

GEOMETRÍA Y TECNOLOGÍA

Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L.

Universidad Autónoma de Barcelona

Allegro

Cuando nos preocupamos de mejorar la educación, nos podemos situar en el contexto de profesor a pie de aula. Este actúa como un buen albañil, que alinea y alicata paredes, pavimenta suelos con esmero y perfección, eligiendo buenos materiales. Así sigue las directrices de los planos de la obra, diseñados por técnicos y satisface las necesidades de cobijo de sus clientes, respetando las normas urbanísticas del lugar. Esta es la misma situación del profesor, que intenta realizar su trabajo de educador con la máxima calidad. En las tareas de profesor de aula, el oficio, el saber hacer, y sobre todo, su pensamiento y concepción de la enseñanza son determinantes para proporcionar una buena educación a los alumnos que tiene asignados. Su preocupación por facilitar el aprendizaje de sus alumnos le hace buscar y utilizar todo tipo de recursos que tiene a mano y abrir los ojos para aprovechar contextos y recursos, que a otros profesores les podrían pasar desapercibidos. Se esfuerza en aprovechar estos recursos para mejorar su labor docente, en beneficio directo de la educación de sus alumnos. Este estado de alerta continua en mejorar la labor docente es uno de los aspectos motivadores y fascinantes de la profesión de profesor. En esta preocupación de estar alerta, prestando atención al uso de diferentes medios, artefactos e instrumentos que a uno le vienen a la cabeza para mejorar las clases, es donde podemos situar el papel de la tecnología en la educación. Y viceversa, sin la preocupación constante del profesor en mejorar la docencia, el papel de la tecnología en la educación pierde su sentido. Como se dice en lenguaje coloquial, “si uno busca, encuentra” y es muy difícil encontrar la utilidad de las cosas si uno no está dispuesto a buscarlas.

En épocas anteriores, de pocos medios, era normal, por decirlo de alguna manera, no apoyarse en recursos. Sólo bastaba el libro de texto, las explicaciones verbales en la clase, la escritura del profesor en el encerado y el cuaderno del alumno, donde intentaba registrar los vocablos del profesor y algún dibujo plasmado en la pizarra. El alumno aprendía casi siempre de memoria, que es, por cierto, como algunos aprendimos, en el antiguo tercero de bachillerato, el teorema de Pitágoras, el del seno y el coseno y los puntos notables del triángulo.

Debo confesar que a sugerencia de mi excelente maestro, utilizaba una libreta pequeña, reservada sólo para propiedades y fórmulas matemáticas y otra grande para los ejercicios y problemas. Este recurso tecnológico de las dos libretas me facilitó el aprendizaje memorístico de fórmulas y teoremas y me salvó de más de una dura reprimenda los lunes a primera hora de la mañana, cuando perdía, la tarde del domingo anterior, el equipo de fútbol del que era seguidor mi maestro y todos los de la clase. Cosas de la tecnología en blanco y negro.

Más tarde llegó otra época, en la que el reto era escribir libros de geometría vanagloriándose de no utilizar ningún esquema ni dibujo. No hace falta hacer ostensivo el nombre de conocidos matemáticos de estas tesisuras. Sí quiero mencionar unas clases de geometría que impartía el arquitecto Jordi Dou, hermano del matemático Alberto Dou, sin hacer ningún dibujo en la pizarra, pero utilizando un lenguaje gestual muy expresivo e imaginativo, que tanto le gustaba al recordado profesor Gonzalo Vázquez. Por cierto, los recursos gestuales han sido objeto de investigación en geometría por Ferdinando Arzarello (2002). Estas dos situaciones de no apoyarse en esquemas figurales pueden plantearse como casos extremos del uso de la tecnología, una dando valor sólo a la formalización y otra a la percepción gestual y vívida, para favorecer el aprendizaje de la geometría.

En la historia de la didáctica de la geometría ha habido casos esporádicos del uso de la tecnología, basados en los principios de la enseñanza experimental de John Dewey. Uno de ellos es el que resalta la importancia sensoriomotriz del uso de materiales manipulativos, que propusieron María Montessori en tiempos pasados y también Pedro Puig Adam y Emma Castelnuovo. Estos propiciaron el uso de materiales, como fuente didáctica en el nivel secundario. Aparte del éxito que han tenido y siguen teniendo en educación infantil, del impacto de las propuestas de María Montessori, en lo que se refiere a aspectos de lectura, escritura y numeración, en el nivel secundario la repercusión de estas propuestas ha sido anecdótica para el profesorado de secundaria. Estas situaciones siguen siendo casos singulares para la docencia del profesorado de matemáticas. Siempre se invoca al hecho de que es muy difícil conseguir materiales manipulativos y sobre todo actividades curriculares con estos materiales, que además su uso en las aulas ocupa mucho tiempo y que no se ve su utilidad directa para el aprendizaje, ni para la enseñanza.

En la actualidad la situación de entorno ha cambiado, no en lo referente a la disponibilidad de materiales físicos manipulativos, sino a la presencia masiva, tanto en el entorno social, doméstico, como en el escolar de materiales digitales, lo que ahora llaman TIC, TAC, léase tecnologías para la información y comunicación y para el aprendizaje y comunicación. Programas institucionales como el “Plan Avanza”, “Escuelas y Centros 2.0, 1x1”, etc han llenado de ordenadores y, en un futuro inmediato, de materiales curriculares digitales a todos los centros y alumnos. Sin embargo, el pensamiento y, sobre todo, el convencimiento del uso de la tecnología en el profesorado, no ha cambiado mucho. Son conocidos los tópicos de que el aula

de informática siempre está ocupada, o que se gasta mucho tiempo y distracción abriendo y apagando los ordenadores.

En la situación actual no se trata de una falta de disponibilidad de la tecnología, sino de un aspecto más crucial, como es el convencimiento de que el uso de la tecnología va a mejorar el aprendizaje del alumnado y facilitar la tarea docente. Llegados a este punto crucial del papel de la tecnología en la educación geométrica, ¿quién va a convencer al profesorado de la bondad de su uso? y ¿cómo? Evidentemente las instituciones y políticas educativas pueden condicionar su uso, pero no pueden lograr lo más importante, el convencimiento de la necesidad de su uso, sin el cual la implantación de la tecnología en las aulas no garantiza una mejora profesional del profesorado ni de la calidad de aprendizajes para el alumnado. Pero también es imprescindible la capacitación del profesorado. Si un profesor está convencido pero no sabe cómo hacer las cosas, puede tardar demasiado tiempo en empezar a hacer las cosas razonablemente bien.

Quizás el convencimiento del uso de la tecnología provenga del papel que los resultados de la investigación deben aportar, lo que se menciona de pasada y someramente al final de los artículos de investigación y que llamamos implicaciones didácticas. Pero empecemos por el principio. ¿Qué es lo que se ha planteado como cuestiones de investigación en el ámbito que nos ocupa, la educación geométrica y la tecnología?, ¿Cómo se ha procedido para llegar a unos resultados? y ¿cómo estos resultados pueden ser concretos y convincentes, tal como exige/pide la sociedad a los organismos que financian la investigación?

Scherzo

Después de analizar algunos documentos de investigación como artículos publicados en revistas de impacto, en actas de simposios, en congresos o en memorias de proyectos de investigación, casi siempre los objetivos de investigación se han planteado de manera clara y pertinente, condición sine qua non para aceptar una publicación o financiar un proyecto, pero los resultados, que difícilmente son evaluados y aplicados, no se corresponden siempre con la claridad y convencimiento de estos objetivos. Quizás sea por esta circunstancia que la relación de la teoría con la práctica siga tan distante en el ámbito de la educación de la geometría y del uso de la tecnología.

Una vez presentada esta introducción, intentaremos ilustrar algunas investigaciones sobre el papel de la tecnología en la educación geométrica, que han ido apareciendo en distintos medios de difusión profesional, con la finalidad de que los resultados de dichas investigaciones puedan convencer al profesorado que los adopte en sus clases y mejore el aprendizaje de su alumnado.

En las actas SEIEM se ha encontrado poca preocupación en este ámbito de investigación, como puede verse en el siguiente listado (ver Tabla 1), que recoge los títulos de las aportaciones sobre educación geométrica y tecnología de los últimos cinco años.

2005	http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas09SEIEM/IXsimposio.pdf
	ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MEDIANTE EXPLORACIONES CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA Ángel Gutiérrez EL SISTEMA TUTORIAL AGENTGEOM Y SU CONTRIBUCIÓN A LA MEJORA DE LAS COMPETENCIAS DE LOS ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS Pedro Cobo y Josep M. Fortuny UN MODELO DE ANÁLISIS DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN UN ENTORNO INTERACTIVO Jesús Murillo y Guillermina Marcos CRITERIOS DE DISEÑO Y EVALUACIÓN DE SITUACIONES DIDÁCTICAS BASADAS EN EL USO DE MEDIOS INFORMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS Juan D. Godino, Angel M. Recio, Rafael Roa, Francisco Ruiz y Juan L. Pareja
2006	http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas10SEIEM/SEIEMX.pdf
	ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA PUESTA EN PRÁCTICA DE UN MODELO DE ENSEÑANZA PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS EN MAGISTERIO Edna González, Gregoria Guillén y Olimpia Figueras, ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL USO DE HERRAMIENTAS CULTURALES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA Jesús Salinas y Ernesto A. Sánchez
2007	http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas11SEIEM/XISimposio.pdf
	UNA METODOLOGÍA PARA POTENCIAR Y ANALIZAR LAS COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y COMUNICATIVAS Jesús Murillo y Guillermina Marcos IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES Y RELACIONES EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA Jesús Salinas y Ernesto A. Sánchez

	TIPOS DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES DEL GRADO 10° EN SANTANDER (COLOMBIA) Jorge E. Fiallo y Ángel Gutiérrez UN MODELO DOCENTE PARA LA FORMACIÓN EN GEOMETRÍA DE MAESTROS EN EDUCACIÓN INFANTIL Miguel R. Wilhelmi y Eduardo Lacasta
2008	http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/SEIEMXII.pdf LA INFLUENCIA DEL ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Nuria Iranzo y Josep M. Fortuny ANÁLISIS DE DEMOSTRACIONES EN ENTORNOS DE LÁPIZ Y PAPEL Y DE CABRI POR ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS. Félix Rodríguez y Ángel Gutiérrez ESTUDIO EX PLORATORIO SOBRE LA ENSEÑANZA DE CONTENIDOS GEOMÉTRICOS Y DE MEDICIÓN EN SECUNDARIA. Sergio Pérez y Gregoria Guillén. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: AVANCES Y PERSPECTIVAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UNA AGENDA DE INVESTIGACIÓN Y PRÁCTICA Manuel Santos
2009	http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII.pdf FUNCIONALIDAD DE JUEGOS DE ESTRATEGIA VIRTUALES Y DEL SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II EN EL APRENDIZAJE DE LA SIMETRÍA EN SECUNDARIA Guadalupe Rodríguez y Verónica Hoyos LA EXPLORACIÓN CON ESPEJOS Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. SOBRE COMPETENCIAS DE LOS ALUMNOS Y SUS PROCESOS COGNITIVOS. ESTUDIO EXPLORATORIO Laura López y Gregoria Guillén

TABLA 1. TÍTULOS DE LAS APORTACIONES SOBRE EDUCACIÓN GEOMÉTRICA Y TECNOLOGÍA DE LOS ÚLTIMOS CINCO AÑOS

Como puede observarse, la media es de tres comunicaciones por año y se vislumbra muy limitado el impacto directo en las aulas del profesorado de matemáticas.

Pasamos ahora a analizar algunas ideas, extraídas del capítulo sobre uso de tecnología y geometría del handbook del PME, editado por Ángel Gutiérrez y Paolo Boero en 2006.

En esta recopilación se afirma que los entornos tecnológicos han creado nuevas formas de ofrecer la realización de actividades geométricas en Educación Matemática. En particular se abordan tres aspectos:

- La naturaleza de la geometría mediada por la tecnología,
- el diseño de tareas y el aprendizaje de la geometría y
- el uso de la tecnología en la enseñanza de la geometría.

Respecto a la enseñanza-aprendizaje de la geometría se remarcen las ideas de Duval (1999), que distingue tres tipos de procesos cognitivos implicados en una actividad geométrica:

- Visualización de procesos, (lo que se relaciona con la interpretación de los diagramas geométricos). En este sentido se justifica el valor de las representaciones gráficas que ofrecen los entornos informáticos.
- Los procesos de construcción de herramientas, (enfoque operativo que se utiliza para identificar sub-configuraciones). Particularmente en el proceso de resolución de problemas de geometría, en el que los estudiantes se enfrentan a la exploración, manipulación directa e interpretación de los datos para hacer emerger estrategias de solución.
- El razonamiento, la conjetura y la prueba, relacionando las representaciones espaciales y conocimientos teóricos.

Cada uno de estos procesos cumple una función epistemológica específica, y éstos están estrechamente relacionados, creando una sinergia cognitivamente necesaria para el aprendizaje de la geometría. Precisamente en esta interpretación de estos procesos cognitivos, se postulan algunos resultados de la tesis de Núria Iranzo, encaminados a favorecer el desarrollo de las competencias visuales, representativas, operatorias y deductivas de los estudiantes cuando trabajan en un entorno de geometría dinámica. Núria Iranzo se centra en la interpretación de los comportamientos de los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría plana que comparan áreas y distancias de polígonos. También diferencia entre la resolución de un problema (el proceso) y la solución del problema (el resultado). Menciona que los estudiantes tienen dificultades en probar la solución de problemas, ya que se requiere la coordinación entre procesos de visualización y de razonamiento. La creencia de que una conjetura es cierta es un prerrequisito para la búsqueda de la prueba, y el entorno de la geometría dinámica es un factor importante de ayuda a los alumnos. Diseña una secuencia instruccional dinámica, teniendo en cuenta el concepto de trayectoria hipotética de aprendizaje (Iranzo et al. 2010, Doorman et

altri 2009) que se lleva a cabo con la ayuda de un entorno tecnológico y el papel de un profesor que dirige el experimento de enseñanza.

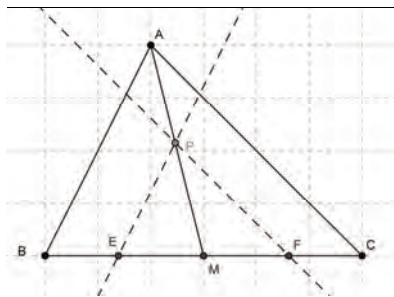
Se puede considerar cada problema del diseño instructivo como un micro-ciclo de aprendizaje, donde se involucran de manera cíclica y en espiral las competencias en los procesos de visualización, modelación (conjetura), instrumentación (inferencia figural) y deducción, con diferentes grados de adquisición de los procesos de instrumentación/instrumentalización.

En particular se distingue entre aprehensión discursiva y aproximación deductiva

Aprehensión discursiva	Aproximación Deductiva
Relación entre la visualización y la argumentación.	Validación mental.
Acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas.	Uso de razonamiento deductivo. Uso proposiciones lógicas para validar una conjetura.

Este trabajo es un ejemplo de cómo la teoría y la investigación pueden apoyar la enseñanza de temas difíciles para los alumnos, mediante la conceptualización y el estudio de la interconexión entre las distintas trayectorias de aprendizaje de los estudiantes en términos de transiciones. El diseño de tareas adecuadas y la gestión del profesor son también importantes para alentar a los estudiantes a ir más allá de la percepción y la verificación empírica en contextos de entorno de geometría dinámica.

Para interpretar los datos, se relaciona la interdependencia entre la tecnología, en este caso con el uso de herramientas de geometría dinámica, el tipo de argumentación ostentado, la estrategia utilizada y la conducta mostrada, tal como se ilustra en la Tabla 2. La tabla 2 representa parte de los diálogos del proceso de resolución del siguiente problema:



En un triángulo ABC, sea M el punto medio de [BC]. Sea P un punto cualquiera de la mediana AM. Trazamos por P paralelas al los lados AB y AC que cortan a BC en los puntos E y F respectivamente.

Qué relación hay entre EM i MF?

Donde hay que situar el punto P para obtener $BE=EF=FC$?

Conducta	Estrategia	Argumentación	Herramienta
37.[....] 38. Marta: Bien, si mueves P la variación es la misma [señala con la mano los segmentos en la pantalla para comparar su variación y escribe las igualdades $BM/EM=BA/PE$ y $CM/FM=CA/PF$. Y como $EM=MF...$] 39. Tutor: No lo dice el enunciado. Esto es lo que debes demostrar. 40. Marta: ¿Pero como lo demuestras si todas las letras son diferentes?. Puedo coger números de aquí para comprobarlo [uso de las herramientas de medida de GGB]. 41. Tutor: intenta considerar el lado común a los dos triángulos. 42. [Marta aplica de nuevo el teorema de Tales considerando el lado común AM de los dos triángulos ABM y AMC]. Obtiene las relaciones: $BM/EM=AM/PM$ y $[MC/MF=AM/PM]$ 43. [Marta deduce la relación $]BM/EM=MC/MF \rightarrow EM=MF$ M punto medio de [BC]	Invalidación de la hipótesis anterior Justifica la conjetura C3 a partir de particularizaciones Mensaje cognitivo de nivel dos Aplicación de teoremas Prueba deductiva (uso de razonamiento deductivo mediante inferencias lógicas) Deducción $42 \rightarrow 43$	Justificación de tipo naïve	Lectura en coordinación con el texto Asociación del enunciado con la configuración

TABLA 2. ESQUEMA PARA INTERPRETAR LOS DATOS

En la tabla 3 se ilustra cómo el uso de la tecnología, las tareas y el profesor pueden modificar el desarrollo de las competencias operacionales y deductivas, tomado como referencia el tetraedro didáctico, que tiene como vértices a los estudiantes, el profesor, la tecnología y la geometría.

Tarea del estudiante	Tecnología	Profesor	Acción mental	Representación	Significado geométrico	Competencia
Dar significado matemático. Utilizar proposiciones.	Arrastre y ventana algebraica/geométrica para conjeturar.	Planificación/ Emisión de mensajes. Produce	Apreensión discursiva Interpretación de conjeturas.	Protocolo de construcción	Necesidad de la prueba Búsqueda de contraejemplos, lemas clave.	Operacional
Validación de conjeturas	Arrastre y ventana Algebraica/geométrica para validar	Verificación de mensajes.	Apreensión operativa Teorización Argumentación	Inferencia Figural.	Prueba deductiva	Deductiva

TABLA 3. SÍNTESIS DE LA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DE UN ALUMNO

En esta línea de trabajo de mejora de las competencias argumentativas con el uso de la tecnología se han desarrollado dos enfoques teóricos.

En el primero, las herramientas, y en particular la tecnología, ofrecen oportunidades para el aprendizaje. El sujeto se enfrenta a limitaciones impuestas por el artefacto y las nuevas posibilidades de las acciones, para identificar, comprender y con las que hacer frente. En términos de la teoría de situaciones didácticas, la herramienta es parte del ambiente o entorno de aprendizaje.

En el segundo enfoque, a raíz de una perspectiva de Vigotsky, las operaciones realizadas con la tecnología pueden estar sujetas a un proceso de internacionaliza-

ción con la orientación del profesor y de los intercambios interpersonales dentro de la clase, en forma de debate colectivo.

Las intervenciones del profesor son esenciales para hacer posible la construcción de una correspondencia entre el conocimiento matemático y el conocimiento construido, a partir de las interacciones con el entorno informático. Según la teoría de la instrumentación (Verillon & Rabardel, 1995), el significado construido por el estudiante al utilizar el artefacto, puede diferir de lo previsto por el profesor. En consecuencia, las intervenciones del profesor son fundamentales para que los significados evolucionen hacia significados culturalmente compartidos del conocimiento matemático. Esta es la aportación del trabajo de investigación de Laura Morera, que se presenta en este simposio sobre momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En el trabajo de Laura Morera se pone de manifiesto que se produce un momento en el proceso de aprendizaje personal, en el que se puede identificar una situación, o al menos, un conato de cambio entre un estado inicial y uno final en el proceso de aprendizaje. En su trabajo se han identificado tres momentos, que se desprenden de un análisis cualitativo de sus datos:

- Generalización de casos particulares, después de un filtraje orquestado por la tutora, dando prioridad al aprendizaje de procesos.
- Enriquecimiento de los procesos de resolución del problema de demostración, en una fase de generación de ideas orquestada por la tutora.
- Refutar una conjetura con visiones distintas. Diferentes alumnos han hecho una comparación y evaluación de las ideas distintas, gracias a la riqueza de la exposición abierta de ideas, y posteriormente la tutora tendrá que orquestar un filtraje adecuado.

Estos "momentos de aprendizaje" corresponden a instantes precisos en que se ha presentado una oportunidad educativa de forma natural, interesante y en su contexto, de manera que el conocimiento se ha podido aprovechar y ampliar a través de una conversación y descubrimiento, tal como se ilustra en la Tabla 4 a modo de ejemplo. Hemos escogido dos primeros momentos significativos desde el punto de vista de procesos de resolución del problema siguiente:

Imaginad que nos contratan en una fábrica, para ayudar a resolver un problema:



Tenían una máquina que nos giraba las piezas de un sitio a otro, como se muestra en la animación anterior, pero la llevaron a arreglar, y ahora que ya funciona

perfectamente, no saben dónde la tienen que colocar para que siga transportando las piezas como lo hacía antes.

Ayudad a los técnicos a colocar la máquina de giro en su sitio. Escribid argumentos para convencer a los técnicos de vuestra solución. Tenéis la ventana del GeoGebra para ayudarlos a resolver la situación.

Una vez recogidos los datos, se han transcrito las conversaciones y las acciones, en una tabla. Las columnas se han creado tomando a los seis alumnos como individuos, teniendo en cuenta también las intervenciones del tutor y agrupando las otras intervenciones en una sola columna. Además, se han hecho tres columnas más, una de contacto con el software, otra de comentarios, para poder ir recogiendo todos los puntos interesantes que se observan y una tercera con los indicios de cambios en el aprendizaje para analizar en una fase posterior y decidir si es un buen ejemplo de momento clave. Hemos indicado los minutos para que se pueda ver el transcurso de la sesión de clase y para que sirva como referencia en la lectura de la transcripción.

Hemos escogido dos primeros momentos significativos desde el punto de vista de procesos de resolución del problema. Uno es directamente influyente en el otro, así los dos son consecutivos en la Tabla 4. Para contextualizar la situación, hay que pensar que la clase se encontraba en un punto en que acababan de conjeturar que el centro de giro de la máquina se situaría en el punto de corte de las mediatrices de los puntos homólogos (Figura 1), pero tenían un caso particular en que encontraban el giro de otra forma, prolongando los segmentos (Figura 2).

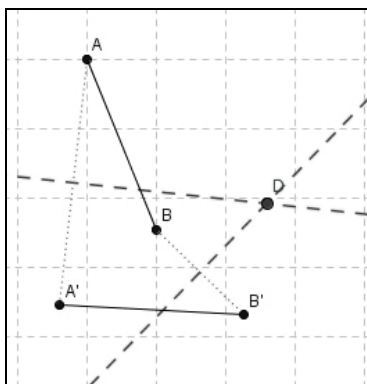


FIGURA 1. DONDE SE CORTAN LAS
MEDIATRICES

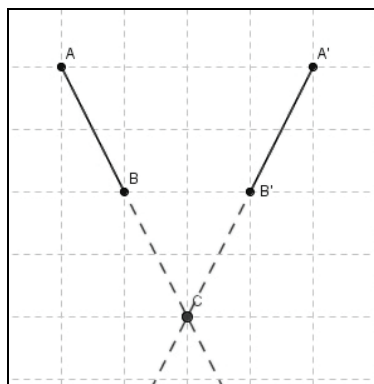


FIGURA 2. DONDE SE CORTAN LAS
PROLONGACIONES

‘Momento clave 1. Generalización de casos particulares’

En la Tabla 4 podemos observar un cambio en el aprendizaje de Meritxell (línea 8), y una evidencia de que su punto de partida (línea 4), no era el mismo que al final. Esta alumna primero empieza diciendo que la conjetura funcionaría para dos segmentos cualesquiera excepto en un caso concreto, pero después ve que se puede considerar un caso particular del general y que no hay necesidad de mencionarlo. Éstas son dos de las características que tenía que cumplir la secuencia identificada para ser momento clave en el aprendizaje.

Además, también ha habido una influencia indirecta de la tutora – mediante la orquestación que hace de la discusión en clase, se encuentra en el punto de filtraje de las diversas ideas que han ido generando los alumnos y que ella ha comparado y evaluado. En este caso se da prioridad al aprendizaje de procesos porque, si nos fijamos, hay errores en el contenido matemático de las ideas de los alumnos, no es cierto que la máquina de giro se pueda colocar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes como sugieren los alumnos, aunque es de esperar que en un filtraje posterior se vaya refinando el contenido matemático. Esta influencia indirecta basada en el “filtering approach” (Sherin, 2002), hace que la orquestación sea crucial en el desarrollo del momento clave. El aprendizaje de los procesos de generalización no se podría haber aprendido si se hubiese cortado la discusión para filtrar los contenidos matemáticos erróneos.

	Min	Altres parelles	Meritxell	Carles (Parella)	Tutora	Índicis
1	0:08				Pero ahora aquí no es mediatra una cosa? Tenemos dos si son 2 segmentos cualesquiera, podemos hacer esto, pero qué otro de propie hay en caso de como de aquí en que hay que hacer una cosa.	
2	0:44			Pues porque se cruzan en todos los puntos, porque en la misma.		
3	0:48				Ya, pero tenemos un comentario que es 2 segmentos cualesquiera y entonces hemos dicho que la mediatriz sería una línea y ahora hay que saltarnos dentro, porque cuando los del 2º comentario en concreto son una cualquiera.	
4	1:00		Pues decimos que en dos segmentos cualesquiera tenemos en este caso.			
5	1:10		Huero, es que cuando la mediatriz en la misma.			
6	1:43	Pues como coinciden en todos los sitios, es como si se cruzaran en todos los sitios, entonces es el 2º caso, pero para todos los sitios de cualquiera de las dos mediatrices.				
7	1:56				El sea que en base tiene cuatro puntos.	
8	1:59		Es que tampoco hace falta poner esto, porque no es que se crucen, pero como son la misma se considera que se cruzan en todos los sitios, por lo tanto, es lo mismo que allí.			Parece que entiende el concepto de generalización porque en el momento que lo encuentran caso particular, ya no hace falta tratarlo a parte.
9	2:07				El sea que lo podemos sacar.	
10	2:09		Si...			
11	2:33				A ver, Elisabet, dime...	
12	2:34	Que si tenemos dos casos que son si se cruzan o si son la misma, también podríamos encontrar que fueran paralelos i que no se cruzaran.				Quiere explotar toda la casuística de las posiciones relativas de las rectas. 1.- Se cortan 2.- Son coincidentes 3.- Son paralelos.

TABLA 4. GENERALIZACIÓN DE CASOS PARTICULARES

Los procesos relacionados con la gestión se pueden ver como momentos clave en el aprendizaje y en particular el proceso de filtrado “filtering approach” (Sherin, 2002). La estructura de las discusiones en el diseño instructivo ha involucrado tres componentes principales:

- (a) la generación de ideas,
- (b) la comparación y evaluación, y
- (c) el filtrado (ver Figura3).

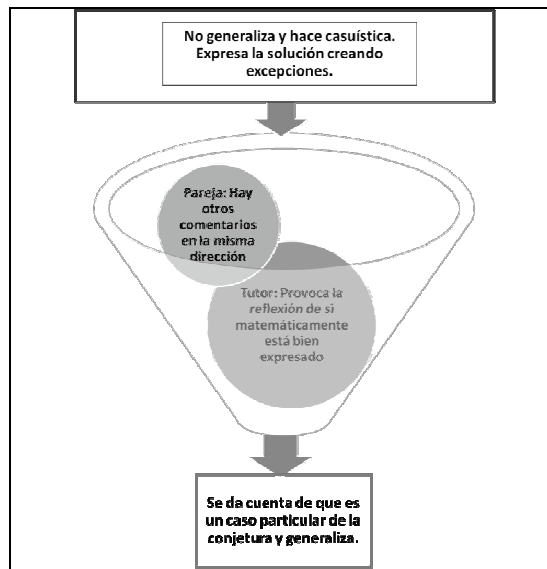


FIGURA3. ESQUEMA DE FILTRAJE EN UN MOMENTO CLAVE

El profesor de la experiencia descrita ha filtrado las ideas, centrando la atención de los estudiantes en un subconjunto de las ideas matemáticas que se han planteado. La esencia del filtrado es que determina la producción de un cambio o reorientación en el estado final de aprendizaje, como en los tres momentos identificados. Un momento clave de aprendizaje es una oportunidad de aprendizaje "aprovechada" por los alumnos, es decir, una oportunidad de aprendizaje en la cual se produce y se hace evidente un aprendizaje "efectivo", en el sentido de evolución de los conocimientos de los alumnos. El cambio de crecimiento conceptual y procedimental, identificado en un momento de aprendizaje, como es el caso de la evolución en el conocimiento sobre procedimientos de los ejemplos citados anteriormente, puede provenir de la negociación de significado, del intercambio de perspectivas múltiples y/o del cambio de nuestras representaciones internas a través del aprendizaje colaborativo.

El uso de la tecnología ha revelado cómo las herramientas dan forma a la actividad matemática, lo que conduce a revisar la epistemología de la geometría y, por supuesto, su enseñanza y aprendizaje.

Rondó en la educación geométrica

En relación con las últimas tendencias a partir de la publicación del libro de Hoyles y Lagrange del seventeenth ICMI study: Technology revisited (2009), la integración de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas no es un asunto trivial. El profesorado y los investigadores son conscientes de la complejidad de la utilización de las TIC, que afecta a todos los aspectos de la educación, incluido el contrato didáctico, los formatos de trabajo, el papel y lápiz y el desarrollo de habilidades y competencias por parte del alumnado.

Un marco teórico, que reconoce esta complejidad, es el enfoque instrumental (Artigue, 2002). Según esta perspectiva, el uso de una herramienta tecnológica implica un proceso de génesis instrumental, durante el cual el objeto o artefacto se convierte en un instrumento. El instrumento, entonces, es la estructura psicológica del artefacto junto con los esquemas mentales, que el usuario desarrolla para tipos específicos de tareas. En estos sistemas, se entrelazan los conocimientos técnicos y el conocimiento de dominio específico (en nuestro caso el conocimiento matemático). La génesis instrumental, en definitiva, implica también la aparición de esquemas mentales y las técnicas para usar el artefacto, en el que están integrados significados matemáticos y la comprensión.

Muchos estudios se centran en la génesis instrumental de los estudiantes y sus posibles beneficios para el aprendizaje. Sin embargo, se reconoce que la génesis instrumental tiene que ser supervisada por el profesor a través de la orquestación de situaciones matemáticas. Con el fin de describir la gestión por el profesorado de los instrumentos individuales en el proceso de aprendizaje colectivo, Trouche (2004) introdujo la teoría metafórica de la orquestación instrumental.

Una orquestación instrumental se define como la organización intencional y sistemática y el uso de los artefactos diferentes disponibles, dentro de un ambiente de una determinada tarea matemática, a fin de orientar la génesis instrumental de los estudiantes. Una orquestación instrumental, en nuestra opinión, consta de tres elementos: una configuración didáctica, un modo de explotación y una actuación didáctica.

Todas estas consideraciones nos llevan a formular los siguientes focos de atención:

- El interés en pensar en recursos más que en tecnologías;
- El interés en pensar en la dialéctica entre sistemas de recursos y sistemas de actividad (Trouche, 2004).

- La necesidad de herramientas adecuadas para el seguimiento de la labor docente fuera y dentro de la clase.
- Tomar en cuenta los aspectos sociales del trabajo de génesis documental (Trouche, 2004).

Ilustramos este último foco profesional con un esquema tomado de Luc Trouche utilizado en una presentación en el Cinvestav 2009 (Figura 4)

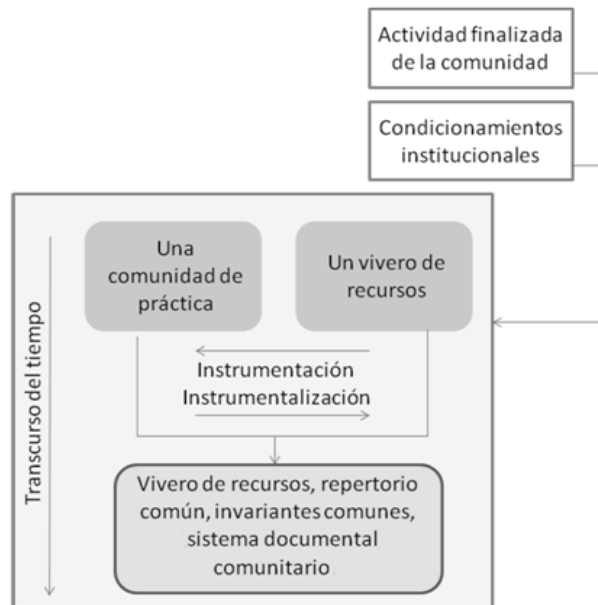


FIGURA 4

El modelo de orquestación instrumental puede ser un marco fecundo para el análisis de las prácticas docentes, en la enseñanza de la geometría con herramientas tecnológicas. Se necesitan ejemplos más elaborados para que los profesores desarrollen un repertorio de orquestaciones instrumentales. Estos ejemplos no sólo podrían ayudar a entender mejor las prácticas de enseñanza, sino también podrían mejorar el desarrollo profesional de los docentes.

Concluimos esta presentación con las ideas de Vigotsky, en el sentido de que el uso de medios auxiliares y la transición a la actividad mediada reconstruyen radicalmente toda la operación mental, del mismo modo que el uso de herramientas modifica la actividad natural de los órganos, y amplía inmensurablemente el sistema de actividad del funcionamiento mental. El funcionamiento mental es concep-

tualizado como un derivado del funcionamiento intermental, que emerge de la internalización y el dominio de los procesos sociales.

“Ni la mano desarmada ni el intelecto abandonado a sí mismo son de mucho valor: las cosas se llevan a cabo con medios e instrumentos” (Vigotsky & Luria, 1929).

Agradecimientos

Trabajo parcialmente finaciado por el proyecto: ‘Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico’, EDU2008-01963. MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Arzarelo, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME 23*, pp. 3-26.
- Doorman, M., Drijvers, P., Boon, P., Van Gisbergen, S., Gravemeijer, K., & Reed, H. (2009). Tool use and conceptual development: an example of a form-function shift. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H., *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 449-456). Thessaloniki, Greece: PME.
- Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Sense Publishers.
- Hoyles, C., & Lagrange, J. (2009). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. Springer.
- Iranzo, N., Fortuny, J. M., & Gutiérrez, A (enviado). Development of operational and deductive competences in a dynamic geometric environment. *Journal for Research in Mathematics Education*.
- Morera, L., & Fortuny, J. M. (2010). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En *Actas del 14º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Lérida,

- Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 205-233.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.
- Vigotsky, L., & Luria, A. (1929). Estudios sobre la historia de la conducta. *Pedagogia*. Moscú.

