CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS E HISTÓRICAS SOBRE EL NÚMERO π

F. JAVIER PERALTA CORONADO*

El objetivo de este artículo es el de tratar que los alumnos de enseñanza secundaria puedan familiarizarse con el número π. Para ello, se presentan diferentes situaciones para su cálculo (muchas de ellas tomadas de la historia de la matemática), junto a diversos aspectos de la "cultura matemática" relacionada con tan importante número. Posteriormente se realiza un estudio comparativo entre los distintos valores de π obtenidos.

The object of this paper is to familiarize the secondary school students with the meaning of de number π. In order to do so, various situations are included to calculate the value of π (many of which come from the history of mathematics), together with several aspects of the "math culture" related to such a significant number. Subsequently, a comparative study is developed for the different values of π obtained.

0. Introducción

En la Biblia se le asigna a π el imperfecto valor de 3: "... hizo también un vaso de bronce fundido que tenía diez codos de diámetro, de un borde al otro borde, perfectamente redondo, y de cinco codos era su altura, en tanto que un cordón de treinta codos medía la circunferencia..." (I Reyes, VII, 23; II Crónicas, IV, 2); valor que asimismo le fue atribuido en Babilonia (2.000 años a.C.) y en China (1.000 años a. C.). En el extremo opuesto, W. Shanks calcula 707 decimales del mismo en 1874 (años después se comprobó que existía un error a partir de la cifra de lugar 527), J.W. Wrench y D.F. Ferguson en 1948 obtienen π con 808 cifras decimales y, a partir de entonces y con ayuda de los ordenadores, se han logrado aproximaciones con miles o incluso millones de cifras decimales (David y Gregory Chundnovsky han conseguido no hace mucho más de mil millones).

Lo anterior es solo una pequeña muestra de la variedad de aproximaciones y diversidad de métodos empleados para el cálculo de π,

* F. JAVIER PERALTA CORONADO es Catedrático de Escuela Universitaria de la Universidad Autónoma de Madrid.

probablemente el número más estudiado a lo largo de la historia. Así, según se ha desarrollado la matemática han ido evolucionando sus procedimientos de determinación, que esencialmente han sido tres: sistemas discretos de obtención, en su mayoría geométricos; algoritmos infinitos, como series y productos infinitos, que se inician en el siglo XVI como precursores del cálculo infinitesimal y que tienen su origen remoto en el método exhaustivo de Eudoxo (s. IV a.C.); y por último, con ayuda de los ordenadores.

La indudable importancia del número π nos ha animado a escribir este artículo, de clara intencionalidad didáctica, en el que, junto a diversos aspectos de la "cultura matemática" relacionada con dicho número, se presentan algunas ideas para tratar que los alumnos se familiaricen con él.

El trabajo está dirigido fundamentalmente a profesores de Enseñanza Secundaria para que, si así lo estiman oportuno, puedan hacer uso en el aula de alguna de las cuestiones que aquí se vean. Con este fin se muestran distintas situaciones para el cálculo de π, inspiradas en buena parte en la historia de la matemática, aunque dado el nivel de los estudiantes a los que pudiera destinarse, están referidas –salvo los dos métodos descritos en la sección 4.2– a los procedimientos del primer tipo de los apuntados más arriba: los que denominábamos sistemas discretos de obtención.

De la variedad de medios utilizados se deducirán diferentes valores para π, lo que puede contribuir a inculcar un cierto sentido de la aproximación que mueva a plantearse cuál debe ser el número de cifras que han de tomarse para la resolución de un problema concreto de modo que el error cometido sea inapreciable. Los siguientes ejemplos pueden servir para reflexionar en esta dirección: cuatro decimales bastan para determinar la longitud de la circunferencia con error menor que un milímetro si el radio es menor o igual que 30 metros; si el radio es tan grande como el de la Tierra, son suficientes 10 decimales (Montesinos, 1996); para un valor de π con 16 decimales se obtiene la longitud de una circunferencia de radio la distancia media de la Tierra al Sol con un error inferior al espesor de un cabello (Dubreil, 1976).

1. Procedimientos geométricos para el cálculo de π extraídos de la historia de la matemática

1.1. En el papiro de Rhind, copiado por Ahmes (1849-1801 a.C.) se calculan el área del círculo y la longitud de la circunferencia de diámetro d mediante, respectivamente, las fórmulas siguientes: $A = (8/9)^2 . d^2$, $L = (8/9)^2 . 4d$ (Dilke, 1996). Sustituyendo en la primera de ellas d por 2r (r es el radio), se tiene: $A = (16/9)^2 . r^2$, lo que significa que los egipcios atribuyeron a π el valor $(16/9)^2$ o si se prefiere, $(4/3)^4 = 3'160493827...$; y a análogo resultado conduce la segunda de las fórmulas citadas.

Este hecho puede servir de idea para inducir a los alumnos a que se conviertan en "cuadradores del círculo", esto es, que traten de hallar un cuadrado equivalente a un círculo dado. Para ello se les pedirá que dibujen un círculo de diámetro 18 cm., por ejemplo, y que intenten a su vez construir un cuadrado cuyo centro sea el del círculo y que tenga la misma área del primero. Se les invitará entonces a que realicen conjeturas y a que comparen experimentalmente las dos áreas.

Esto último puede lograrse recortando uno de los cuatro segmentos circulares ABC (Figura 1) y superponiéndolo, después de troceado, sobre la región CDE de una de las cuatro esquinas en que el cuadrado excede al círculo. Si no quedaran conformes con el cuadrado elegido, se deberían repetir las construcciones con un nuevo valor para el lado.

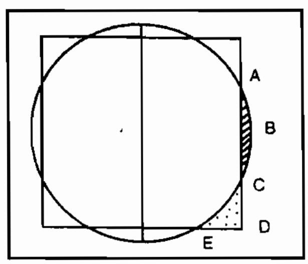

Figura 1

De esta manera se llegará a que el lado del cuadrado mejor para nuestro propósito es el de 16 cm (si el diámetro del círculo era de 18 cm). El experimento concluirá cuando se expresen numéricamente los pasos seguidos en las construcciones ($16^2 = \pi . (18/2)^2$), lo que debe conducir al valor de π atribuido a los egipcios.

La experiencia puede proponerse también, naturalmente, considerando longitudes en vez de áreas. Para ello se precisará de una cuerda con la que medir la longitud de la circunferencia, y se tratará de construir un cuadrado de ese perímetro.

Si se parte de una circunferencia de 18 cm de diámetro, el cuadrado de lado 16 cm no resultará una buena aproximación, pues entonces:

$2\pi \cdot 9 = 4.16$, esto es, $\pi = \dfrac{32}{9} = 3'\widehat{5}$. Si se toma el cuadrado de lado 15 cm, entonces $2\pi \cdot 9 = 4.15$, con lo que $\pi = \dfrac{10}{3} = 3'\widehat{3}$; si en cambio se elige el cuadrado de lado 14 cm de lado, entonces $p = \dfrac{28}{9} = 3'\widehat{1}$, que es mejor que los anteriores valores. Una buena aproximación de la longitud de la circunferencia de radio 9 cm es, pues, el perímetro del cuadrado de 14 cm de lado.

1.2. Un valor muy próximo al logrado por los egipcios para π es el conseguido en la India por Brahmagupta en el siglo VII, y mucho antes –hacia el año 100– en China por Chang-Hing: $\pi = \sqrt{10} = 3'16227766...$

Basándonos en ese valor, puede presentarse a los alumnos la siguiente situación para que lo obtengan experimentalmente.

En una circunferencia de radio r y centro O se dibujan dos radios perpendiculares OA y OB (Figura 2). Se prolonga OB y, a partir de B, se lleva un segmento BC igual al diámetro. Resulta entonces que el segmento AC tiene aproximadamente la misma longitud que la semicircunferencia, lo que puede comprobarse midiendo con una cuerda ($AC = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10}$ y la semicircunferencia de radio r tienen la misma medida si se toma a $\sqrt{10}$ como valor de π).

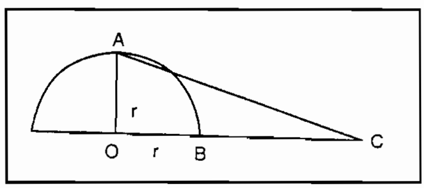

Figura 2

1.3. En el siglo III se obtuvo en China el valor 25/8=3'125 para π. En relación con ello se puede plantear el siguiente ejercicio.

Dibujemos una circunferencia de diámetro 8 cm, por ejemplo, y un cuadrado circunscrito a la misma, y razonemos de esta forma con los alumnos: el perímetro del cuadrado superará a la longitud de la circunferencia, por lo que no sería una buena aproximación suya; veamos qué parte de dicho perímetro podría tomarse como longitud de la circunferencia.

Si cogemos sólo tres lados del cuadrado, se tiene: 24=8 π, lo que equivale a asignar a π el valor 3; es preciso por tanto añadir una porción del cuarto lado. Si tomamos tres lados y medio, entonces será π=28/8=3'5, que tampoco es un buen valor; si elegimos en cambio tres lados y la cuarta parte del otro, sería π=26/8=3'25, que ya va siendo aceptable; tomando tres lados y la octava parte del otro queda de nuevo mejorado, y se llega al valor asignado a π en China: π=25/8=3'125. Los alumnos pueden comprobar finalmente de forma experimental (efectuando mediciones con un hilo) que, en efecto, la medida de la longitud de la circunferencia es aproximadamente 25 cm.

1.4. Como es sabido, la famosa relación de Arquímedes: π=22/7=3'142857142 ... , obtenida también por Aryabhata en el año 500, es empleada frecuentemente para expresar a π de una manera muy sencilla con un error pequeño.

Desde un punto de vista geométrico, esto equivale a identificar la longitud de la circunferencia con la de tres veces el diámetro más la séptima parte del mismo (22/7=3+1/7), y permite por tanto su deducción por los alumnos siguiendo el razonamiento empleado en 1.3. Aunque para esta situación concreta pueda realizarse asimismo el siguiente planteamiento.

En una circunferencia de centro O y radio r prolonguemos el diámetro AC hasta E, siendo CE=3r/4 (Figura 3). Tracemos el radio OD perpendicular al diámetro anterior, unamos E con D y prolonguemos este segmento hasta su intersección con el trazado por A tangente a la circunferencia, lo que determinará el punto B.

Digamos entonces a los alumnos que efectúen mediciones de los segmentos que aparecen en la figura y traten de relacionar sus longitudes con la de un cuadrante de la circunferencia. Tras algunos intentos se llegará a que la longitud de AB es aproximadamente la longitud de un cuadrante de la circunferencia.

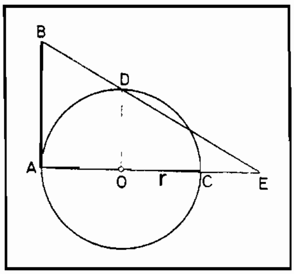

Figura 3

La justificación formal puede establecerse, por ejemplo, a partir de la semejanza de los triángulos BAE y DOE: AB / AE = OD / OE, luego AB / (2r+3r/4) = r/(r+3r/4), lo que conduce a: AB=11r/7, y esto equivale a identificar las longitudes de AB y la de un cuadrante de la circunferencia para el valor de π atribuido a Arquímedes.

2. Otros procedimientos geométricos elementales

Además de las situaciones didácticas anteriores que fueron sugeridas por distintos valores de π obtenidos a lo largo de la historia se pueden idear muchas otras, también mediante procedimientos geométricos. La forma más conocida y a su vez la más simple de hallar experimentalmente el valor de π, consiste en calcular el cociente entre las longitudes de una circunferencia y de su diámetro (en [Mansilla y otros, 1989], por ejemplo, se describe una manera de hacerlo). Se presentan a continuación otras posibilidades.

2.1. Se dibuja un círculo de diámetro d al que se circunscribe un cuadrado. Cada lado del cuadrado se divide en tres partes iguales y se trazan por los puntos de división perpendiculares a dicho lado, obteniéndose de este modo nueve cuadrados iguales de lado d/3 (Figura 4).

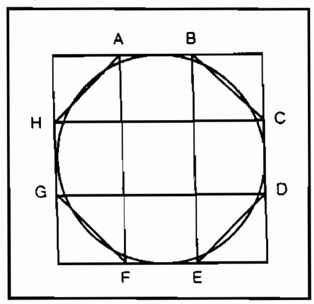

Figura 4

Si el dibujo se realiza con precisión, se observa que el área del círculo difiere muy poco de la del octógono (no regular) ABCDEFGH (Bouvier, 1986). Como esta última es siete veces el área del cuadrado de lado d/3, esto es: $7d^2/9$, se llega a: $7d^2/9=\pi.\ d^2/4$; por tanto:

$$\pi = \frac{28}{9} = 3'\widehat{1}\ .$$

Si se igualan el perímetro del octógono con la longitud de la circunferencia, se llega en cambio a una aproximación peor, pues el primero es: $4\cdot\frac{d}{3}+4\sqrt{2}\cdot\frac{d}{3}=4d\cdot\frac{(1+\sqrt{2})}{3}$ y la segunda: π d. Por tanto,

$$\pi = 4\cdot\frac{(1+\sqrt{2})}{3} = 3'218951416...$$

2.2. Partimos ahora de una semicircunferencia de centro O y radio r (Figura 5). Trazando dos radios perpendiculares OA y OB y paralelas a los mismos se obtienen el punto C y el segmento OC. Con centro O se gira el segmento OC hasta su intersección con la prolongación de OA, lo que determina el punto D, y por él se levanta una vertical que corta a la prolongación de BC en E.

Puede indicárseles a los alumnos que mediante una cuerda efectúen mediciones de la longitud de la circunferencia y de algunos segmentos que aparecen en la figura, para establecer conjeturas que más tarde habrá que comprobar mediante los cálculos correspondientes; todo ello en orden a conseguir una aproximación de π.

El experimento debe llevarles a la conclusión de que la longitud de la semicircunferencia es prácticamente coincidente con la longitud de la quebrada COE. En efecto: $CO=r\sqrt{2}$, $OE=\sqrt{OD^2+ED^2}=\sqrt{2r^2+r^2}=r\sqrt{3}$, luego: $\pi r = CO + OE = r(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, por lo que $\pi \approx \sqrt{2}+\sqrt{3}=3'146264369...$

Se llega al mismo resultado si se inscriben en una circunferencia de radio r un triángulo equilátero y un cuadrado. Entonces, la suma de las longitudes del lado del triángulo, $r\sqrt{3}$, y del cuadrado, $r\sqrt{2}$, está muy próxima a la longitud de la semicircunferencia.

3. Una relación del número π con el número áureo

El número áureo o número de oro: $\varnothing = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1'618033988...$, a pesar de ser uno de los irracionales más importantes, tanto desde un punto de vista histórico como por su presencia en incontables lugares de la matemática y en otras áreas del saber, especialmente en arte (Ghyka, 1992), es sin embargo poco conocido, como es fácilmente constatable. Es por ello por lo que hemos creído conveniente destacar su relación con el número π, presentando a continuación una situación didáctica que lo ponga de manifiesto, inspirada una vez más en la historia de la matemática.

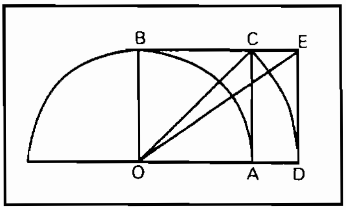

Figura 5

3.1. Esta experiencia está encaminada a llegar a la relación: $\pi \approx \frac{4}{\sqrt{\varnothing}} = 3'144605512...$ obtenida por los antiguos egipcios, y parece ser que utilizada en la construcción de la Gran Pirámide. Procederemos para ello del siguiente modo.

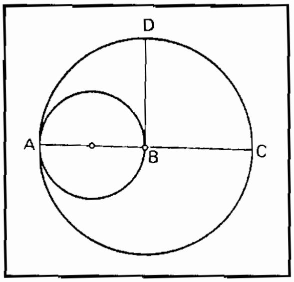

Figura 6

Partimos de una circunferencia, que por comodidad supondremos de radio unidad; sea AB uno de sus diámetros (Figura 6). Con centro el punto B dibujamos otra de radio AB que contenga a la primera y sea tangente a la misma en A, y trazamos el radio BD perpendicular al anterior.

Con centro en O, punto medio de BC, y radio OD, se dibuja un arco de circunferencia DE, siendo E su intersección con el segmento AB (Figura 7); por E se traza una semicuerda perpendicular a dicho segmento, que corta a la circunferencia de partida en F, y se construye el triángulo AFB. Dicho triángulo es rectángulo en F, y el cateto BF mide aproximadamente un cuadrante de la circunferencia de diámetro AB, esto es: BF $\approx \pi/2$, lo que puede ser comprobado experimentalmente por los alumnos midiendo con un hilo.

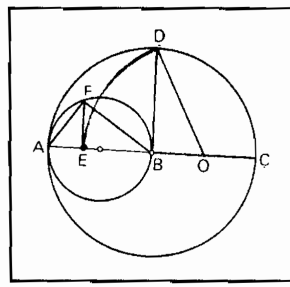

Figura 7

Este resultado no es difícil de probar: como $BD = 2$ y $BO = 1$, entonces $OD = \sqrt{5}$, luego $EO = \sqrt{5}$ y, por tanto, $EB = \sqrt{5} - 1$.

Como el triángulo AFB es rectángulo, aplicando el teorema del cateto: $BF^2 = AB.\ EB = 2(\sqrt{5} - 1)$, luego $BF = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}$.

En consecuencia, $BF\sqrt{\varnothing} = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \cdot \sqrt{\dfrac{(\sqrt{5} + 1)}{2}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = 2$, y

$BF = \dfrac{2}{\sqrt{\varnothing}}$ que, efectivamente coincide con $\pi/2$ para el valor debido a los

egipcios: $\pi \approx \dfrac{4}{\sqrt{\varnothing}}$.

(Nótese que como $AE = AB - EB = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5}$, el segmento AB ha quedado descompuesto en media y extrema razón, pues $\frac{AB}{EB} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varnothing$, y $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \varnothing$;

esto es, $\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \varnothing$).

3.2. Puede aprovecharse la Figura 6 para, a partir de la misma, plantear otras cuestiones relativas a la longitud de la circunferencia (Lawlor, 1996) y al área del círculo. Dibujemos para ello sobre dicha figura otra nueva circunferencia de diámetro BC = AB (Figura 8).

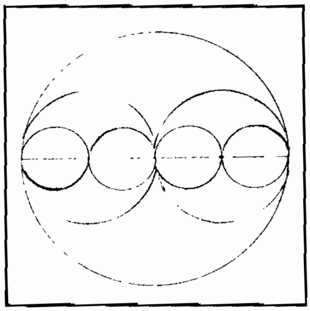

Figura 8

La primera cuestión que podría plantearse a los alumnos es que trataran de comparar experimentalmente la longitud de la circunferencia grande con la suma de las longitudes de las dos pequeñas. Se llega fácilmente, y es sencillo probarlo, a que ambas coinciden.

¿Y qué relación existe entre las áreas del círculo inicial y la suma de las áreas de los dos círculos pequeños? Como hemos supuesto que AB = 2, el área del círculo grande es 4π, y la suma de las áreas de los dos pequeños: 2π; o sea, que la primera es el doble que la segunda. De ello se deduce también evidentemente, que el área de cada una de las dos lúnulas limitadas por la circunferencia grande y las dos pequeñas, coincide con el área de un círculo pequeño.

Lógicamente el proceso puede continuarse tantas veces como queramos. Invitamos al lector a que establezca relaciones entre las longitudes de las circunferencias y las áreas de los círculos de la Figura 9.

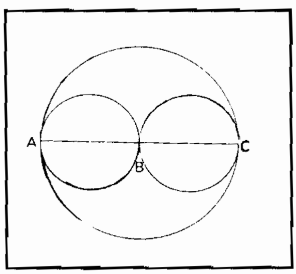

Figura 9

4. Otros métodos de aproximación

Las distintas expresiones de π que han aparecido hasta ahora en este trabajo, han sido obtenidas mediante construcciones geométricas, aunque existen asimismo otras presentaciones sencillas de dicho número logradas por diferentes medios; algunas de las cuales se verán a continuación.

4.1. Como es sabido, entre los sistemas de numeración más empleados a lo largo de la historia se encuentran los de origen antropomorfo como el quinario, el decimal y el vigesimal, debido a la importancia de los dedos para contar; si bien han tenido asimismo relevancia otros sistemas, como el binario y los de bases 12 y 60 (Peralta, 1995). En concreto, el sexagesimal fue el sistema de numeración usado en Mesopotamia y el utilizado por los astrónomos en la antigüedad siempre que querían usar un sistema preciso de aproximación.

Posiblemente las dos expresiones de π en el sistema sexagesimal más conocidas sean las debidas a Tolomeo en el siglo II: 3;8,30 (que de nuevo obtuvo en el siglo XV el astrónomo G. Purbach), y a los astrónomos árabes en la Edad Media: 3+ 10/(70;38,14,29) (en ambos casos el punto y coma indica la separación entre la parte entera y la decimal, y la coma sirve para separar las sucesivas posiciones sexagesimales).

Estas dos expresiones pueden suministrar dos nuevas aproximaciones racionales de π. Son las siguientes: $\pi \approx 3;8,30 = 3 + 80 / 60 + 30 / 60^2 = 377 / 120 = 3'141\widehat{6}$, $\pi \approx 3 + 10 / (70;38,14,29) = 3 + 10 / (70 + 38 / 60 + 14 / 60^2 + 29 / 60^3) = 47933007 / 15257669 = 3'141568151 ...$, que como puede observarse, difieren poco del valor real de π.

4.2. Las dos situaciones en las que está presente π que se exponen ahora, y que suponemos conocidas, resultan sorprendentes a los alumnos, pues están relacionados con el cálculo de probabilidades. Aunque no parece conveniente incidir en sus deducciones, que requieren de herramientas matemáticas más complejas, sí procede en cambio hacer algún comentario sobre sus posibles aplicaciones en el aula para la determinación de π.

a) La primera de ellas se refiere al "problema de la aguja de Buffon" (1777), y que puede proponerse realicen los alumnos con una aguja o una cerilla sin cabeza.

Sobre una hoja de papel en la que hay dibujadas rectas paralelas igualmente espaciadas, si a es la distancia entre cada dos consecutivas, se lanza una aguja al azar de longitud l, $l < a$, y se pide hallar la probabilidad de que la aguja corte a alguna de dichas rectas.

Como es sabido, dicha probabilidad es $p= 2l/(\pi\ a)$ y, por tanto, si n es el número de veces que la aguja queda secante a una recta y N el número total de tiradas, entonces $n/N = 2l/(\pi\ a)$, lo que permite obtener aproximaciones de π si se realiza un número grande de tiradas. Si la aguja (o cerilla) es de 2 cm, por ejemplo, y las rectas paralelas están separadas

4 cm, es n/N = $1/\pi$, luego π= N/n, que sirve para hallar experimentalmente π (en nuestro caso, aproximadamente la tercera parte de las veces que se tire la aguja, ésta tocará a una de las rectas).

b) Cesaro y Silvester, en 1883, demostraron que la probabilidad de que dos números tomados al azar sean primos entre sí es $6/\pi^2$. En relación con ello puede proponerse que se realice el siguiente experimento.

Introducir en una bolsa 100 papeletas marcadas con los números 1 al 100, sacar luego por ejemplo 25 pares de ellas (con devolución de cada par a la bolsa después de cada extracción) y estudiar si los dos números de cada par son o no primos entre sí.

Posiblemente obtengan entonces un resultado parecido al siguiente: unos 16 pares estarán formados por primos entre sí, mientras que aproximadamente 9 no lo estarán. En consecuencia, la frecuencia relativa con que se han presentado pares de números primos entre sí en este caso será 16/25 = 0'64, que sirve para hallar una estimación del número π: $\pi = \sqrt{\frac{6}{0'64}} = 3'06186...$ Al aumentar el número de extracciones se irán mejorando las aproximaciones.

5. Estudio comparativo entre los distintos valores de π obtenidos

Una vez que se han hallado diferentes valores aproximados de π, hagamos una recopilación de los mismos para establecer comparaciones entre ellos.

5.1. De todos los valores obtenidos hemos excluido, por razones obvias, los dependientes de los resultados concretos del experimento realizado (apartado 4.2). Quedan por tanto los siguientes (se indican entre paréntesis los apartados en los que aparecen):

$\pi_0 = 3$ (0),

$\pi_1 = (4/3)^4 = 3'160493827 ...$ (1.1),

$\pi_2 = 28 / 9 = 3'\widehat{1}$ (1.1 y 2.1),

$\pi_3 = \sqrt{10} = 3{,}16227766...$ (1.2),

$\pi_4 = 25 / 8 = 3'125$ (1.3),

$\pi_5 = 22 / 7 = 3'142857142 ...$ (1.4),

$\pi_6 = \frac{4(1+\sqrt{2})}{3} = 3'218951416...$ (2.1),

$\pi_7 = \sqrt{2}+\sqrt{3} = 3'146264369\ldots$ (2.2),

$\pi_8 = \dfrac{4}{\sqrt{\varnothing}} = 3'144605512\ldots$ (3.1),

$\pi_9 = 3;8'30 = 3'141\widehat{6}\ldots$ (4.1),

$\pi_{10} = 3 + 10 / (70;38,14,29) = 3'141568151\ldots$ (4.1).

Para comparar las distintas aproximaciones obtenidas, hallaremos sus diferencias con π en valor absoluto:

$|\pi_0-\pi| = 0'141592654$, $|\pi_1-\pi| = 0'018901173$, $|\pi_2-\pi| = 0'030481543$,
$|\pi_3-\pi| = 0'020685006$, $|\pi_4-\pi| = 0'016592654$, $|\pi_5-\pi| = 0'001264488$,
$|\pi_6-\pi| = 0'077358762$, $|\pi_7-\pi| = 0'004671715$, $|\pi_8-\pi| = 0'003012858$,
$|\pi_9-\pi| = 0'000074012$, $|\pi_{10}-\pi| = 0'000024503$.

5.2. Se concluye de lo anterior que los diferentes valores de π hallados pueden ordenarse en el siguiente orden creciente de exactitud (π_0 es la peor aproximación y π_{10} la mejor):

$$\pi_0,\ \pi_6,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_1,\ \pi_4,\ \pi_7,\ \pi_8,\ \pi_5,\ \pi_9,\ \pi_{10}$$

De este estudio comparativo pueden deducirse principalmente tres conclusiones: la gran precisión lograda en las aproximaciones debidas a los egipcios, tanto con la que aparece en el Papiro Rhind como con la empleada en la construcción de la Gran Pirámide; muy especialmente la buena aproximación conseguida por Arquímedes en el siglo III a.C., que expresa a π de una manera extremadamente simple con un error ligeramente superior a una milésima; y el gran avance que supuso el desarrollo de la Astronomía (Tolomeo, Purbach y los astrónomos árabes) para la determinación de π.

6. Para finalizar

Terminamos con algunas curiosidades relativas al número π.

6.1. El estudio del número π (aunque sin esa denominación) comienza hace más de cuatro mil años (puede verse que ya aparece, por ejemplo, en el "Libro de los Reyes", donde se le asigna el valor de 3, como ya se ha dicho).

6.2. El número π corresponde a la primera letra de la palabra griega "periféreia" (περιφερεια), que significa contorno de una figura curvilínea, o su medida. Su denominación para designar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es debida a Euler (1737).

6.3. Los griegos tardaron más de dos siglos en determinar su valor. Dos contemporáneos de Sócrates (s. V a.C.), Antifón y Brisón, inscriben en el círculo un cuadrado, luego un octógono regular, y así sucesivamente. Eudoxo (s.IV a.C.) y Arquímedes (s. III a.C.) desarrollan ese método, llamado exhaustivo, de duplicación sucesiva del número de lados de polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia, y muestran la convergencia de las sucesiones de sus correspondientes perímetros y áreas. De este modo Arquímedes halla el valor de π= 22/7, partiendo del hexágono regular y deteniéndose en el polígono de 96 lados.

Siguiendo este camino se han alcanzado a lo largo de la historia valores cada vez mejores de π, como el del matemático chino Liu Hui (s. III) que obtuvo 3'14159 mediante un polígono de 3.072 lados; el de Vieta, que en 1593 consiguió un valor exacto hasta la undécima cifra decimal utilizando el polígono de 393.216 lados; el de Ludolph van Ceulen, que en 1610 logró 35 decimales exactos a partir de un polígono de más de mil millones de lados (según su deseo, dicho valor de π, al que se le dio por un tiempo el nombre de "número de Ludolph", fue grabado en su tumba); etc.

6.4. Del desarrollo de π en fracción continua con solamente cinco decimales se obtienen las fracciones: 3, 3 + 1 / 7 = 22 / 7 , 3 + 1 / (7+1/15) = 333 / 106 , 3 + 1 / (7 + 1 / (15 + 1 / 1)) = 355 / 113 , ... La primera corresponde al valor asignado en la Biblia; la segunda es la relación de Arquímedes; la tercera, debida a Rivard es poco utilizada porque la siguiente, llamada razón de Adriano Metius, proporciona con el mismo número de cifras una mejor aproximación (355/113 difiere de π menos que una millonésima, y además es fácil de recordar: en 113355, las tres cifras de la derecha constituyen el numerador, y las tres de la izquierda el denominador).

6.5. Con Vieta se expresa π por medio de un producto infinito convergente, y con ello se inician los desarrollos infinitos de π (Rey Pastor y Babini, 1986) mediante la teoría de series y los productos infinitos. De esta manera se ha separado de algún modo a π de sus orígenes geométricos, señalándose el papel esencial que también juega en el Análisis Matemático. Desarrollos posteriores han sido debidos a Wallis, Gregory y Leibniz (s. XVII), Machin y Euler (s. XVIII), Shanks (s. XIX), etc.

6.6. Se atribuye a Euler un récord de velocidad en el cálculo de cifras de π, pues consigue en 1775 veinte decimales suyos en tan solo una hora aplicando la fórmula: $\pi/4 = 5$ arc tg $1/7+8$ arc tg $3/79$.

6.7. El valor aproximado de π con 707 cifras debido a Shanks está presente en un hermoso friso de la Sala redonda del Palais de la Découverte, en la Universidad de París.

6.8. Hay algunas expresiones de π en las que aparece la unidad imaginaria. Una de ellas es la fórmula de Fagnano (s. XVIII): $\pi= 2i.L[(1-i) / (1+i)]$, aunque la más famosa es sin lugar a dudas la debida a Euler: $e^{\pi i} = -1$. Esta última, una de las más hermosas de la matemática, permitirá demostrar a Lindemann la trascendencia de π más de un siglo después de la muerte de Euler y, con ello, probar la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

6.9. La importancia de π ha sido resaltada con su aparición en numerosos lugares, como sellos de correos, muchos de los cuales han sido coleccionados por el profesor argentino Edgardo Fernández (por citar alguno, puede apreciarse en uno de ellos que dicho número es el distintivo principal del anagrama de la Sociedad Colombiana de Ingenieros).

También está presente en la literatura, como por ejemplo, en un poema dedicado a él de la escritora polaca Wislawa Szymborska, Premio Nobel de Literatura.

6.10. Existen diversas reglas mnemotécnicas para recordar, en diferentes idiomas, algunas de sus cifras. El siguiente verso debido a R. Nieto permite memorizar 32 cifras suyas (π = 3'14159265358979323846264338327950 ...) sin más que contar el número de letras de cada palabra:

Soy π lema y razón ingeniosa
de nombre sabio que serie preciosa
valorando enunció magistral.
Por su ley singular bien medido
el grande orbe por fin reducido
fue al sistema ordinario usual.

7. Bibliografía

Bouvier, A. y otros (1986). *Didactique des mathématiques.* París: Cedic/Nathan.

Dilke, O.A.W. (1996). *Mathematics and measurement. Reading the past.* Londres: British Museum Press.

Dubreil, P. (1976). La historia de los números misteriosos, en F. Le Lionnais y cols. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Buenos Aires: EUDEBA, 104-119.

Ghyka, M. (1992). *El número de oro*. Barcelona: Poseidón.

Lawlor, R. (1996). *Geometría sagrada*. Madrid: Debate.

Mansilla, S. y otros (1989). *Pitágoras. 6º E.G.B.* Madrid: S.M.

Montesinos, J.M. (1996). *Números, combinatoria y nudos: de lo discreto a lo continuo.* Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1986). *Historia de la Matemática.* Vol. I y II. Barcelona: Gedisa.