

# LA FUNCIÓN DERIVADA A PARTIR DE UNA VISUALIZACIÓN DE LA LINEALIDAD LOCAL

Robles, M.G. (1), Del Castillo, A.G. (1), Font, V. (2)

*Universidad de Sonora* (1), *Universidad de Barcelona* (2)

## Resumen

Las nociones de derivada en un punto y de función derivada entrañan tradicionalmente una dificultad especial para los alumnos. La forma clásica de introducir el concepto de derivada, con la noción de límite en el centro de sus acepciones puntual y funcional, conlleva un alto nivel de complejidad, lo que pudiera explicar el origen de la dificultad mencionada. En este trabajo se presenta el diseño, la implementación y la valoración de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora, que promueve la construcción de significado en torno a la función derivada, con alumnos del primer curso de Cálculo de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, buscando constituir una primera introducción al tratamiento posterior a través de límites, desde la noción de linealidad local.

## Abstract

The notions of derivative in a specific point, and derivative function have traditionally involved a particular difficulty for students. The classic way of introducing the concept of derivative, with the notion of limit as a central aspect in the punctual and functional definition, implies a high level of complexity, which could explain the origin of that difficulty. In this paper, the design, implementation and valuation of a sequence of computer assisted didactic activities is presented and analyzed. This promotes the construction of meaning about the derivative function, all of this being developed with students in a first Calculus course at the Division of Engineering of the University of Sonora, in order to establish an first introduction to the posterior approach through limits, based on the notion of local linearity.

**Palabras clave:** derivada, función derivada, linealidad local, visualización, enfoque onto-semiótico.

**Key words:** derivative, derivative function, local linearity, visualization, onto-semiotic approach.

## Introducción

Diversas investigaciones (Font, 2000; Badillo, 2003) han puesto de manifiesto que la comprensión de la derivada está relacionada con la activación de una compleja trama de funciones semióticas que permita entender la relación entre  $f'(a)$  y  $f'$ . Las dificultades se relacionan con las definiciones de estas nociones usando límites (Artigue, 1998), y no, por ejemplo, con el uso de las reglas de derivación. Además, en el momento del primer encuentro del alumno con  $f'$ , aparece el problema de que su cálculo usando la definición por límites, para algunas funciones elementales, resulta complicado.

Las estrategias para solucionar estas dificultades suelen proponer: 1) posponer la definición de  $f'$  como límite (por ejemplo, introduciendo primero la interpretación geométrica de la derivada) y 2) buscar métodos alternativos para el cálculo de  $f'$  que no se limiten al uso de las reglas de derivación o bien al cálculo directo del límite.

El proceso de instrucción investigado se sitúa en esta línea de ampliar el abanico de posibilidades para promover la emergencia de  $f'$ , que no se restrinja al tratamiento vía límites (Font, 2000). El objetivo de la investigación fue el diseño, la implementación y la valoración de una secuencia didáctica, asistida por computadora, que permitiese un primer encuentro con  $f'$  que no presentase la misma complejidad semiótica que la definición por límites. En concreto se promueve que, a partir de una tabla obtenida con un software, el estudiante construya la gráfica correspondiente y, finalmente, obtenga la fórmula respectiva. Además, se aprovechan los recursos visuales del software para poner al estudiante en contacto con dos nociones esenciales: la recta tangente como la recta que más se parece a la curva en las cercanías del punto de tangencia, y la no derivabilidad puntual de una función.

Hay que precisar que no se propone eludir la definición por límites de  $f'$ , sino brindar al estudiante una experiencia que contribuya a dar sentido a dicha definición en un momento posterior.

La secuencia didáctica se dirige a estudiantes de un primer curso de Cálculo Diferencial de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Estructuramos este trabajo en seis apartados, el primero de los cuales es esta introducción. En el segundo comentamos brevemente el marco teórico, en el tercero se comenta la secuencia de actividades propuestas a los alumnos. En el cuarto comentamos la metodología utilizada, en el quinto comentamos los análisis didácticos realizados (de tipo descriptivo/explicativo y de tipo valorativo). Finalizamos, en el sexto apartado, con consideraciones finales.

## Elementos teóricos

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2002), es el marco teórico utilizado en esta investigación. Para el diseño de la secuencia didáctica se tuvieron en cuenta los trabajos sobre la derivada, realizados en el marco del EOS (Font, 2000), en los que se entiende el cálculo de  $f'$  como un proceso formado por tres subprocesos: 1) Traducciones y conversiones entre representaciones de  $f$ , 2) El paso de una representación de  $f$  a una de  $f'$ , 3) Traducciones y conversiones entre representaciones de  $f'$ . Los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos, son cuatro representaciones de  $f$  y cuatro de  $f'$  (enunciado, gráfica, fórmula y tabla).

El modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010) se ha utilizado para describir, explicar y valorar el proceso de instrucción investigado. Para ello, se ha subdividido en configuraciones didácticas (CD), cada una de las cuales muestra las interacciones en torno a una tarea matemática y finaliza cuando se inicia otra.

El EOS propone un análisis didáctico de procesos de instrucción que considera los siguientes cinco niveles o tipos de análisis:

- 1) Identificación de prácticas matemáticas.
- 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
- 3) Análisis de las trayectorias de configuraciones e interacciones didácticas.
- 4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
- 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El primer nivel de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción. El segundo se focaliza en los objetos (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas, así como los que emergen de ellas. El tercero está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas (nivel 3).

Estas configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas, que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (niveles 1 y 2), sino también otras dimensiones de estos procesos (cognitiva, afectiva, etc.). El cuarto nivel de análisis estudia dicha trama.

Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto nivel se centra en la valoración de la

idoneidad didáctica. Este último nivel se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

## La Secuencia

Como elementos que intervienen en la realización de cada una de las actividades didácticas se identifican los siguientes:

- Applet Linealizador. Escenario interactivo configurado con el Applet Descartes, que constituye el recurso indispensable para la realización del ejercicio.
- Hoja de Trabajo. Documento que contiene una colección de gráficas de funciones, analíticamente no identificadas, cuidadosamente seleccionadas, así como una serie de indicaciones y preguntas que constituyen la guía de trabajo.

A continuación, se presenta una breve descripción de las actividades didácticas que constituyen la secuencia, diseñadas gracias a la configurabilidad del applet Descartes.

### *Actividad 1*

Esta actividad presenta al estudiante una justificación visual de una proposición que es el eje de esta propuesta: la recta tangente es la recta que mejor aproxima a una curva en las cercanías del punto de tangencia. Así, el proceso de acercamiento (zoom) permite mostrar al estudiante que, de todas las rectas que pasan por un punto dado de la curva, la que mejor aproxima a ésta en las cercanías del punto es la que tiene como pendiente la misma que el segmento visualizado y, tras un proceso de alejamiento, que la vista panorámica de esta recta es consistente con la imagen de recta tangente construida a partir de la noción primaria, exclusiva de la circunferencia.

### *Actividades 2 a 6*

El proceso linealizador se aplica a una selección de gráficas que abarcan funciones lineales, funciones cuadráticas, polinomios de grados 3 y 4, funciones trascendentes y la función exponencial natural.

Estas actividades pretenden propiciar que el estudiante aplique la técnica de acercamiento a la gráfica de una función  $f$ , de manera que, a partir de una tabla obtenida mediante el trabajo dinámico realizado con el applet Linealizador, construya la gráfica correspondiente y, finalmente, obtenga la expresión analítica de

una función  $mt(x)$  que, en el proceso de institucionalización, será identificada como la función derivada de  $f$ . Además, con estas actividades se promueve también, aprovechando los recursos visuales del software, un primer contacto con la teoría de máximos y mínimos.

#### *Actividad 7*

En esta última actividad se analizan las gráficas de tres funciones no derivables en uno o más puntos. Para estas funciones la no derivabilidad puntual se asocia a cambios abruptos en la curva, o bien, a la existencia de una recta tangente vertical.

### **Aspectos metodológicos**

El análisis del proceso de instrucción se realizó utilizando los cinco niveles del modelo de análisis propuesto por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010).

La finalidad de la investigación ha sido, primero descriptiva-explicativa y después valorativa. Se trata de una investigación exploratoria ya que no se pretende generalizar a otros contextos o poblaciones y el nivel de análisis es puntual (investiga el estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado).

Uno de los focos de la investigación que se presenta ha sido determinar los significados personales de los alumnos y dar una explicación de sus limitaciones. Los cuatro primeros tipos de análisis propuestos por el EOS han permitido explicar dichas limitaciones. Para conseguirlo, en el tercer nivel de análisis (trayectorias e interacciones didácticas) se dedicó especial atención a la identificación de posibles conflictos semióticos que pudieran ser la explicación de un significado personal limitado respecto a  $f'$ .

Se realizó un estudio de casos, para lo cual se seleccionó a un grupo de cinco estudiantes. Se realizaron dos tipos de triangulaciones: de datos y de expertos.

### **Análisis didácticos**

En el apartado 5.1 comentamos brevemente los cuatro primeros tipos de análisis propuestos por el EOS. En el apartado 5.2, desarrollamos el quinto nivel (valoración de la idoneidad didáctica).

#### **Análisis descriptivo/explicativo.**

Por razones de espacio, la información relativa a los primeros cuatro niveles se condensa en la Tabla 1.

### **Análisis valorativo**

La valoración de la idoneidad didáctica de esta propuesta se desarrolla a partir de los seis criterios de idoneidad propuestos en el EOS, realizando una comparación entre lo esperado a propósito del diseño de la secuencia, y lo observado como resultado de su implementación.

- Idoneidad epistémica. Este criterio permite valorar la calidad del contenido matemático a enseñar, en términos de su grado de consistencia con los significados institucionales de referencia.

*A priori:* Se diseñó un sistema de prácticas que promoviera la construcción significativa de  $f'$ , buscando que, más allá de las técnicas de derivación, el alumno se acercase primero intuitivamente a la perspectiva puntual de la derivada y, desde ahí, acceder a la noción funcional. Por ello, la idoneidad epistémica a priori se consideró alta.

*A posteriori:* No hubo desviación en la implementación respecto a la planificación por lo que la idoneidad epistémica a posteriori también se consideró alta.

- Idoneidad cognitiva. Con este criterio se busca valorar, a priori, si lo que se pretende enseñar se considera como razonablemente cercano a lo que saben los alumnos y, a posteriori, si el aprendizaje efectivamente logrado es consistente con el pretendido.

*A priori:* Los alumnos tenían cierta familiaridad con las distintas representaciones de las funciones principales del Cálculo. Dado que los conocimientos previos eran conocidos y lo que se pretendía explicarles estaba en su zona de desarrollo próximo, la idoneidad cognitiva a priori se consideró alta.

*A posteriori:* Tomando como base el estudio de casos, conforme se avanzó en la secuencia fue observándose la apropiación de gran parte de los significados pretendidos. Las sesiones de retroalimentación e institucionalización promovieron discusiones productivas que contribuyeron al logro de los objetivos, por lo que, desde la perspectiva de los resultados, la idoneidad cognitiva se considera media-alta.

- Idoneidad interaccional. Este criterio busca valorar si la interacción permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que, efectivamente, se produzcan durante el proceso de instrucción.

Configuración didáctica	Prácticas	Objetos	Procesos	Funciones del docente	Funciones del alumno	Conflictos	Normas del docente	Normas del alumno
CD1:	Observación de la linealidad local de $f$ . Construcción de la tabla de $m_f(x)$ . Construcción de la gráfica de $m_f(x)$ .	Tabla de $f'(x)$ . Gráfica de $f'(x)$ .	Problematización. Materialización. Significación. Particularización. Algoritmización. Institucionalización.	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Explora, interpreta y formula.		La hoja de trabajo debería resultar suficiente para el desarrollo de la práctica.	Si no entiendo una instrucción a la primera, puedo pedirle al profesor que me explique lo que quiere que yo haga.
CD2:	Identificación analítica de $m_f(x)$ .	Expresión analítica de $f'(x)$ .	Significación. Materialización. Comunicación. Argumentación. Institucionalización.	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, socializa y argumenta.	Dificultad en el paso del lenguaje gráfico al analítico.	La notación $m_f(x)$ debería resultar consistente con el hecho de que la función a construir expresa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en un punto de abscisa $x$ dada.	Para identificar a la función pendiente de la recta tangente puede utilizarse la notación acostumbrada para cualquier función; es decir, en términos de $f'(x)$ o de $y$ .
CD3:	Identificación analítica de $f$ .	Expresión analítica de $f(x)$ .	Significación. Materialización. Comunicación. Argumentación. Institucionalización.	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, socializa y argumenta.	Dificultad en el paso del lenguaje gráfico al analítico.	Si un alumno entiende bien algo, debe ser capaz de expresarlo por escrito.	Una cosa es entender algo y otra poder expresarlo por escrito.
CD4:	Comparación gráfica de $f$ y $m_f(x)$ .	Complejidad relativa entre las gráficas de $f$ y $m_f(x)$ .	Significación. Enunciación. Argumentación. Institucionalización.	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, formula y argumenta.	Dificultad para argumentar en el contexto gráfico.	Se suponen los contenidos abordados en este curso, por lo que los alumnos no tienen por qué recurrir a conceptos estudiados en el curso de Cálculo de preparatoria.	No es necesario hacer todo este trabajo si ya sabemos que $m_f(x)$ es la derivada.
CD5:	Relación entre el signo de $m_f(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de $f$ .	Noctones elementales del criterio de la primera derivada para máximos y mínimos relativos.	Significación. Enunciación. Argumentación. Institucionalización.	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Explora, interpreta, formula y argumenta.	Dificultad para comprender la indicación.		
CD6:	Comparación analítica de $f$ y $m_f(x)$ .	Complejidad relativa entre las expresiones analíticas de $f$ y $m_f(x)$ .	Significación. Enunciación. Argumentación. Institucionalización.	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, formula y argumenta.			

TABLA 1. RESUMEN DE LOS NIVELES DE ANÁLISIS 1-4

*A priori:* El diseño partió del supuesto de que el material impreso debía resultar suficiente para hacer emerger los objetos institucionales pretendidos, y favorecer que el alumno se apropiara de ellos. Las hojas de trabajo se elaboraron en función de los conflictos semióticos observados durante un pilotaje de prueba, considerados como potenciales para la implementación definitiva, con especial cuidado en cuanto a redacción, brevedad de texto, sencillez de lenguaje, simplificación de la tarea esencial, orientación de las preguntas hacia la respuesta esperada, etc. Se considera que este cuidadoso trabajo de diseño incrementó la posibilidad de resolver los conflictos semióticos que, efectivamente, llegaron a presentarse. La idoneidad interaccional a priori se consideró alta.

*A posteriori:* Los resultados evidenciaron las limitaciones del material impreso. Se hizo necesaria una sesión de retroalimentación, previa a la aplicación de la siguiente actividad, por considerarlo indispensable para avanzar en la secuencia. Así, quedó claro el error de haber programado la etapa de institucionalización para un momento posterior a la aplicación del total de actividades. Además, aunque siempre se tuvo la esperanza de que las sesiones de retroalimentación fueran haciéndose cada vez menos necesarias, conforme se avanzara en las actividades y se lograra una mayor familiaridad con la técnica de acercamiento y el tipo de reflexiones solicitadas, no sucedió así. Desde la primera actividad hasta la última, se hizo patente la necesidad de la discusión grupal para promover la reflexión y la institucionalización. Se considera, pues, que todas estas evidencias apuntan hacia una idoneidad interaccional baja, desde una perspectiva empírica.

- Idoneidad mediacional. Este criterio se encarga de la valoración del grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales involucrados en el proceso de instrucción.

*A priori:* Desde el diseño de la secuencia, se tenía conciencia de las limitaciones asociadas a la disponibilidad de equipo de cómputo individual; es decir, se sabía de antemano que, en el mejor de los casos, sería posible asignar una computadora por cada dos alumnos. Por eso, en relación con el equipo de cómputo, la idoneidad mediacional a priori pudiera calificarse como media. En cuanto al software, al material impreso y al tiempo destinado para cada actividad, la idoneidad mediacional teórica se consideró alta.

*A posteriori:* Implementada la secuencia, se confirmó lo relativo a la disponibilidad del equipo y a lo adecuado del software, pero en cuanto al resto de los recursos se evidenciaron algunas diferencias respecto a lo esperado. Las hojas de trabajo no pudieron minimizar la intervención del profesor. Además, se evidenció que el total de horas consumidas debió ser menor. Por tanto, desde la perspectiva a posteriori, la idoneidad mediacional pudiera considerarse media.

- Idoneidad emocional. Con este criterio se pretende valorar la situación afectiva de los estudiantes, la cual determina su grado de interés o motivación hacia el proceso de estudio.

*A priori:* La certeza de una alta idoneidad emocional estuvo siempre presente durante el diseño de la secuencia. Se supuso que el estudiante debía “impresionarse” ante la posibilidad de observar la linealidad local de una curva, y no sólo asumirla como cierta. Además, se pensó que la interacción con el applet Linealizador, con las hojas de trabajo y con los compañeros sería suficiente motivación para garantizar que el estudiante se involucrara con entusiasmo en la tarea a realizar. Esto determinó que la idoneidad emocional se considerara alta, desde la perspectiva a priori.

*A posteriori:* Las expectativas respecto al aspecto afectivo de los alumnos no se cumplieron. La observación de la linealidad local ni siquiera fue motivo de asombro. Además, la solicitud expresada frecuentemente en las hojas de trabajo, respecto a explicar ampliamente las respuestas, generó inconformidad en gran número de estudiantes. En cuanto a la socialización, en general no se observaron discusiones constructivas en torno a conceptos o posibles respuestas a las hojas de trabajo, sino sólo la intención de responder para cumplir con el compromiso. Todo esto permite explicar que la idoneidad emocional a posteriori se considere baja.

- Idoneidad ecológica. Este criterio pretende valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo escolar, su pertinencia en relación con el entorno, etc.

*A priori:* Se consideró que la implementación facilitaría el posterior tratamiento formal de la función derivada vía límites, en términos de un mayor sentido y más agilidad para desarrollar los contenidos subsiguientes. En este sentido, la idoneidad ecológica teórica se consideró alta.

*A posteriori:* Se cumplieron las expectativas. El poder hacer referencia a la experiencia intuitiva aportada por la secuencia, se tradujo, efectivamente, en una mayor comprensión del acercamiento formal a  $f'$ , lo que redundó a su vez en una mayor rapidez de avance en los temas finales del programa. La idoneidad ecológica se considera alta.

## Comentarios finales

Uno de los objetivos de esta investigación era el diseño y la implementación de una secuencia didáctica que permitiera un primer encuentro con  $f'$  que presentase menor complejidad semiótica que la definición por límites. Este trabajo muestra que esto es posible, desarrollando la idea de que el zoom permite conseguir un medidor de pendientes que facilita obtener  $f'$  utilizando las siguientes representaciones: Fórmula de  $f \Rightarrow$  Gráfica de  $f \Rightarrow$  (zoom) Gráfica de  $f' \Rightarrow$  Tabla de  $f' \Rightarrow$

Gráfica de  $f' \Rightarrow$  Fórmula de  $f'$ . Dada la fórmula de  $f$  podemos graficar la función, después podemos hacer un zoom y calcular  $f'(a)$  utilizando la interpretación de geométrica de la derivada, después hacemos una tabla de valores a partir de la cual representamos la gráfica de  $f'$ , por último se ha de calcular la fórmula de  $f'$ .

El análisis didáctico realizado ha permitido, por una parte, explicar las limitaciones de los significados personales de los alumnos y, por la otra, hacer una valoración del proceso de instrucción que permite concluir, por ejemplo, que éste tuvo una idoneidad cognitiva elevada para los cinco estudiantes que conformaron el estudio de casos. Dicha valoración nos da elementos para una mejora en las futuras implementaciones.

### **Agradecimiento**

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-08120/EDUC.

### **Referencias**

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 1(1), 40-55.
- Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.
- Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.