

# VISUALIZACIÓN Y TALENTO MATEMÁTICO: UNA EXPERIENCIA DOCENTE

**Ramírez, R., Flores, P., Castro, E.**

*Universidad de Granada*

## **Resumen**

Un debate abierto en educación matemática estudia qué relación existe entre visualización y talento matemático. En este artículo describimos una experiencia con alumnos con talento matemático, encaminada a observar la visualización durante la realización de actividades geométricas y a analizar algunas de las dimensiones de la visualización que ponen en juego este tipo de alumnos.

## **Abstract**

The relationship between visualization and mathematical gifted is an open discussion in mathematical education. This article describes an experience with mathematically gifted students. It was designed to observe the visualization during geometry tasks and to analyse some visualization's dimensions that this kind of students showed.

**Palabras clave:** Visualización, talento matemático, enriquecimiento curricular, isometrías.

**Keywords:** Visualization, mathematical gifted, curriculum enrichment, isometries.

## Introducción

Actualmente se destaca la necesidad de extender la atención a la diversidad a los alumnos con talento. El mayor conocimiento de sus cualidades, permitirá diseñar programas de atención a la diversidad y tareas de enriquecimiento que colaboren a su desarrollo.

Una de las cualidades estudiadas en niños con talento es la visualización. Krutetskii (1976) concluyó que no siempre aparecía la visualización de relaciones matemáticas abstractas como componente de la estructura de las habilidades matemáticas de alumnos con talento, aunque el autor la utilizó para clasificar el tipo de talento. Considerando que la visualización es una cualidad que puede desarrollarse, según se deduce de las teorías de Gardner (2001), es interesante que los niños con talento la mejoren y utilicen en su razonamiento matemático.

Partiendo de estas premisas, estamos interesados en estudiar cómo se desarrolla la visualización en niños con talento, analizando qué componentes visualizadores utilizan durante sesiones de enriquecimiento curricular, con la intención de diseñar buenas prácticas docentes para que estos niños amplíen sus cualidades matemáticas.

## Talento matemático

Distintas organizaciones implicadas en la educación han reclamado la importancia de atender a los niños con talento. La OCDE y UNESCO inciden en la necesidad de atender a la diversidad y la NCTM en los Estándares considera a los alumnos con talento dentro de las necesidades educativas especiales.

Villarraga, Martínez y Benavides (2004) señalan la diversidad de términos para referirse a estos alumnos: superdotados, de altas capacidades, talentosos, etc., encontrándose más de cien definiciones de superdotación y sus sinónimos. Interesados en analizar habilidades matemáticas concretas, hemos elegido el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993) para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas.

Blanco, Ríos y Benavides (2004) señalan el enriquecimiento curricular como una estrategia educativa para dar respuesta al tratamiento de estos alumnos. Este enriquecimiento curricular consiste en enseñar nuevos contenidos que no estén cubiertos en el currículo oficial o trabajar en un nivel de mayor profundidad, tratando los temas con un nivel mayor de abstracción y complejidad. Éste es el marco de intervención en el que se desarrolla nuestra experiencia.

## Visualización

La visualización se utiliza con diversas acepciones en las investigaciones. En este trabajo utilizamos la aproximación que hace Gutiérrez (2006), que entiende la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

De los estudios sobre visualización citados por Gutiérrez (1996, 2006), recogemos la recopilación de habilidades psicológicas necesarias para realizar los procesos de visualización realizada por Del Grande (1990), en la que cita distintas dimensiones de la percepción espacial según varios autores y selecciona siete de las destacadas por Hoffer (1977) por su relevancia en el estudio de las matemáticas y la geometría en particular, añadiendo tareas para experimentar con los alumnos. Estas dimensiones de la visualización serán las que analizaremos con detalle en nuestra experiencia docente:

1. Coordinación ojo-motor: coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
2. Percepción figura-contexto: reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
3. Conservación de la percepción: reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura...) aunque cambie de posición y deje de verse por completo.
4. Percepción de la posición en el espacio: relacionar un objeto en el espacio y respecto a uno mismo; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y volteos.
5. Percepción de las relaciones espaciales: identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.)
6. Discriminación visual: identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición
7. Memoria visual: recordar con exactitud objetos o propiedades y relacionarlos con otros. Memoria fotográfica

El estudio de la visualización tiene tradición en educación matemática. Bishop (1983) distingue dos tipos de habilidades: IFI (Ability for interpreting figural information) y VP (Ability for visual processing). En un estudio con alumnos uni-

versitarios de ramas tecnológicas, concluyó que los sujetos presentaban más dificultades en las tareas IFI, sugiriendo para futuras investigaciones la necesidad de entrenamientos para optimizar estas habilidades.

En una revisión posterior, Presmeg (2006), subraya la escasez de estudios sobre visualización. Apunta que los estudiantes apenas usan el razonamiento visual y que se trabaja poco en clase, a pesar de su gran poder para argumentar. Comenta las dificultades que tienen los alumnos para utilizar las imágenes en su razonamiento analítico y que hay pocos aportes empíricos que ayuden a los profesores a diseñar actividades que colaboren a desarrollar la visualización, a superar las dificultades visuales, o a hacer un buen uso de las cualidades visualizadoras. Hay trabajos presentados en la SEIEM que han centrado su atención en la visualización en relación con alumnos deficientes (Giménez y otros, 2004) y análisis epistémicos y cognitivos de la visualización y el razonamiento espacial (Fernández y otros, 2007).

Guzmán (1996) señala que al ser nuestra percepción prioritariamente visual no es de extrañar que el apoyo en el visual esté presente en las tareas de matematización. La visualización aparece de modo natural tanto en el pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos.

Para nuestras intenciones formativas, consideramos importante que los alumnos manejen representaciones visuales, las manipulen y transformen para poder razonar y argumentar sobre ellas. Partimos de que la visualización es una componente fundamental para el razonamiento, especialmente para el geométrico, y percibimos en la literatura de investigación que es necesario diseñar acciones docentes que la desarrollen.

## **Relación entre talento y visualización**

Los estudios de Krutetskii (1976) afirman que los alumnos con talento tienen una mayor predisposición a resolver los problemas mediante técnicas analíticas. Presmeg (1986) indica que eran minoría los alumnos con talento que preferían usar métodos visuales para resolver problemas que pueden ser resueltos por métodos visuales y no visuales. Krutetskii (1976) clasificaba a los alumnos entre geométricos, analíticos y armónicos-abstractos según su preferencia en el modo de resolución de problemas. Krutetskii concluyó que la habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y la habilidad para los conceptos de geometría espacial no eran necesariamente componentes en la estructura de las habilidades matemáticas, aunque su fuerza o debilidad determinaban el tipo de talento.

Más recientemente, Ryu y otros (2007), en una investigación con alumnos con talento matemático en la que analizaban las habilidades de visualización espacial, concluyen que algunos alumnos que manifestaban excelentes características en álgebra u otros campos de la geometría, presentaban dificultades en los procesos de visualización espacial.

Por el expuesto en los puntos anteriores, nos planteamos llevar a cabo una investigación que nos dé pautas formativas para niños con talento que los lleven a desarrollar su visualización, que puedan utilizarla en la resolución de problemas y entender las matemáticas como un contenido amplio que abarca diferentes cualidades y formas de contemplar los contenidos (geometría dinámica además de la estática). El primer paso que hemos dado en este sentido ha sido detectar fenómenos de visualización en niños con talento.

Concretamente el objetivo que nos planteamos es observar o detectar en alumnos con talento, aspectos relativos a la visualización durante un proceso de intervención.

## **Metodología**

### **Sujetos**

Los sujetos con los que estamos trabajando forman parte del proyecto ESTALMAT en Andalucía Oriental, donde se atienden a 25 alumnos, durante dos años, por lo que cada año coinciden dos grupos (de primer y segundo año). Los alumnos son seleccionados mediante una prueba de contenidos matemáticos y unas entrevistas realizadas por los profesores del proyecto. Se aborda en el proyecto un enriquecimiento curricular, en clases impartidas los sábados por la mañana.

El estudio que presentamos se desarrolló en el curso 2008-2009, con 21 alumnos del segundo curso del proyecto (uno de 13 años, cinco de 14 años y quince de 15 años) de los que 2 eran niñas y 19 niños. Coursaban en ese momento 2º, 3º y 4º de ESO. Para realizar las actividades los alumnos actuaron en primer lugar de manera individual, y luego se agruparon en 5 grupos, 4 de 4 y uno de 5 alumnos.

### **Intervención**

En dicho curso impartimos una sesión denominada “Movimientos en el plano”, en la que realizamos actividades de enriquecimiento en geometría dinámica (relativos a movimientos en el plano y el espacio) y de conceptos propios del lenguaje y razonamiento matemático (definición, conjetura, demostración, contraejemplo, inducción, deducción). Para ello, utilizamos recursos interactivos en soporte informático, para trabajar los conceptos geométricos de una manera dinámica e intuitiva y resolver tareas sobre movimientos en el plano. Matemáticamente enfatizamos la geometría dinámica para reconocer los movimientos como transformaciones que dejan invariantes determinados elementos en el plano y en el espacio, siguiendo indicaciones basadas en el “programa Erlanger” expuesto por Klein (Ruiz, 2006).

Planteamos unas actividades secuenciadas cuyo objetivo final era resolver un problema novedoso: obtener una estructura mínima. En el camino hacia ello, los alumnos tenían que definir la igualdad de estructuras bajo movimientos en el plano

y en el espacio, y describir formas en el espacio. La secuenciación de actividades les obligaba a razonar utilizando la visualización, ya que no disponían de las posibles herramientas algebraicas o analíticas para resolverlas.

Por tanto, las actividades reunieron diversas cualidades:

- a) Los conceptos matemáticos tratados (movimientos en el plano, identidad de figuras) y la visualización aparecen de manera funcional.
- b) Abordan contenidos que los alumnos no han tratado en el currículo
- c) Promueven al máximo la puesta en juego y el desarrollo destrezas visualizadoras.

Nos servimos de tres recursos: El juego de las Constelaciones (Ramírez-Uclés y Albendín, 2007), en la que hay que obtener una estructura mínima, para lo que conviene prescindir de figuras equivalentes; El Cubetest (Van den Oever, 2005), para identificar piezas cúbicas, mediante su representación en la pantalla del ordenador, pudiendo mover la imagen realizando isometrías en el espacio; Representar una pieza dada, tal como la ve un monigote. Cada alumno disponía de un ordenador con los recursos.

Las actividades planteadas fueron las siguientes:

- CONSTELACIONES: a) Buscar la mínima estructura formada por diversas piezas; b) argumentar que es la mínima, y c) definir estructuras iguales.
- CUBETEST: a) Identificar cubos dada su representación plana, pero dinámica, y b) definir cubos iguales.
- BLOQUES: a) Dibujar una figura compuesta de bloques adoptando el punto de vista de un muñeco que situamos frente a la pieza, b) Justificar respuesta.

### **Toma de datos**

Los instrumentos de toma de datos fueron hojas de respuestas para algunas de las actividades propuestas, tanto de manera individual como en grupo. Para estudiar el comportamiento de los alumnos, pedimos que sintetizaran por escrito sus apreciaciones, fundamentalmente respecto a la estructura mínima (cuál es y por qué), la definición de estructuras iguales (o equivalentes) y de cubos iguales, así como el dibujo de la pieza expuesta. La definición de estructuras equivalentes y de cubos iguales dio lugar a un trabajo en equipo que también se entregó por escrito.

Para poder interpretar estas respuestas, comenzamos por analizar qué dimensiones de la visualización se ponen en juego en cada actividad, dando lugar a una lista

de “tareas”, que están ubicadas en cada dimensión y actividad, tal como se observa en la tabla 1.

Por ejemplo, la actividad 1.2, pide a los alumnos que *determinen la estructura mínima con seis fichas, la graben en un fichero y expliquen, por escrito, el criterio utilizado para conseguirla*. (El juego se compone de piezas formadas por tres círculos unidos con segmentos, que hay que colocar en una retícula cuadrada, de manera que cada círculo ocupe un vértice de la retícula y sólo puedan solaparse los círculos, ver estructura mínima con 6 fichas en la figura 1).

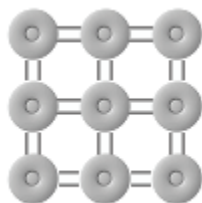


FIGURA 1: ESTRUCTURA MÍNIMA CON SEIS FICHAS

Como ejemplo de codificación de la tabla 1 en la actividad 1.2, la dimensión *Conservación de la percepción* se concretaba en la tarea 3A (ser consciente, y decirlo en su escrito, que la forma de las estructuras es independiente de su posición) o 3B (hablar de cuántos círculos superpuestos puede haber como máximo, o que no hay otra figura sin solapar segmentos).

Actividad / Dimensión	1.2 Estructura con 6	1.6. Definición	2.3 Definición cubos iguales	3.1 Vistas del muñeco	3.2 Comprobar corrección dibujos
<b>1: Coordinación Ojo-motor</b>	1A.- Dibujar estructura mínima en pantalla			1B.-Dibujar piezas. 1C.- Dibujar en perspectiva	
<b>2: Percepción Figura-Contexto</b>	2A.- Aludir a formación a partir de estructura menor.			2C.- Señalar distintos bloques que conforma figura.	2.C
<b>3: Conservación de la percepción.</b>	3A.- Definir igualdad de estructuras por movimientos. 3B. Citar círculos o segmentos superpuestos	3A	3A 3D.-Ver las caras ocultas del dado	3A.- 3D.- 3E.-Dibujar líneas ocultas a la vista.	3.A

<b>4: Percepción de la posición en el espacio</b>	4A.-Citar giros, traslaciones o volteos.	4A	4B.- Identificar cubos cuando proceden de giros.	4C.-Señalar bloques de cada lado. Reconocer punto de vista propio y del muñeco para intercambiarlos	4.A 4.C
<b>5: Percepción de las relaciones espaciales</b>	5A. Describir como enganchan dos fichas. Aludir a dirección de piezas. 5B.-Citar simetrías.	5A 5B		5B 5C. Relacionar distintas figuras de las caras (orientación...) 5D. Pintar muñeco o sistema de referencia. 5E. Dibujar bloques contiguos, direcciones respectivas	5B 5E
<b>6: Discriminación visual</b>	6A Dar criterios de igualdad	6A	6B.- Reconocer cubos iguales.	6C.-Dibujar correctamente las tres partes. Expresar alguna estrategia para comprobar igualdad.	6A 6C
<b>7: Memoria visual</b>	7A.-Dibujar estructura mínima en folio. Ejemplos	7A		7B.-Dibujar la pieza. Usar dibujo como aclaración	7B

TABLA 1: TAREAS OPERATIVAS DE CADA DIMENSIÓN DE VISUALIZACIÓN, PARA ANALIZAR LAS RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES

En las respuestas escritas no podemos certificar que el alumno haya desarrollado las tareas propias a las dimensiones 1 y 7 por lo que vamos a considerar en nuestro análisis solamente las dimensiones de la 2 a la 6.

Como se observa en esta tabla 1, hay tareas operativas que son comunes a varias actividades, lo que nos ha permitido observar tareas ligadas a las actividades, pero también ligadas a dimensiones.

## Resultados

A partir de estas tareas y de las respuestas escritas por los alumnos, elaboramos un registro en la que para cada alumno se señalaba las tareas que había manifestado en cada actividad, destacando en negrita aquellas que aparecen de manera espontánea, es decir, sin que se les haya pedido explícitamente en el enunciado. Observa-



mos en él, por ejemplo, que todos los alumnos encontraron la mínima estructura pedida en la actividad 1.2.

A partir de ese registro, elaboramos la tabla 2 en que se muestran las tareas satisfechas por 4 bloques de cantidades de alumnos: todos, casi todos, pocos y otras situaciones (entre paréntesis se especifica el número de alumnos).

Individual	Todos	Casi todos (más de 15)	Pocos (menos de 6)	Otra situación
	3A, 4A, 6A, 6B	2C, 3C, 4B, 4C, 5E, 6C	2A, 2B, 3B, 3E, 5A, 5B, 5D, 6C	5C (14)
Grupo	Todos	Mayoría (3)	Pocos (1 o 2)	Otra situación
	3A, 4A, 5B, 6A, 6B	4B, 5C	2B, 3C,	2A, 3B, (0)

TABLA 2: RESUMEN DE TABLA DE REGISTRO, AGRUPAMIENTO DE TAREAS POR CANTIDAD DE ALUMNOS

De esta tabla observamos que de manera mayoritaria, los alumnos llegan a manifestar todas las dimensiones en alguna de las actividades. Concretamente las dimensiones 3, 4 y 6 aparecen en las respuestas de todos los alumnos tanto individualmente como en grupos. Respecto a las otras dos dimensiones analizadas, dos aparece salvo en dos alumnos y cinco aparece en todos individualmente, por lo que también se manifiestan en algunas de sus respuestas.

Todos los alumnos manifiestan de manera espontánea las dimensiones 3 y 4 en sus respuestas individuales y las 3, 4 y 5 en las de grupo (la dimensión 6 estaba exigida explícitamente en las actividades).

Generalmente, las definiciones de grupo enriquecen las aportadas individualmente.

## Conclusiones

A partir de los resultados anteriores podemos concluir que de manera natural, al presentarles actividades que exijan procesos de visualización, los alumnos con talento matemático estudiados, han utilizado estrategias visualizadoras.

Aunque todos resuelven la actividad 1.2, que encierra un reto matemático, ninguno expone un argumento que lo justifique completamente, muchos esbozan algunos pasos de la posible demostración. Sin embargo, sus argumentaciones utilizando estrategias visuales son incompletas e intuitivas.

Observamos que estos alumnos razonan visualmente apoyándose en ejemplos concretos limitados. Se hace necesario enseñarles a razonar sobre “casos generales”, distinguiendo todos los posibles. Para este fin, sería importante trabajar técnicas de argumentación visual (contraejemplos, definiciones, caracterización de las propiedades, inducción, analogía, generalización, amplia gama de ejemplos...) para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas.

Las diferencias entre respuestas individuales y de grupo nos llevan a concluir que aunque algún alumno no hubiese puesto en juego de manera individual alguna de dimensión, la reconocía y aceptaba cuando aparecía en las reflexiones del grupo. En otro sentido, hay un grupo en el que prevalece la definición de uno de sus miembros (inseguridad o liderazgo), pese a que los demás habían dado una más precisa.

En la actualidad, estamos continuando el estudio, tomando en consideración estas conclusiones. Para ello hemos seleccionado un periodo más amplio de tiempo, varias sesiones de clase, y una metodología que nos permita un seguimiento más sistemático.

## Referencias

- Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco R. (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago: OREAL/UNESCO
- Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Blanco, R., Ríos, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp.49-60). Santiago: OREAL/UNESCO.
- De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37(6), 14-20.
- Estalmat (2008-2009). Programa para estimular el talento matemático. [www.estalmat.org](http://www.estalmat.org).
- Fernández, T., Cajaraville, J.A. y Godino J.D. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 189-197). La Laguna: Universidad de La Laguna.
- Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada. Las inteligencias múltiples en el siglo XXI*. Barcelona: Paidós.

- Giménez, J., Rosich, N. Latorre, R.M y Muria, S. (2004). Evaluación reguladora y apoyo geométrico al alumnado deficiente auditivo en aulas inclusivas en la ESO. Un estudio de caso. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática. VIII Simposio de la SEIEM*. A Coruña: Universidad de A Coruña.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceeding of the 20<sup>th</sup> PME Conference 1*, pp. 3-19.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.
- Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization*. Palo Alto, California: Creative Publications.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago: University of Chicago Press.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Passow, A. (1993). Nacional/State policies regarding education of the gifted. En K. Sëller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *Internacional Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.
- Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.
- Presmeg, N. (2006) Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Gutierrez, A. y Boero, P. (Ed.) *Handbook of research on the Psychology of mathematics* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Ramírez-Uclés, R y Albendín, V. (2007). Constelaciones. El Juego de los tres colores. *Actas del XIII Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Ruíz, C. (2006). Geometría dinámica. Geometría por las transformaciones. En E. Thibaut (Coord), *Del punto a los espacios multidimensionales* (pp. 9-25). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ryu, H., Chong, Y., & Song, S. (2007). Mathematically gifted students spatial visualization ability of solid figures. En *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference of the International Group for PME*, Vol. 4, pp. 137-144. Seoul: PME.

- Van den Oever, J. (2005). *CUBETEST*. [www.vandenoever.info/software/cubetest](http://www.vandenoever.info/software/cubetest).  
Último acceso: 16/03/2010.
- Villarraga, M., Martínez, P. y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco R. (Eds), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp.25-35). OREAL/UNESCO. Santiago.