

# EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO NECESARIO PARA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CONTINUA

**Fernández, S., Figueiras, L.**

*Universidad Autónoma de Barcelona*

## **Resumen**

La propuesta teórica que se presenta atiende la influencia del profesorado de matemáticas en la transición del estudiante de primaria a secundaria. Desde una perspectiva de continuidad en la Educación Matemática y mediante la revisión bibliográfica de investigaciones previas, la relevancia del papel del profesorado en la transición aparece eclipsada por el interés hacia el estudiante o las políticas educativas. El objetivo de este trabajo es centrar la atención en la importancia del conocimiento del profesor durante la transición, tomando como marco de referencia el Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008). Dentro de este contexto, la concreción y el refinamiento del constructo Horizon Content Knowledge nos permite atender la problemática de la transición desde la perspectiva del conocimiento del profesorado.

## **Abstract**

This theoretical work attends the influence of teachers of mathematics in the transition from primary to secondary school. From a perspective of a continuous Mathematical Education and through a previous research review, the recognised importance of the role of teachers in transition is overshadowed by the interest to the student or educational policies. The aim of this work is to focus attention on the importance of teacher knowledge during transition, using as a frame of reference the Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames and Phelps, 2008). Within this context, the refinement of the construct Horizon Content Knowledge allows us to attend transition to secondary mathematics from the perspective of teachers' knowledge.

**Palabras clave:** Transición, profesorado, Mathematical Knowledge for Teaching, Horizon Content Knowledge.

**Key words:** Transition, teacher, Mathematical Knowledge for Teaching, Horizon Content Knowledge.

## Introducción

Tendencias actuales en Educación Matemática consideran el papel del profesor y los estudiantes desde una perspectiva holística, teniendo en cuenta la adquisición de la competencia matemática de manera continuada. Esta continuidad se ve particularmente alterada en momentos de transición de etapa. Este trabajo se centra en el papel de los profesores de matemáticas en la transición de primaria a secundaria con el propósito de lograr una mejor comprensión de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y su práctica profesional durante dicha transición. A este respecto, el marco teórico-práctico desarrollado por Ball, Thames, y Phelps (2008) nos ofrece una base teórica para abordar nuestro trabajo: el llamado Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps Sleep y Ball, 2008) es un conjunto de conocimientos de la materia y la pedagogía necesarios para llevar a cabo con éxito el trabajo de enseñar matemáticas. Dentro del MKT estos autores distinguen el sub-dominio Horizon Content Knowledge (HCK), que se refiere al conocimiento de lo anterior y posterior al nivel que se enseña, y que resulta particularmente relevante en nuestro trabajo. En el contexto español, la investigación en formación del profesorado ha sido especialmente fructífera y continúa siéndolo en la actualidad (Llinares, 2006, 2009, Godino, 2009, 2009b, Rico 1998, 2004). En particular, las aportaciones teóricas de Godino (2009) resultan de obligada referencia, en tanto que analizan el conocimiento del profesor identificando ciertas limitaciones del modelo de MKT. Sin embargo, no hemos encontrado que se haya abordado desde un punto de vista conceptual la atención específica a la transición y de manera explícita a la conexión del conocimiento matemático a lo largo de diferentes etapas. Sí hemos encontrado este punto de partida en el concepto HCK que propone el marco de Ball et al. (op cit). Este hecho, además del énfasis en el conocimiento matemático del profesor como punto de partida, han sido fundamentales en la elección del marco teórico que describimos aquí.

Así pues, el objetivo de nuestra investigación es el enriquecimiento del concepto de HCK en el contexto particular de la transición de primaria a secundaria, tratando cuestiones tales como: ¿Qué características debe tener un profesor de primaria o de secundaria con el fin de garantizar una transición continua? ¿Cuáles se refieren específicamente a los conocimientos matemáticos? ¿Hasta qué punto estas preguntas ayudan a definir el HCK y su lugar en el marco del MKT? ¿Cómo se refleja el HCK en la práctica cotidiana de los docentes, en cualquier etapa? ¿Los programas de formación de docentes deben considerar el HCK específicamente? Lejos de ofrecer respuestas completas a estas preguntas, nuestro objetivo es dar algunas sugerencias para abordar en futuras investigaciones y ampliar la conceptualización de la HCK con el fin de utilizarlo como una herramienta teórica para abordar la transición

## **Transición y horizon content knowledge**

De nuestra revisión bibliográfica previa sobre transición, emergen una gran variedad de influencias en el éxito o fracaso del paso de primaria a secundaria. Estas influencias están relacionadas con el contexto educativo, las circunstancias personales de los estudiantes y, en menor grado, el profesor y su papel en el aula (McGee, Ward, Gibbons, y Harlow, 2004). Sin embargo, las investigaciones previas revisadas, aunque otorgan a los profesores un papel fundamental en la transición, no se centran específicamente en su papel e incluso en ocasiones los mencionan de manera anecdótica y sin un marco teórico claro. Asimismo, aparecen mayoritariamente trabajos relacionados con el contenido matemático, como por ejemplo la dificultad del paso de la aritmética al álgebra o la necesidad de la demostración en geometría (Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Pillay y Wilss, 1998; Sdrolas y Triandafillidis, 2008). El contenido aparece como un factor determinante en la transición a las matemáticas de secundaria y, ya que los profesores conducen el acceso de los estudiantes a este contenido, consideramos fundamental el estudio de su conocimiento en relación con la transición a la matemática de la secundaria.

### **Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)**

Nuestro propósito de investigar la transición y el conocimiento del profesorado requiere un marco teórico para conceptualizar específicamente qué elementos de los conocimientos de los profesores afectan directamente a la continuidad del aprendizaje de matemáticas y en particular durante la transición de primaria a la secundaria.

El modelo teórico MKT, desarrollado por Hill, Rowan y Ball (2005), es un marco reconocido en materia de conocimiento del profesorado de matemáticas. Buscaremos en él elementos que nos permitan atender la continuidad de la enseñanza de las matemáticas. Ball, Thames y Phelps (2008) distinguen dos dominios dentro del MKT: Subject Matter Knowledge (conocimiento del contenido) y Pedagogical Content Knowledge (conocimiento pedagógico). La combinación de ambos define los conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas. Pedagogical Content Knowledge se refiere a la integración simultánea de las ideas importantes de la materia con la manera en la que los estudiantes las adquieren (Ball, Thames y Phelps, 2008). Subject Matter Knowledge se refiere a los conocimientos de la matemática misma. Cada uno de ellos también se subdivide en otros más específicos. Uno de ellos, Horizon Content Knowledge (HCK), emerge como un constructo especialmente relevante en la transición ya que se refiere al punto de vista longitudinal de la Educación Matemática necesaria en el profesorado. Sin embargo, como Ball, Thames y Phelps (2008) señalan, el lugar del HCK en este marco aún no está claro y, por ello, nuestro objetivo es aclarar el concepto de HCK y su posición, para que pueda ser aplicado en investigaciones sobre la transición en matemáticas en el futuro. Dado que el marco teórico del MKT es la base de nuestra

conceptualización de HCK, seguiremos abordando las principales características de este marco en la medida en que afecten a nuestro desarrollo de la idea de HCK.

Pedagogical Content Knowledge se divide en tres centros de atención dentro de la práctica de la enseñanza: los estudiantes, la metodología y el plan de estudios. Knowledge of Content and Students (KCS) es una combinación del conocimiento matemático específico y de la familiaridad con el pensamiento matemático de los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008). Se refiere a las dificultades que se esperan de los estudiantes, sus preguntas, motivaciones, etc y la preparación de los profesores y sus respuestas a ellos. Knowledge of Content and Teaching (KCT) es una combinación del conocimiento matemático específico y la comprensión de cuestiones pedagógicas que afectan a los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008) y afecta a cuestiones metodológicas, como el diseño de la secuencia de un tema o el uso adecuado de las tareas, las representaciones y ejemplos, etc. Por último, el conocimiento de los contenidos y planes de estudios se incluye en el Knowledge of Content and Curriculum (KCC).

Subject Matter Knowledge se subdivide en tres subdominios (Ball, Thames y Phelps, 2008): Common Content Knowledge (CCK es el conocimiento matemático que es común a otras profesiones), Specialised Content Knowledge (SCK) es el conocimiento matemático específico necesario para la docencia. Nuestro principal interés se centra en un tercer subdominio incluido provisionalmente en el Subject Matter Knowledge: el Horizon Content Knowledge (HCK). Los mismos autores reconocen no estar seguros de si el HCK está incluido en este dominio o afecta a otros subdominios del MKT. En las siguientes secciones exploraremos los conceptos de MKT y HCK con el fin de aclarar la posición de este último en el marco general e introducir un enfoque diferente para la organización del MKT, que concluirá con el refinamiento del concepto de HCK y con la inclusión de la noción de continuidad en esta teoría.

### **Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) y Horizon Content Knowledge (HCK)**

En el marco teórico de Ball, Thames y Phelps (2008), HCK se refiere a la conciencia de lo pasado y lo futuro, es decir, a una visión general de la Educación Matemática de los estudiantes que pueda ser aplicada a la matemática que se enseña en el aula. Desde esta perspectiva, un maestro de primaria tiene que saber con qué dificultades se enfrentarán sus estudiantes para sentar una base conceptual firme. Asimismo, un profesor de secundaria necesita conocer lo que los estudiantes han aprendido anteriormente y cómo lo han hecho. Esta conciencia del pasado y el futuro está estrechamente relacionada con la continuidad en la Educación Matemática y nuestra visión del HCK engloba esta perspectiva longitudinal.

De la observación de todos los dominios de MKT desarrolladas por Ball, Thames y Phelps (2008) hemos optado por atender a dos características diferentes que

a nuestro entender los identifican: un conocimiento *estático* (*statical*) de los contenidos, en el sentido que a menudo pueden ser adquiridos individualmente y aislados de la práctica docente en matemáticas, y un conocimiento *en acción* (*in-action*), que se expresa únicamente en la práctica de la enseñanza o la observación de otras prácticas de enseñanza. Desde esta perspectiva, Common Content Knowledge (CCK) y Knowledge of Content and Curriculum (KCC) son estáticos. El resto de los dominios (KCS, KCT y SCK) tienen un carácter diferente, ya que surgen y se expresan únicamente durante la práctica de la enseñanza de las matemáticas. La Figura 1 muestra nuestra interpretación de los subdominios de MKT de este enfoque, sin considerar aún el HCK.

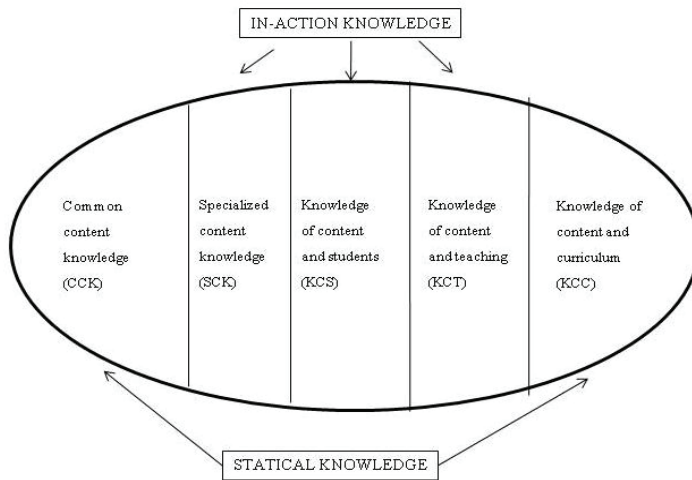


FIGURA 1: SUBDOMINIOS DEL MKT

La propia naturaleza del HCK lo sitúa dentro de los dominios en acción. Aún más, el HCK debe estar presente en todos los dominios de este tipo con el fin de atender la transición. El resto de nuestro trabajo está dedicado a justificar esta hipótesis teórica y ofrecer algunos ejemplos de la expresión del HCK en la práctica docente.

El HCK se refiere específicamente a la enseñanza continua de las matemáticas. A pesar de que se podría relacionar con el conocimiento de los planes de estudio (KCC), consideramos que es independiente de ellos. Se refiere al conocimiento global de la evolución del contenido matemático y la relación entre sus diferentes enfoques. Un profesor podría tener buen nivel en KCC, pero fallar en la manera de usar este conocimiento desde una perspectiva a largo plazo. Por lo tanto HCK se sitúa dentro de los dominios en acción del

MKT. La pregunta ahora es si es sólo un subdominio o afecta a otros, como Ball, Thames y Phelps (2008, p.403) sugieren. Nosotras sostenemos que, para ser utilizado como una herramienta de orientación y análisis del papel del conocimiento práctico del profesor durante la transición, todos los dominios que hemos denominado en acción deben ser abordados desde la perspectiva del HCK. Así pues, el conocimiento de lo pasado y lo futuro debe estar incluido en el KCS, el KCT y el SCK.

El HCK incluye la capacidad del profesor para averiguar las ideas previas de los estudiantes de matemáticas y para prepararlos para el futuro. Esta capacidad involucra al KCS (por ejemplo, el conocimiento de las dificultades, errores conceptuales y preguntas anteriores, actuales y futuras) y al KCT (por ejemplo, diferentes representaciones de un mismo concepto que los estudiantes podrían haber visto o tipos de tareas que facilitan el aprendizaje de los estudiantes en el futuro). Además, el SCK de un profesor para un nivel determinado depende de que el maestro enseñe actualmente en ese nivel y será obviamente superior al de los otros niveles. Desde la perspectiva de una Educación Matemática continua, no podemos pedir a un profesor de secundaria que conozca cómo los alumnos aprenden los números por primera vez, o a un maestro de primaria las diferentes maneras de abordar el concepto de derivada. Y aunque éstas fueran unas demandas razonables, no serían útiles para alcanzar la continuidad, ya que los niveles están demasiado separados. Por lo tanto, ¿cuáles son exactamente estas demandas razonables? Lo que parece adecuado es que, para cada nivel, el SCK del docente se extienda a los temas que realmente puedan tener un efecto en lo que están aprendiendo los estudiantes en el momento o con los temas de futuro para los que el profesor está sentando los cimientos. Esta idea implica la inclusión del HCK en el SCK.

Las ideas anteriores nos llevan a considerar el HCK, no como otro subdominio de MKT, sino como un conocimiento que da forma al MKT (Figura 2). Ahora nuestro siguiente objetivo es conceptualizar las demandas razonables que caracterizan el HCK.

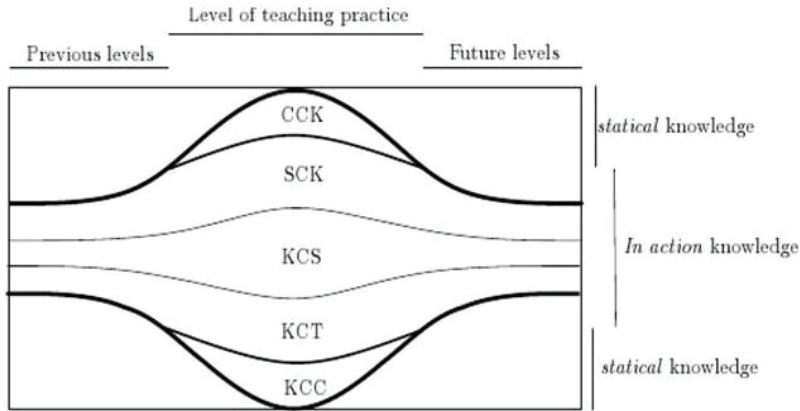


FIGURA 2: EL HCK DA FORMA AL MKT Y RETRATA SU NATURALEZA

### La expresión de HCK en la práctica docente

El HCK es un conocimiento matemático específico para la práctica docente representado por el conocimiento de la continuidad matemática y que define el conocimiento en acción. En particular, requiere tanto de una perspectiva longitudinal de los conceptos matemáticos como de la capacidad de comunicar esta perspectiva en la práctica docente. Hill et al (2008) destacan la necesidad de aclarar cómo el conocimiento de los docentes afecta a la práctica en el aula mediante la realización de una investigación en la que se analiza la relación entre el MKT de los profesores y la calidad de su práctica. Seguimos esta idea para el caso particular del perfeccionamiento de la definición del constructo del HCK. Puesto que no se considera el HCK de una manera simplemente teórica sino como un tipo de conocimiento que da forma a los conocimientos en acción necesarios para la enseñanza, y también porque nuestro propósito es obtener una herramienta útil para futuras investigaciones sobre la transición, adoptamos una perspectiva práctica desde la cual la siguiente pregunta surge inmediatamente: ¿cómo se expresa el HCK en la práctica docente? Para comenzar a contestar a esta pregunta es necesario garantizar que el HCK esté presente en las principales actividades de la enseñanza, que de una manera general incluyen: explicación de conceptos y respuestas a las preguntas de los estudiantes, establecimiento de tareas apropiadas para el aprendizaje de los alumnos e interpretación de las ideas matemáticas del estudiante. Pero, ¿cómo se hace evidente la presencia del HCK en estas actividades?

En la siguiente secuencia de un aula de primer curso de secundaria, el profesor corrige ejercicios rutinarios de cálculo de perímetros y áreas. En este caso, de un

rectángulo de lados 22 y 28 cm. En la pizarra, dibuja el rectángulo y dicta en voz alta mientras escribe:

“Perímetro =  $2 \cdot 22 + 2 \cdot 28 = 100$ ”. A continuación, se establece el siguiente diálogo:

*Anna: ¿Por qué 100?*

*Profesor: haz esta operación de aquí y verás como te sale 100*

*Marc: ¡Ah! es como si el 28 le da 3 al 22 y tienes cuatro lados de 25, o sea 100.*

*Profesor: Vale. Ahora el área.*

*Marc: Pues 25 por 25.*

*Profesor: ¡No! El área es  $22 \cdot 28$*

El profesor escribe a continuación el valor correcto y pasa a la corrección del siguiente ejercicio. No se establece diálogo con el estudiante.

El error cometido tiene su origen probablemente en la falsa consideración de que figuras del mismo perímetro tienen igual área, algo que ha sido documentado por la bibliografía relevante y se ha gestado sobre todo en los años de la educación primaria. Además, este problema está directamente ligado con el problema isoperimétrico, con el cual es probable que los estudiantes se encuentren en diferentes contextos a lo largo de las clases de matemáticas futuras. Por otra parte, requiere también tener en consideración el orden de las operaciones aritméticas básicas. Nuestro objetivo a continuación es generar un instrumento de referencia para referirnos a la expresión del HCK en una secuencia como esta.

Ball y Hill (2009) describen el HCK como "una especie de visión periférica" de la Educación Matemática. Desde una perspectiva temporal, las seis competencias que incluimos en la Tabla 1 nos ayudan a concretar la expresión del HCK en la práctica docente.

PASADO	PRESENTE	FUTURO
Reorientación de errores conceptuales y dificultades	Identificación de errores conceptuales y dificultades	Prevención de errores conceptuales y dificultades
<b>Modificación de tareas</b>		
	Interpretación del conocimiento matemáticos de los estudiantes	
	Reconocimiento del potencial de tareas	

TABLA 1: EXPRESIÓN DEL HCK EN LA PRÁCTICA DOCENTE A TRAVÉS DE SEIS COMPETENCIAS



***Identificación, reorientación y la prevención de los errores conceptuales y dificultades.***

Estas tres competencias se refieren respectivamente a los conocimientos acerca del nivel actual, los anteriores y los futuros. Requieren la capacidad de reconocer e interpretar los errores conceptuales más comunes antes de que puedan afectar a la enseñanza actual de un concepto, así como la preparación para evitar posibles errores en el futuro. Además, incluyen el conocimiento de las dificultades anteriores y la previsión de futuras dificultades.

***Modificación de las tareas, usando la notación matemática y lenguaje apropiados.***

Esta competencia, inspirada en la lista proporcionada por Ball, Thames y Phelps (2008, p. 400), nos permite referirnos a la importancia de la notación y el lenguaje como una parte determinante del HCK. Una actividad matemática puede ser apropiada para un nivel dependiendo de su complejidad y el rigor que aparezca en ella. La misma tarea puede ser adaptada para diferentes niveles en la medida en que su lenguaje y su rigor matemático sean coherentes con el desarrollo del alumno en ese nivel. Esta competencia se refiere a distinguir las limitaciones que implica el nivel de rigor utilizado en la enseñanza, así como la facultad para adaptar una actividad de una manera adecuada a cada nivel.

***Interpretación de los conocimientos matemáticos de los estudiantes contenidos en el uso de una representación particular.***

Esta competencia se refiere a la capacidad de reconocer las ideas matemáticas que subyacen en las representaciones de los estudiantes en la medida en que estas ideas son la base de los conceptos matemáticos con los que los estudiantes se enfrentarán en el futuro. Estos conceptos matemáticos se sustentan en los conocimientos actuales de los estudiantes, y por lo tanto requieren del profesor un conocimiento sobre los niveles futuros de la educación.

***Reconocimiento del potencial de tareas para su consideración posterior con un conocimiento más amplio de la matemática.***

La selección de actividades adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes por parte del docente se materializa en el contexto del HCK como la competencia de detectar el potencial matemático de una tarea que pueda servir como extensión del aprendizaje matemático en el futuro. Esta competencia no sólo se refiere a la identificación y elección de estas tareas con potencial matemático sino también la gestión de ellas durante el nivel actual con la visión prospectiva del futuro.

Desde esta perspectiva, no existe expresión del HCK en la secuencia que se describió anteriormente, en tanto que el profesor no evidencia ninguna de las competencias anteriormente señaladas. Esto no quiere decir que el profesor, en este caso, por ejemplo, no sepa que los estudiantes otorgan erróneamente la misma área a figuras de igual perímetro, pero, en cualquier caso, la gestión de la situación no permite al estudiante beneficiarse de tal conocimiento. Cualquiera de las siguientes intervenciones, sin embargo, podrían haberse dirigido a poner de manifiesto HCK:

<b>Diálogo 1 (Continuación figurada de la secuencia)</b>	<b>Diálogo 2 (Continuación figurada de la secuencia)</b>
<p>Marc: Pues 25 por 25.</p> <p>Profesor: Calcula la operación que hay en la pizarra y la que tú dices. No da lo mismo. ¿Puedes dar una explicación?</p>	<p>Marc: Pues 25 por 25.</p> <p>Profesor: La figura a la que te refieres es un cuadrado de lado 25. ¿Crees que efectivamente tendrán la misma área?</p>

En síntesis, este trabajo tiene la intención de avanzar hacia una mejor comprensión de la continuidad en la Educación Matemática. El HCK emerge como un constructo en el marco del MKT que permite al investigador abordar cuestiones de continuidad en la Educación Matemática considerando el conocimiento profesional de los docentes. La investigación sistemática en el futuro de la expresión del HCK en la práctica docente y sus consecuencias sobre la transición muestra un camino a la posible inclusión de este conocimiento matemático como parte de programas de formación del profesorado diseñados para minimizar los efectos de la transición en el estudiante y, por tanto, para mejorar la continuidad en la Educación Matemática.

## Referencias

- Ball, D.L., & Hill, H. (2009). R and D: The curious - and crucial - case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, 91(2), 68-71.
- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Boulton-Lewis, G.; Cooper, T.; Atweh, B.; Pillay, H.; Wilss, L. (1998). *Arithmetic, pre algebra and algebra: A model of transition*. Mathematics Education Research Group of Australasia, Gold Coast.

- Hill, H. C.; Blunk, M.; Charalambous, C.; Lewis, J.; Phelps, G.; Sleep, L.; Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Hill, H.C.; Rowan, B. & Ball, D.L (2005) Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), 371-406.
- Godino, J.D. (2009) Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Unión. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 20, 13-31.
- Llinares, S. & Valls, J. (2009) The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37, 247-271.
- McGee, C., Ward, R., Gibbons, J & Harlow, A. (2004) *Transition to Secondary School: A Literature Review*. Hamilton: The University of Waikato.
- Rico, L. (1998) Conocimiento profesional en Educación Matemática. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, nº 32.
- Rico, L.; Gil, F.; Gómez, P.; González, M. J.; Lupiáñez, J. L.; Moreno, M. F.; Romero, I. (2004). Quality in Mathematics Teachers Training Syllabuses. En: Høines, M. J. & Fuglestad, A. B. (eds) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen (Norway).
- Sdrolas, K.A.; Triandafillidis, T.A. (2008) The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"? *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 159-169.

