiene bastante parecido al presentado por Resnick, parece referirse de manera clara al campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas, sin embargo nuestra idea es utilizarlo tanto con cantidades orientadas presentes (números positivos) como con cantidades orientadas ausentes (números negativos) y que en la mayoría de los casos la diferencia entre negativo y positivo difiere respecto a las expectativas del sujeto: descubrimiento de una ausencia o una orientación en ese sentido en lugar de la presencia u orientación en el otro sentido. Es necesario dotar a este diagrama de una interpretación explícita de todas las relaciones aditivas que se dan en el supuesto de que las partes y el todo puedan ser consideradas no sólo como cantidades orientadas presentes (positivas) sino también orientadas ausentes. Estas relaciones quedan claramente determinadas por la relación de Chasles (1793-1880), uno de los creadores de la geometría moderna, relación que formulamos en una dimensión como:
“ Relación de Chasles para tres puntos:
Todo triplete de puntos A, B y C en una recta, cualquiera que sea su posición respectiva, verifica la relación
AC = AB + BC.
Es una relación entre las medidas algebraicas de los bipuntos {AB}, {BC} y {AC}, por tanto, una propiedad de estos bipuntos, independiente del origen elegido en la recta. En efecto, este origen no figura en la relación; se trata, pues, de una propiedad intrínseca de los puntos A, B y C. Esta relación se puede generalizar cuando se consideran n puntos.” Caratini, R. (1970).
Podemos considerar las siguientes situaciones:

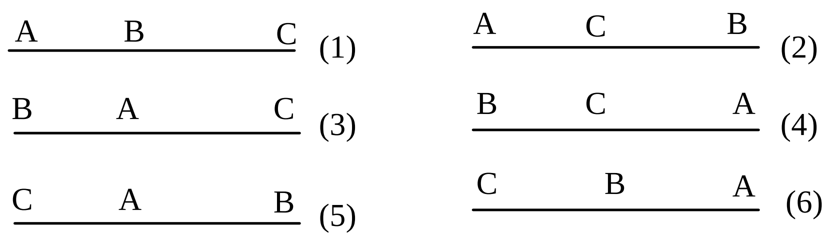

Figura 3

Estas seis situaciones desarrollan todas las posibles uniones entre las partes y la posible separación del todo, tanto si las cantidades están orientadas presentes (positivas) como orientadas ausentes (negativas).

El campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas

El propósito es la construcción de un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, es decir, la elaboración de un modelo teórico que organice este campo conceptual. En definitiva, pretendemos englobar bajo una misma estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo, tomando en consideración el conjunto de los números enteros.

Este modelo de competencias está constituido por:

- Elementos epistemológicos y fenomenológicos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros.
- Elementos cognitivos asociados a dicho campo.

Los aspectos epistemológicos tratan de la organización lógico-formal de los números naturales y enteros, es decir, de los conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan, y los aspectos fenomenológicos tratan del conjunto de situaciones y problemas que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los números naturales y enteros.

En los aspectos cognitivos consideramos tanto las funciones cognitivas específicas del campo conceptual como los aspectos estructurales de las actividades de aprendizaje, y éstos quedan caracterizados por, el proceso de construcción de los conceptos numéricos y de medida donde las clases, relaciones asimétricas y los números enteros constituyen un sistema operatorio aditivo coherente, isomorfo al de las medidas enteras discretas, y por el esquema aditivo partes-todo, tanto para las cantidades positivas como para las cantidades negativas y que está determinado por el diagrama aditivo y la relación de Chasles.

El modelo de competencias debe responder a las exigencias del campo conceptual aditivo y debe permitir entre otras cosas:

* Integrar los elementos y relaciones que se dan en el campo conceptual de las magnitudes discretas enteras.
* Elaborar una nueva y exhaustiva clasificación de las situaciones y problemas considerados en el campo conceptual.
* Integrar y explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones.
* Facilitar la relación con el modelo de ejecución (M.E.).

Nos vamos a referir a las tres primeras en lo que sigue. Tomaremos como organizadores del campo conceptual aditivo a las magnitudes discretas, a las relaciones más significativas que se dan en los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros.

Procediendo de esta manera obtenemos una primera clasificación del campo conceptual aditivo en dos grandes categorías determinadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo: Las operaciones aditivas (Grupo I) y las relaciones asimétricas (Grupos II y III):

Las operaciones aditivas

Las operaciones aditivas están representadas por el grupo I del diagrama aditivo del esquema partes-todo y tiene como elementos organizadores a la forma canónica de la operación aditiva a+b=c, que correspondería al aspecto epistemológico; a los significados de los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, que especificaremos a continuación y a todas las relaciones posibles entre estos números o magnitudes expresados por la relación de Chasles dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo. Con relación a la forma canónica a + b = c, esto nos va a originar siempre 3 casos posibles dependiendo de la posición del dato desconocido. Con relación a los fenómenos asociados utilizaremos la expresión Número = Magnitud, que debe ser interpretada como número entero equivalente a magnitud discreta relativa, que contiene como casos particulares a los números naturales y a las magnitudes discretas absolutas, porque dada una magnitud discreta relativa podemos garantizar por su misma definición que existe siempre un isomorfismo de ella con el Z-módulo de los números enteros y este isomorfismo respeta la ordenación total y arquimediana de la magnitud. Por ello vamos a considerar los números enteros, o mejor las cantidades discretas relativas. De esta manera en lo que sigue nos referiremos tanto a cantidades como a medidas y, por tanto, a números, aunque los ejemplos serán referenciados con cantidades ya que son la mayor parte de las actividades y ejemplos con significado concreto que se utilizan en la enseñanza. Estas cantidades pueden ser numéricas o de magnitud y son las que aparecen con un doble sentido o significado, como estado (tengo 6 canicas, debo 6 canicas, etc), o como variación (gané 6 canicas, perdí 6 canicas, etc.).

De esta manera si consideramos la expresión canónica de la estructura aditiva a + b = c y la representamos por:

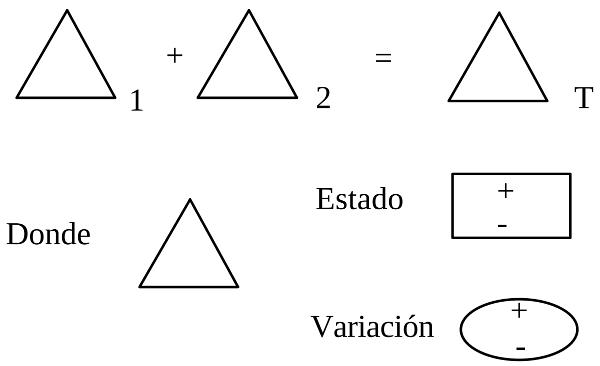

Figura 4

obtenemos todas las relaciones aditivas posibles de los fenómenos asociados:

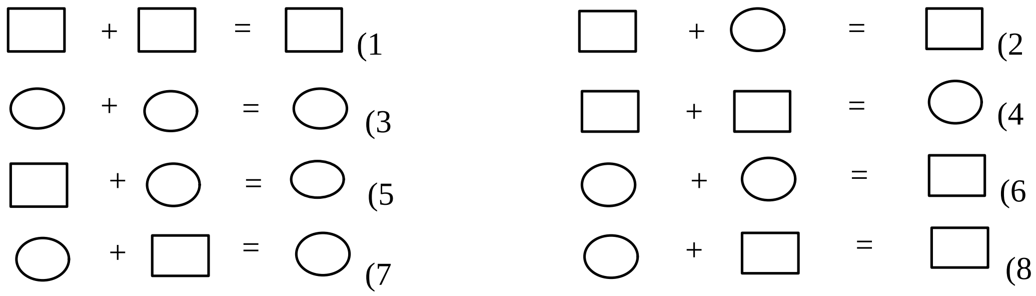

Figura 5

Es necesario observar que estas ocho relaciones aditivas se pueden reducir a seis en función de las equivalencias entre (2 y (8, y entre (5 y (7. (Figura 5). La relación aditiva (1, corresponde a la categoría semántica de combinación, y las restantes a la categoría de cambio.
Si hacemos intervenir las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles, obtenemos todas las operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas que son en total 144, y si aceptamos por razones de equivalencia la reducción de los casos posibles, como ya hemos indicado: la de número=magnitud a seis, nos quedan en total 108.

Forma canónica	**Número = Magnitud**	**Relación Partes-Todo**	
a+b=c	Estado, Variación, Mixta	Relación de Chasles	
3	8	6	144
3	6*	6	108

Tabla 1

Muchas son las preguntas que nos podemos hacer frente al conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas. Algunas se pueden concretar en: ¿Se pueden describir fenómenos en los que intervienen cantidades en todas las relaciones posibles?, ¿Se pueden establecer todas las relaciones dadas por Chasles entre las partes y el todo con cantidades orientadas ausentes o presentes, respectivamente? ¿Se pueden y deben hacer particiones más finas dentro de este conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles?

Veamos algunos ejemplos con relación a la primera pregunta. Los fenómenos descritos en (1, (2 y (3 corresponden a los fenómenos habituales recogidos en la literatura sobre este tema, a continuación presentamos posibles ejemplos de (4, (5 y (6. (Fig. 5)

(4. Rafael tiene 7 canicas en su maleta y 5 en su mesa de noche. ¿Cuántas canicas puede pagar Rafael?

(5. Rafael tiene 7 canicas en su maleta y su tía le regala 5. ¿Cuántas canicas puede pagar Rafael?

(6. La tía de Rafael le regala 5 canicas y él gana 7. ¿Cuántas canicas tiene Rafael?

Con relación a la segunda pregunta se pueden construir ejemplos haciendo intervenir cantidades orientadas presentes (positivas) y cantidades orientadas ausentes (negativas), en los seis casos posibles. (Fig. 3)

Con relación a la tercera pregunta sobre clasificaciones más finas éstas se pueden hacer atendiendo tanto a los aspectos epistemológicos, por ejemplo, considerando la operación como una operación binaria, generalmente asociada a la teoría de los cardinales, o como una operación unitaria, generalmente asociada a la teoría de operadores; o atendiendo a aspectos fenomenológicos, cantidades como estado, variación o situaciones mixtas; y, por último, atendiendo al esquema partes-todo con la presencia de cantidades orientadas presentes (positivas) u orientadas ausentes (negativas), pero todo ello debe estar relacionado con el trabajo empírico. No obstante, considerando el trabajo realizado en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas, la categorización de las mismas desde una perspectiva global en categorías semánticas como combinación y cambio parecen adecuadas. De esta manera podemos organizar las 108 operaciones aditivas lógicamente posibles en:

	Forma canónica	**Número = Magnitud**	**Relación Partes-Todo**	
Combinación	3	1	6	18
Cambio	3	5	6	90

Tabla 2

Parece razonable incluir (4, (5 y (6 (Fig. 5) dentro de la categoría semántica Cambio, (2 y (3 estaban ya incluidas por estudios anteriores.

Las relaciones asimétricas

Las relaciones asimétricas están representadas por los grupos II y III del diagrama aditivo del esquema partes-todo (Fig. 2) y tienen como elementos organizadores: la forma canónica de la operación aditiva que ahora toma la expresión a-b=c, que nos va a originar 3 casos posibles dependiendo de la posición del dato desconocido.

- Las relaciones sustractivas posibles de los fenómenos asociados ahora se reducen a (1 y (3 (Fig. 5), es decir, a situaciones de comparación entre estados o entre variaciones.
- Las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles ahora se reducen a (2), (3), (4) y (5) (Fig. 3), ya que la (1) y la (6) quedan descartadas porque no facilitan relaciones de comparación entre las partes.

Si hacemos intervenir todas las relaciones posibles obtenemos que las relaciones asimétricas (grupo II, parte necesitada) lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas son 24.

Forma canónica	**Número=Magnitud**	**Relación partes-todo**	
a - b = c	-Estado, Variación	-Chasles	
3	2	4	24

Tabla 3

Análogamente si hacemos intervenir todas las relaciones posibles para las relaciones asimétricas del grupo III (parte excedida) obtenemos igualmente 24.

Forma canónica	**Número=Magnitud**	**Relación partes-todo**	
a - b = c	-Estado, Variación	-Chasles	
3	2	4	24

Tabla 4

Las operaciones aditivas y las relaciones asimétricas y las otras categorías

Corresponde ahora analizar este modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas con otras organizaciones de intenciones parecidas, en particular con las que hemos comentado aquí: las categorías semánticas y las categorías de Vergnaud. Por problemas de extensión sólo vamos a establecer la relación con algunas categorías si bien es fácil comprobar su validez para las otras.

Por ejemplo, para la categoría Cambio las 6 situaciones diferentes estarán identificadas como sigue:

Forma canónica: a+b=c	**Número = Magnitud** -Mixta	**Relación partes-todo** (Relación de Chasles)	**Total**
3	1	2	6

Tabla 5

Donde las cantidades representan una situación mixta determinada por la relación (2 (Fig. 5) y la relación partes-todo viene determinada por las relaciones (1) ("añadir a") y (2) ("quitar de") de Chasles (Fig. 3).

Al analizar las seis categorías de Vergnaud (1982) dentro del modelo de competencias nos encontramos con la necesidad de reorganizar estas categorías al encontrar categorías aditivas que no corresponden a este nivel estructural y problemas formulados en una categoría que corresponderían a otra, entre otras cosas.

Las categorías I, II, IV y V corresponden dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo a las operaciones aditivas (Grupo I), y dentro de éste a las operaciones aditivas de combinación, la categoría I, y a las operaciones aditivas de cambio, las categorías II, IV y V. La categoría I de Vergnaud, coincide con la categoría de combinar de Carpenter y Moser (1983), y en ella sólo se admite que el número actúe como estado y con valores positivos.

Las categorías II, IV y V estarían dentro de las operaciones aditivas de cambio. La categoría II coincide con la categoría de Cambio de Carpenter y Moser (1983).

En la categoría IV: Dos transformaciones se componen en una tercera, considera 18 situaciones diferentes de problemas, identificadas como sigue:

Forma canónica: a+b=c	**Número = Magnitud**: *Variación	**Relación partes-todo** (Relación de Chasles)	**Total**
3	1	6	18

Tabla 6

Donde las cantidades representan la situación de variación determinada por la relación (3 (Fig. 5) y la relación partes-todo viene determinada por las seis relaciones posibles de Chasles.

Pensamos que este modelo resuelve los problemas que se le plantean a Vergnaud. Con relación a la medida, al situarse en el marco de las magnitudes absolutas (escalares) se encuentra con elementos que son medidas y con elementos que no son medidas y necesita operar con ellos; de igual manera al comparar medidas se encuentra con medidas en forma

de estado, como tener 6 canicas y con relaciones estáticas, a veces denominadas estados relativos, como deber 6 canicas, esto genera una gran cantidad de dificultades en la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, por ello parece más razonable situarnos en un marco más general: el de las magnitudes discretas relativas donde todos los elementos serán cantidades o medidas.
La transformación de tiempo que utiliza Vergnaud interviene en algunas categorías como la II o no interviene como en la I y la III. Parece razonable pensar que la noción de transformación lleva implícita la noción de tiempo y que ésta estará asociada a las magnitudes discretas enteras en función de que represente un estado (tiempo presente) o una variación (tiempo pasado o futuro).
Con relación a las relaciones estáticas las mantienen en su estado inicial en la categoría III, pero cuando intenta que una transformación actúe sobre ella (categoría V) o bien operar con ellas (categoría VI), se encuentra con un doble problema: o la reduce a un estado relativo (Pedro debe 6 canicas) que correspondería a problemas de otras categorías o formula problemas de un nivel diferente, lo que crea una gran heterogeneidad en la organización del campo conceptual considerado.

Consideraciones finales
A lo largo de este trabajo hemos hecho una propuesta de organización del campo conceptual de las magnitudes discretas desde el enfoque de la resolución de problemas, situándonos en el subperiodo piagetiano de las operaciones concretas, donde intervienen los agrupamientos lógicos e infralógicos, el grupo aritmético Z y la medición.
Esta propuesta de organización constituye un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo que integra los elementos y relaciones que se dan en este campo, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.
El modelo de competencias presenta de manera unificada las categorías semánticas del campo conceptual aditivo discreto, no sólo desde una perspectiva lógico-formal, que se da en las otras categorizaciones, sino también desde la perspectiva de las leyes de composición, de los fenómenos asociados y de las estructuras cognitivas implicadas.
En definitiva, hemos considerado bajo una única estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Hemos caracterizado un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas, pero sería absurdo considerar este modelo de competencias como un modelo válido para la ejecución. Sin embargo, un modelo de ejecución tiene que incorporar un modelo de competencias como una parte esencial. Los modelos de ejecución se pueden construir de maneras diferentes, pero compatibles con premisas fijas sobre la competencia en la cual se basan.

Referencias bibliográficas

BRIARS, D. J. Y LARKIN, J.H., 1981. An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Annual Meeting of the Society for Research in Child Development.* (Boston).

CARATINI, R., 1970. *Los números y el espacio.* ARGOS Enciclopedia temática, nº 12. (Editions Bordas: París y Editorial Argos: Barcelona).

CARPENTER, T.P. Y MOSER, J.M., 1982. The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective. pp. 9-24.* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).

CARPENTER, T.P. Y MOSER, J.M., 1983. The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds) *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes. (*Academic Press: New York).

CASTRO, E., RICO, L. Y GIL, F., 1992. Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10 (3),* pp. 243-253.

FILLOY, E., 1990. PME algebra research. A working perspective. Conferencia Plenaria. En G. Booker, P. Cobb y T. Mendecuti (eds) *Proceedings of the fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. II, pp 1-33.

FLAVELL, J.H., 1981. *La Psicología Evolutiva de Jean Piaget*. (Paidós: Barcelona).

FUSON, K. C., 1992. Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 243-275. (MacMillan Publishing Company: New York).

HELLER, J.I. Y GREENO, J.G., 1978. *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. (Chicago).

NESHER, P., 1982. Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T..P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective pp. 9-24.* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).

PIAGET, J., 1965. *The child's conception of number*. (Norton: New York).
PIAGET, J.,1978. *Introducción a la Epistemología Genética. El pensamiento matemático.* (Paidós: Buenos Aires).
PUIG. L. Y CERDÁN, F., 1988. *Problemas aritméticos escolares.* (Edit. Síntesis: Madrid).
RESNICK, L.B., 1983. A developmental theory of number understanding. En H.P. Ginsburg (Ed) *The development of mathematical thinking*. (Academic Press: New York).
RESNICK, L.B., GREENO, J.G. Y ROWLAND, J., 1980. *MOLLY: A model of learning from mapping instruction.* Manuscrito inédito. (University of Pittsburg, Learning Research and Development Center: Pittsburg, PA).
RICO, L. y otros, 1985. *Didáctica activa para la resolución de problemas.* Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.
RILEY, M.S., GREENO, J.G. Y HELLER, J.I., 1983. Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed): *The development of mathematical thinking*. (Academic Press: New York).
VERGNAUD, G. Y DURAND, D., 1976. Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Française de Pedagogie*. Vol. 36 (Traducción al castellano: Estructura aditiva y complejidad psicogenética, en Coll, C. (1983) Psicología genética y aprendizajes escolares. Siglo XXI, pp. 105-128).
VERGNAUD, G., 1982. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T..P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 9-24).* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).
VERGNAUD, G., 1993. La teoría de los campos conceptuales. En Sánchez, E.; Zubieta, G. (Eds), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa.*, pp. 88-117. (Cinvestav-IPN: México. D.F).