

# LA APARICIÓN SIMULTÁNEA DE LOS SENTIDOS DE USO DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS Y EL CERO EN ALUMNOS DE SECUNDARIA. UN ESTUDIO DE CASO

**Gallardo, A.** (1), **Santos, N.** (2), **Hernández, J. A.** (2)

*CINVESTAV, México* (1), *SEP-AFSEDF* (2)

## Resumen

Basados en un estudio histórico-epistemológico de la emergencia de los números negativos y el cero, identificamos “sentidos de uso” de estos números tanto en autores de textos clásicos matemáticos como en estudiantes de secundaria actuales. El análisis de los sentidos de uso producidos por un alumno competente en el sistema matemático de signos del álgebra, revela los procesos cognitivos que lo conducirán paulatinamente al significado del número entero.

## Abstract

Cognitive processes displayed by students as they solve tasks involved in the transition from arithmetic to algebra are analyzed from an historical epistemological standpoint that has identified sense of use for negative numbers and zero. These sense of use of cognitive productions of subjects, both epistemically and of the students, always emerged together and became inevitable precursors to the numerical extension of natural numbers to integers.

**Palabras clave:** sentidos de uso, dominio numérico, cero, números negativos, números signados.

**Key words:** sense of use, number domain, zero, negative numbers, signed numbers.

## Introducción

A partir de la década de los ochenta, se ha generado un cúmulo considerable de investigación sobre los números negativos en educación secundaria que continua vigente hasta nuestros días. Mencionaremos únicamente algunos investigadores cuyas aportaciones vinculan en forma explícita el estudio de la negatividad y el cero, tema central de nuestro trabajo.

Piaget (1960) señaló la simplicidad de las acciones de agregar o quitar, ya que la significación de la adición y sustracción no requieren de mayor explicación. Sin embargo, al comprar más de lo que se ha pagado, se contrae una deuda; si se retrocede más de lo que se ha adelantado, se realiza una marcha hacia atrás, descrita por el número negativo. Esto da testimonio de la propiedad operatoria del número: no se puede abstraer de los objetos su propia exclusión. Se puede abstraer de la acción y no del objeto. Del cero, señaló que es el número prototipo de una toma de conciencia tardía y de una imposible abstracción a partir del objeto.

Glaeser (1981) realizó un estudio histórico-epistemológico donde identificó obstáculos para la comprensión de los números relativos y el cero en una veintena de autores del pasado. La determinación y superación de estos obstáculos le permitió analizar las dificultades en alumnos actuales.

Freudenthal (1983) propuso para la introducción de números negativos, la elaboración de tablas de adición, sustracción y producto por parte del estudiante.

Estas tablas son consideradas un método inductivo exploratorio consistente en una extrapolación del otro lado del cero.

Peled (1991) identificó niveles de conocimiento respecto a los números positivos, negativos y el cero, por los que transitan los estudiantes. Estos niveles están asociados a dos dimensiones: la discreta, referente a la cantidad y la continua representada por la recta numérica. Señalo como dificultades extremas: la no aceptación de la cantidad nula y la inhibición para cruzar el cero de ambos lados de la recta.

Cid y Bolea (2007) afirman que el cálculo algebraico está caracterizado por la simetrización aditiva y multiplicativa del conjunto de los números naturales. Este hecho permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto. Por ejemplo: la expresión aritmética:  $12 - 4 - 5 + 4$  se convierte en algebraica cuando se utiliza la notación completa:  $(+12) + (-4) + (-5) + (+4)$ . Estas autoras señalan que la propiedad asociativa permite prescindir de paréntesis y la conmutativa justifica el intercambio de  $-4$  y  $-5$  en la expresión anterior transformándola en:  $12 - 4 - 5 + 4 = 12 - 5 - 4 + 4 = 12 - 5 + 0 = 7$ , donde se advierte que la suma de un número con su opuesto es cero.

## El Estudio

Recurrimos al marco teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuesto por Filloy (1999). El carácter local se debe a que este modelo se elabora para explicar los fenómenos producidos en los procesos de enseñanza aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos y sólo se pretende que sea adecuado para las situaciones observadas. El MTL, tiene carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera, es decir, vía otros modelos. Filloy introduce dos términos esenciales:

1) *Sistema Matemático de Signos (SMS)* donde advierte la necesidad de utilizar una noción lo suficientemente amplia de este término con la intención de que sirva como herramienta para analizar los textos producidos por los estudiantes cuando se les enseña matemáticas en los sistemas escolares. Estos textos son concebidos como resultados de producción de sentido. Esta noción de SMS abarca también el análisis de textos históricos de matemáticas interpretados como procesos de cognición pertenecientes a una episteme específica.

Filloy diferencia entre el campo semántico del objeto matemático, esto es, “el significado”, conformado por un sistema estable de generalizaciones socialmente determinado y el campo semántico personal del sujeto que produce “sentidos de uso” que se convertirán en significados vía una interpretación afortunada de la situación problemática planteada.

2) *Tendencias Cognitivas (TC)* consideradas como hechos que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se transita de un estrato de un SMS más concreto a otro más abstracto.

Los sentidos de uso atribuidos a los números negativos y al cero en situaciones de enseñanza, constituyen tendencias cognitivas de los sujetos ubicados en la transición de la aritmética al álgebra. Estos sentidos de uso eventualmente conducirán a la apropiación del significado del número entero. Este acercamiento semiótico, permitió analizar la evolución de los Sistemas Matemáticos de Signos, donde emergieron los significados y sentidos de las producciones cognitivas de sujetos tanto epistémicos como estudiantes actuales.

Basados en el trabajo de Piaget (1960), Filloy y Rojano (1984) recurrieron al método histórico-crítico como componente teórico metodológico para analizar los problemas de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. El método histórico-crítico en la matemática educativa, se caracteriza por recurrentes movimientos de ida y vuelta entre el análisis de textos clásicos de la historia de las matemáticas, y el trabajo empírico dentro de los sistemas educativos.

Apoyándose en los trabajos anteriores, Gallardo (1994) realizó una investigación histórica sobre los antecedentes de los números negativos en el contexto de las

ecuaciones algebraicas. La historia se inicia en la Antigüedad y termina en la segunda mitad del siglo XIX, cuando la controversia sobre los números negativos se resuelve de manera definitiva en el ámbito matemático. Es importante aclarar que fue indispensable una revisión bibliográfica a través de los siglos, ya que la problemática de los negativos no se encuentra ubicada localmente en una determinada etapa histórica. Paralelamente a esta indagación histórica llevó a cabo un estudio empírico donde encontró las condiciones bajo las cuales la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros es alcanzada por alumnos de secundaria. Tanto en el ámbito histórico como en el empírico, identificó “los sentidos de uso” de los números negativos descritos a continuación:

- *Número sustractivo*. Donde la noción de número se subordina a la magnitud. En la resta de dos cantidades  $a - b$ , siempre  $b$  será menor que  $a$ , donde  $a, b$  son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario a nivel de la operación de sustracción.
- *Número signado*. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
- *Número relativo*. Cuando se concibe la idea de opuestos, en situaciones discretas así como la idea de simetría en situaciones continuas.
- *Número aislado*. Cuando se acepta un número negativo como resultado de una operación o solución de un problema o ecuación.

La etapa empírica de la investigación anterior, advirtió de la vinculación de los números negativos con distintas manifestaciones del cero. Con el propósito de profundizar, Gallardo y Hernández (2006) recurrieron nuevamente al método histórico crítico, y realizaron otro estudio desde la antigüedad hasta la segunda mitad del siglo XIX, analizando con mayor detalle lo investigado en Gallardo (2002). Como contraparte diseñaron un nuevo estudio empírico con alumnos de secundaria e identificaron y dieron nombre a los "sentidos de uso" siguientes:

- *Cero nulo*, “no tiene valor, es la nada, el vacío”;
- *Cero implícito*, no aparece escrito, es verbal y utilizado durante el proceso de resolución de la tarea;
- *Cero total*, está formado por parejas de opuestos ( $+n, -n$  con  $n \in \mathbb{N}$ );
- *Cero aritmético*, surge como el resultado de una operación aritmética;
- *Cero origen* es localizado sobre la recta numérica o bien como un elemento que separa los números positivos de los negativos;
- *Cero algebraico*, emerge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación.

Los análisis empíricos de las investigaciones de Gallardo (1994, 2002) y Gallardo y Hernández (2006) compartieron los mismos instrumentos metodológicos, a saber, elaboración de cuestionarios con el propósito central de explorar la operatividad con números negativos y el cero. Se eligieron a estudiantes para entrevistas de corte piagetiano individuales y videograbadas. Se seleccionaron " alumnos extremos", esto es, los que habían demostrado un mayor o menor desempeño escolar. Se tomó en cuenta el dominio del lenguaje verbal o su dificultad con el lenguaje natural. El contenido de las entrevistas fue entresacado de los temas de los cuestionarios.

La conjugación de los resultados de Gallardo (2002), Gallardo y Hernández (2006) y Hernández (2009) permitieron identificar la aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en textos históricos y en tareas propuestas a estudiantes de secundaria.

### Estudio de caso

En este artículo se analiza únicamente el caso del alumno de mejor desempeño de una población de 120 estudiantes de 12 a 14 años de edad. Estos alumnos conocían las operaciones elementales de número negativos y habían resuelto ecuaciones de primer y segundo grado, así como problemas sencillos de enunciado verbal. Cabe aclarar que esta población estudiantil no había recibido enseñanza formal sobre el conjunto de los enteros. El alumno fue elegido por ser el más competente en el SMS del álgebra e identificó todos los sentidos de uso mencionados en las tareas propuestas durante la entrevista.

A continuación, se transcriben algunos extractos del diálogo de la entrevista, seguidos por un análisis del mismo. El entrevistador se designa por la letra E y el estudiante con la letra A. Los renglones se enumeran como  $R_1, R_2, \dots, R_n$ .

**Tarea 1:** Si a un número le restas el mismo número ¿qué resultado obtienes?

$R_1$  A: *Cero.*

$R_2$  E: *¿Por qué cero?*

$R_3$  A: *Porque, en este caso, se le resta el mismo número por lo cual no hay resultado... si le restara un número más grande sería negativo y si se le restara un número más chiquito sería positivo...aquí dice que se resta el mismo número...por ejemplo  $5 - 5$  es cero.*

$R_4$  E: *¿Por qué dices que "no hay resultado"?*

$R_5$  A: *Porque es cero, cuando tienes algo y quitas ese mismo algo...ya no te queda nada...es como si no hubiera pasado nada.*

R<sub>6</sub>E: *¿Me podrías dar otro ejemplo?*

R<sub>7</sub>A: *Tengo una manzana y me roban la manzana...no me queda nada, tengo 5 pesos me gasto 5...no me queda nada y así.*

R<sub>8</sub>E: *En ese caso ¿necesitas el cero?*

R<sub>9</sub>A: *Depende.*

R<sub>10</sub>E: *¿Cómo que depende?*

R<sub>11</sub>A: *Si me preguntan de números, sí se necesita el cero, por ejemplo si me dicen tienes 3 pesos y te gastas 3 pesos, tengo que decir que me sobran cero pesos...o también puedo contestar nada...en el caso de la manzana...tengo una manzana y me la como, ¿cuántas me sobran?... puede ser... ninguna, nada...*

R<sub>12</sub>E: *¿Podrías decir con un número lo que te sobra de manzanas?*

R<sub>13</sub>A: *Sería...cero...cero manzanas...Si, yo creo que si se puede...pero lo correcto es nada o ninguna manzana.*

### ***Análisis de la Tarea 1***

En R3, A afirma: “*no hay resultado*”. Reconoce el cero nulo ya que lo nombra pero no lo representa. Utiliza primero un SMS verbal y después ejemplifica la tarea en un SMS aritmético: “*5 – 5 es cero*”. Surge el número sustractivo. Advierte el cero origen al separar los números positivos de los negativos.

En R5, verbaliza el cero nulo: “*ya no te queda nada*”. Emplea un SMS algebraico verbal: “*Tienes algo y le quitas ese mismo algo*”.

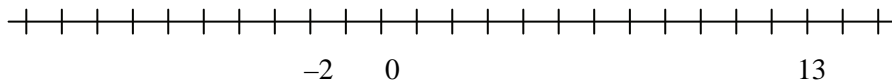
En R7, ejemplifica la tarea utilizando números relativos en contexto: “*Tengo una manzana y me roban la manzana*”. De nuevo surge el cero nulo: “*no me queda nada*”.

En R11, reconoce que “*necesita el cero cuando le preguntan de números*”. Esta afirmación advierte que la nada y el cero no son sinónimos para él. En el contexto denario menciona “*tengo 3 pesos y me gasto 3 pesos, me sobran cero pesos*”. Surgen los números relativos y el cero aritmético.

En R13, regresa al contexto de manzanas. Reconoce que puede responder cero manzanas pero “*lo correcto es nada o ninguna manzana*”. Predomina el lenguaje natural de “*nada*” o “*ninguna*” sobre el lenguaje matemático: “*cero*”.

**Tarea 2:**  $13 - 15 =$ 

R<sub>14</sub> A: (Escribe):  $13 - 15 = -2$ ...*el resultado es dos negativo...si lo hago en la recta sería:*



R<sub>15</sub> E: *¿Cómo la resolviste?*

R<sub>16</sub> A: *Primero la vi como una resta, la hice al revés 15 menos 13 son 2 pero es negativo porque el 15 es negativo. En la recta, primero pongo el cero, porque a partir de ahí voy a contar...tengo el cero, cuento 13 y pongo el 13, de ahí cuento 15 pero en sentido contrario...la cuenta llega primero al cero, ahí van 13 - 13 es cero y luego al 2 negativo para completar los 15, por eso el resultado es dos negativo.*

R<sub>17</sub> E: *¿Por qué colocas ahí el cero? (señalando en la recta numérica).*

R<sub>18</sub> A: *El cero es el número que divide a la recta en dos partes, para un lado están los números positivos y para el otro los números negativos.*

**Análisis de la tarea 2**

En R<sub>14</sub>, identifica el número negativo aislado:  $-2$ . Con el propósito de verificar el resultado, recurre espontáneamente a otro SMS: la recta numérica.

En R<sub>16</sub>, menciona que la expresión  $13 - 15$  es una resta. Aunque no la escribe, advierte la equivalencia sintáctica:  $13 - 15 = 13 + (-15)$  ya que menciona el número signado: “*el 15 es negativo*”. Sobre la recta sólo marca el minuendo 13 y el resultado  $-2$ . No simboliza la operación de sustracción sino solamente verbaliza: “*...cuento 15 pero en sentido contrario*”. Identifica el cero implícito asociado al número sustractivo, que en lenguaje escrito hubiera quedado expresado como:  $13 - 15 = 13 - 13 - 2 = 0 - 2 = -2$ .

En R<sub>18</sub>, define el cero origen: “*número que divide a la recta en dos partes, para un lado están los números positivos y para el otro los números negativos*”. Obsérvese que el cero origen da cabida a los números relativos.

**Tarea 3:**  $-9 - (-9) =$ 

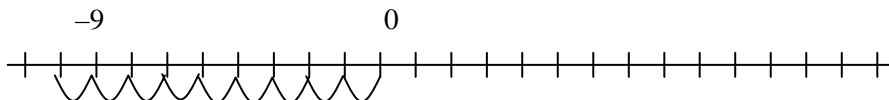
R<sub>19</sub> A: *Seria nueve menos nueve... cero*

R<sub>20</sub> E: *¿Por qué cero?*

R<sub>21</sub> A: *Porque al restarle negativo nueve a negativo nueve, es como si restaras nueve positivo a nueve positivo...el resultado es cero.*

R<sub>22</sub>E: *Escribe lo que me estás diciendo.*

R<sub>23</sub>A: *(Escribe):  $-9 - (-9) = (+9) - (+9) = +9 - 9 = 0$ . En la recta sería (dibuja):*



*Es cero, porque es como si fuera al negativo 9 y regreso 9...llego al cero, o también negativo 9 y le quito negativo 9...me queda cero.*

R<sub>24</sub>E: *Explícame lo que dices.*

R<sub>25</sub>A: *Es una resta y la resta es de quitar, si tengo negativo nueve y tengo que quitar negativo 9, se los quito y no me queda nada o cero. También se puede ver como una suma...tengo negativo 9... bueno por ser una resta de un número negativo, éste  $[-9]$  se cambia a más y queda (escribe):  $-9 + 9 = 0$ .*

### **Análisis de la tarea 3**

En R19, emerge el número sustractivo y el cero aritmético: “*nueve menos nueve...cero*”. En R21 reconoce números signados y número relativos al verbalizar una equivalencia sintáctica de expresiones.

En R23 escribe lo que afirmó en R21: “ $-9 - (-9) = (+9) - (+9) = +9 - 9 = 0$ ”.

Surge el cero total: “ $9 - 9 = 0$ ”. Además, cambia al SMS de la recta numérica para verificar su respuesta. En ésta localiza el minuendo y el resultado pero no representa la operación de sustracción sobre la recta sino que únicamente verbaliza la acción contraria: “*y regreso 9...llego al cero*”. Identifica el cero origen.

En R25, considera la sustracción como la acción de quitar y aparece el cero nulo: “*...no me queda nada o cero*”. Advierte la existencia de una equivalencia entre las operaciones de suma y resta de números relativos.

**Tarea 4:** *¿Qué número multiplicado por 5, sumado a 65 y todo dividido entre 13, da como resultado 5?*

R<sub>26</sub>A: *Primero tengo que poner la ecuación...puedo poner 5 más 65 entre 13 igual a 5.*

R<sub>27</sub>E: *Pero ¿por qué número vas a multiplicar el 5?*



R<sub>28</sub> A: *Si...multiplicamos el 5 por una letra...la que sea...entonces sería...5x más 65 entre 13 sería igual a 5. (Escribe):*  $\frac{5x + 65}{13} = 5$

R<sub>29</sub> E: *¿Cómo utilizamos eso para resolver el problema?*

R<sub>30</sub> A: *...Tengo que dejar a la x sola...multiplicando sería (escribe):*

$$5x + 65 = 5 (13)$$

$$5x + 65 = 65$$

$$5x + 65 - 65 = 65 - 65$$

$$5x + 0 = 0$$

$$5x = 0$$

*...¿la respuesta puede ser cero?*

R<sub>31</sub> E: *Pero no has dejado sola a la x.*

R<sub>32</sub> A: *El resultado es cero.*

R<sub>33</sub> E: *Tú mismo me dijiste que tenías que dejar sola a la x, aquí [5x = 0] no está sola.*

R<sub>34</sub> A: *No entiendo...si ya es cero... ¿para qué le sigo?*

R<sub>35</sub> E: *¿Y el 5 qué pasa con él?*

R<sub>36</sub> A: *Puedo hacer (escribe):*  $5x = 0; \frac{5x}{5} = \frac{0}{5}$

*x es igual a...¿cero entre 5 es cero?*

R<sub>37</sub> E: *¿Por qué dudas?*

R<sub>38</sub> A: *Es que cero entre cinco es cero...de todas maneras el resultado es cero...y lo podemos comprobar...0 por 5 es 0 más 65 son 65 entre 13 es 5 y el resultado es 5...está bien...el resultado es cero.*

#### **Análisis de la tarea 4**

En R26, verbaliza el SMS algebraico: “poner la ecuación”; aunque sólo opera en los números del enunciado del problema, es decir, regresa al SMS aritmético.

En R28, a sugerencia del entrevistador, recupera el álgebra: “si multiplicamos por una letra...la que sea”.

En R30 resuelve la ecuación diciendo al principio del proceso: “...tengo que dejar la x sola...”.

En R32 advierte que la expresión  $5x = 0$ , tiene como resultado, al cero (no menciona la palabra solución). Por esta razón ya no quiere continuar el proceso. El cero inhibe la inversión de operaciones, a pesar de haber afirmado en R30: “*tengo que dejar la x sola*”. Surge el número sustractivo y el cero aritmético: “ $65 - 65 = 0$ ”.

En R36, a insistencia del entrevistador escribe:  $5x = 0$ ;  $\frac{5x}{5} = \frac{0}{5}$ . Sin embargo A insiste en no continuar porque vislumbra que el resultado es cero. No llega a escribir  $x = 0$ , aunque verifica espontáneamente la solución nula en la ecuación. Emerge el cero algebraico.

Otra línea de investigación hermanada con los trabajos anteriores, fue la construcción de número, variable y función en estudiantes de bachillerato, 15 a 17 años de edad, enfrentados a problemas de variación continua, Rubio, G.; Del Castillo, A.; Del Valle, R. y Gallardo, A. (2008). En esta indagación se amplió la producción de sentidos de uso a número ordenado y parámetro negativo.

Además, actualmente, nos hemos dirigido a profesores de Educación Básica para proponerles una perspectiva histórica en la introducción de los números negativos y el cero, Gallardo, A., Santos, N.; y Hernández, A. (2009).

## Reflexiones finales

De las evidencias encontradas en el Estudio de Caso, podemos afirmar lo siguiente:

Se observó la aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y del cero en los distintos SMS considerados por A.

Aunque el estudiante haya identificado todos los sentidos de uso de los números negativos, presenta dificultades en “el cero aritmético” ya que la nada no siempre conduce a la aceptación del número cero, depende del contexto (tarea 1).

Cuando el segundo miembro de una expresión algebraica es cero, A inhibe el proceso de inversión de operaciones y no llega a expresar por escrito la solución nula. Esta es aceptada solamente vía la verificación espontánea del valor cero en la ecuación (tarea 4). El SMS de la recta numérica, permite aflorar el cero origen en el proceso de resolución en las tareas 3 y 4. Sin embargo, debido a que A no ha advertido la dualidad de la sustracción: quitar y completar a, no logra identificar el desplazamiento sobre la recta. El estudiante no supo preguntarse: ¿cuánto le falta a 15 para llegar a 13? A solamente concibió restar como quitar (tarea 2).

A descubrió equivalencias sintácticas que aunque no las identificó como tales, contribuyeron a la resolución de las tareas 2 y 3.

A realiza cálculos algebraicos que reducen las dos operaciones aritméticas de suma y resta a una adición algebraica. El no había recibido enseñanza al respecto. Se observa que el uso competente del SMS del álgebra, conduce a la simetrización aditiva de los naturales ( $\mathbb{R}_{23}$ , tarea 3). Es en el cálculo algebraico donde el estudiante se apropia paulatinamente del significado de número entero.

Cuando el estudiante concibe cantidades opuestas, reconoce al negativo como resultado de una operación o solución de una ecuación y acepta el cero aritmético y el cero algebraico, se encuentra en condiciones de extender su noción de número, más allá de los familiares números naturales.

La “nada” y el “número cero” no son sinónimos para A (tarea 1). El tránsito del “vacío de la representación a la representación del vacío” no es trivial.

Cabe señalar que el problema esencial de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no se encuentra únicamente en la comprensión de sus contenidos, sino en la forma que se llevan a cabo los procesos de abstracción y generalización, esto es, la separación del conocimiento matemático del resto del conocimiento humano. De la separación inadecuada surge la artificialidad de las matemáticas para el sujeto. Estos hechos deben ser reconocidos por el profesor.

## Referencias

- Cid, E.; Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *II Congreso Internacional sobre Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 1 – 16. UZES. Francia.
- Fillooy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Gallardo (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 49: 171-192, 2002. Kluwer Academic Publishers.
- Gallardo and Hernández (2006). The Zero and Negativity Among Secondary School Students. *Proceedings of the XXX PME*, Charles University, Prague, Czech Republic. Vol. 3, pp. 153 – 160.
- Glaeser, A. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des mathématiques*. Vol. 2, No. 3, pp. 303 – 346.

- Hernández, A. (2009). *El cero y la negatividad*. Doctoral Dissertation. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN., México.
- Peled, I. (1991), Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability, *Proceedings of the 15th International Conference of PME*, Assisi (Italia), 145- 152.
- Piaget, J. (1960). *Introducción a la epistemología genética. I El pensamiento matemático*. Biblioteca de Psicología Evolutiva, Paidós, Buenos Aires, Argentina.
- Rubio, G.; Del Valle, R.; Del Castillo, A.; Gallardo, A. (2007). Producción de Sentidos para los Objetos Algebraicos de Número, Variable y Función al Resolver Problemas de Variación Continua. Evidencias Empíricas sobre Nuevos Sentidos de Uso del Número Negativo. En Camacho, M. et al. (Eds.). *Memorias del XI Simposio de la SEIEM*. Universidad de la Laguna. Tenerife, España, 181 – 188.