¿CUÁNTO SUMAN LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO? CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA REALIZACIÓN DE UNA TAREA MATEMÁTICA

Godino, J.D. (1), **Gonzato, M.** (1), **Fernández, T.** (2)

Universidad de Granada (1), *Universidad de Santiago de Compostela* (2)

Resumen

En el marco de un proyecto de investigación sobre evaluación y desarrollo de competencias matemáticas y didácticas de futuros profesores de educación primaria presentamos resultados parciales sobre dichas competencias referidas a la justificación de una proposición y a la identificación de conocimientos puestos en juego en dicha actividad. Presentamos también una herramienta teórica, cuya apropiación por los futuros profesores estamos experimentando, que facilita la realización del análisis de los conocimientos puestos en juego en la actividad matemática.

Abstract

Within the framework of a research project on the evaluation and development of mathematic and didactic competencies of future primary school teachers we present partial results on these competencies relating to the justification of a proposition and the identification of knowledge put into effect in such activity. We also present a theoretical tool, whose appropriation by future teachers we are experimenting, which facilitate the analysis of knowledge involved in mathematical activity.

Palabras clave: formación profesores, geometría, análisis epistémico, enfoque ontosemiótico.

Key words: teachers education, geometry, epistemic analysis, onto-semiotic approach.

Godino, J.D., Gonzato, M., Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?. Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Introducción

Uno de los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza es el relativo al conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009). Parece necesario que el profesor tenga conocimientos, no solo para resolver las tareas que propone a sus alumnos, sino además para identificar los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en la realización de las mismas. Estos conocimientos permitirán al profesor tener criterios para seleccionar las tareas, elaborar otras relacionadas, prever conflictos potenciales y planificar con sentido sus intervenciones en el aula.

Sin embargo, la noción de conocimiento no deja de ser conflictiva, como lo pone de manifiesto E. Morin, "La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante" (Morin, 1977, p. 18). Parece necesario adoptar modelos explícitos sobre la naturaleza del conocimiento, sus diferentes componentes y variedades si nuestro objetivo se centra en el desarrollo de tales conocimientos.

Los autores que han introducido en las investigaciones sobre formación de profesores la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), usan el término "conocimiento" para referir al constructo cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición para la acción. Otros autores, particularmente en el marco del diseño curricular, suelen usar el término "competencia" para referir a dicho constructo cognitivo general.

En este trabajo abordamos dos objetivos relacionados: 1) describir una experiencia de formación de futuros profesores sobre "matemáticas para la enseñanza" que articula la formación matemática y la reflexión epistémica; 2) presentar una "guía" para el reconocimiento de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas que hace operativos algunos aspectos del "enfoque ontosemiótico" de la cognición matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). El uso de la mencionada guía ayuda a explicitar aspectos relevantes del conocimiento especializado para la enseñanza del contenido matemático.

La experiencia de enseñanza se realiza con un grupo de futuros profesores de educación primaria, que comienzan el estudio del bloque de geometría mediante una situación introductoria en la que se les propone demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es un ángulo llano, e identificar los conocimientos puestos en juego. Este ejemplo nos permitirá, por un lado, evaluar las dificultades que tienen los estudiantes para probar una proposición matemática y reconocer los conocimientos puestos en juego en la solución de la tarea, así como la necesidad y utilidad de aplicar herramientas teóricas que faciliten la realización de tales análisis.

Competencias iniciales de futuros profesores para el análisis epistémico

En el contexto de la formación inicial de futuros profesores en el área de matemáticas y su didáctica hemos planteado la siguiente tarea a un grupo de 60 estudiantes de primer curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada.

i) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo? Justifica la respuesta.

ii) ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de este problema?

La cuestión a) trata de evaluar un aspecto del "conocimiento común" del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009), mientras que la cuestión b) se orienta hacia el conocimiento especializado, ya que consideramos que el profesor debería tener un cierto grado de competencia para hacer explícitos los conocimientos matemáticos requeridos para la realización de las tareas matemáticas.

La tarea fue propuesta como una situación introductoria al iniciar el tema de geometría; en una primera fase los estudiantes debían abordar la tarea de manera personal o trabajando en parejas. Con el fin de tener información de los conocimientos iniciales sobre el tema se les pidió cumplimentar una hoja con las respuestas y entregarla al profesor antes de la discusión colectiva. Se trata, por tanto, de un contexto instruccional cuyo fin es desarrollar tanto el conocimiento matemático como algunos aspectos específicos del conocimiento didáctico, en este caso el reconocimiento de objetos y procesos implicados.

Aunque el análisis que realizamos se apoya en una tarea que requiere la demostración de una proposición geométrica por parte de los estudiantes, nuestra investigación no pretende aportar nuevos conocimientos sobre el campo de la demostración en educación matemática (Harel y Sowder, 2007). Nuestro foco de atención está orientado al desarrollo de competencias de reflexión sobre los conocimientos que se ponen en juego en la actividad matemática. Puesto que las respuestas de los estudiantes a la pregunta b) ¿Qué conocimientos se ponen en juego?, se apoya en el enunciado de la tarea, así como en la justificación dada al apartado a), es necesario describir los resultados obtenidos en dicho apartado.

Síntesis de resultados del apartado a)

Todos los estudiantes recuerdan que la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180º; en algún caso lo expresan como un "ángulo llano", o como "dos rectos". En cuanto a la justificación encontramos los siguientes tipos de respuestas:

- No dan ninguna justificación o dan una justificación no pertinente.
- Reafirmación de la respuesta, 180º.

- Justificación incorrecta (basadas en ejemplos de triángulos particulares):

  "Los ángulos de cualquier triángulo suman 180º porque está formado por uno recto que mide 90º, un ángulo de 60º y otro de 30º".

- Justificación incompleta, parcialmente correcta (intento de hacer una justificación general y deductiva):

  "El triángulo se obtiene de dividir un paralelogramo en dos, donde la diagonal de éste pasa a ser la hipotenusa del triángulo. Como la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es 360º entonces si el triángulo es la mitad de éste, sus ángulos sumarían 180º".

Observamos que casi la mitad de los estudiantes no dan ninguna justificación, no es pertinente, o simplemente repiten la afirmación que tenían que justificar, indicando que el concepto de justificar no es claro para ellos.

Por otra parte, las justificaciones incompletas, parcialmente correctas, corresponderían a intentos de justificaciones deductivas. Los alumnos que dan este tipo de justificaciones no llegan a demostrar la propiedad, o la demuestran con poco rigor. La tabla 1 resume los resultados obtenidos en este apartado de la cuestión.

Tipo de justificación	**Frecuencia absoluta**	**Porcentaje**
No dan ninguna justificación o dan una justificación no pertinente	7	21,9
Reafirmación de la respuesta	7	21,9
Justificación incorrecta	4	12,5
Justificación incompleta, parcialmente correcta	14	43,7

TABLA 1: TIPOS DE JUSTIFICACIONES DADAS POR LOS ESTUDIANTES (N=32)

Estos resultados muestran las grandes dificultades que tienen los estudiantes de esta muestra para probar una proposición matemática, resultados que concuerdan con otras investigaciones (Recio y Godino, 2001), manifestando esquemas personales de prueba (Harel y Sowder, 2007) de tipo "convicción externa" (ritual o autoritario), o de tipo empírico-inductivo.

Síntesis del apartado b)

En la tabla 2 resumimos los tipos de conocimientos mencionados por los estudiantes en las respuestas al apartado b).

Conocimientos mencionados	Frecuencia absoluta	Porcentaje
No mencionan ningún conocimiento	8	25.0
Mencionan algún concepto (ángulo, triángulo, grados, lados, …)	1	3,1
Algún procedimiento (suma de ángulos, suma y resta de números, medida de ángulos, …), y/o proposición (propiedades de ángulos y triángulos, …)	5	15,6
Conceptos y procedimientos	6	18,8
Conceptos y proposiciones	9	28,1
Conceptos, procedimientos y proposiciones	3	9,4

TABLA 2: TIPOS DE CONOCIMIENTOS MENCIONADOS POR LOS ESTUDIANTES (N = 32)

Los alumnos no hacen intentos de describir los objetos reconocidos, como se muestra en los siguientes ejemplos de respuestas:

- Mencionan procedimientos y/o justificaciones:

  “La suma de ángulos”, “Las medidas de los ángulos y las clases de triángulos”.

- Concepto de triángulo, ángulo, y procedimientos:

  “El concepto de triángulo, de ángulo, de grado y de suma (la suma de todos los ángulos)”.

- Concepto de triángulo, ángulo, y proposiciones:

  “En este problema se pone en juego el concepto de ángulo, de lado, de triángulo y el algoritmo de la suma para saber que la suma de los ángulos de cualquier triangulo es 180º”.

- Concepto de triángulo, ángulo, procedimientos y proposiciones:

  “Definición de triángulo, ángulo, suma de ángulos. Propiedades de cualquier triángulo y cálculo de ángulos”.

Observamos que los estudiantes que describen conocimientos puestos en juego al resolver dicha tarea (75%) intentan descomponer el proceso en términos clave, pero son pocos los que especifican el tipo de objeto que lo definen. Por ejemplo, afirman que se usan propiedades de ángulos y triángulos sin describirlas, destacan el concepto de suma de ángulos sin interpretarlo y no describen los procedimientos enunciados.

Como vemos, las respuestas de los estudiantes, futuros profesores de educación primaria, son muy deficientes, tanto en la solución matemática de la tarea como en el análisis, de índole epistémico, que les solicitamos. Observamos que la cuestión sobre la identificación de los conocimientos que se ponen en juego en la realización de la tarea es compleja. ¿Qué es un conocimiento? ¿Qué sabe un alumno que responde correctamente la cuestión? Parece necesario discutir con los futuros profesores posibles respuestas a esta cuestión y proporcionarles recursos teóricos y metodológicos para que progresivamente vayan desarrollando su competencia para el análisis epistémico de tareas escolares.

En la siguiente sección presentamos un modelo para el análisis de los conocimientos implicados en la realización de tareas matemáticas basado en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo lo concretamos en una “guía para el reconocimiento de objetos y procesos” (GROP) que será ilustrada mediante su aplicación a la tarea geométrica descrita. Este análisis nos va a permitir valorar la complejidad de objetos y relaciones que se ponen en juego, y por tanto, explicar las dificultades que han mostrado nuestros estudiantes para resolver la tarea pedida.

Guia para el reconocimiento de objetos y procesos

Una teoría semiótica del conocimiento matemático

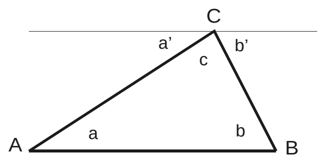
El marco teórico del “enfoque ontosemiótico” en educación matemática constituye una respuesta semiótica sobre el conocimiento matemático, apoyada en una tipología explícita de los objetos y procesos puestos en juego en la práctica matemática. Se trata de dar una respuesta operativa a la cuestión, ¿Qué significa conocer el objeto O?, ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la realización de una práctica matemática? La respuesta se formula en términos de las funciones semióticas que un sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como expresión o contenido de dichas funciones. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una o múltiples funciones semióticas, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

La figura 1 es un diagrama de proceso que proporciona una guía para el reconocimiento sistemático de los conocimientos puestos en juego en una práctica matemática (la solución de un problema o la realización de una tarea). En los siguientes apartados vamos a ejemplificar su uso para analizar la tarea geométrica descrita en la sección 2 y contestar de manera sistemática a la pregunta, ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de la tarea?

Análisis epistémico de la tarea geométrica

A continuación damos una posible respuesta a la cuestión, ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Justifica la respuesta.

La suma es un ángulo llano. En efecto, en la figura adjunta trazamos una recta paralela a la base AB del triángulo que pase por el vértice C; los ángulos a y a´, b y b´ son iguales porque son ángulos alternos internos formados al cortar dos rectas paralelas por una recta secante. En el vértice C hemos hecho la suma de los tres ángulos interiores del triángulo, obteniéndose un ángulo llano.



Procesos de descomposición/análisis:

Es necesario, en primer lugar, proceder a la descomposición del texto en unidades semióticas (términos, frases,…) fijando la atención en elementos lingüísticos claves del texto: triángulo, ángulos interiores, suma, justifica.

Procesos de representación/significación:

El triángulo y sus elementos son representados mediante dibujos y letras, lo que facilita la elaboración de un procedimiento para la suma y justificación de la solución. Se ponen en juego los conceptos de ángulo fijo y general, triángulo fijo y general, congruencia de ángulos; rectas paralelas, ángulo llano.

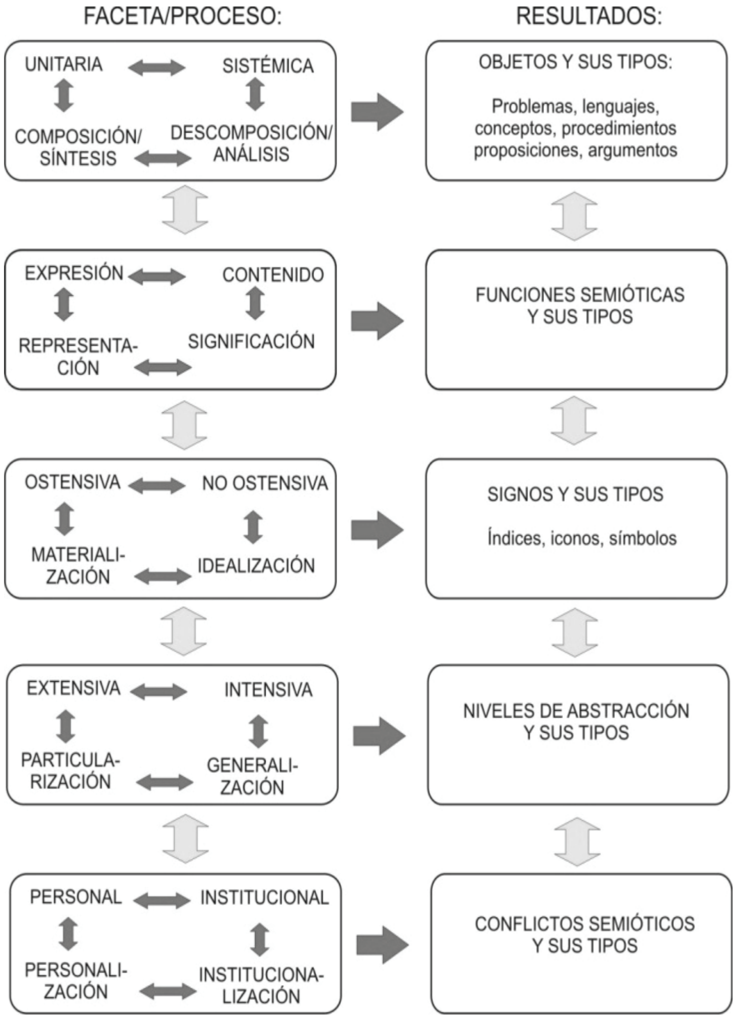


FIGURA 1: GUÍA PARA EL RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS (GROP)

El concepto de suma de ángulos se debe interpretar como una suma de amplitudes angulares, no como la suma de los números correspondientes a sus medidas tomando el grado, o el ángulo llano, como unidad de medida. Se trata de entender la suma de ángulos como la operación de unión de las regiones del plano que definen cada ángulo disponiéndolos de manera contigua con un vértice común y sin solapamientos. El concepto de justificar, que en este caso se requiere que sea una demostración deductiva.

Procesos de materialización/idealización:

El resolutor debe conocer que los conceptos que intervienen en el enunciado y justificación de la proposición son de tipo figural (Fischbein, 1993), lo que implica atribuirle características ideales, esto es, se trata de formas controladas por su definición. Los dibujos son materializaciones de dichos objetos ideales que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" que se hacen sobre ellos.

Procesos de composición/síntesis:

Mediante un proceso de composición de las unidades previamente identificadas reconocemos la puesta en funcionamiento de un procedimiento para sumar los ángulos: disposición contigua, sin solapamientos y sobre un mismo vértice de los tres ángulos interiores del triángulo, así como la correspondiente argumentación que justifica la validez general de la proposición: la suma de los ángulos es un ángulo llano. En el caso presente el procedimiento y su respectiva justificación se concretan en los siguientes pasos:

Trazar una paralela a uno de los lados. Dicha paralela existe y es única por el quinto postulado de Euclides. Reconocer las condiciones de aplicación de una proposición (teorema) previamente aceptada: los ángulos alternos internos son iguales. Puesto que los ángulos a y a', b y b' son alternos internos, son iguales. En el vértice C se ha construido un ángulo llano que corresponde a la suma de los tres ángulos interiores del triángulo, a'+c+b' = a+b+c.

Procesos de particularización/generalización:

Los procesos dialécticos de particularización y generalización se han implementado, combinados con los de materialización e idealización, cuando se ha razonado usando un caso particular de un triángulo y se ha procedido a realizar una de las posibles sumas de ángulos congruentes con los ángulos interiores. El procedimiento y argumentación basada en la suma de ángulos interiores y exteriores admite una generalización fácil para el caso de la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.

Procesos de personalización/institucionalización:

La faceta personal – institucional nos lleva a estudiar las diferentes maneras en que la tarea se puede abordar según el marco institucional en que tiene lugar (marco de la geometría euclidiana, contexto empírico, …) y los conflictos de significados que pueden aparecer. Justificar o probar se debe entender en la tarea pedida en el contexto institucional de la geometría y, por tanto, se requiere elaborar una argumentación deductiva. Para la validez de dicha argumentación se supone que basta con evocar una proposición previamente aceptada.

Análisis similares se pueden realizar con otros procedimientos y argumentaciones posibles que dan respuesta a la cuestión planteada. Por ejemplo, aplicando el “teorema de la vuelta completa” (la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360º). Un procedimiento y argumentación de tipo empírico, y por tanto, no válida desde el punto de vista institucional de la geometría euclidiana, se puede basar en la medida efectiva de algunos casos particulares de triángulos usando un transportador, como se puede ver en un video disponible en internet, http://www.youtube.com/watch?v=pzUUgvTl2qc.

Traza un triangulo cualquiera; mide los ángulos internos con un transportador. Ponlos de manera contigua sin solapamientos y verás que se obtiene un ángulo llano.

Reflexiones finales

Hemos mostrado que el uso de la GROP ayuda a desvelar de manera sistemática la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en una práctica matemática, esto es, los conocimientos (comprensiones, competencias,…) requeridas para su realización, como también a explicar las dificultades de los estudiantes en términos de la complejidad de las conocimientos requeridos. Se trata de superar una visión limitada de la matemática, frecuentemente concebida en términos de conceptos y procedimientos, reconociendo, además, el papel de los distintos lenguajes y significados atribuidos a términos y expresiones, los tipos de justificaciones de propiedades y procedimientos, los procesos de argumentación y generalización.

Este tipo de situaciones de “análisis epistémico – cognitivo” la estamos experimentando con diversos grupos de estudiantes y diferentes problemas matemáticos elementales (Castro y Godino, 2009; Rivas, Godino y Konic, 2009). El objetivo es que el futuro profesor tome conciencia de la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en los procesos de estudio matemático que deberán diseñar, implementar y evaluar. Se trata de diseñar e implementar situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central sea el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional como personal.

Como primeras conclusiones de estas experiencias podemos decir que la actividad es un reto para los futuros profesores, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y procesos, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

El ciclo formativo que estamos experimentando con los futuros profesores incluye, además de las situaciones de estudio matemático de problemas seleccionados y de la reflexión epistémico-cognitiva correspondiente, otros tres tipos de análisis y reflexión (Font, Planas y Godino, 2010): análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica global de experiencias de enseñanza y aprendizaje.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. *CERME 6, Group 4: Algebraic Thinking*. Lyon, France.

Fischbein, E. 1993. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24,139-162.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (1), 89-105.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. [Versión en español, ampliada y actualizada disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino].

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En, F. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.

Morin, E. (1977). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra, 1986.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Rivas, M., Godino, J. D. y Konic, P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM* : *Investigación en Educación Matemática* (pp. 453-462). Santander.