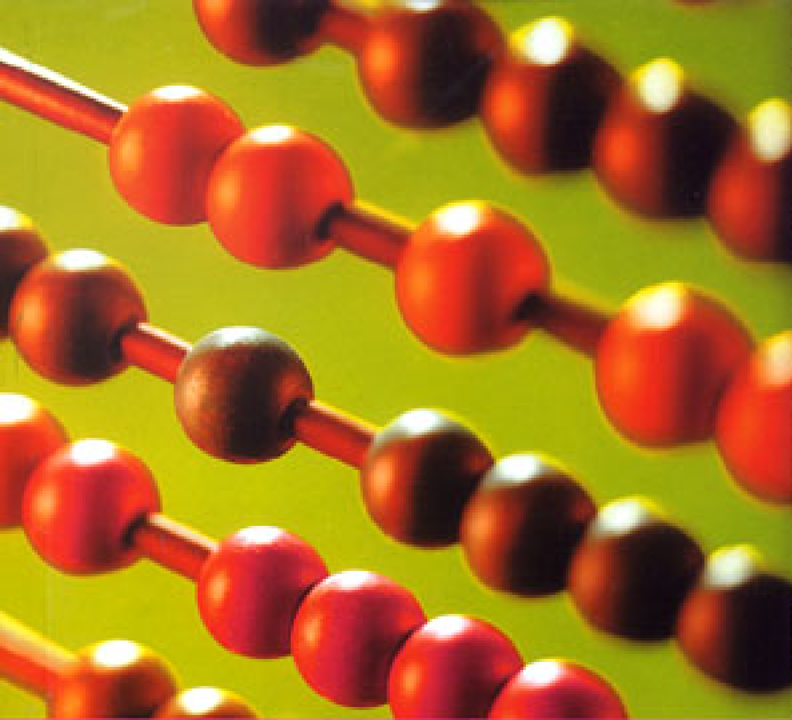
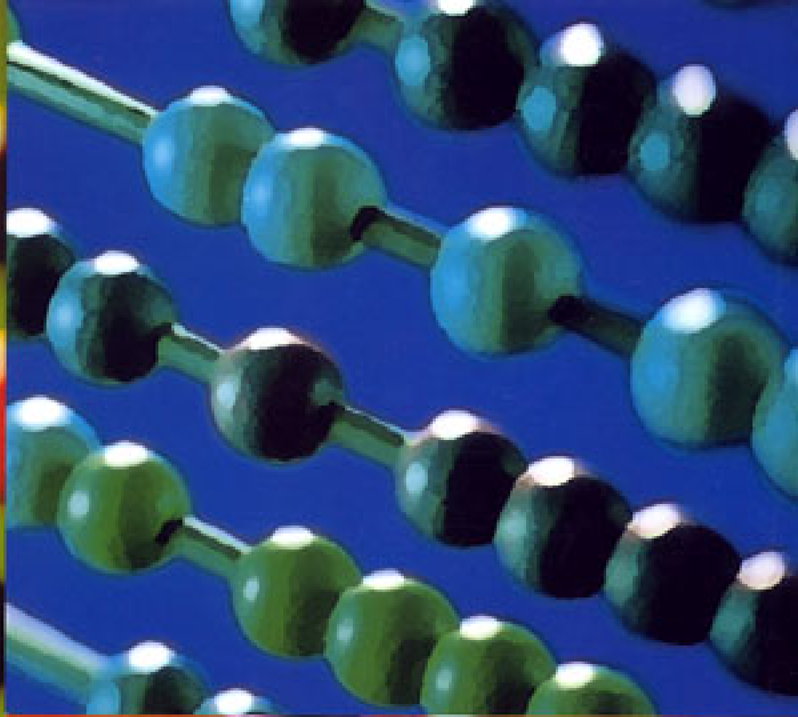
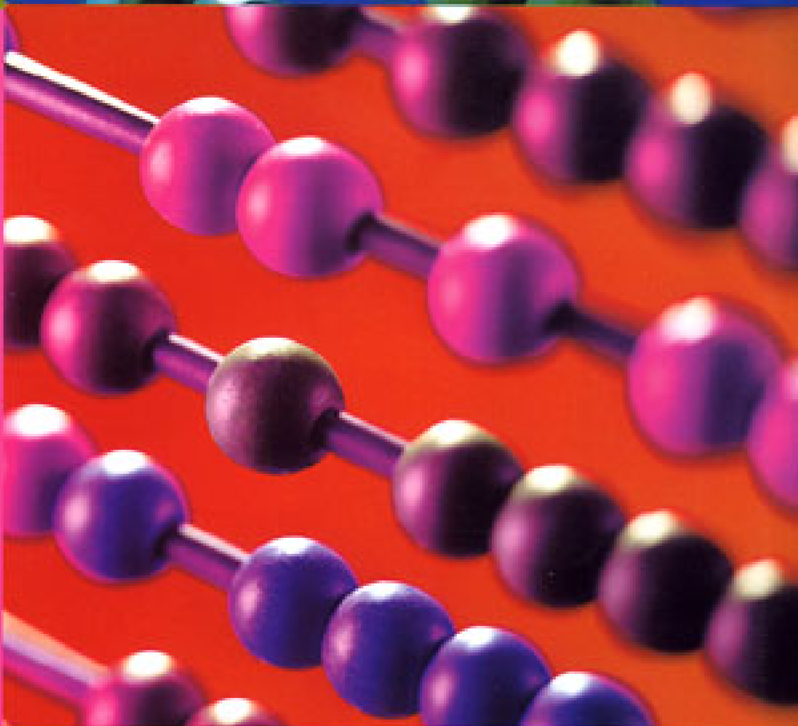
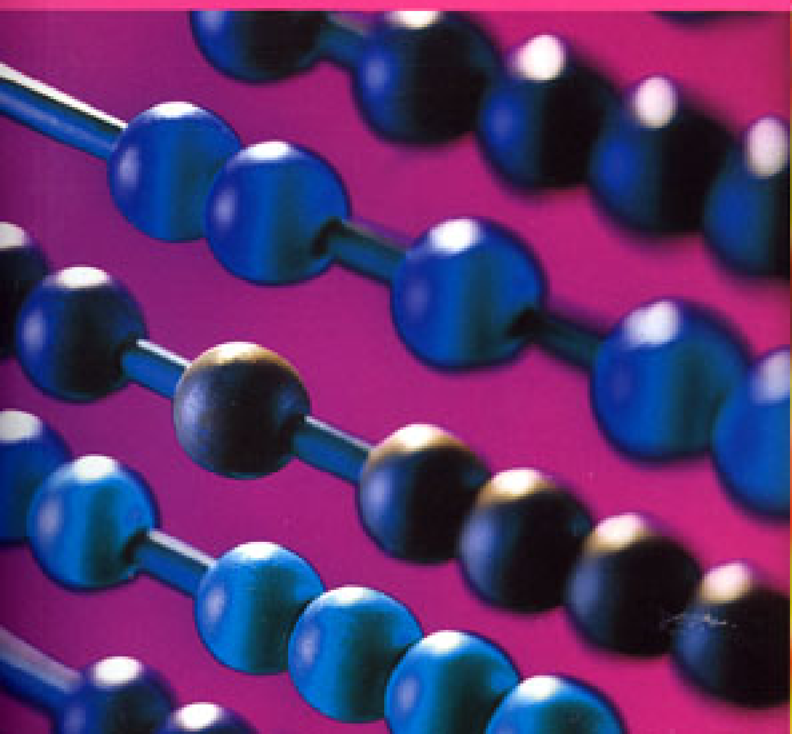



Programaciones de aula
por niveles de profundización

MATEMÁTICAS

2º Ciclo de ESO


Programaciones de aula
por niveles de profundización

Juan Manuel Sainz Jarauta
M.ª Roncesvalles Sorbet Esnoz
José M.ª Mateo Rubio
Claudio Martínez Gil
Fco. Javier Acarreta Bonilla
Isidro Bermejo Rincón

Área de Matemáticas

2.º Ciclo de la E.S.O.

Programaciones de aula
por niveles de profundización

Título:	Àrea de Matemáticas.2.º ciclo de la E.S.O.
Autores:	Juan Manuel Sainz Jarauta, M.ª Roncesvalles Sorbet Esnoz, José M.ª Mateo Rubio Claudio Martínez Gil, Fco. Javier Acarreta Bonilla e Isidro Bermejo Rincón.
Fotocomposición:	Pretexto
Cubierta:	RBK
Imprime:	Digitalia
I.S.B.N.:	84-699-4343-X
Dpto. Legal:	NA-1016/2001

Presentación

Materiales para un debate entre los especialistas. No es otra la finalidad de esta programación en el área de Matematicas (2.º ciclo) para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, que se ofrece como herramienta de trabajo y como instrumento de reflexión para el profesorado de Navarra.

Os ofrecemos un modelo de programación de aula, en el que se contemplan diferentes niveles de competencia o dificultad, que quiere servir como referente para la concreción y contextualización del currículo.

La nueva configuración de la enseñanza obligatoria supone que, a lo largo de la misma, ha de brindarse al alumnado una *formación básica común* y, al mismo tiempo, la *posibilidad de acceso a futuros estudios o actividades profesionales*, los cuales requieren un cierto grado de competencia académica y de responsabilidad.

Por ello resulta conveniente que las diferentes *programaciones*, en especial las *programaciones de aula*, tengan en cuenta los *niveles de competencia* que se requieren para la promoción del alumnado, a la vez que se *garantiza el logro de los objetivos estrictamente básicos* de cada etapa.

Una acertada distinción de niveles de profundización acerca de los mismos contenidos temáticos facilitará al responsable de aula la acción educativa. Son varias las *diferencias de competencia académica* que los alumnos van manifestando y varios los *niveles que se consideran adecuados para acceder con garantías al ciclo o a la etapa siguiente*. Esto se hace especialmente útil cuando nos encontramos en un mismo grupo con una distribución heterogénea del alumnado.

Por otra parte, el profesorado necesita *indicadores fiables* acerca de cuáles son los niveles de referencia que, con carácter objetivo, propician la promoción a los niveles educativos siguientes con garantías razonables de éxito escolar.

No es fácil para el profesorado atender *al mismo tiempo* a alumnos cuyas capacidades y expectativas no van más allá de los objetivos mínimos de la educación básica y a aquellos otros que aspiran a proseguir estudios posteriores. Es bueno disponer de instrumentos didácticos para *ofrecer a unos y a otros actividades adecuadas a su situación para un aprendizaje significativo*.

Ninguna medida organizativa, sin más, es suficiente para atender a la diversidad del alumnado. Es imprescindible una reflexión y una propuesta curricular adecuada para las distintas expectativas de éste. Con este trabajo, que debe ser debatido por el profesorado, se quiere poner en marcha *un proceso de revisión y propuesta de estrategias para la programación y el desarrollo en la práctica de medidas curriculares ordinarias de atención a la diversidad*.

Programar por niveles requiere una labor de grupo que ha de realizar un concienzudo estudio de la cuestión, para lo cual hay que revisar materiales curriculares ya existentes y analizar posibles indicadores de niveles de competencia curricular en esta etapa.

Un equipo de profesores lo ha hecho posible. En vuestras manos lo ponemos para que lo juzguéis, valoréis y corrijáis. A la luz de dicho análisis, el grupo ha elaborado una programación de aula, ciclo a ciclo, contemplando *tres niveles de dificultad: "básico", "medio" o propedéutico, y "superior" o de excelencia*.

a) Básico: Se ciñe a los contenidos y capacidades mínimas que se consideran fundamentales para progresar hacia la adquisición de los elementos básicos de la cultura y la formación como ciudadanos responsables. El referente último son los objetivos que conducen a la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria y es común a todo el alumnado.

b) Propedéutico o "medio": Se determinan los conocimientos y habilidades que se consideran adecuados para acceder con garantías al ciclo o etapa educativa siguiente. La referencia última sería aquí el nivel de competencias presumiblemente suficientes para cursar con éxito el Bachillerato y ciertos Ciclos Formativos de Grado Medio.

c) De excelencia o "superior": Atiende a conocimientos y destrezas que suponen un alto grado de competencia en el aprendizaje, más allá de lo que se requeriría para el mero acceso al tramo educativo siguiente.

En cada programación de ciclo se incluye una ejemplificación o desarrollo completo de una unidad didáctica que tiene en cuenta estos tres niveles.

Se trata de una medida de adaptación curricular. De ningún modo ha de entenderse como un instrumento de segregación del alumnado, sino como una herramienta bien diseñada para atender de manera más personalizada a cada alumno o alumna de acuerdo con el nivel de competencia curricular en el que se encuentra. Se trata de una herramienta que se pone a disposición del profesorado para facilitar un trabajo y para hacer efectiva la igualdad de oportunidades en educación.

En 1998, el Departamento de Educación y Cultura del Gobierno de Navarra promovió la elaboración de Programaciones de objetivos y contenidos mínimos para el segundo ciclo de la ESO. En la perspectiva que se busca ahora destaca el *enfoque propedéutico* –igualmente importante– *de las programaciones*. Es decir: asegurar un aprendizaje eficaz en los cursos siguientes.

Este trabajo se conecta con otro análogo en el marco de la Educación Primaria, buscando la continuidad *en la progresión del desarrollo de capacidades y en el rendimiento del alumnado a partir de los niveles alcanzados en los tramos educativos anteriores*.

Con todo ello se advierte una línea de investigación e innovación de indudable interés en el marco de la concreción del currículo que no invalida otras investigaciones, por ejemplo las que se llevan a cabo en el ámbito de la evaluación externa, sino que se complementa con ellas, haciendo posible de manera efectiva la reflexión del profesorado sobre una mejora en su propia intervención docente, y un avance cualitativo en la eficacia del sistema educativo navarro.

El envío de esta propuesta a los departamentos didácticos pretende que el profesorado en ejercicio la estudie con detenimiento, la aplique y ofrezca sugerencias, mejoras y correcciones desde su propia práctica docente. Con estas aportaciones se preparará el trabajo conjunto de unas **Jornadas sobre Programación**, que tendrán lugar el curso 2001-2002; en ellas se debatirán las propuestas aportadas por el profesorado de Navarra y se intentarán precisar los indicadores que con carácter general y orientativo definen los niveles de competencia curricular a lo largo de la educación obligatoria.

Nuestra intención se vería ya colmada en cualquier caso si esta propuesta sirve de ayuda al profesorado de Navarra en su difícil e importante labor de cada día.

Santiago ARELLANO HERNÁNDEZ
Director General de Educación

Índice

MATEMÁTICAS de 4º A de E.S.O.

Unidad 6

TRIGONOMETRÍA

Unidad 7

FUNCIONES. GENERALIDADES

Unidad 8

FUNCIONES ELEMENTALES

Unidad 9

TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA

Unidad 10

PROBABILIDAD

MATEMÁTICAS de 4º B de E.S.O.

Unidad 6

Vectores. Movimientos en el plano. Homotecias. Semejanza

Unidad 7

Trigonometría

Unidad 8

Funciones

Unidad 9

Funciones elementales. Límites

Unidad 10

Las funciones exponencial y logarítmica

Unidad 11

Técnicas de recuento. Combinatoria

Introducción

1. La propuesta

Cuando desde el Departamento de Educación se nos encarga una programación en niveles de la ESO, los componentes del grupo de Matemáticas consideramos que se trataba de un trabajo interesante. Podríamos generar un material que estaría disponible para todo el profesorado que quisiera utilizarlo. Enseguida pensamos en actividades, que creemos que es lo realmente interesante y práctico.

Con la experiencia de los componentes desde hace varios años en la ESO, alguno en la antigua REM desde el año 89 y en la ESO anticipada desde el 94, pensamos también que había llegado el momento de que el currículum quedara determinado desde primero hasta cuarto y que hubiera una propuesta realista de la distribución por cursos de todos los contenidos del área. Esto debería hacerse teniendo en cuenta los contenidos del Bachillerato y Ciclos Formativos. En definitiva, debiera quedar claro qué dar y qué no dar en cada curso de la ESO, para lo cual es necesario que nos pongamos de acuerdo los profesores implicados.

Este trabajo intentará resolver estas dudas. No hemos intentado responder a la cuestión: "¿Qué es lo importante?", ya que la respuesta nos lleva a unos programas demasiado largos. La pregunta clave sería: "¿Qué es lo prioritario?". Parece evidente que el profesor no es un héroe que puede dar todo y además con profundidad y atendiendo él solo a todos los niveles y utilizando distinta metodología para cada uno. Hay que elegir lo que nos parece mejor en aras de cumplir con la temporalización establecida.

2. El trabajo de mínimos del 98

Cuando se nos encarga esta programación se hace referencia al trabajo de mínimos realizado por un equipo de profesores en el año 98. Éste se analizó en profundidad y nos encontramos con un buen trabajo, aunque nos dimos cuenta de que se nos proponía algo sensiblemente distinto.

Lo primero que pretendemos es hacer una distribución realista de contenidos por cursos, proponer algo que nuestra experiencia nos diga que es factible hacer. Citando al profesor de Didáctica de la Universidad del País Vasco, J.M. Goñi, *Las propuestas imposibles, por irreales, son objetivamente incorrectas, porque lo que no es posible no tiene ningún interés como propuesta educativa.* En este sentido pensamos que los propósitos del trabajo del 98 son buenos, pero resultan unas programaciones tal vez algo ambiciosas.

Respecto a este trabajo, nos parecen muy interesantes las actividades y ejercicios propuestos, de tal forma que hemos incluido algunos en nuestra propuesta, pero quedan poco definidos tanto los objetivos como los contenidos y criterios de evaluación en algunas unidades didácticas. Además se repiten varios apartados que ya figuran en los Boletines y otros documentos oficiales.

Hay una diferencia fundamental entre los niveles que distingue el trabajo de mínimos del 98 y nuestra propuesta: en el primero, los contenidos mínimos son propedéuticos, es decir, posibilitan el acceso a la etapa siguiente (Bachillerato y Ciclos Formativos Medios) y existen otros contenidos de nivel superior.

En nuestra propuesta, el nivel I sería un nivel básico: capacidades mínimas fundamentales para adquirir los elementos básicos de la cultura y formar al alumno como ciudadano responsable. El nivel II sería el "medio": conocimientos adecuados para acceder a la etapa educativa superior. El nivel III o "de excelencia" correspondería a unos conocimientos superiores, mas allá de lo que se requiere para acceder al Bachillerato o Ciclos Formativos de Grado Medio. En nuestro caso, el nivel propedéutico corresponde al II.

3. Nuestras unidades didácticas

En primer lugar queremos resaltar que hacemos una propuesta de distribución de contenidos por cursos que sirva de referencia para la elaboración de las programaciones en los centros. Tras un estudio en profundidad, nos parece que tenemos razones para elegir los contenidos especificados, pero aceptamos ya inicialmente que puede haber otras propuestas de distribución totalmente defendibles (siempre que sean realistas en la temporalización). Insistimos en que nos parece muy difícil dar todo y además con profundidad y rigor.

Hacemos ya aquí una primera autocrítica. Pensamos que las programaciones de Primero, Segundo, Tercero y Cuarto A son realistas en cuanto a la temporalización ya que las hemos desarrollado en el aula en cursos anteriores, pero la de Cuarto B puede haber quedado algo extensa. Creemos que, dadas las características del alumnado de esta opción, aunque sea una educación obligatoria, debe hacerse un esfuerzo para desarrollarla en el mayor grado posible para que luego se pueda afrontar con garantía el programa de 1º de Bachillerato de Ciencias, a todas luces casi inabarcable en la actualidad. En las Matemáticas de Cuarto B, cada centro podría decidir dejar para Primero de Bachillerato la Unidad 5 (Progresiones aritméticas y geométricas) o parte de la Unidad 6 (Vectores y Movimientos).

Al proponernos el esquema de Unidad Didáctica se nos dijo que debíamos confeccionar Programaciones de Aula (tercer nivel de concreción del currículum) que debían incluir objetivos didácticos, contenidos (conceptos y procedimientos), orientaciones metodológicas y criterios de evaluación, todo ello diferenciado en niveles. Esta exigencia ha propiciado que en muchos casos los objetivos y los criterios de evaluación coincidan.

También pensamos que a veces hemos forzado la distinción por niveles en algunos contenidos. Creemos que lo realmente interesante del trabajo es la diferenciación en las actividades, que es lo válido para la práctica diaria. Básicamente no hay mucha diferencia entre los contenidos de los tres niveles. La diferencia está en la profundidad y dificultad de las actividades.

Respecto a los contenidos, consideramos que un nivel superior no ha de implicar el estudio adelantado de los que se estudiarán en los cursos siguientes. En algunos casos se incluyen algunos que ya no se verán posteriormente. Insistimos de nuevo en que la diferencia la deben marcar actividades distintas que requieran diversas estrategias de resolución.

Cada nivel ha de lograr los objetivos propios del mismo y los del anterior. Esto implica que cada alumno realizará las actividades de su nivel y las del que le precede. El profesor decidirá en cada caso si es o no necesario la realización de todas las del nivel previo, o bastará con una selección de ellas.

Se ha procurado no ser muy repetitivos en las actividades. La intención es que se disponga de unos modelos que cada profesor podrá ampliar en función de las necesidades del grupo. Hemos intentado que las distintas actividades cubran todos los objetivos de cada nivel.

Con las orientaciones metodológicas de cada unidad, se ha intentado matizar algunas cuestiones que pudieran haber quedado confusas y servir de ayuda al profesorado, que puede encontrar en ellas alguna nueva estrategia para su práctica docente.

En las Unidades Didácticas detalladas (una de primer ciclo, una de tercer curso y otra de cuarto) se propone una diferenciación entre las pruebas de cada nivel, así como en la metodología, aunque consideramos que llevar esto último a la práctica es extremadamente difícil (por no decir imposible) si la Administración no proporciona los medios humanos, materiales y organizativos necesarios para atender convenientemente a la diversidad de los tres niveles.

Respecto a los dos opciones de Matemáticas en el curso cuarto, la modalidad B está orientada a aquellos alumnos que van a cursar el Bachillerato Científico o Tecnológico, mientras que la A iría dirigida a los que van a realizar el de Ciencias Sociales. De alguna manera, los objetivos y contenidos de la opción B incluyen los de la A, habiendo un mayor grado de rigor y formalismo en la primera. Así pues, la primera opción sería válida para poder cursar cualquier modalidad de Bachillerato.

Al final de las unidades de cada curso se incluye una bibliografía con algún breve comentario sobre los materiales utilizados que puede resultar de interés.

Finalmente figura a modo de resumen un cuadro con los contenidos de los cuatro cursos en el que puede verse la continuidad y coherencia de los mismos a lo largo de toda la etapa.

Este trabajo se basa en la experiencia profesional de los componentes del grupo de trabajo, en la reflexión sobre el material de consulta empleado y pretende ser un instrumento eminentemente práctico, que tenga utilidad en el aula, o por lo menos, sirva de orientación en el quehacer diario del profesorado.

Acabamos diciendo que en modo alguno pretendemos que nuestra propuesta sea considerada como la solución al tan traído y llevado tema de la atención a la diversidad (pensamos que en educación no existen “varitas mágicas”) y que estamos abiertos a cualquier sugerencia realista que se nos haga, que sin duda enriquecerá nuestro trabajo.

Objetivos generales

En este trabajo, los objetivos específicos diferenciados por niveles se detallan en cada unidad didáctica. En nuestra opinión, es imposible hacer lo mismo con los de ciclo o de etapa para un área. De una manera extremadamente general, podemos considerar que en el nivel I básicamente se realiza una aplicación directa de los conceptos y algoritmos, con un grado de abstracción muy bajo. En el nivel II es importante que el alumno vea la relación entre los distintos conceptos. También se efectúan algunas generalizaciones. Así pues, los ejercicios y problemas requieren una mayor capacidad de relacionar e interpretar. Finalmente, en el nivel III, las generalizaciones son más habituales y la abstracción, creatividad y la utilización de variadas estrategias en la resolución de problemas es un elemento de común aparición en las actividades. En este nivel se requieren actividades mentales más elaboradas, problemas más complejos y abiertos e interpretación de resultados en mayor medida que en el nivel anterior.

1. Objetivos generales del primer ciclo

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habitual las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar el pensamiento lógico para organizar y relacionar las informaciones recibidas sobre los problemas que presenta la vida cotidiana y resolverlos adecuadamente.
3. Cuantificar la realidad, mediante la realización de los cálculos apropiados, para interpretarla adecuadamente, utilizando medidas y las diferentes clases de números estudiados: naturales, enteros y racionales.
4. Adquirir estrategias personales para analizar situaciones concretas, identificar y resolver problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorar la adecuación de los mismos en función del análisis de los resultados obtenidos.
5. Identificar las formas en el plano que se presentan en la realidad analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.
6. Identificar los elementos matemáticos (gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc. y analizar críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.
7. Actuar en la resolución de problemas de la vida cotidiana de acuerdo con la actividad matemática: Estudio de las posibles alternativas, precisión en el uso del lenguaje, fle-

xibilidad para cambiar el punto de vista cuando sea preciso y perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones que requieran su empleo, así como para disfrutar de los múltiples aspectos que ofrecen las Matemáticas.

2. Objetivos generales de etapa

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habitual las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica y probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permiten, mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación, interpretarla mejor utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida y las distintas clases de números.
4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y para la identificación y resolución de problemas utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.
5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas para representarlas de forma gráfica y numérica y para formarse un juicio sobre ellas.
6. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de se explicada desde puntos de vistas contrapuestos o complementarios: Determinista/aleatorio, finito/infinito, exacto/aproximado, etc.
7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.
8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc. y analizar críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.
9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática: exploración sistemática de alternativas, precisión en el lenguaje, flexibilidad para modificar el punto de vista y perseverancia en la búsqueda de soluciones.
10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

Actitudes

1. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
2. Sensibilidad, interés y valoración crítica ante las informaciones y mensajes de naturaleza numérica.
3. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas.
4. Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos.
5. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas matemáticos.
6. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o problema.
7. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas de las propias.
8. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos numéricos.
9. Reconocimiento y valoración de la utilidad de la medida para transmitir informaciones precisas relativas al entorno.
10. Disposición favorable a realizar o estimar medidas de objetos, espacios y tiempos cuando la situación lo aconseje.
11. Revisión sistemática del resultado de las medida directas o indirecta, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados.
12. Hábito de expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.
13. Sensibilidad para percibir las cualidades estéticas de las configuraciones geométricas reconociendo su presencia en la Naturaleza, en el Arte y en la Técnica.
14. Sentido crítico ante las representaciones a escala utilizadas para transmitir mensajes de diferente naturaleza.
15. Reconocimiento y valoración de los lenguajes gráfico y estadístico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.

16. Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en el tratamiento y la representación gráfica de informaciones de índole muy diversa.
17. Reconocimiento y valoración de trabajo en equipo como la manera más eficaz para realizar determinadas actividades (planificar y llevar a cabo experiencias, toma de datos, etc.).
18. Disposición favorable a investigar fenómenos del azar y a tener en cuenta la probabilidad en la toma de decisiones sobre fenómenos aleatorios.

Metodología

La forma de introducir y desarrollar cada unidad didáctica depende de los contenidos de la misma. Se han desarrollado, a modo de ejemplo, tres unidades didácticas en las que se detalla la metodología a seguir en cada una.

Las unidades desarrolladas son:

Curso 2º: Unidad 1. El número entero.

Curso 3º: Unidad 1: El número racional.

Curso 4º: Unidad 10 de la opción A que corresponde a la Unidad 12 de la opción B: Probabilidad.

En cualquier caso, algunos de estos métodos pueden considerarse, de alguna manera, generales y podrían aplicarse, con las variaciones adecuadas, a distintas unidades didácticas.

El método que sugerimos para la realización de las actividades de nuestra propuesta es el siguiente:

1.º Introducir cada tema, planteando los objetivos con vocabulario asequible para el alumno. En ocasiones puede ser más conveniente hacer esta introducción después de haber realizado con los alumnos alguna actividad de la que se habla en el siguiente punto.

2.º Realizar una aproximación al nuevo concepto que se va a tratar mediante ejemplos que hagan ver la necesidad del mismo, siempre que sea posible, y con alguna breve reseña histórica y hechos anecdóticos que pueden motivar al alumno. Lo ideal sería que antes de abordar el concepto, los alumnos ya hubieran resuelto algún ejercicio de introducción.

3.º Explicación del concepto para todo el grupo siempre que corresponda al nivel I.

4.º Realización de las actividades del Nivel I bajo la supervisión del profesor que irá resolviendo las dudas que surjan. La mayoría de las veces se hará de manera individual o por parejas. En ocasiones podrá hacerse en grupos, bien de nivel homogéneo o heterogéneo, como luego se explica.

5.º Cuando los alumnos de los niveles superiores hayan terminado, el profesor introducirá y explicará los nuevos contenidos correspondientes al nivel II a ese grupo de alumnos o profundizará en los ya trabajados, para lo que convendrá agruparlos. A continuación, estos alumnos realizarán las del segundo nivel. De igual forma se procederá para los alumnos que correspondan al tercero. La mayoría de las veces los alumnos podrán continuar realizando las actividades del nivel superior cuando hayan finalizado las del anterior sin necesidad de explicación por parte del profesor, ya que, como se ha dicho en la introducción, no hay muchos conceptos que no correspondan a los tres niveles. Así pues, se trata de que el profesor vaya resolviendo las cuestiones que cada alumno plantee o de que le haga indicaciones cuando sea necesario.

Si el agrupamiento en el aula para la realización de las actividades de forma individual se hace por niveles, queda muy facilitada la labor del profesor a la hora de introducir conceptos o realizar alguna profundización en los dos niveles superiores. Por otra parte, si no es así, los alumnos de niveles II y III ayudan a sus compañeros del nivel I, fomentándose la solidaridad y compañerismo entre ellos. El profesor decidirá en cada momento cual es el agrupamiento más adecuado

Aunque el profesor al poco tiempo ya sabrá a qué nivel corresponde cada alumno, no parece conveniente clasificarlos de manera "oficial". La idea es que cualquier alumno, conforme vaya terminando las actividades de un nivel, empiece las del siguiente. De esta forma la clasificación nunca sería definitiva ya que siempre habrá alumnos que, aunque sean claramente de uno de los dos niveles inferiores, podrán hacer actividades puntuales del nivel siguiente en algunas unidades. En muchas ocasiones puede no ser necesario que todos los alumnos realicen todas las actividades del nivel anterior, sobre todo si hay alguna repetitiva y se ve que el alumno ha adquirido ya el concepto o algoritmo que tratan.

Para poder llevar a la práctica esta forma de trabajo, como ya se ha dicho en la introducción, la Administración deberá dotar a los centros de los recursos humanos y materiales necesarios, como pueden ser:

a) Grupos reducidos de alumnos.
b) Desdobles (en grupos homogéneos o heterogéneos).
c) Un segundo profesor del área en el aula.
d) Aumento del número de horas de Matemáticas en todos los cursos de la ESO, especialmente en el segundo, donde las tres horas actuales son claramente insuficientes y están, ya, por debajo de las del resto del Estado.

Si estas medidas organizativas fuesen adoptadas, podrían, incluso, acometerse proyectos más ambiciosos.

En ocasiones podrán realizarse actividades o trabajos en grupo. Si los grupos son homogéneos, cada uno realizará actividades de su nivel. Si el grupo es heterogéneo, se le asignará una tarea común que conste de varias partes que se repartirían entre los componentes de acuerdo con el nivel de cada uno. Para ello habría que seleccionar bien las actividades y muchas veces modificarlas o construir una con varias de las propuestas en este documento.

Evaluación

1. ASPECTOS A EVALUAR

A. – El progreso del alumno.
   – La adecuación del proceso educativo.
   – La idoneidad de los materiales.
   – La necesidad de modificación.

B. – Conceptos.
   – Procedimientos.
   – Actitudes.

2. ETAPAS

A. Evaluación inicial:
   – Información del profesorado del curso anterior.
   – Pruebas de conocimientos de partida.
   – Seguimiento de hábitos y actitudes por medio del cuaderno, trabajo de clase y trabajo de casa.

B. Evaluación continua.

C. Evaluación final.

3. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

4. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

A. Pruebas escritas.
B. Pruebas orales-escritas (pizarra).
C. Cuaderno.
D. Trabajo de clase.
E. Trabajo de casa.

5. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

1. *Aspectos a evaluar*

La evaluación es un elemento fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje porque a través de ella pueden conocerse:

– El nivel de progreso del alumno, con relación a los objetivos propuestos.

– La adecuación del proceso de enseñanza-aprendizaje así como la de los materiales empleados.

– La necesidad de modificación del diseño curricular cuando se compruebe que su efectividad no es la deseada.

La evaluación no debe ceñirse únicamente a la comprobación del grado de adquisición de los conceptos por parte del alumnado sino que debe abarcar los tres aspectos inseparables de este proceso educativo, como son conceptos, procedimientos y actitudes. Cada uno de estos apartados se evaluará a través de la recogida de información diaria y continua sobre el trabajo, la motivación y el esfuerzo personal del alumno.

2. *Etapas*

El proceso de evaluación tiene unas etapas bien diferenciadas en sus objetivos que irán indicando la adecuación del proceso de enseñanza-aprendizaje, así como el progreso experimentado por el alumno en cada momento.

Estas etapas son la Evaluación Inicial, Evaluación Continua y Evaluación Final.

A. *Evaluación inicial*

Se llevará a cabo durante las dos o tres primeras semanas de clase con objeto de conocer la situación de cada alumno en el primer momento.

Por medio de la Evaluación Inicial se podrá hacer una primera valoración del nivel inicial del alumno. Se detectarán dificultades de aprendizaje, de adaptación social así como al alumnado con elevadas capacidades, que no debe caer en el olvido o frenar su ritmo para acomodarse al del resto de la clase.

Se hará un seguimiento sistemático de todos los aspectos fundamentales (conceptos, procedimientos y actitudes) utilizando estos instrumentos:

– Información de las características del alumno por parte del profesorado que ha trabajado con él anteriormente, si es alumnado desconocido. Esto se hará en las reuniones de Departamento, a principio de curso y en las reuniones mixtas entre Primaria y Secundaria que se mantendrán al finalizar el curso escolar, para recibir la información sobre el alumnado de 6º de Primaria que se incorporará a 1º de ESO. Estas reuniones podrán sustituirse por informes escritos sobre estos alumnos.

– El seguimiento del trabajo personal del alumno, que es muy importante durante los primeros días.

– Al principio de curso se podrán realizar pruebas iniciales referentes a los contenidos del curso anterior.

B. *Evaluación continua*

Al ser continuo el proceso de enseñanza-aprendizaje también debe serlo la evaluación porque va valorando al alumno en cada uno de los momentos y de las etapas del proceso educativo

En cada evaluación, el alumno debe dominar lo trabajado en las anteriores porque, la mayor parte de las veces, el progreso en un aspecto determinado depende del dominio que se tenga del anterior.

C. *Evaluación final*

Al ser el Primer Ciclo de la ESO un curso de dos años de duración, para la evaluación definitiva del alumno deben tenerse en cuenta las seis evaluaciones realizadas a lo largo del Ciclo.

En el Segundo Ciclo, al ser cursos independientes, se tendrán en cuenta las tres evaluaciones.

Se pretende que al finalizar el Primer Ciclo o Tercero debe conseguirse que el alumno esté capacitado para:

Nivel I, incorporarse al curso siguiente con garantías de conseguir los objetivos mínimos

Niveles II y III, incorporarse al curso siguiente con garantías de un progreso adecuado.

Al finalizar la ESO, el alumno deberá ser capaz de manejarse con autonomía y como ciudadano responsable si ha conseguido los objetivos del nivel I, y de afrontar la etapa siguiente con garantía si ha conseguido los de los niveles II y III.

3. *Criterios de evaluación*

Se especifican en cada una de las unidades atendiendo a los niveles de profundización establecidos tanto en conceptos como en procedimientos.

4. *Instrumentos de evaluación*

A. *Pruebas escritas*

Sugerimos dos posibilidades:

Propuesta 1: Se realizarán dos tipos distintos de pruebas escritas:

a) Una específica para el nivel I (objetivos mínimos) donde se procurará que el número de actividades no sea demasiado reducido para proporcionar más oportunidades de superar los distintos objetivos.

Se valorará, como máximo, con un BIEN, habida cuenta de que la dificultad de los contenidos trabajados se encuentran aproximadamente entre un 50% y un 60% de los objetivos máximos.

b) Otra para los niveles II y III donde la diferenciación entre los dos estará en la dificultad máxima del 20% de las actividades, que será necesario resolver para obtener la calificación de SOBRESALIENTE.

La composición de estas pruebas se ajustará, aproximadamente, a esta distribución: 50% objetivos mínimos; 30% objetivos propedéuticos; 20% objetivos máximos.

Propuesta 2:

Una única prueba que constará del 50-60% de mínimos, un 20-30% de nivel II y un 20% de nivel III.

En la ejemplificación de las unidades del primer ciclo y tercero, se incluye un modelo de prueba del primer tipo, y en la de cuarto, una del segundo.

B. *Pruebas orales-escritas: la pizarra*

Se procurará que cada alumno salga a la pizarra un número similar de veces para que todos estén en las mismas condiciones.

Se evaluará la rapidez en el cálculo, el razonamiento mediante la explicación oral del proceso seguido y la organización del trabajo.

Se podrá utilizar este instrumento para corregir actividades hechas en casa con objeto de comprobar que el alumno comprende bien el ejercicio y que no se ha limitado a memorizarlo.

C. *Cuaderno*

Aunque en el cuaderno aparecen conceptos y procedimientos, no es lo único que se valora al corregirlo. Se valoran también las actitudes manifestadas al realizar el trabajo.

Sobre todo el alumnado del Primer Ciclo, de 12-13 años, necesita pautas muy concretas para crear hábitos de trabajo diario, orden, limpieza, constancia e interés y necesita comprender que el cuaderno es el instrumento básico de su actividad porque en él queda reflejado todo el trabajo que se va realizando. Por todo esto, la exigencia en cuanto a la elaboración del cuaderno será elevada en el Primer Ciclo así como su ponderación (%), disminuyendo ambas en el Segundo Ciclo, por considerar que en esos momentos es un objetivo conseguido casi en su totalidad.

Este seguimiento exige un gran esfuerzo al profesor, pero es fundamental, en Primer Ciclo, para crear hábitos en el alumno. Si se hace a conciencia los resultados se reflejarán en cursos posteriores, pudiendo dedicar entonces el profesorado más tiempo a otros aspectos como conceptos y procedimientos.

D. *Trabajo de clase*

Se evaluará la realización de las actividades propuestas, el comportamiento, la atención, el interés, la colaboración y el respeto.

E. *Trabajo de casa*

En este aspecto se valorará la responsabilidad en la realización de la tarea diaria.

5. *Criterios de calificación*

Toda evaluación se traduce en una *calificación*.

Teniendo en cuenta las características del alumnado de ESO es muy importante que adquiera conceptos y procedimientos matemáticos, pero no es menos importante que adquiera hábitos de trabajo, de autonomía, de organización, de disciplina y que tome “gusto a las matemáticas”.

3.º de la E.S.O.

Matemáticas

Temporalización

Evaluación inicial

Unidad 0: Se repasa la primera parte correspondiente a números Enteros.

2 semanas

Primera evaluación

Unidad 1. El número Racional. Segunda parte.

3 semanas

Unidad 2. Proporcionalidad numérica.

1,5 semanas

Unidad 3. Introducción a polinomios.

2 semanas

Unidad 4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Problemas.

2,5 semanas

Unidad 5. Introducción a la ecuación de segundo grado.

1 semana

Total primera evaluación: *12 semanas*

Segunda evaluación

Unidad 6. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Problemas.

3 semanas

Unidad 7. Introducción a la Geometría Plana: Ángulos, Triángulos y cuadriláteros. La Circunferencia.

2,5 semanas

Unidad 8. Semejanza. Escalas. Mapas.

1,5 semanas

Unidad 9. Teoremas del cateto y de la altura. Teorema de Pitágoras. Problemas.

2 semanas

Unidad 10. Áreas y volúmenes. Cuerpos geométricos.

3 semanas

Total segunda evaluación: *12 semanas*

Tercera evaluación

Unidad 11. Funciones. Generalidades.
2,5 semanas

Unidad 12. La función afín. Representación de rectas.
2,5 semanas

Unidad 13. La información estadística. Gráficos.
2 semanas

Unidad 14. Parámetros estadísticos.
2 semanas

Total tercera evaluación: *9 semanas*

Total: 33 semanas

Unidad n.º 1

El número racional

Introducción

El estudio de los números puede ser la parte más representativa de las Matemáticas. Su importancia para un desenvolvimiento correcto en la vida cotidiana resulta obvia. Por otra parte, el lenguaje numérico ha de ser utilizado con soltura como herramienta para todas las disciplinas.

En esta unidad se completará el estudio del número racional. Se dará mayor rigor a todo lo aprendido hasta ahora en cursos anteriores y se exigirá que el alumno domine su manejo.

Se trata de que en 4º, con un brevísimo repaso, se pudiese entrar rápidamente en el número real y los radicales.

Se sugiere dividir la unidad en dos temas (Número Entero y Número Racional), el primero de los cuales sería un repaso de lo visto en 2º de ESO.

Conocimientos previos

Se supone que toda la parte de Números Enteros el alumno ya la tiene dominada. En este curso se haría un repaso incidiendo en los aspecto que el alumnado tiene menos asimilados: Potencias, aplicación del M.C.D. y el M.C.M. a la resolución de problemas...

Aunque en este curso se volverán a explicar, sería bueno que los alumnos hubiesen ya visto los siguientes aspectos de Números Racionales:

- Reconocimiento de un Número Racional.
- Reducción de números racionales a común denominador.
- Comparación y ordenación de números racionales.
- Reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales.
- Potencias de números racionales y exponente natural.
- Operaciones combinadas.
- Reconocimiento de números en forma decimal.
- Operaciones con números decimales.

Objetivos didácticos

– Operar correctamente con números enteros, utilizando la regla de los signos, la jerarquía de las operaciones y los paréntesis .... (I-II-III)
– Resolver problemas con números enteros .... (I-II-III)
– Expresar los conceptos asociados a la divisibilidad de números enteros .... (I-II-III)
– Resolver problemas mediante M.C.D. y M.C.M. .... (II-III)

- Representar y ordenar fracciones en la recta racional .... (I-II-III)
- Poner denominador común a una serie de fracciones para compararlas .... (I-II-III)
- Operar con fracciones, utilizando correctamente la jerarquía de las operaciones, los paréntesis y corchetes .... (I-II-III)
- Resolver problemas mediante fracciones .... (I-II-III)
- Pasar un número de forma decimal a forma fraccionaria y viceversa .... (I-II-III)
- Resolver problemas con números decimales .... (I-II-III)
- Distinguir números racionales de números no racionales .... (II-III)
- Saber operar con números en notación científica .... (II-III)
- Resolver problemas mediante la notación científica .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. El Número entero:
   - 1.1. Concepto, clasificación y representación .... (I-II-III)
   - 1.2. Operaciones con números enteros. Jerarquía .... (I-II-III)
   - 1.3. Potencias de exponente natural. Raíces exactas de números enteros .... (I-II-III)
   - 1.4. Múltiplos y divisores de números enteros. El M.C.D. y el M.C.M. .... (I-II-III)
   - 1.5. Descomposición factorial de un número .... (I-II-III)
   - 1.6. Valor absoluto de un número entero .... (I-II-III)
2. El Número Racional:
   - 2.1. Concepto y representación en la recta .... (I-II-III)
   - 2.2. Comparación y ordenación de números racionales .... (I-II-III)
   - 2.3. Operaciones con números racionales. Jerarquía .... (I-II-III)
   - 2.4. Potencias de base racional y exponente entero .... (I-II-III)
   - 2.5. Raíces exactas de números racionales .... (I-II-III)
   - 2.6. Raíz enésima de un número racional .... (II-III)
3. Forma decimal de un número:
   - 3.1. Definición y clasificación de los números decimales .... (I-II-III)
   - 3.2. Operaciones con números en forma decimal .... (I-II-III)
   - 3.3. Identificación de números racionales con las formas decimales .... (I-II-III)
   - 3.4. Aproximación y redondeo .... (I-II-III)
   - 3.5. Existencia de números no racionales .... (II-III)
   - 3.6. La notación científica .... (II-III)

Procedimientos

- Realización ordenada de operaciones combinadas con números enteros, utilizando paréntesis y corchetes........ (I-II-III)
- Descomposición en factores primos de un número entero........ (I-II-III)
- Cálculo del M.C.D. y del M.C.M. de una familia de números........ (I-II-III)
- Utilización del M.C.D. y el M.C.M. para resolver problemas........ (II-III)

- Utilización de la calculadora para realizar operaciones combinadas con números enteros. El paréntesis .... (I-II-III)
- Colocación en la recta de los números racionales .... (I-II-III)
- Reducción de fracciones a común denominador para poder compararlas .... (I-II-III)
- Práctica de operaciones con nº racionales teniendo en cuenta la jerarquía .... (I-II-III)
- Operaciones con paréntesis y corchetes .... (I-II-III)
- Resolución de problemas mediante fracciones .... (I-II-III)
- Utilización de la calculadora para hallar potencias de exponente racional .... (II-III)
- Utilización de la calculadora para operar con números decimales .... (I-II-III)
- Paso de un número en forma fraccionaria a forma decimal y viceversa .... (I-II-III)
- Resolución de problemas en los que aparezcan números decimales. Utilización del redondeo (I-II-III)
- Resolución de problemas utilizando notación científica .... (II-III)
- Utilización de la calculadora para realizar operaciones con notación científica .... (II-III)

Metodología

- Para introducir el tema suele resultar atrayente empezar haciendo una visión histórica y hablar de:
  - "¿Cuáles fueron los primeros números que aparecieron en la historia?"
  - Pueblos de la actualidad que sólo conocen los números naturales.
- Cada vez que se produce una ampliación del campo numérico se provoca su necesidad: De forma histórica *(Niveles I y II)* ó planteando la imposibilidad de resolver ecuaciones en el conjunto numérico anterior *(III)*.
- La necesidad de las fracciones resulta obvia en la vida real: 1/2 tortilla, un kilo y cuarto de carne... También resulta obvia la necesidad de las expresiones decimales, sobre todo para realizar mediciones.
- Una vez llegados hasta el conjunto Q nos detendremos y sólo lo ampliaremos cuando veamos expresiones decimales (y solamente a los *niveles II y III*).
- Las explicaciones teóricas serán, casi siempre, inductivas (Ejemplo, definición general, ejemplo):

  1.º "¿Cuál es el M.C.M. de 30 y 45?"

  2.º "El M.C.M. de una familia de números es ...." (Definición)

  3.º "Hallar el M.C.M. de 18 y 42"
- Para desarrollar los Contenidos Procedimentales el profesor siempre hará en la pizarra un primer modelo (puede que este primer modelo haga "que lo descubran" los alumnos del *nivel III*) e intentará que todos los alumnos entiendan el proceso. Luego el alumno decidirá si la forma de hacer del profesor es la que mejor le va, ó si él decide hacerlo de otra forma (III). Posteriormente se propondrán ejercicios para que los haga el alumnado en clase y en casa. Los alumnos corregirán al día siguiente esos ejercicios en la pizarra. A esta corrección habrá que estar especialmente atento pues es el momento de cambiar malos hábitos en la ejecución de procedimientos. Será el momento en el que el alumnado presentará todas las dudas al profesor.
- La resolución de problemas ha de ser fundamental en esta unidad. Debemos conectar los tipos de números con la vida cotidiana:
  - Problemas de M.C.D. y de M.C.M.

- Problemas de fracciones.
- Problemas de expresiones decimales.
- Problemas de números en notación científica. *(Niveles II y III)*.

– Se sugiere que no se canse al alumno con castillos de fracciones. Es preferible que tenga claras las reglas básicas y que haga unos pocos ejercicios de cada tipo, sabiendo realmente lo que está haciendo. No sirve de mucho que repita rutinariamente y sin pensar unas cuantas reglas en demasiados ejercicios. Los castillos grandes se dejarían para el *Nivel III*.

Temporalización

Intentando hacer una temporalización lo más realista posible y con el objetivo de que dé tiempo a explicar todo lo propuesto para 3º, habríamos de dedicar a esta unidad unas 5 semanas, que serían unas 20 sesiones: Aproximadamente 8 sesiones a repasar número entero y 12 a explicar número racional.

Los últimos dos días de la 5ª semana se dedicarían a hacer un control de la unidad y a su corrección (si el profesor lo considera oportuno).

Materiales y recursos

La utilización de la calculadora es fundamental en esta unidad. El profesor decidirá los momentos adecuados.

Se sugiere que las operaciones con enteros y con fracciones el alumno sepa realizarlas sin calculadora. Una vez conseguido este objetivo, se enseñará a los alumnos del *Nivel III* a hacer estas operaciones con calculadora, utilizando paréntesis, corchetes y la tecla de fracción. También se sugiere que las operaciones con números decimales se hagan con calculadora.

Para el *Nivel III*, se utilizará la calculadora para hacer potencias de exponente racional.

De la notación científica se enseñarán tanto las teclas correspondientes de la calculadora científica, como su traducción al lenguaje escrito.

Evaluación

Criterios de evaluación

– Calcular correctamente con números enteros, utilizando la regla de los signos, la jerarquía de las operaciones y los paréntesis .... (I-II-III)

- Resolver problemas con números enteros .... (I-II-III)
- Calcular el M.C.D. y el M.C.M. de una familia de números .... (I-II-III)
- Resolver problemas mediante M.C.D. y M.C.M. .... (II-III)
- Representar y ordenar fracciones en la recta racional .... (I-II-III)
- Poner denominador común a una serie de fracciones para compararlas .... (I-II-III)
- Operar con fracciones, utilizando correctamente la jerarquía de las operaciones, paréntesis y corchetes .... (I-II-III)
- Resolver problemas mediante fracciones .... (I-II-III)
- Pasar un número de forma decimal a forma fraccionaria y viceversa .... (I-II-III)
- Resolver problemas con números decimales .... (I-II-III)
- Distinguir números racionales de números no racionales .... (II-III)
- Saber operar con números en notación científica .... (II-III)
- Resolver problemas mediante la notación científica .... (II-III)

Modelo de prueba objetiva

NIVEL I

1. Calcula ordenadamente el resultado de las siguientes operaciones:

a) $5 + 2 \cdot 3 - 7 \cdot (-1)$

b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2)^3 + (-3) \cdot (-7)$

2. Calcula el M.C.D. y el M.C.M. de los números 30, 45 y 90.

3. Dadas las siguientes fracciones:

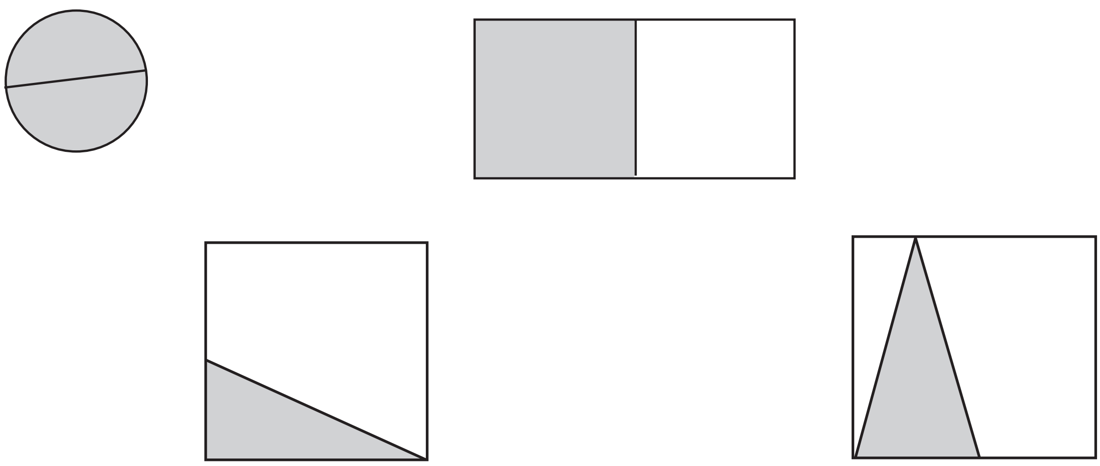
$$\frac{45}{36} \quad \frac{90}{180} \quad \frac{500}{400} \quad \frac{108}{288} \quad \frac{80}{64} \quad \frac{96}{192} \quad \frac{125}{100} \quad \frac{105}{280}$$

a) Halla la fracción irreducible de cada una de ellas.

b) Agrupa las que sean equivalentes.

c) Ordena de menor a mayor los representantes canónicos obtenidos.

4. De las siguientes figuras. ¿Qué fracción representa la parte rayada de cada una de ellas?



5. Efectúa ordenadamente las siguientes operaciones con números fraccionarios:

$$\text{a)}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

$$\text{b)}\ \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$$

6. En un concurso de radio se reparten 18.000 pts. entre dos concursantes que han acertado 32 y 28 preguntas respectivamente. ¿Cómo se debe repartir el dinero?

7. Las piezas que se utilizan en la fabricación de un determinado tipo de coche están formadas por una aleación que contiene *24/29* de cobre, *4/29* de estaño y *1/29* de cinc. ¿Cuántos kg. de cada metal entrarán en 846 kilogramos de aleación?

8. Ordena de menor a mayor los siguientes números: $2{,}47 \quad 2{,}\widehat{4} \quad 2{,}4\widehat{7}\,,\ 2{,}\widehat{47}$.

9. Un delineante está dibujando el plano de una casa a escala 1:175, es decir, cualquier longitud en la realidad, el delineante la divide entre 175 y ésta es la longitud que tendrá en el plano. Si la planta de una casa es un rectángulo de 28,45 metros de largo por 14,354 m. de ancho. ¿Qué dimensiones tendrá en el plano la planta de la casa?

10. ¿Cuál es el volumen de aire que hay en mi habitación que mide 3,52 x 2,47 x 2,5 metros? Calcula también la superficie de las paredes, del suelo y del techo. (Nota: Las dimensiones se indican: largo x ancho x alto).

NIVEL II

Habría 5 ejercicios comunes. Se sustituirían los cinco restantes por los siguientes (Se indica el ejercicio que sustituye con el mismo número que el sustituido)

3. Un taxista cambia el aceite de un vehículo cada 3.500 km. y le hace una revisión general cada 8.000 km. ¿Cada cuántos kilómetros coinciden las dos operaciones?

4. Efectúa las siguientes operaciones, dando el resultado lo más simplificado posible:

$$\text{a)}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$$

$$\text{b)}\ \frac{(-3)\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)}{(-2)\left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right)}$$

7. De un solar se vendieron los *2/3* de su superficie y después los *2/3* de lo que quedaba. El ayuntamiento expropió los 3.200 m^2 restantes para un parque público. ¿Cuál era la superficie del solar?

8. Efectúa con la calculadora y escribe el resultado en notación científica y con todas las cifras:

a) $(2{,}25 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) : (3 \cdot 10^{-3})$

b) $4{,}2 \cdot 10^{-16} - 8{,}2 \cdot 10^{-17} + 1{,}8 \cdot 10^{-5}$

c) $(1{,}4 \cdot 10^{-7})^2 : (5{,}2 \cdot 10^{-6})$

9. Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año. Sabiendo que la luz se desplaza en el vacío con una velocidad de 3×10^5 km/sg., calcula a cuántos km. corresponde un año-luz.

NIVEL III

De los diez ejercicios, siete serían comunes con el Nivel II. Habría tres ejercicios que marcarían la diferencia. (Se indican los ejercicios que sustituyen con el mismo número que los sustituidos)

3. Se desea cubrir con baldosas cuadradas el suelo de una habitación que mide 330 cm. de ancho por 390 cm. de largo. Se quiere realizar el trabajo utilizando baldosas lo más grandes que sea posible y sin cortar ninguna. ¿Cuál debe ser el tamaño de las baldosas?

8. En una cierta ciudad, la mitad de la población está entre los 20 y los 50 años, y por cada tres habitantes mayores de 50 años, hay cinco menores de 20.
   a) ¿Cuál es el porcentaje de personas de cada grupo?
   b) Se desea representar esta proporción en un diagrama de sectores. ¿Qué ángulo central corresponde a cada sector?

9. Las dimensiones del Universo son tan grandes que resulta difícil su comprensión para nuestra mente. Para hacerte una idea, calcula el tiempo (en horas, días o años) que se tardaría en recorrer alguna de estas distancias, viajando en un cohete a 1.000 km/h.
   a) Tierra-Luna: 384.000 km.
   b) Tierra-Sol: 150 millones de km.
   c) Tierra-Estrella Polar: 6.168 billones de km.
   d) Diámetro de la Vía Láctea: 1 trillón de km.

Actividades

NIVEL I

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $6 - 6 : 3 - 2$

b) $5 - (-2) + (-8) : (-4) - 5$

c) $7 \cdot (-3) + 2 : (-2) + 15 \cdot 3$

d) $6 : (-2) + (-7)\ (-15) - (-1)$

2. Efectúa ordenadamente las siguientes operaciones:

a) $(-6) \cdot \{1 - 3 - (6 - 2 - 8) - 2\}$

b) $(-4) \cdot \{5 - 2 \cdot 7 + [5 + 1 - (2 - 7)]\}$

c) $[4 + 5 \cdot 2 - 8 : (-2)]\ (-1) + [56 - 1 - (40 - 1)] : (-2)$

d) $6 \cdot 4 - 2 . 3 + 5 : (-1) + 2 . 6 - (6 - 7 - 1)$

3. De una división se conocen el divisor, que es 12, el cociente, que es 8, y el resto, que nos dicen que vale 9. ¿Cuál es el dividendo?

4. Si el dividendo de una división es 84, el cociente es 16 y el resto es 4, ¿cuál es el divisor?

5. Descomponer en factores primos los siguientes números:

4761 720 864 5488 16875

6. Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las siguientes parejas de números:

a) 40 y 24

b) 225 y 135

c) 17 y 23

d) 1215 y 1260

7. Haz tres representaciones diferentes de la fracción *1/4* sobre un cuadrado.

8. Expresa mediante una fracción las siguientes cantidades:

a) 2 días de una semana.

b) 40 minutos de una hora.

c) 80 minutos de una hora.

d) 3 meses de un año.

e) 10 días de un año.

f) 150 meses de un siglo.

9. Compara los siguientes pares de números, reduciéndolos primero a común denominador:

a) *11/30* y *7/20*

b) *2/5* y *5/12*

c) *3/8* y *5/12*

d) *3/10* y *5/6*

10. Simplifica, hasta hacer irreducibles las siguientes fracciones:

$$\frac{120}{500} \qquad \frac{1024}{1280} \qquad \frac{-3800}{190} \qquad \frac{56}{63} \qquad \frac{36000}{90000}$$

11. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Los *3/5* de una cantidad son 175.000 pts. ¿Cuál es esa cantidad?

b) Tenemos 5.700 botellas cuando llevamos *1/3* de la carga. ¿Cuántas botellas constituyen la carga total?

c) ¿Cuánto valen los 5/8 de un terreno que mide 11.804 m^2 a razón de 1.275 pts. el metro cuadrado?

12. Efectúa ordenadamente las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{5} + \frac{9}{8} - \frac{13}{6}$

b) $\left(\frac{2}{3} - 5\right) : \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{4}{15}\right)$

c) $\frac{2}{3} - 5 : \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{4}{15}\right)$

d) $\frac{3}{7} \cdot (-2) + 1 - \frac{1}{4}\,(2 - \frac{1}{3})$

13. Efectúa y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{24} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \cdot \frac{3}{2}$

b) $\left[\left(3 + \frac{1}{3}\right) : \left(2 - \frac{1}{4}\right)\right] : 3$

c) $\frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{6} - 1\right) + \left(\frac{4}{3} - 2\right)\left(\frac{1}{6} - 1\right)$

d) $\frac{1}{5} - 2 : \frac{10}{3} + 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right)$

14. Efectúa y simplifica:

a) $\frac{-3^2}{(-3)^2}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^3$

c) $\dfrac{3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2 \cdot (-2)^3}{(-4)^2 \cdot 3^3 \cdot 2^3}$

d) $\left[\left(\left(\dfrac{1}{2} \right)^3 \right)^{-3} \right]^2$

15. Un señor ha vendido los 5/7 de una finca y todavía le quedan 2.600 m^2. ¿Cuál es la superficie de la finca?

16. Un jugador comienza el juego con 5.400 pts. En la primera partida pierde un sexto de su capital, en la segunda gana 2/5 de lo que le quedaba, y luego pierde los 2/9 de lo que llevaba. ¿Cuánto dinero le queda?

17. Un escritor escribe una novela en 4 meses. El primer mes escribe los 5/12 de la novela, el segundo mes los 5/24, y el tercer mes los 2/8 de la novela. ¿Qué fracción de novela escribió el cuarto mes?

18. Escribe las siguientes fracciones en forma decimal:

$$\frac{5}{4} \quad \frac{-12}{5} \quad \frac{8}{11} \quad \frac{-23}{27} \quad \frac{8}{15} \quad \frac{14}{4} \quad \frac{3}{-5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{25}{6}$$

19. Escribe en forma de fracción irreducible los siguientes números decimales:

a) 0,2
b) -3,25
c) 0,0008
d) 5,0067

20. Escribe en forma de fracción irreducible los siguientes números decimales:

a) 1,66666 ....
b) –2,212121 ....
c) 0,0022222 ....
d) 3,12232323 ....
e) -21,3444444 ....

21. Un rectángulo tiene de dimensiones 4,57 m. por 2,68 m. Calcular su perímetro y su superficie.

22. Si tu hermano mide 0,123 decámetros y tú mides 1,5 veces más. ¿Cuánto mides?

NIVEL II

1. Efectúa ordenadamente las siguientes operaciones, teniendo en cuenta paréntesis, corchetes y llaves:

a) $[(-5) \cdot (-3) - (-10) : (+2) - (-4)] + (-27) : (-9)$
b) $-(-43) - [(-3) + (-7)(-3)]: (-6) - (-4) \cdot (-2)$
c) $-(-27) \cdot (-8) : [(-6) - (-5)] - \{ -(-4) - [-(+6) + (-9) : (-3)] - (-4)\}$

2. En cada una de las siguientes operaciones existe un error. Encuéntralo.

a) $5 + 3 \cdot (-2) - (-4) = 8 \cdot (-2) + 4 = -16 + 4 = -12$

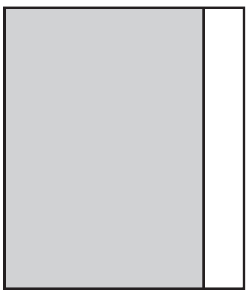
b) $13 - [5 - 2\,(1 - 4)] = 13 - (5 - 2 + 8) = 13 - 5 - 2 - 8 = -2$

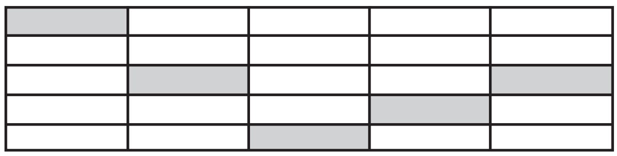
c) $15 : 3 + 2 - (-6) = 15 : 5 + 6 = 3 + 6 = 9$

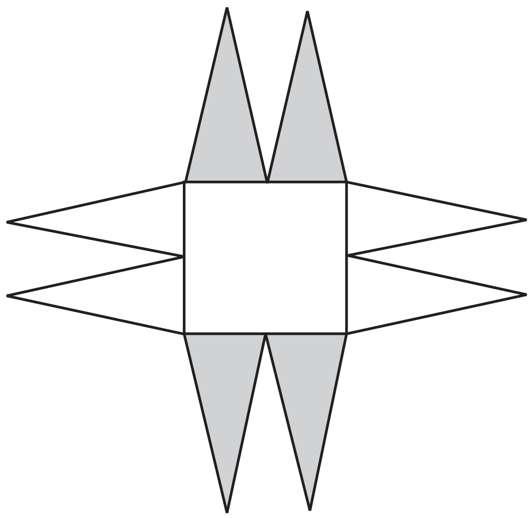
3. Dos sucesos se repiten, uno cada 45 días y otro cada 30. Aparecen juntos el 5 de marzo. ¿En qué fechas de ese año volverán a coincidir?

4. El planeta Júpiter tiene cuatro satélites. El primero tarda 54 horas en dar una vuelta alrededor del planeta, el segundo tarda 85 horas en efectuar ese mismo recorrido, el tercero tarda 172 horas y el cuarto 400. Considerando como posición inicial de todos los satélites la actual. ¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir para que los cuatro satélites vuelvan a coincidir? ¿Cuántas vueltas dará cada satélite en ese tiempo?

5. ¿Qué fracción del total representa la parte sombreada en cada caso?







6. Efectúa ordenadamente las siguientes operaciones:

a) $\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\right] \cdot 2 - \left[2 : \left(\frac{2}{5} + 1\right)\right] \cdot 3$

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\right]$

c) $\frac{1}{5} - 22 : \frac{10}{3} + 3\left(1 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right)$

7. Calcula y simplifica todo lo que sea posible:

a) $-2 + \frac{1}{2}\left\{2 + \frac{1}{2}\left[2 + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

b) $\dfrac{\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 2\left(5 - \frac{1}{2} + 2 : \frac{1}{3} - 7\right)}{1 + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) - 2 + \frac{1}{3}}$

8. ¿A qué número entero es igual cada una de estas potencias?

a) 1^{-37} b) $(-1)^{-7}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{0}$

9. Un chico sale de marcha y gasta primero los *2/5* de su dinero y luego *1/6* de lo que le quedaba. Si regresa con 390 pts. ¿Con cuánto dinero salió?

10. Una agencia propone un viaje a un grupo de empleados de una oficina. Inicialmente interesa el viaje a una octava parte de la plantilla. Cuando se concreta el precio se retiran *3/5* de los que pensaban ir. Por causas diversas, una semana antes se retiran *1/21* de los que quedaban. Si al final van 80 personas. ¿Cuántas personas forman parte de la plantilla de la oficina?

11. Un vaquero se dirige desde Fort Smith a James City. El 34% de este trayecto lo recorre en tren y las dos terceras partes de lo queda en diligencia. El resto a caballo. ¿Qué tanto por ciento recorre a caballo? Si la distancia total son 360 millas. ¿Cuántas recorre a caballo?

12. Escribe tres números decimales comprendidos entre:

a) -4,28 y –4,1
b) 5,4 y 5,4444 ....
c) -3,5666 .... y -3,5
d) 1,7856 y 1,785656 ....

13. a) Escribe dos fracciones tales que:

$$\frac{18}{13} > \frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{17}{13}$$

b) Escribe otras dos de modo que:

$$0{,}36 < \frac{x}{y} < \frac{y}{w}\ 0{,}3636\ ....$$

14. Escribe en forma de potencia la relación que existe entre los números de cada expresión:

a) $\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$ b) $\sqrt[5]{3125} = 5$

c) $\sqrt[6]{4096} = 4$ d) $\sqrt[4]{6561} = 9$

15. Calcula:

a) $32^{1/5}$ b) $81^{1/4}$ c) $2.187^{1/7}$

16. Obtén con la calculadora el valor aproximado de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{100}$ b) $\sqrt[5]{245}$ c) $\sqrt{0,5}$

17. Escribe en notación científica:

a) 73.256.000.000.000.000

b) La centésima parte de una diezmilésima.

e) 0,00000000425

f) 0,0000002

18. Expresa en notación científica las siguientes magnitudes:

a) Peso de un grano de arroz: 0,000027 kg.

b) Número de granos de arroz en un kilogramo: 36000 granos.

c) Número de moléculas que hay en un gramo de hidrógeno:

301.000.000.000.000.000.000.000 moléculas.

19. Efectúa con la calculadora y escribe el resultado con todas las cifras:

a) $5,2 \cdot 10^{11} - 1,2 \cdot 10^{12} + 7,2 \cdot 10^{10}$

b) $4,2 \cdot 10^{-6} - 8,2 \cdot 10^{-7} + 1,8 \cdot 10^{-5}$

c) $(2,25 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) : (3 \cdot 10^{-3})$

20. Calcula el número aproximado de glóbulos rojos que tiene una persona, sabiendo que tiene unos 4.500.000 por milímetro cúbico de sangre, y que su cantidad de sangre es de 5 litros. Exprésalo en notación científica.

Calcula la longitud que ocuparían esos glóbulos rojos puestos en fila, si su diámetro es 0,008 milímetros por término medio.

NIVEL III

1. Efectúa las siguientes operaciones con números enteros:

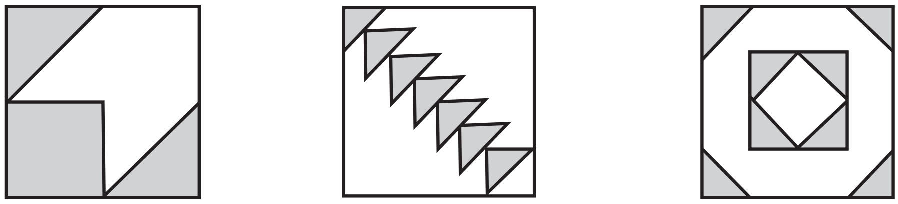
a) $5 - [-(-4 + 6) - (-3 + 2) - (-2 + 4)] - (-3 + 4) - [-(-3 + 6) - 2]$

b) $\left\{\dfrac{[(8 - 7 + 15) - 6] \cdot (-4)}{(-5) \cdot [(-7 + 13 - 8) - (-1)]}\right\} : [(-5 + 4) \cdot (13 - 15)]$

2. Tres toneles, cuyas capacidades son 250, 306 y 504 litros están llenos de diferentes clases de vino. Se quieren envasar, sin mezclar, en botellas iguales. Halla la capacidad máxima que pueden tener estas botellas, y el número de botellas necesarias para proceder al envasado.

3. ¿Cuántos músicos, como mínimo, hay en una banda de música que cuando desfila de dos en dos sobra uno, y también sobra uno si desfilan de tres en tres, de cuatro en cuatro y de cinco en cinco?

4. Expresa en forma de fracción las partes coloreadas de las siguientes figuras:



5. Efectúa ordenadamente las siguientes operaciones:

a) $$\frac{1-\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}-\frac{1}{6}$$

b) $$\frac{\left[\frac{3}{5}-\frac{2}{21}\left(-\frac{1}{5}-\frac{19}{20}\right)\right]\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{1-\frac{1}{9}}}$$

6. Una señora sale de paseo y se encuentra a un pobre, al cual le da la mitad del dinero que lleva más una peseta. Se encuentra a otro pobre, al que le da la mitad del dinero que le quedaba más dos pesetas. Finalmente, al tercer pobre que le pide limosna le da la mitad de lo que le quedaba más tres pesetas. En su monedero le quedó una peseta. ¿Cuánto dinero tenía antes de salir?

7. Un vendedor ambulante lleva una cesta de naranjas. En la primera casa que visita vende la mitad de las naranjas que lleva más media naranja. En la segunda vende la mitad de las que le quedaban más media. En la tercera y en la cuarta casa repite la misma operación, con lo que se le agota la mercancía. ¿Cuántas naranjas llevaba al principio?

8. En una banda municipal de música, el 16,66666...% de los miembros son trompetas y el 22,22222...% son tambores. Además, se sabe que el número de músicos no llega a 40, aunque sobrepasa los 30. ¿Cuántas personas forman la banda?

9. Los 16 estados miembros de la OTAN dedicaron en el año 1995 unas $6{,}5 \cdot 10^{13}$ pts. a gastos de defensa, lo que supone un 4,1%, como media de su Producto Interior Bruto (PIB). Expresa, en notación científica y en billones de pesetas el PIB de los países de la OTAN. (En nuestra lengua, 1 billon = 10^{12}, 1 trillón = 10^{18})

10. El cabello humano crece, aproximadamente, un cm. en un mes. ¿Cuánto crece en una hora?

11. A las 4 de la tarde del 11-6-92, en la Cumbre de la Tierra de Río de Janeiro, un reloj digital con dos pantallas reflejaba la grave situación de la población mundial.

La primera pantalla marcaba el número de habitantes de la tierra: 546.717.670

Cada segundo, esa cifra aumentaba en 7 unidades, cantidad de niños que nacen en ese tiempo.

La segunda marcaba el número de hectáreas de tierra cultivable que hay en la Tierra: 872.272.242

Cada 8 segundos, esa cifra disminuía en una unidad, ritmo al que se destruyen las tierras cultivables.

a) Si quieres recordar cuál es aproximadamente la población mundial, ¿qué cifra memorizarías?

b) La población mundial crece un 2% anual, aproximadamente. Si esa tasa se mantuviese, ¿Cuál sería la población del año 2005?

Unidad n.º 2

Proporcionalidad numérica

Objetivos

- Reconocer los términos de una proporción y calcular los que faltan .... (I-II-III)
- Establecer las relaciones de proporcionalidad entre los términos correspondientes de dos magnitudes proporcionales .... (I-II-III)
- Distinguir los tipos de proporcionalidad entre magnitudes .... (I-II-III)
- Estudiar la proporcionalidad compuesta .... (II-III)
- Estudiar las principales aplicaciones prácticas de la proporcionalidad numérica .... (I-II-III)
- Aplicar la proporcionalidad compuesta para resolver problemas .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Relaciones entre magnitudes. Magnitudes proporcionales. Definición de proporcionalidad (I-II-III)
2. Proporcionalidad directa .... (I-II-III)
   - 2.1. Constante de proporcionalidad .... (I-II-III)
   - 2.2. Regla de tres directa .... (I-II-III)
   - 2.3. Porcentajes, tanto por uno y tantos por ciento .... (I-II-III)
   - 2.4. Repartos directamente proporcionales .... (I-II-III)
3. Proporcionalidad inversa .... (I-II-III)
   - 3.1. Constante de proporcionalidad .... (I-II-III)
   - 3.2. Regla de tres inversa .... (I-II-III)
   - 3.3. Repartos inversamente proporcionales .... (I-II-III)
4. Proporcionalidad compuesta .... (II-III)
5. Interés simple .... (I-II-III)

Procedimientos

- Identificar relaciones de proporcionalidad numérica tanto directa como inversa .... (I-II-III)
- Calcular términos proporcionales .... (I-II-III)
- Aplicar la proporcionalidad numérica en operaciones comerciales: porcentajes, tantos por mil, interés y descuentos .... (I-II-III)
- Efectuar repartos proporcionales .... (I-II-III)
- Realizar problemas de proporcionalidad compuesta .... (II-III)
- Resolver problemas en los que intervenga la proporcionalidad .... (I-II-III)
- Seleccionar las estrategias de resolución de un problema de proporcionalidad .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– En la práctica el trabajo del alumno tiene dos cuestiones que son importantes de resaltar, la primera es la aplicación de la proporcionalidad en las actividades que tendrá que afrontar en la vida cotidiana, como descuentos e incrementos porcentuales, el IVA de los productos comerciales y cálculo aproximado de intereses bancarios. y la segunda distinguir entre proporcionalidad directa e inversa, ya que el alumno tiende a resolver los problemas aplicando la proporcionalidad directa.
– En el nivel I se realizarán ejercicios sencillos, pero haciendo especial hincapié en los problemas de la vida cotidiana. En el nivel II y III se plantean ejercicios y problemas de mayor complejidad y los de proporcionalidad compuesta.

Criterios de evaluación

– Reconocer las magnitudes directamente proporcionales y las inversamente proporcionales, distinguiendo claramente entre ellas .... (I-II-III)
– Aplicar correctamente los dos tipos de proporcionalidad para resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana, utilizando en cada caso la proporcionalidad, tantos por uno o porcentajes, según sea necesario .... (I-II-III)
– Conocer las propiedades que determinan cuándo una proporcionalidad es directa o es inversa para poder distinguir y usar ambas en la resolución de distintas situaciones .. (I-II-III)
– Resolver situaciones de repartos proporcionales .... (I-II-III)
– Resolver situaciones de proporcionalidad compuesta, distinguiendo en cada caso si se trata de proporcionalidad directa, directa-inversa, o inversa .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Expresa en tanto por ciento los siguientes números:

a) 20/100 b) 1,3 c) 0,55 d) 12/50

2. Expresa en tanto por uno los siguientes tantos por ciento:

a) 12% b) 21% c) 0,1% d) 150%

3. Convierte los porcentajes en fracción y simplifica el resultado:

a) 20% b) 2% c) 80% d) 160%

4. Calcula el valor de n en las siguientes expresiones:

a) 14% de 240 = n b) n% de 350 = 12

5. Halla el valor de x en estas proposiciones:

a) $\frac{x}{9} = \frac{7}{63}$ b) $\frac{20}{75} = \frac{x}{255}$

c) $\frac{8}{5} = \frac{12}{x}$ d) $\frac{10}{x} = \frac{7{,}7}{69{,}3}$

6. La rueda de mi bicicleta da 46 vueltas en 100 m. ¿Qué distancia recorrerá si da 126 vueltas?

7. En un tipo de café se han mezclado 4 kg de natural con 3 kg de torrefacto. ¿Cuánto café torrefacto tendrá un paquete de 250 gr?

8. La botella de 1,5 l. de refresco vale 171 ptas. y la de 2 l. vale 220 ptas. ¿Qué refresco sale más barato?

9. Para hacer un bizcocho tenemos una receta que mezcla *1/4* Kg de harina, 10 cl de yogur y 175 g. de azúcar. ¿Qué cantidad de harina y azúcar se necesitará para mezclarlas con 6 yogures de 12,5 cl cada uno?

10. El coste de un menú para dos personas en un restaurante es de 2.300 ptas.

a) Rellena esta tabla:

Número de personas	2	4	8	15	20	2	4	8	15
Gasto total (ptas.)	2.300								

b) ¿Es una proporcionalidad directa? ¿Porqué?

c) Halla la constante de proporcionalidad y explica lo que significa.

11. El precio del m^2 de la vivienda de una ciudad ha subido un 2,5% en un año. ¿Cuánto vale ahora un piso que valía el año pasado 12,5 millones de ptas.? Calcula lo que valía el año pasado un piso que ahora vale 19.475.000 ptas.

12. En una plaza de 34.000 m^2 se han colocado 62 jardines de 45 m^2 cada uno. ¿Qué porcentaje de la plaza queda libre para los peatones?

13. Un embalse se encontraba el 16 de noviembre al 22% de su capacidad, lo que representa 176 hectómetros cúbicos. ¿Cuál es su capacidad total?

14. El aumento de las pensiones de jubilación es del 2,1% para este año. La abuela de Cristina cobraba 65.000 ptas. ¿Cuánto cobrará después de la subida?

15. Un ordenador cuesta 105.000 pts sin IVA. Sabiendo que el IVA es del 16%, ¿cuál es su precio de venta?

16. El precio de una chaqueta es de 9.000 pts, por fin de temporada cuesta 7.200 pts. ¿Qué tanto por ciento de descuento tiene la prenda?

17. Un CD cuesta rebajado 1.300 pts, si el descuento ha sido del 25%, ¿cuál era su precio antes del descuento?

18. Tres sastres compran un lote de piezas iguales que valen 57.680 ptas. El primero se queda con dos piezas, el segundo con cinco piezas y el tercero con siete. ¿Cuánto ha de pagar cada uno?

19. Viajamos de Tudela a Pamplona a una media de 50 km./h. Si entre ambas localidades hay 100 Km. de distancia utilizaremos 2 horas.

a) Si duplicamos la velocidad, ¿qué tiempo tardaremos en hacer el trayecto?

b) ¿Cómo son estas magnitudes? Encuentra su constante de proporcionalidad.

c) Completa la tabla:

Velocidad (Km./h)	50	75	100	120
Tiempo (h)	2			

20. Cuatro ebanistas tardan 9 días en fabricar los muebles de un comedor. Si se supone que todos trabajan al mismo ritmo, ¿cuánto tardarán realizar los muebles 12 ebanistas?

21. En una prueba ciclista se reparten 250.000 ptas. de premio entre los tres participantes de forma inversamente proporcional al tiempo empleado. El primero ha tardado 1 h, el segundo, 2h, y el tercero, 6h. ¿Cuánto cobrará cada uno?

22. ¿Qué interés se percibirá por el préstamo de 3.000.000 de ptas. al 8% de interés durante 15 meses?

23. Un banco anuncia un crédito hipotecario al 6,5% de interés en cuotas trimestrales. Si Juan quiere contratar un crédito de 500.000 ptas., ¿cuánto tiene que pagar de intereses al trimestre?

24. Calcula el capital que tienes que poner a un 5% de rédito durante 3 años para obtener un interés anual de 150.000 ptas.

25. ¿A qué tanto por ciento debe prestarse 1.000.000 de ptas. para que a los tres años obtengas de intereses la cuarta parte del capital prestado?

NIVEL II

1. Calcula el valor de x en estas proporciones:

a) $\dfrac{128}{x+2} = \dfrac{6{,}4}{11}$ b) $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{13}{9}$

c) $\dfrac{2x}{2x+3} = \dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{9}{x} = \dfrac{x}{4}$

2. Con *7/4* de Kg de patatas fritas tengo para invitar a 6 amigos. ¿A cuántos podré invitar con 2 kg y medio?

3. En un tipo de café se han mezclado 4 Kg de natural con 3 Kg de torrefacto. ¿Qué cantidad máxima de mezcla del mismo tipo podemos conseguir con 9 Kg de natural y 8 de torrefacto? ¿Sobra de alguno de lo dos tipos? ¿Cuánto?

4. (Usando la calculadora) Si A y B son magnitudes proporcionales di cuál de los datos de la tabla es erróneo:

A	4	7	10	13	16
B	10,16	17,78	25,4	34	40,64

5. Javier ha llenado un mueble de 30 cm. de alto con 95 revistas de discos, por lo que decide tirar las 25 más antiguas. ¿Qué altura dejará libre en el mueble?

6. Julián se aburre mucho viendo un programa de T.V. de 45 minutos. Se entretiene diseñando una tabla con el porcentaje de programa que le queda por soportar. Ayúdale a rellenarla. (Con calculadora)

Minutos que lleva viendo la televisión	10	15	20	25	30	35	40	45
Minutos que le faltan								
Porcentaje que le falta								

7. Un libro con el 40% del IVA nos cuesta 2.600 pta. ¿Cuánto costará sin el impuesto?

8. Dos hermanos ingresan conjuntamente en un banco sus ahorros, el mayor ingresa 900.000 pta. y el menor 600.000 pta. Al cabo de un año se reparten las 30.000 ptas. de interés que les da el banco. ¿Cuánto corresponde a cada hermano?

9. Tres hoteles han alquilado varios televisores para sus habitaciones. El primero ha alquilado 35 televisores, el segundo, 45 televisores y el tercero, 60 televisores. Si el total del alquiler ha sido 751.000 ptas., ¿cuánto debe pagar cada hotel?

10. Una familia quiere disponer de 1.036.800 pta. al cabo de un año. ¿Qué capital debe depositar a un rédito del 8%?

11. Si 1.000.000 de ptas. producen 15.000 ptas., en 3 meses, ¿Cuánto hay que invertir para obtener 300.000 ptas. en un año?

12. Un grupo de amigos contrata un autocar para realizar una excursión por un precio fijo de 60.000 pta. y dividen el alquiler entre todos.

a) Completa la siguiente tabla:

Nº de excursionistas	20	25	30		48	
Precio que paga cada uno				1.500		1.200

b) ¿Son magnitudes inversamente proporcionales? Si lo son, halla la constante de proporcionalidad inversa.

13. Un granjero ha calculado que para las 80 gallinas que posee dispone de comida para 60 días. Si compra 40 gallinas más cuánto le durará la comida.

14. Diez grifos tardan en llenar un estanque 4 horas. ¿Cuántos grifos son necesarios para llenar ese mismo estanque en 1 hora?

15. Reparte 12.400 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5 respectivamente.

16. Un representante recibió 2.300 pta. de comisión por la venta de libros por valor de 46.000 pta. ¿Qué comisión cobraría por la venta de libros por valor de 13.000 pta.?

17. Un cámping recibió 10.500 campistas durante el mes de julio y 12.285 el mes de agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de campistas de julio a agosto?

18. Si 4 obreros colocan 20 ventanas en 3 días, ¿Cuánto tiempo tardarán 6 obreros en poner 60 ventanas?

19. Si tres grifos llenan 6 piscinas en 4 días, ¿cuántas piscinas llenarán 5 grifos en 6 días?

20. Una fábrica dispone de una cantidad de mesas. Para distribuirlas contrata 30 camiones que llevarán 15 mesas cada uno durante 10 días. ¿Cuántos camiones serán necesarios para transportar la misma cantidad de mesas si cada uno debe llevar 12 mesas en 5 días?

21. Una fábrica de ladrillos produce 25.000 ladrillos en un mes. ¿Cuántos ladrillos producirán 3 fábricas en 15 días?

22. Una fábrica de puertas con 25 carpinteros tarda 5 días en hacer 30 puertas. Si una arquitecta encarga 72 puertas para un edificio, ¿cuántos carpinteros debe contratar la fábrica para terminar en 10 días?

23. Un albergue compra fruta para el postre de 160 jóvenes que tiene durante un mes, sabiendo que cada día se comen 3 piezas. Si llegaran al albergue 20 personas más, ¿cuántas piezas de fruta deberá comer cada joven si la compra se hace cada 20 días?

NIVEL III

1. Una temperatura de horno aumenta uniformemente después de conectarlo. A los 6 minutos alcanza los 65ºC y a los 13 minutos los 96,5ºC. ¿Cuántos minutos a partir de la conexión serán necesarios para alcanzar 191ºC?

2. El agua del depósito de una granja se va gastando a lo largo del verano. Tenía 3.000 litros el día 20 de julio y 2.650 litros el 31 de este mes. El gasto diario de agua es casi constante y no suele llover en verano en esta comarca. ¿Quedará agua el día 31 de agosto?

3. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que un capital colocado al 4% produzca 1/5 de su valor?

4. La cuarta parte de un capital se coloca durante 3 años al 6% y produce un interés que sumado con el que produce el resto del capital en 1 año al 8% resulta ser de 840.000 pta. Halla el capital.

5. Se contrata 12 obreros para hacer una obra y a los 15 días han terminado la tercera parte del trabajo. ¿Cuántos obreros más hacen falta para terminar la obra en 8 días?

6. Un matrimonio cobra 5.400.000 ptas. anuales conjuntamente. El marido gasta los 7/10 de su sueldo y la mujer los 5/8 y los dos ahorran la misma cantidad. ¿Cuál es el sueldo de cada uno?

7. Un anciano dejó en su testamento a su sobrino Ángel los 2/3 de su fortuna, y el resto a Beatriz, hermana de Ángel, si vivía con él; pero si Ángel vivía con su otra hermana Carmen, ésta recibiría los 2/5 de su fortuna y Ángel el resto. El sobrino vivió con las dos hermanas a la vez. ¿Qué parte de la fortuna correspondió a cada uno?

8. Si un millón de pesetas producen 15.000 pta. en 3 meses, ¿cuánto hay que invertir para obtener 300.000 pta. en 1 año?

9. Una empresa quiere distribuir 2.000.000 pta. entre 3 organizaciones no gubernamentales proporcionalmente a su número de proyectos. La primera ONG tiene 20 proyectos en marcha, la segunda 15 y la tercera 12, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno?

10. Un deportista que hace senderismo recorre 450 km. en 15 días andando 6 horas por día. Si marcha 8 horas por día, ¿cuánto km. recorrerá en 20 días andando a la misma velocidad?

11. Al amasar harina con agua, la masa absorbe un 40% de agua y, además, dentro del horno pierde un 25% de agua. ¿Cuántos panecillos de 230 g. saldrán con 100 kg. de harina?

12. Un grifo llena un depósito en 4 horas, un segundo grifo lo llena en 5 horas y un desagüe lo vacía en 6 horas. Si se abren los tres dispositivos a la vez, en cuánto tiempo se llenará el depósito.

13. Cinco amigos deciden hacerle un regalo a Juan y aportan 700 pta. cada uno. Una vez comprado el regalo se les unen 2 amigos más. ¿Cuál es el nuevo importe que debe pagar cada persona?

14. Para poner la calificación de Educación Física, la profesora sigue el siguiente criterio: la prueba teórica es un 40% de la nota total y la prueba práctica el resto. Jorge ha obtenido un 6,3 en la prueba teórica y un 7,2 en la práctica. ¿Cuál será su nota final?

Unidad n.º 3

Introducción a los polinomios

Objetivos

– Traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico .... (I-II-III)
– Sumar, restar, multiplicar y dividir monomios .... (I-II-III)
– Sumar, restar y multiplicar polinomios .... (I-II-III)
– Dividir dos polinomios por el algoritmo de la división .... (II-III)
– Sacar factor común .... (I-II-III)
– Utilizar las igualdades notables para desarrollar expresiones .... (I-II-III)
– Utilizar las igualdades notables para simplificar expresiones .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Expresiones algebraicas .... (I-II-III)
2. Monomios:
   2.1. Definición y conceptos asociados .... (I-II-III)
   2.2. Operaciones con monomios: suma, resta, multiplicación y división .... (I-II-III)
3. Polinomios:
   3.1. Definición y conceptos asociados .... (I-II-III)
   3.2. Valor numérico de un polinomio .... (I-II-III)
   3.3. Suma, resta y multiplicación de polinomios .... (I-II-III)
   3.4. División de polinomios .... (II-III)
4. Igualdades notables:
   4.1. Cuadrado de una suma .... (I-II-III)
   4.2. Cuadrado de una diferencia .... (I-II-III)
   4.3. Suma por diferencia .... (I-II-III)

Procedimientos

– Formulación de situaciones problemáticas de la vida real con lenguaje algebraico ...... (I-II-III)
– Manejo de la suma, resta, multiplicación y división de monomios .... (I-II-III)
– Manejo de la suma, resta y multiplicación de polinomios .... (I-II-III)
– Uso del algoritmo de la división de polinomios .... (II-III)
– Uso de la técnica de sacar factor común .... (I-II-III)
– Utilización de las igualdades notables para desarrollar expresiones .... (I-II-III)
– Utilización de las igualdades notables para simplificar expresiones .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

En este tema se trata de dar unas pocas definiciones de lenguaje algebraico, y de sistematizar (un poco) lo visto en primer ciclo. Además se pretende que los alumnos manejen con soltura las operaciones básicas de polinomios.

Mientras que para el *nivel I* el tratamiento de los polinomios sería meramente manipulativo, en los *niveles II* y *III* se intentaría que los alumnos conociesen también mínimamente los conceptos asociados.

Criterios de evaluación

- Saber traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico .... (I-II-III)
- Reconocer cuándo una expresión algebraica es un polinomio y cuándo no lo es .... (II-III)
- Distinguir si una operación con monomios da otro monomio o da un polinomio .... (I-II-III)
- Saber sumar, restar, multiplicar y dividir monomios .... (I-II-III)
- Saber sumar, restar y multiplicar polinomios .... (I-II-III)
- Saber dividir dos polinomios por el algoritmo de la división .... (II-III)
- Sacar factor común .... (I-II-III)
- Utilizar las igualdades notables para desarrollar expresiones .... (I-II-III)
- Utilizar las igualdades notables para simplificar expresiones .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Asocia cada enunciado con sus expresiones algebraicas:

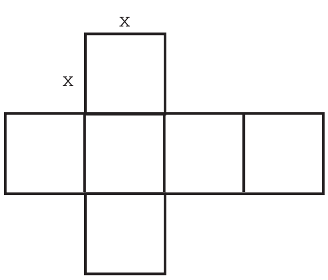
1. A un número se le quita su tercera parte.	n y n+1
2. Los 2/7 de un número.	$x + 13$
3. El número que supera a x en 13 unidades.	$2/7\ x$
4. El número total de zapatos que calzan las personas que hay en una habitación.	$x - x/3$
5. La edad de mi abuelo hace 13 años.	13x
6. El espacio recorrido en x horas por un móvil que va a 13 km/h.	x -13
7. Dos números enteros consecutivos	$2x$

2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:

a) El triple de un número.
b) El triple de un número más cinco unidades.
c) La mitad de un número.
d) Los tres quintos de un número menos uno.
e) Un número más su mitad.

3. Expresa con un monomio:

a) El perímetro de esta figura.
b) El área de la misma.
c) El volumen del cubo que se puede formar con esos seis cuadrados.



4. Indica el grado de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 5x + 7$ b) $2x^4 + x + 1$
c) $-x + x^3 - 2x^2 + 1$ d) $x + x^2 - x^3 + 5x^4$

5. Completa la siguiente tabla:

Monomio	*Coeficiente*	*Valor numérico para x = 2*	*Valor numérico para x = -1*
$-3x$			
$5x^3$			
$-2x^2$			

6. Consideremos el polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$

a) Indica el grado y sus coeficientes.

b) Halla p(0), p(2), p(-2) y p(-1).

7. Dados los polinomios: $p(x) = x^2 - 3x$; $q(x) = x^3 - 2x + 2$; $r(x) = x - 1$; Calcular:

a) $p(x) + q(x)$ b) $p(x) - q(x)$ c) $p(x) + q(x) - r(x)$

d) $p(x) - \{q(x) - r(x)\}$ e) $q(x) + \{r(x) - p(x)\}$

8. Con los polinomios dados en el problema anterior, calcula:

a) $p(x) \cdot q(x)$ b) $p(x) \cdot r(x)$ c) $r(x) \cdot q(x)$

c) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$ d) $[p(x) - r(x)] \cdot q(x)$

9. Efectúa las siguientes operaciones, utilizando las fórmulas de los productos notables:

a) $(x - 4)^2$ b) $(x + 7)^2$ c) $(x + 5)^2$ d) $(2x + 1)^2$

10. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $x^2 - x$ b) $5x + 10x^2 - 10x^3$ c) $2x^2 + 4x^3$ d) $x^5 + x^4$

11. Transforma las siguientes expresiones en diferencia de cuadrados:

a) $(x + 1)(x - 1)$ b) $(x - 3)(x + 3)$ c) $(2x + 1)(2x - 1)$

NIVEL II

1. Asocia cada enunciado con sus expresiones algebraicas:

Un número impar y su anterior.	$6x + 12x$
Un múltiplo de 6 más su doble.	$x > 20$
Un múltiplo de 6 más su mitad.	n y n+1
Un número mayor que 20.	$0{,}15x$
La edad de una persona y la que tendrá el año que viene.	$x + 0{,}15x$
El 15% de una cantidad.	$x - 0{,}07x$
El 7% de un número.	$0{,}07x$
El precio de un jersey aumentado en un 15%.	$6x + 3x$
El precio de una camisa disminuido en un 7%.	2n+1 y 2n-1

2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:

a) Dos números cuya diferencia es 7.

b) Los tres quintos del resultado de restarle uno a un número.

c) Un número entero más su anterior.

d) Un número entero más su siguiente.

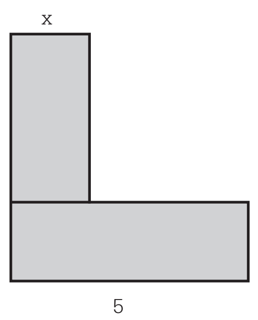
e) Los tres cuartos del anterior a un número entero dado.

f) El producto de un número entero por su anterior.

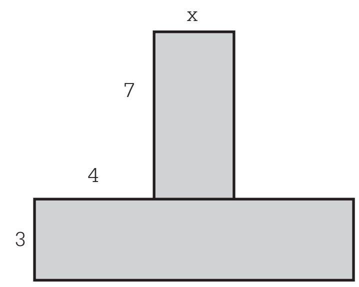
g) El cociente de un número entero entre su siguiente.

3. Escribe el área y el perímetro de estas figuras utilizando la incógnita y los números que aparecen:

a)

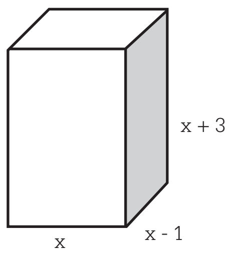


b)

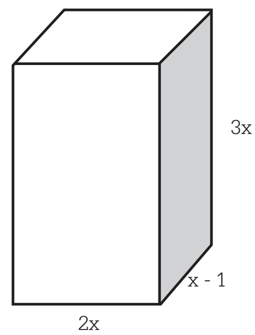


4. Expresa el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos mediante un polinomio:

a)



b)



5. Escribe ejemplos de polinomios, en la indeterminada x que cumplan, si es posible, las siguientes condiciones:

a) Es de grado 7, el coeficiente del término de mayor grado es -2 y es la suma de tres monomios.

b) Es de grado 2, y tiene todos sus coeficientes iguales.

6. Busca el valor numérico de cada uno de los términos de la igualdad $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ para los pares de valores:

a) $x = 1, y = 1$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = -1, y = 0$ d) $x = -3, y = -1$

7. Dados los polinomios $p(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ $q(x) = x^3 - 3$ $r(x) = 5x - 1$

Calcula: a) $p(x) - q(x)$ b) $p(x) + 2q(x) - 3r(x)$ c) $5r(x) - 7p(x)$

8. Con los polinomios dados en el problema anterior, calcula:

a) $p(x) \cdot q(x)$ b) $p(x) \cdot r(x)$ c) $r(x) \cdot q(x)$

d) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$ e) $[p(x) - r(x)] \cdot q(x)$

9. Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$, halla:
   a) Un polinomio $q(x)$ de modo que $p(x) + q(x)$ sea de grado 2.
   b) Un polinomio $r(x)$ de modo que $p(x) + r(x)$ sea de grado 1.
   c) Un polinomio $s(x)$ de modo que $p(x) + s(x)$ sea de grado 0.

10. Escribe tres polinomios de segundo grado y comprueba que se verifica la propiedad distributiva:

$$[p(x) + q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x)$$

11. Efectúa y simplifica:
   a) $3x^2 \cdot 5x + 2x\,(-3x^2)$
   b) $\frac{3}{5}x^2\left(-\frac{2}{3}x\right)$
   c) $\frac{6x^3}{3x} - \frac{x^4}{x^2}$

12. Desarrolla los siguientes productos notables:
   a) $(x - 3y)^2$ b) $(x/3 - y/2)^2$ c) $(3x + 2x^2)^2$ d) $(x + y/2)^2$

13. Transforma en diferencia de cuadrados:
   a) $(3x + 1)(3x - 1)$ b) $(x - y/2)(x + y/2)$ c) $(x^2 + x)(x^2 - x)$

14. Simplifica las siguientes expresiones, utilizando las fórmulas de los productos notables:
   a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 10x + 25$ c) $4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 + 9 - 12x$
   e) $4x^2 - 9$ f) $16x^2 - 1$ g) $1 - 4x^2$ h) $x^4 + 4x^2 + 4$

15. Efectúa la operación $(2x + 3y)^2$. Sustituyendo los dos miembros de la igualdad por los valores concretos que tú elijas, comprueba que no te has equivocado en la operación.

NIVEL III

1. Asocia cada enunciado con sus expresiones algebraicas:

El interés que produce un capital al 13% en un año.	$x + 0{,}13x - 0{,}07(x + 0{,}13x)$
El precio de un artículo que primero ha subido un 13% y luego ha bajado un 7%.	$2x + 3y$
La media aritmética de dos números.	$10x + y$
Un número de dos cifras.	$x + 7 + y + 7$
El doble de un número más el triple de otro.	$x + 0{,}5y$
La suma de las edades que tendrán un padre y su hijo dentro de 7 años.	$0{,}13x$
Un número más el 50% de otro número.	$\frac{x + y}{2}$

2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:

a) Dos números impares consecutivos.
b) La suma de tres números pares consecutivos.
c) El cociente de un número impar y su siguiente.
d) Un número múltiplo de 5.
e) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.
f) El valor medio entre 9 y otro número.

3. Busca algún razonamiento que te permita asegurar que la fórmula que se da a continuación no es correcta:

$$(x + 2y)(x + 2y) = 2(x+2y)$$

4. Dados los siguientes polinomios:
$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 1$ $q(x) = x^3 - 3$ $r(x) = 5x - 1$

Calcula: a) $p(x) - q(x)$ b) $p(x) + 2q(x) - 3r(x)$ c) $5r(x) - 7p(x)$

5. Con los polinomios dados en el problema anterior, calcula:

a) $p(x) \cdot q(x)$ b) $p(x) \cdot r(x)$ c) $r(x) \cdot q(x)$
d) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$ e) $[p(x) - r(x)] \cdot q(x)$

6. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $16x^4 + 4x^2 - 8x^3 : 4x^2$
b) $(4x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x - 3) : (2x^2 - 3)$
c) $(2x^3 + 7x^2 + 8x + 3) : (x^2 + 2x + 1)$

7. Sustituye la x por 3 en las divisiones del ejercicio anterior y comprueba que su valor numérico es igual al cociente entre los valores numéricos del dividendo y del divisor.

8. Calcula el valor del parámetro "m" para que la división $(2x^4 - 3x^3 - x + m) : (x - 2)$ tenga como resto 5.

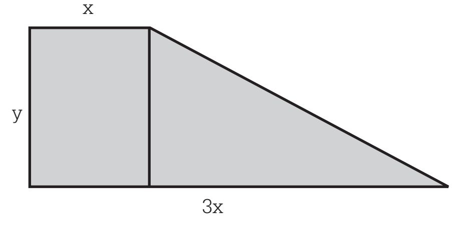
9. Determina $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

10. Calcula $(x^2 + 2x + 1)^2$. Deduce después la fórmula que nos da el cuadrado de un trinomio.

11. Transforma en producto las siguientes expresiones:

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$ b) $x^4 - 16x^2$ c) $4x^3 + 4x^2 + x$
d) $x(x-1) + x(x+2)$ e) $x^3 - x$

12. Hallar la superficie del siguiente trapecio en función de los valores de x e y.



Unidad n.º 4

Ecuaciones de primer grado. Problemas

Objetivos

- Diferenciar las identidades de las ecuaciones .... (I-II-III)
- Distinguir si un número es solución de una ecuación o no lo es .... (I-II-III)
- Identificar ecuaciones de primer grado con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones haciendo notar las equivalencias .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones con paréntesis y con denominadores .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones sencillas que no tengan solución .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones reducibles a primer grado .... (II-III)
- Traducir un problema del lenguaje natural a algebraico .... (I-II-III)
- Resolver completamente problemas sencillos de números y mezclas .... (I-II-III)
- Resolver completamente problemas de edades y de cantidades inversamente proporcionales (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Igualdad, identidad y ecuación:
   - 1.1. Definiciones .... (I-II-III)
   - 1.2. Valor numérico en las igualdades .... (I-II-III)
   - 1.3. Solución de una ecuación .... (I-II-III)
2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita:
   - 2.1. Definición de “resolver una ecuación” .... (I-II-III)
   - 2.2. Ecuaciones equivalentes .... (II-III)
   - 2.3. Ecuaciones con paréntesis .... (I-II-III)
   - 2.4. Ecuaciones con denominadores .... (I-II-III)
   - 2.5. Ecuaciones de grado superior reducibles a primer grado .... (II-III)
   - 2.6. Ecuaciones sin solución .... (I-II-III)
3. Tipos de problemas que se resuelven mediante ecuaciones:
   - 3.1. Lenguaje natural y lenguaje algebraico .... (I-II-III)
   - 3.2. Solución de un problema mediante ecuaciones .... (I-II-III)

Procedimientos

- Sustitución de números en las igualdades .... (I-II-III)
- Cálculo de la solución de una ecuación por tanteo .... (I-II-III)
- Resolución de una ecuación, haciendo notar las equivalencias .... (II-III)
- Resolución de ecuaciones con paréntesis .... (I-II-III)
- Resolución de ecuaciones con denominadores .... (I-II-III)
- Resolución de ecuaciones de grado superior reducibles a primer grado .... (II-III)
- Resolución de ecuaciones sin solución .... (I-II-III)
- Indicación de un método general para resolver problemas (pasos) .... (I-II-III)
- Resolución de problemas de números .... (I-II-III)

– Resolución de problemas de mezclas .... (I-II-III)
– Resolución de problemas de edades .... (II-III)
– Resolución de problemas de cantidades inversamente proporcionales .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– El trabajo en el *nivel I* ha de ser de tipo "mecánico". Se intentará, sobre todo, que manipulen expresiones algebraicas sencillas correctamente y que lleguen a obtener la solución de las ecuaciones de primer grado.
– En este nivel se buscará que los problemas sean fácilmente traducibles al lenguaje algebraico, y que la solución no sea de difícil interpretación. Todos se podrán solucionar fácilmente con el esquema dado: "Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones".
– En los *niveles II y III* se insistirá más en aspectos conceptuales (ecuaciones equivalentes) y se intentará que el alumnado entienda que una ecuación también puede resolverse por tanteo.
– Las expresiones algebraicas que aparezcan aquí serán de mayor dificultad.
– En los problemas, la incógnita adecuada no siempre será la magnitud pedida y en algunos de ellos la interpretación de la solución no será inmediata (tiempos negativos, edades fraccionarias...).

Criterios de evaluación

– Reconocer identidades y ecuaciones, distinguiéndolas .... (I-II-III)
– Resolver ecuaciones haciendo notar las equivalencias .... (I-II-III)
– Resolver ecuaciones con paréntesis y con denominadores .... (I-II-III)
– Resolver ecuaciones sencillas que no tengan solución .... (I-II-III)
– Resolver ecuaciones reducibles a primer grado .... (II-III)
– Conocer los lenguajes natural y algebraico, sabiendo pasar del primero al segundo .... (I-II-III)
– Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana de números y mezclas .... (I-II-III)
– Resolver completamente problemas de edades y de cantidades inversamente proporcionales (II-III)
– Analizar minuciosamente la conveniencia de la solución de un problema .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. En la siguiente expresión $(x + 3)^2 = x^2 + 9 + 6x$, da a la x los valores 1, 2, -1 y 3. ¿Es una identidad o es una ecuación?

2. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $9x^3 - 16x$

c) $243x^5 - 3x^2$

d) $3x^4 + 48x^3 - 24x^2$

3. De las siguientes igualdades, distingue entre las identidades y las ecuaciones:

a) $2(x - 5) = 2x - 10$

b) $3x - 6 = 2$

c) $2x + 4 = 5 - x$

d) $x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando al final la solución obtenida:

a) $12x - 8 = 32 - 5x$

b) $6(2 - x) - (3 - x) = 7(2x - 3)$

c) $\dfrac{x}{10} + \dfrac{x + 1}{5} = \dfrac{x}{6}$

d) $\dfrac{2}{3}(x + 1) + 1 = \dfrac{3}{2}x$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $x - \dfrac{x + 2}{6} = \dfrac{3x}{4} + 2$

b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x - 2}{3} = 1 + x + \dfrac{5}{3}$

6. Resuelve las ecuaciones siguientes, con paréntesis y denominadores:

a) $\dfrac{3x + 2}{8} = \dfrac{1 - x}{5}$

b) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{4x - 5}{3} = \dfrac{3x}{2}$

c) $x - \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3} - x\right)$

7. Si a un número le restas 12, se reduce a su tercera parte. ¿Cuál es ese número?

8. Descompón el número 120 en dos sumandos de modo que uno sea el doble del otro.

9. Una dama pesa 13 kilogramos más que su marido, y entre ambos alcanzan 161 kilogramos. ¿Cuál es el peso de cada uno?

10. En un corral hay gallinas y conejos, contándose en total 57 cabezas y 160 patas. ¿Cuántos ejemplares hay de cada especie?

11. El jornal diario de un repartidor de pizzas es de 1300 pesetas fijas más 140 pts. por pizza repartida. ¿Cuántas habrá repartido un día que ganó 5080 pts.?

12. Ángel repartió fotos en tres cajones. En el primer cajón puso la cuarta parte más 8 fotos, en el segundo puso la mitad menos dos fotos, y en el tercero puso la quinta parte. ¿Cuántas fotos repartió?

13. La tercera, la cuarta, la quinta, y la sexta parte de mi dinero suman 6 pts. menos de lo que llevo. ¿Cuánto llevo?

14. Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto 13 y su padre 43. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

15. Mezclando 15 kg. de arroz de 100 pts./kg. con 25 kg. de arroz de otra clase, se obtiene una mezcla que sale a 130 pts./kg. ¿Cuál será el precio de la segunda clase de arroz?

16. Dividimos el número 60 en dos partes, de manera que un tercio de la primera y un tercio de la segunda sumen 14. Si llamas x a la primera parte, ¿cómo expresarías la segunda parte? ¿Cuáles son esas dos partes?

NIVEL II

1. Comprueba cuál de los números 1, 2 ó 4 es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3/5(x - 1) - 1/3(x + 1) + 1/2 = 1/6(x - 1) + 2/15$

b) $(1 - x)^3 - 4x = -9$

c) $2^{1-x} = 1/8$

2. Fijándote en el apartado a) completa los restantes apartados:

a) $[(x + y) - 3]\,[(x + y) + 3] = (x + y)^2 - 9$

b) $\{(x - 2y) + 4\}\,\{(x - 2y) - 4\} =$

c) $\{5 - (x - y)\}\{5 + (x - y)\} =$

d) $(x + y - 8)(x + y + 8) =$

3. Escribe dos ecuaciones equivalentes en cada uno de los siguientes casos.

a) Que el número 3 sea su solución.

b) Que el número –2 sea su solución.

c) Que el número –1/2 sea su solución.

4. Escribe dos ecuaciones equivalentes por adición y otras dos por multiplicación de cada uno de los siguientes ejemplos:

a) $3x - 2 = 4x + 8$

b) $5x - 10 = x - 15$

c) $(1/4)x - 1 = 3/4 - x$

5. Encuentra el error en la resolución de la siguiente ecuación:

$3x = x/2 - 5$

$3x = x - 10$

$2x = -10$

$x = -5$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{2x + 1}{6} - x$

b) $\frac{3}{2x} - \frac{5}{x} = \frac{1}{2} - \frac{7}{3x}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x + 3}{4} - \frac{3x - 2}{8} = x - \frac{x + 1}{4}$

b) $\frac{x + 2}{3} - \frac{x - 1}{9} = x - 4 + \frac{x - 5}{9}$

c) $\frac{2}{5}\left(\frac{x + 70}{80}\right) - \frac{x + 30}{40} = \frac{-6 + 2x}{5} - \frac{x + 7}{5}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x - 5)(x + 2) = 0$

b) $x\,(3x - 4) = 0$

c) $3(x - 1)^2 = 0$

9. Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla su solución:

a) $(x + 1)(x - 1) - 3(x - 2) = x\,(x + 2) + 4$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = x\,(x + 3) - (x^2 - 1)$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado, sacando factor común:

a) $7x^2 - 21x = 0$

b) $x + 2x^2 = 0$

c) $x = 4x^2$

11. Busca una solución de las siguientes ecuaciones por tanteo:

a) $2^{x-1} = 16$

b) $3^{x+2} = 1/9$

c) $(x - 1)^4 = 625$

12. Un albañil ha tardado 25 días en levantar una tapia. Si cada día hubiera trabajado 2 horas diarias más, habría tardado 5 días menos. Averigua cuántas horas diarias ha trabajado.

13. Un incendio quema las 3/5 partes de un bosque. Posteriormente se vuelven a plantar 3 km^2 de bosque y entonces queda 1/8 del bosque sin plantar. ¿Cuál es la superficie total del bosque?

14. En una librería José compra una novela, una carpeta y un cuaderno. La novela le costó el doble que la carpeta, y el cuaderno la quinta parte de la novela y la carpeta juntas. Si pagó en total 1350 pts., ¿cuál es el precio de cada artículo?

15. Para un partido de baloncesto se vendieron los 3/5 de las localidades. Si se vendiesen 2.200 localidades más, se alcanzarían los 7/8 del total. ¿Cuál es el número total de localidades?

16. Entre dos hermanos tienen 600 pts. El mayor le dice al pequeño: "Dame 50 pts. de tu dinero y así yo tendré el doble que tú". ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

17. Calcula tres números sabiendo que el primero es 20 unidades menor que el segundo, el tercero es igual a la suma de los dos primeros y entre los tres suman la cantidad de 120.

18. Con las 1.200 pts. que tengo, podría ir dos días a la piscina, un día al cine y aún me sobrarían 450 pts. La entrada de la piscina cuesta 150 pts. menos que la del cine. ¿Cuánto cuesta la entrada del cine?

19. María tiene 5 años más que su hermano Luis y su padre tiene ahora 41 años. Dentro de 6 años, entre los dos hermanos igualarán la edad del padre. ¿Qué edad tiene cada uno?

20. Se han mezclado 30 litros de aceite barato con 25 litros de aceite caro, resultando la mezcla a 320 pesetas/litro Calcula el precio del litro de cada clase, sabiendo que el de más calidad es el doble de caro que el otro.

21. Juan, el padre de Ana, tiene ahora 3 veces la edad de su hija, pero hace 5 años, la edad de Juan era 5 veces la de Ana. ¿Qué edad tiene cada uno?

22. Un grifo llena un depósito en 2 horas. Un segundo grifo lo llenaría en 3 horas. ¿Cuánto les costaría llenar el depósito a los dos grifos si funcionasen simultáneamente?

NIVEL III

1. Dí si la siguiente igualdad es una identidad o una ecuación:

$$(x^x)^x = x^{(x^x)}$$

2. Busca el fallo en la resolución de la siguiente ecuación, ya que en otro caso habrás de admitir que 5 es igual a 4.

   $5 - 4 = d$

   $(5 - 4)^2 = d(5 - 4)$

$5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4^2 = 5d - 4d$

$5^2 - 5 \cdot 4 - 5{\cdot}4 + 4^2 = 5d - 4d$

$5^2 - 5 \cdot 4 - 5d = 5 \text{ x } 4 - 4^2 - 4d$

$5\ (5 - 4 - d) = 4\ (5 - 4 - d)$

$5 = 4$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{3}\left(\frac{x+6}{6}\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{x+1}{4}\right) = \frac{11-x}{3}$

b) $1 - \frac{x+3}{9} + x = \frac{9x+1}{9}$

c) $x - \frac{4}{3}\left(\frac{x-3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{3x+7}{6}$

4. Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla su solución:

a) $(x - 1/3)(x + 1/3) - x\ (x + 1/6) = 1/3(x - 2)$

b) $(x + 1)^2 - (x + 2)(x - 3) + (5/4)x - (9/2)x = 25/4$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0{,}4x - 3{,}2 = 1{,}65x + 0{,}8$

b) $\frac{1{,}5x - 4{,}5}{0{,}2} = \frac{x - 2{,}4}{0{,}5}$

c) $x^2 - 3{,}2x = 0$

6. Busca una solución aproximada de las siguientes ecuaciones, por tanteo:

a) $x^3 = 232$

b) $5^x = 0{,}32$

c) $x^4 - 3x = 5$

d) $x^{0{,}75} = 17$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{x} + 3 = \frac{x-3}{2x}$

c) $\frac{x^2}{x-5} = x + 1$

8. Usando una incógnita (x), has de completar esta tabla de forma que sumando los números de dos casillas consecutivas obtengas el número de la siguiente:

5						81

9. La suma de un número par, el que le sigue y el anterior es 282. Halla esos tres números.

10. Me faltan 180 pts. para comprar mi revista de informática favorita. Si tuviese el doble de lo que tengo ahora, me sobrarían 200 pts. ¿Cuánto tengo? ¿Cuánto cuesta la revista?

11. Calcula el capital que colocado al 8% durante dos años se ha convertido en 699.840 pts. (los intereses se han sumado al capital al cabo de cada año).

12. Un inversor que dispone de 2.800.000 pts. coloca parte de su capital en un banco al 8% y el resto en otro banco al 6%. Si la primera parte produce anualmente 21.000 pts. más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?

13. Un estanque tiene un grifo de abastecimiento que lo llena en dos horas y un desagüe que lo vacía en tres horas. En encargado de llenar el estanque ha olvidado cerrar el desagüe. ¿Cuánto tardará en llenarse el estanque?

14. ¿Cuántos años tardará en duplicarse un capital colocado al 5% de interés?

15. Dos albañiles tardan 3 horas en construir una pared trabajando juntos. Uno de ellos, el que trabaja más deprisa, podría levantar la pared en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría el segundo albañil trabajando solo?

16. En una fracción, el denominador es 4 unidades mayor que el numerador. Si añadimos 24 unidades al numerador, la fracción que resulta es igual a la inversa de la fracción original. ¿Cuál es la fracción?

17. Una circunferencia tiene un radio que mide 8 cm. ¿Cuánto hemos de aumentar el radio para que la longitud de una nueva circunferencia sea el triple de la longitud de la primera?

Unidad n.º 5

Introducción a la ecuación de segundo grado

Objetivos

- Identificar las ecuaciones de segundo grado completa e incompletas .... (I-II-III)
- Conocer y saber utilizar el método general de resolución de la ecuación de segundo grado completa .... (I-II-III)
- Utilizar los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado incompletas de manera adecuada .... (I-II-III)
- Comprobar los resultados obtenidos .... (I-II-III)
- Encontrar y reconocer las relaciones que existen entre los datos de un problema y expresarlos mediante el lenguaje algebraico .... (I-II-III)
- Resolver problemas sencillos mediante ecuaciones de segundo grado .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Ecuación de segundo grado incompleta .... (I-II-III)
2. Ecuación de segundo grado completa .... (I-II-III)
3. Soluciones de una ecuación de segundo grado .... (I-II-III)

Procedimientos

- Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado incompletas utilizando el método adecuado en cada caso .... (I-II-III)
- Resolución de ecuaciones de segundo grado completa utilizando el método general ... (I-II-III)
- Interpretación del resultado de la resolución de una ecuación de segundo grado .... (II-III)
- Planteamiento de problemas sencillos mediante ecuaciones de segundo grado .... (I-II-III)
- Interpretación de los resultados de los problemas de acuerdo con el número de soluciones (II-III)

Orientaciones metodológicas

- Al ser este un tema de introducción a la ecuación de segundo grado, que se estudiará con más profundidad en el curso siguiente, el número de actividades será de menor complejidad.
- Se comienza el tema por las ecuaciones de segundo grado incompletas, ya que si no se hace así, los alumnos tienden a utilizar el método general para todos los casos, aún los más sencillos. Con esto se pretende que el alumno utilice el método más eficaz en cada caso para la resolución de los problemas.
- Con los alumnos de nivel I, se harán los ejercicios mecánicos exclusivamente numéricos y se plantearán para los niveles II y III además los problemas, siendo en el nivel III más complejos.

Criterios de evaluación

– Resolver ecuaciones de segundo grado incompletas, mediante el método más adecuado . (I-II-III)
– Resolver ecuaciones de segundo grado utilizando el método general .... (I-II-III)
– Utilizar las herramientas algebraicas básicas en el planteamiento y la resolución de problemas en los que intervienen ecuaciones completas e incompletas .... (II-III)
– Interpretar los resultados de la resolución de problemas .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Indica cuáles de las siguientes igualdades son ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 9 = 25$

b) $3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 7x = x^2 - 5 + 7x$

d) $(x + 1)^2 - x^2 = x + 9$

e) $3x (x + 1) = 2x (x + 1)$

f) $x (x - 2x) = x^2 (x - 3) - 1$

g) $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{6} = x^2$

h) $\frac{6x^2}{5} + x^2 = \frac{11x^2}{5} + 3$

2. Comprueba si los valores dados a la incógnita son soluciones de la ecuación propuesta en cada caso:

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0;$ $\quad x = 0, x = \frac{1}{3}$

b) $2x^2 - 3x = x + 2x^2;$ $\quad x = 0, x = 5$

c) $(2x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0;$ $\quad x = 1, x = \frac{1}{3}$

d) $4(x^2 + 9) = x^2 + 144$ $\quad x = 6, x = -6, x = 1$

e) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = 0;$ $\quad x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$

f) $x (x - 2) = x^2 + 1;$ $\quad x = 0, x = 1/2$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 - 1 = 0$

c) $x^2 - 16 = 0$

d) $-x^2 + 25 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2 - x = 0$

b) $-x^2 + 9x = 0$

c) $-x^2 - 10x = 0$

d $2x^2 + 11x = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2 = 0$

b) $3x^2 = 0$

c) $-x^2 = 0$

d) $-2x^2 = 0$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones completas:
   a) $x^2 + 7x + 12 = 0$
   b) $x^2 - 7x - 18 = 0$
   c) $x^2 + 2x - 15 = 0$
   d) $2x^2 + 11x + 5 = 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $25x\,(x+1) = -4$
   b) $2x\,(x+3) = 3\,(x-1)$
   c) $(2x-3)^2 = 8x$
   d) $2x\,(3x - 4) - (1 - 3x)\,(1 + x) = -2$
   e) $\dfrac{x^2 + 2}{5} - \dfrac{x^2 + x}{2} = \dfrac{3x + 1}{10}$
   f) $1 - 5x\left(1 - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$

8. Expresa matemáticamente las siguientes afirmaciones indicando si son ciertas o falsas:
   a) Si al cuadrado de ocho le añado 8 unidades, obtengo setenta y seis.
   b) La mitad del cuadrado de cuarenta y dos es ochocientos cuarenta.
   c) Ciento cincuenta y dos disminuido en ocho unidades, da el cuadrado de doce.
   d) El doble de del cuadrado de 3 es 18.

9. La mitad del cuadrado de un número es 242. Hállalo

10. La suma de un número y su cuadrado es 20. Calcúlalo.

11. Si a un número le sumo la mitad de su cuadrado, el resultado es 3/2. ¿De qué número se trata?

12. Si a un número le sumo su triple y le resto su cuadrado, el resultado es -5. Halla dicho número.

NIVEL II

1. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:
   a) $2x^2 - 2 = 0$
   b) $4x^2 - 1 = 0$
   c) $3x^2 - x = 0$
   d) $2x^2 = 3x$
   e) $(x + 2)(x - 1) = 0$
   f) $(2x + 1)(4 - 3x) = 0$
   g) $3x\,(1 - 5x) = 0$

h) $x^2 - \dfrac{1}{4} = 0$

i) $25x^2 - 1 = 0$

j) $-x^2 - 11x = 0$

k) $2x^2 - \dfrac{1}{2}x = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones completas:

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $3x^2 + 10x - 8 = 0$

c) $4x^2 - 29x + 7 = 0$

d) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

e) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

f) $3x^2 + 8x - 6 = 0$

g) $10x^2 - x - 3 = 0$

h) $5x^2 - 7x + 2 = 0$

i) $6x^2 - 11x - 7 = 0$

3. Dos números que se diferencian en 3 unidades, multiplicados dan 88. Halla dichos números.

4. Encuentra un número tal que el doble de su cuadrado sea igual a seis veces ese número.

5. El perímetro de un rectángulo es 42 cm. Si la diagonal mide 15 cm. Halla la anchura del rectángulo. (Pon un lado en función del otro).

6. La edad de un niño será dentro de 3 años el cuadrado de la que tenía hace tres. Halla los años que tiene.

7. Al aumentar 5m. el lado de un cuadrado, su área aumenta en 75 m^2. Calcula el lado del cuadrado.

8. Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm. menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.

9. Varios amigos se reparten un premio y les toca a 1500 ptas. a cada uno. Si hubieran sido cuatro amigos más, les hubiera tocado a 300 ptas. menos a cada uno. ¿Cuántos eran a repartir?

10. Se tienen dos cuadrados distintos y el lado de uno de ellos es 4 cm. mayor que el lado del otro. Averigua la longitud de los dos lados sabiendo que la suma de sus áreas es 808 cm^2.

11. Calcula la longitud del lado de un cuadrado sabiendo que su área es la cuarta parte del área de otro cuadrado cuyo lado es 2 cm. mayor.

12. Halla dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 103.

13. Halla dos números positivos si el cuadrado de su suma es 289

14. Un granjero obtiene un beneficio de x pta. por cada (x + 5) huevos que pone su gallina. Si su beneficio fue de 84 pta., halla el número de huevos que puso su gallina.

15. El producto de 2 números impares consecutivos es 143. Halla dichos números.

16. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 265. ¿Cuáles son esos números? ¿Cuántas soluciones has encontrado?

17. El área de una parcela rectangular mide 37.500 m^2. Si la base de la parcela mide 100 m más que su altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

NIVEL III

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de la manera más adecuada:

a) $(x + 2)^2 = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$

c) $(x + 3)(x - 3) = 7$

d) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{x}{12} + \frac{12}{x}$

e) $\frac{2x - 1}{2} - \frac{x - 1}{3} = \frac{1 - x}{6}$

f) $(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2$

g) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 49$

h) $(x - 2)(x + 5) = 0$

2. Haz las operaciones y reducciones que sean necesarias para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 + x - 2 = 2x - 2x^2$

b) $(3x - 2)^2 - 1 = -(x - 1)^2$

c) $\frac{x - 2}{9} = \frac{1}{x - 2}$

d) $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

3. Cuando la arista de un cubo se reduce en 1 cm, su volumen decrece 91 cm^3. Halla la longitud de la arista original.

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$

5. Inventa una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y -3.

6. El producto de un número natural por su siguiente es 31 unidades mayor que el quíntuplo de la suma de ambos. Calcula dicho número.

7. Halla el cuadrado cuya diagonal mide 2 cm. más que su lado.

8. El dividendo de una división de enteros es 1.081. El divisor es doble que el cociente y éste y el resto son iguales. Halla el divisor.

9. La suma de los inversos de dos números enteros consecutivos es 5/6. Halla los dos números.

10. Cuando la arista de un cubo se reduce en 1 cm, su volumen decrece 91 cm^3. Halla la longitud de la arista original.

11. Se quiere aprovechar un antiguo estanque circular de 13 m de diámetro para hacer una piscina rectangular que tenga un lado 7 m más que el otro y la diagonal del rectángulo coincida con el diámetro del estanque. ¿Cuáles serán las dimensiones de la piscina?

12. La diagonal mayor de un rombo tiene 18 cm. de longitud. Si la diagonal menor tiene la misma longitud que el lado del rombo, ¿cuál es la longitud de este lado?

13. Un depósito de agua tiene forma de prisma cuadrangular regular con un volumen de 4.000 m^3 y una altura de 10 m. Encuentra la longitud del lado del cuadrado de la base.

14. Si el lado de un círculo aumenta 2 cm, el área aumenta 20π cm^2. Averigua el radio de éste círculo y el área.

15. Para cerrar una finca rectangular de 4.200 m^2 se han utilizado 260 m de alambre. Halla las dos dimensiones del rectángulo.

Unidad n.º 6

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Objetivos

- Encontrar y reconocer las relaciones entre los datos de un problema y expresarlas mediante el lenguaje algebraico .... (I-II-III)
- Reconocer una ecuación de primer grado con dos incógnitas, hallar sus soluciones y representarlas en unos ejes cartesianos .... (I-II-III)
- Identificar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas .... (I-II-III)
- Clasificar un sistema según sus soluciones .... (I-II-III)
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas utilizando los métodos de reducción, igualación y sustitución y también el método gráfico .... (I-II-III)
- Solucionar problemas mediante el planteamiento de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas .... (I-II-III)
- Elegir el método más adecuado para resolver problemas con sistemas .... (II-III)
- Analizar los resultados de la resolución de sistemas y tomar soluciones adecuadas a la situación planteada .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Ecuación de primer grado con dos incógnitas .... (I-II-III)
2. Representación gráfica de las soluciones .... (I-II-III)
3. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Interpretación gráfica .... (I-II-III)
4. Tipos de sistemas según sus soluciones .... (I-II-III)

Procedimientos

- Utilización de los métodos de resolución numéricos –reducción, sustitución e igualación– en los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas .... (I-II-III)
- Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas (I-II-III)
- Clasificación de un sistema de acuerdo con su solución .... (I-II-III)
- Planteamiento de problemas y resolución mediante un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- Los objetivos de esta unidad son instrumentales, se pretende que los alumnos adquieran destreza en la resolución de sistemas. Los contenidos y procedimientos son iguales para los tres niveles, ya que estos se diferencian en la complejidad de las actividades.

– En el nivel I la resolución de los problemas de sistemas se hará por el método numérico que más fácil le resulte al alumno. Se resolverán problemas sencillos.
– En el nivel II se realizará la resolución por los tres métodos numéricos y por el método gráfico y se resolverán problemas más complejos que en el nivel I.
– En el nivel III además se resolverán problemas mediante sistemas de ecuaciones con un grado de mayor dificultad.

Criterios de evaluación

– Resolver adecuadamente sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de manera numérica .... (I-II-III)
– Resolver sistemas de ecuaciones de primer grado de forma gráfica .... (I-II-III)
– Interpretar adecuadamente los problemas y transcribirlos al lenguaje algebraico .... (I-II-III)
– Analizar los resultados de la resolución de sistemas y tomar decisiones adecuadas a la situación planteada .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Completa la siguiente tabla:

	Coeficiente de x	*Coeficiente de y*	*Término independiente*
$3x + y = 2$			
$-x + 2y = 4$			

2. Escribe algebraicamente mediante una ecuación con dos incógnitas los siguientes enunciados:

a) La suma de dos números es 54.

b) Un bolígrafo cuesta el doble que un lápiz.

c) El perímetro de un rectángulo es 30.

d) Dos números son proporcionales a 2 y 3.

3. Comprueba si los siguientes valores de x e y son solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x = 0, y = 2$ en la ecuación $3x + 7y = 14$

b) $x = 1, y = 3$ en la ecuación $-2x + 5y = 3$

4. Para $x = 1$, halla el valor de y en la ecuación $2(x + 3) - y = 3$.

5. Para $y = -3$, halla el valor de x en la ecuación

$$5\,(x - 1) + 2(y - 2) = 5$$

6. Obtén dos soluciones distintas para $9x - 4y = 1$

7. La recta que resulta de representar gráficamente las soluciones de la ecuación $2x - 3y = 11$ pasa por el punto

a) (0, -4) b) (4, -1) c) (1, -4) d) (0, 11/3)

8. Resuelve los siguientes sistemas:

a) Por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$$

b) Por el método de reducción:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$$

c) Por el método de igualación:

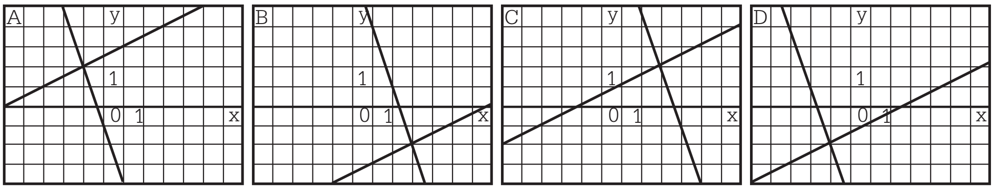
$$\begin{cases} 2x - 5y = -12 \\ 7x - 2y = -11 \end{cases}$$

d) Gráficamente:

$$\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 6x - 5y = -11 \end{cases}$$

9. Indica cuál es la representación gráfica del sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$



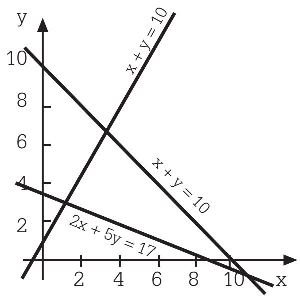
10. En la panadería, Ezequiel pagó 500 pta. por 5 barras de pan y 3 ensaimadas. Si Itziar pagó 190 pta. por 2 barras de pan y 1 ensaimada, ¿cuál es el precio de la barra de pan y el de la ensaimada?

11. Un oficinista compra 30 objetos entre lápices y bolígrafos con un coste de 1.240 pta. Si los lápices cuestan 25 pta. y los bolígrafos 60 pta. ¿cuánto bolígrafos y lápices compró?

12. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

13. Con dos clases de café de 900 pta./kg. y 1.200 pta./kg. se quiere obtener una mezcla de 1.000 pta./kg. Halla la cantidad que hay que mezclar de cada clase para obtener 30 kg. de mezcla.

14. Utiliza las gráficas siguientes para resolver los sistemas de ecuaciones abajo indicados:



a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 17 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 5y = 17 \end{cases}$

15. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo si uno mide 50º y la diferencia entre los otros dos es 30º?

16. Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 218 y el doble de su diferencia es 116.

NIVEL II

1. Resuelve los siguientes sistemas:

a) Por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x + 10y = 52 \\ x + \dfrac{y}{2} = 8 \end{cases}$$

b) Por el método de reducción:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

c) Por el método de igualación:

$$\begin{cases} 5x - 5y = -10 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

d) Gráficamente:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 7 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

2. Escribe un sistema equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

3. Razona, sin resolverlo, si el sistema siguiente es compatible o no.

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

4. Halla p en el siguiente sistema para que sea:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = p \end{cases}$$

a) Compatible indeterminado
b) Incompatible

5. Las dos rectas que se obtienen al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema se cortan en el punto (3, -2). ¿Puede ser $4x - 2y = 15$ una de las ecuaciones del sistema?

6. Escribe un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas que tenga como soluciones $x = 5$; $y = -2$.

7. En un triángulo isósceles de 14 cm de perímetro, el lado desigual es tres veces menor que cada uno de los otros lados. ¿Cuánto miden los lados?

8. En una tienda de anticuario hay 12 candelabros de 2 y 3 brazos. Si para utilizarlos se necesitan 31 velas, ¿cuántos candelabros hay de cada tipo?

9. Un padre quiere repartir el dinero que lleva en el bolsillo entre sus hijos. Si a cada hijo le da 700 pta. le sobran 200 pta., pero si le da a cada uno 800 pta. le faltan 200 pta. ¿Cuánto dinero lleva en el bolsillo y cuántos hijos tiene?

10. Hoy la edad de un hijo es 1 año menos que 1/3 de la de su madre. Si dentro de 5 años, la edad de la madre será 10 años mayor que el doble de la de su hijo, ¿qué edad tienen?

11. Calcula gráficamente el valor de una cinta de vídeo y un CD si 2 cintas de vídeo y un CD valen 7 euros y 4 cintas de vídeo y 2 CD valen 10 euros.

12. Dos números suman 51. Si el primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1. Halla los números.

13. Un ejercicio realizado en clase consta de 16 cuestiones. El profesor suma 5 puntos por cada respuesta correcta y resta 3 puntos por cada cuestión no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio, ¿cuántas cuestiones ha contestado correctamente?

14. El perímetro de un rectángulo tiene 28 cm. Calcula el área de este rectángulo sabiendo que uno de sus lados tiene cuatro centímetros más que el otro.

15. La razón entre dos números es *2/3*. Si se añaden 20 unidades al más pequeño y 5 al más grande la razón se invierte. ¿De qué números se trata?

16. Un comerciante compró dos relojes distintos por 3.000 pta. y los vendió por 3.225 pta. ¿Cuánto pagó por cada reloj si en la venta del primero ganó un 20% y en la del segundo perdió un 5%?

NIVEL III

1. Resuelve los siguientes sistemas:
   a) Por el método de sustitución:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{y-2}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{3x-2}{4} + y = 5 \end{cases}$$

   b) Por el método de reducción:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+3}{3} = 3 \\[2ex] \dfrac{x-4}{3} + \dfrac{y+4}{2} = 1 \end{cases}$$

c) Por el método de igualación:

$$\begin{cases} 6x + y = 20 \\ \dfrac{3x-1}{2} + \dfrac{y}{2} = 5 \end{cases}$$

d) Gráficamente:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{4} = 5 \\ \dfrac{5x}{3} - \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

2. Se tienen dos soluciones de la ecuación ax + by = 15. La primera $x = 2$ e $y = -1$ y la segunda solución $x = -2$ e $y = -29$. Calcula a y b.

3. Dos líquidos de densidades 0,7 kg./l y 1,3 kg./l se mezclan obteniéndose un líquido de densidad 0,9 kg./l. Halla la cantidad de líquido que hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de 30 litros.

4. Un barco que lleva pasajeros por un río, los traslada de A a B distantes 75 km., en 3 horas. Y de B a A en 5 horas. Halla la velocidad del barco y de la corriente.

5. La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. Halla el número.

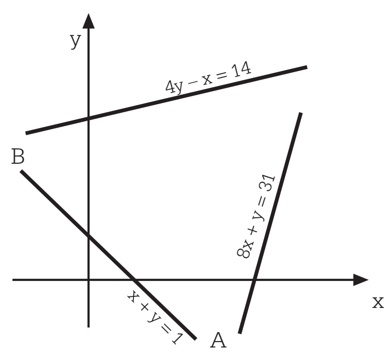
6. El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si el divisor disminuye en 2 unidades, el cociente aumenta en 1 unidad y el nuevo resto es 1. Halla el dividendo y el divisor.

7. En un corral hay conejos y gallinas que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Sin resolver el problema ¿puede afirmarse que no todos son conejos ni todas son gallinas?

8. Una piedra arrojada hacia el aire h metros sigue una ecuación $h = at - bt^2$. A partir de un experimento sabemos que cuando h es igual a 40 m, t es igual a 2 segundos y que si h es igual a 45 m, entonces t es igual a 3 segundos. Halla a y b.

9. Una tortuga camina a 0,4 m/s y se arrastra a 0,3 m/s. Si al realizar un determinado trayecto, la tortuga camina la primera parte y se arrastra la segunda, tarda 110 segundos. Si la primera parte se arrastra y la segunda parte camina, tarda 100 segundos. Halla la longitud de las dos partes.

10. La siguiente figura nos muestra segmentos de 3 rectas. Halla las coordenadas de A y B.



11. El perímetro de un rectángulo tiene 22 cm. Al aumentar 3 cm una de las dimensiones del rectángulo y 2 centímetros la otra su área aumenta 32 cm^2. Encuentra las longitudes de los lados de este rectángulo.

12. Averigua la edad del padre de Isabel sabiendo que el número de años que tiene es 6 veces la suma de sus cifras y que hace 9 años el número de años que tenía constaba de las mismas cifras que las de la edad que tiene ahora.

13. Las edades de una madre y un hijo suman 83 años. Cuando la madre tenía la edad del hijo, sus edades sumaban 33 años. Averigua la edad de cada uno.

14. A lo largo del año se han producido 11.600 accidentes de tráfico, de los que 5.600 se han debido a un exceso de velocidad. Averigua el número de coches y de motos accidentados si el 40% de los accidentes de coches y el 60% de los de motos se han producido por no llevar la velocidad adecuada.

Unidad n.º 7

Geometría.
Relaciones métricas

Objetivos

– Determinar las medidas de ángulos en distintas figuras .... (I-II-III)
– Realizar operaciones con ángulos en forma sexagesimal y saber pasar a forma centesimal . (I-II-III)
– Distinguir los tipos de ángulos y los ángulos notables .... (I-II-III)
– Clasificar correctamente los triángulos .... (I-II-III)
– Construir triángulos, dados tres de sus elementos .... (I-II-III)
– Construir rectas notables en el triángulo .... (I-II-III)
– Construir puntos notables en cualquier triángulo .... (II-III)
– Distinguir los tipos de cuadriláteros .... (I-II-III)
– Conocer las propiedades de las diagonales de un paralelogramo .... (II-III)
– Clasificar polígonos según sus lados .... (I-II-III)
– Calcular la longitud de la circunferencia .... (I-II-III)
– Reconocer elementos en la circunferencia y estudiar la posición relativa de recta y circunferencia y de dos circunferencias .... (I-II-III)
– Distinguir los tipos de ángulos en la circunferencia .... (II-III)
– Hallar el área de un círculo, del sector circular y de la corona circular .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Ángulos:
   1.1. Definición .... (I-II-III)
   1.2. Medida de ángulos: Grados, minutos y segundos .... (I-II-III)
   1.3. Clasificación y ángulos notables .... (I-II-III)
   1.4. Igualdad de ángulos .... (I-II-III)
   1.5. Bisectriz de un ángulo .... (I-II-III)
2. Triángulos:
   2.1. Definición y clasificación .... (I-II-III)
   2.2. Rectas notables en un triángulo .... (I-II-III)
   2.3. Puntos notables en un triángulo .... (II-III)
3. Cuadriláteros y polígonos:
   3.1. Clasificación de los cuadriláteros .... (I-II-III)
   3.2. Propiedades de las diagonales de un paralelogramo .... (II-III)
   3.3. Clasificación de los polígonos .... (I-II-III)
4. La circunferencia y el círculo:
   4.1. Definición y elementos .... (I-II-III)
   4.2. Longitud de la circunferencia y de un arco de circunferencia .... (I-II-III)
   4.3. Posiciones relativas de recta y circunferencia y de dos circunferencias .... (I-II-III)
   4.4. Ángulos en la circunferencia: Clasificación y medida .... (II-III)
   4.5. Área del círculo .... (I-II-III)
   4.6. Área de un sector circular y de una corono circular .... (I-II-III)

Procedimientos

- Utilización del semicírculo graduado para medir ángulos .... (I-II-III)
- Paso del sistema centesimal al sexagesimal .... (I-II-III)
- Construcción de la bisectriz de un ángulo y de la mediatriz de un segmento .... (I-II-III)
- Construcción de proyecciones ortogonales de puntos y segmentos sobre rectas .... (II-III)
- Construcción de un triángulo conociendo los tres lados, dos lados y el ángulo comprendido o un lado y los ángulos adyacentes .... (I-II-III)
- Construcción de las rectas notables del triángulo .... (I-II-III)
- Construcción de los puntos notables del triángulo .... (II-III)
- Cálculo de la longitud de la circunferencia y de la longitud de un arco .... (I-II-III)
- Distinción de los ángulos en la circunferencia. Obtención de su medida .... (II-III)
- Cálculo de la superficie del círculo, de la corona circular y del sector circular .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- Se considera que esta unidad debe de ser, sobre todo, manipulativa: El alumnado deberá utilizar regla, compás, escuadra, cartabón y semicírculo graduado.
- En el *nivel I* los alumnos se limitarán a ver y comprobar qué sucede con las construcciones. En los *niveles II y III* se intentará que los alumnos entiendan el porqué de esas propiedades. En estos dos niveles se intentará generalizar alguna fórmula, definir la recta de Euler... Se intentará introducir un poco más de carga conceptual.
- Se sugiere la utilización de la calculadora para pasar del sistema centesimal al sexagesimal y viceversa.
- El apartado sobre la superficie del círculo podrá recordarse aquí o en la unidad correspondiente a área y volúmenes de cuerpos en el espacio.

Criterios de evaluación

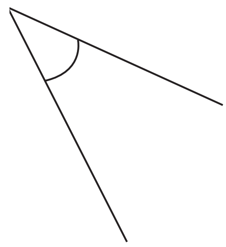
- Utilización del semicírculo graduado para medir ángulos .... (I-II-III)
- Realizar operaciones con ángulos en forma sexagesimal y saber pasar a forma centesimal . (I-II-III)
- Clasificar correctamente los triángulos .... (I-II-III)
- Construir triángulos, dados tres de sus elementos .... (I-II-III)
- Construir rectas notables en el triángulo .... (I-II-III)
- Construir puntos notables en cualquier triángulo .... (II-III)
- Distinguir los tipos de cuadriláteros .... (I-II-III)
- Clasificar polígonos según sus lados .... (I-II-III)
- Calcular la longitud de la circunferencia y la longitud de un arco .... (I-II-III)
- Reconocer elementos en la circunferencia y estudiar la posición relativa de recta y circunferencia y de dos circunferencias .... (I-II-III)
- Distinguir los tipos de ángulos en la circunferencia .... (II-III)
- Hallar el área de un círculo, del sector circular y de la corona circular .... (I-II-III)

Actividades

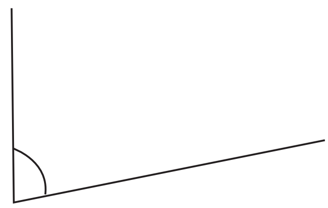
NIVEL I

1. Mide con el semicírculo graduado los siguientes ángulos, que sabemos que son menores de 180º:

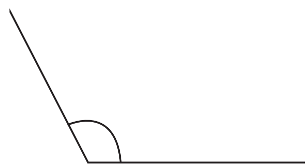
a)



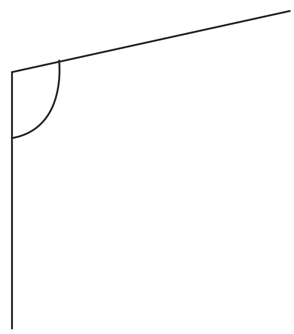
b)



c)



d)



2. Pasa los siguientes ángulos a grados, minutos y segundos:

a) 27,52 º
b) 48,727 º
c) 51,494 º
d) 7,1234 º

3. Pasa los siguientes ángulos del sistema sexagesimal al centesimal:

a) 27º 31’ 12”
b) 48º 43’ 37”
c) 51º 29’ 38”
d) 7º 30’

4. Dibuja un ángulo obtuso cualquiera y construye su bisectriz.

5. Dibuja un ángulo agudo, uno recto, uno obtuso y otro llano.

6. Calcula la medida del ángulo suplementario de todos los siguientes. Calcula también la medida del complementario de los agudos que aparezcan:

a) 32º
b) 80º 40’ 30”
c) 137º 15’

7. Construye un triángulo de lados 4, 5 y 7 cm. Clasifícalo, atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

8. Construye un triángulo con un lado de 6 cm. y con ángulos adyacentes de 60º y 80º. Clasifícalo.

9. Construye un triángulo de lados 6 y 8 cm. y con el ángulo comprendido entre esos lados de 30º. Clasifícalo.

10. El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 40º. Determina el valor de los otros dos ángulos.

11. Dibuja un triángulo de lados 7, 8 y 10 cm. Traza las 3 mediatrices. ¿Qué observas?

12. Dibuja un triángulo de lados 5, 8 y 9 cm. Traza las 3 medianas. ¿Qué observas?

13. Dibuja un triángulo de lados 7, 8 y 11 cm. Traza las 3 alturas. ¿Qué observas?

14. Dibuja un triángulo de lados 5, 7 y 10 cm. Traza las 3 bisectrices. ¿Qué observas?

15. El perímetro de un rombo mide 20 cm. y uno de sus ángulos mide 85º. Determina la longitud de cada uno de sus lados y la amplitud de sus cuatro ángulos.

16. Calcula la longitud del contorno de una moneda de 3 cm. de diámetro.

17. Halla el diámetro y el radio de un disco, sabiendo que la longitud de su contorno es de 94,20 cm.

18. Un equilibrista de un circo da 20 vueltas haciendo equilibrio sobre una rueda avanzando 125,6 m. ¿Cuál es el radio de la rueda?

19. Halla la longitud de un arco de circunferencia de 60º de amplitud, si sabemos que mide 5 cm. de radio.

20. Calcula el diámetro de una circunferencia sabiendo que un arco de 120º de amplitud mide 40 cm. de longitud.

21. Calcula la superficie de un circulo que tiene de diámetro 20 cm.

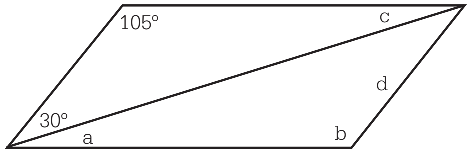
22. Halla el área de un sector circular en un círculo de radio 5 cm. correspondiente a un ángulo de 60º.

23. Calcula la superficie de una corona circular que corresponde a dos circunferencias de radios 7 y 9 centímetros.

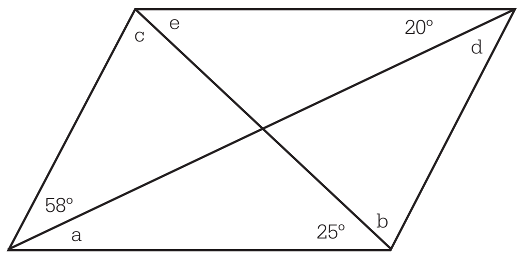
NIVEL II

1. Observa cada uno de los siguientes paralelogramos y calcula cuánto mide cada ángulo:

   a)



b)



2. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? ¿Y de un cuadrilátero? ¿Y de un pentágono? ¿Y de un hexágono? ¿Y de un polígono de n lados?

3. La suma de todos los ángulos interiores de un polígono convexo es de 1.080º. ¿Cuántos vértices tiene? ¿Cuántas diagonales? En el caso de que fuese regular, ¿cuánto valdría el ángulo central, obtenido al unir dos vértices consecutivos con el centro?

4. Dibuja un segmento. Dibuja una recta no paralela al segmento. Halla la proyección ortogonal del segmento sobre la recta. Mide el segmento y su proyección. ¿Qué observas? ¿Puedes sacar alguna regla general sobre la medida de un segmento y de su proyección sobre una recta cualquiera?

5. Construye un triángulo de lados 6 y 8 cm. y con un ángulo de 30º. ¿Puedes construir más de uno?

6. Construye un triángulo de un lado de 6 y con dos ángulos de 60º y 80º. ¿Puedes construir más de uno?

7. Construye un triángulo de lados 7, 8 y 10 cm. Traza las 3 mediatrices y las 3 medianas. ¿Cómo se llaman los puntos donde se juntan?

8. Construye un triángulo de lados 6, 8 y 9 cm. Construye su ortocentro y su incentro.

9. El lado mayor de un triángulo es 8/5 del lado menor, y éste es 5/6 del lado mediano. Sabiendo que su perímetro es de 38 dm., ¿cuál es la longitud de sus tres lados?

10. Calcula la medida de los ángulos de un triángulo, sabiendo que el mayor y el mediano se diferencian en 48º y el mediano y el menor se diferencian en 12º.

11. Dibuja un trapecio de bases 5 y 9 cm. Une los puntos medios de los lados no paralelos y pasa a medir el segmento así determinado. Compara este resultado con la suma de las longitudes de las bases. ¿Qué deduces?

12. ¿Pueden ser los lados de un triángulo la mitad de los de otro? ¿Pueden ser los ángulos de un triángulo la mitad de los de otro? En el caso de afirmación, haz un dibujo que lo pruebe; en el caso de negación, razona la respuesta.

13. ¿Qué se puede afirmar de un triángulo si uno de sus lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita? Haz la comprobación con un dibujo.

14. Calcula el diámetro de una mesa circular para 12 personas, cada una de las cuales ocupa un arco de 75 cm.

15. Averigua la longitud de la correa que une dos poleas de 35 cm. de diámetro cuyos centros distan 2,35 m.

16. Un arco de 108º tiene 15 cm. de longitud. ¿Cuál es su radio?

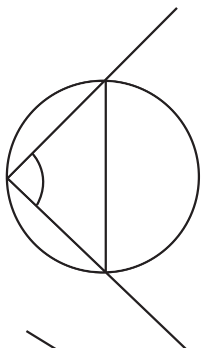
17. Sabemos que un círculo tiene 25 cm^2 de superficie. Halla su diámetro.

18. Hallar el radio interior de una corona circular de 40 m^2 de superficie si se sabe que el diámetro de la circunferencia mayor mide 12 m.

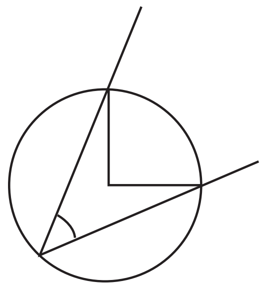
NIVEL III

1. Calcula en cada caso la amplitud del ángulo marcado, razonando la respuesta:

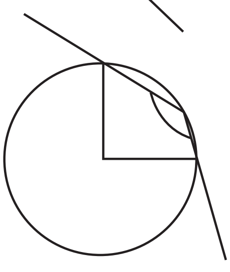
a)



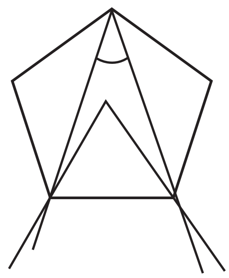
b)



c)



d)



2. Dibuja una circunferencia de 5 cm. de radio y sobre ella dibuja:
  a) Un ángulo interior de 45º.
  b) Un ángulo exterior de 30º.

3. Construye un triángulo equilátero de 8 cm. de lado. De la forma menos liosa posible dibuja el incentro, baricentro, ortocentro y circuncentro. ¿Qué sucede?

4. Construye un triángulo de lados 7, 8 y 10 cm. Construye sobre él el ortocentro, el baricentro y el circuncentro. Comprueba que están alineados. A la recta sobre la que se sitúan la llamaremos RECTA DE EULER.

5. A partir de los ejercicios 3 y 4 anteriores observa el baricentro y mide la distancia del baricentro hasta un vértice y la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto? ¿Puedes sacar alguna regla general?

6. El baricentro de un triángulo se encuentra a 6 cm. de uno de sus vértices. ¿Cuál es la longitud de la mediana correspondiente a dicho vértice?

7. Sobre los lados iguales AB y AC de un triángulo isósceles se toman dos segmentos iguales BP y CQ. Demuestra, haciendo uso de uno de los criterios de igualdad de triángulos que los segmentos BQ y CP son iguales.

8. Un trapecio isósceles tiene la base mayor triple que la menor. Cada uno de los lados oblicuos mide 10 cm. y es 5/4 de la base menor. Determina el perímetro del trapecio.

9. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir conociendo dos lados y uno de los ángulos distinto del comprendido entre ambos lados? Haz las construcciones con un ejemplo concreto e intenta generalizar.

10. ¿Está determinado un triángulo si se sabe que uno de sus lados mide 8 m. y dos de sus ángulos 60º y 80º? Justifica tu respuesta utilizando varios dibujos.

11. Suponte que la Tierra está ceñida por el Ecuador por una cinta. Cortando y añadiendo a esta cinta un pequeño trozo de 1 m., al rodear nuevamente la Tierra produciríamos una bella aureola. ¿Podría pasar un ratón entre la cinta y la Tierra? ¿Y si reemplazamos en el problema la Tierra por una bola de billar? Razona convenientemente la respuesta.

12. Determina la amplitud de un arco que tenga la misma longitud que su radio. Esta amplitud se llama RADIÁN. ¿Cuál es la amplitud de un arco de tres radianes? ¿Cuántos radianes tiene la circunferencia?

13. Señala en tu cuaderno dos puntos cualesquiera A y B y traza varias circunferencias de distinto radio que pasen por A y por B. ¿Cuántas posibilidades hay? ¿Dónde se encuentran los centros de esas circunferencias? Intenta generalizar e indica el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos.

14. Traza dos rectas que se corten y dibuja varias circunferencias tangentes a esas rectas. ¿Dónde se encuentran los centros de esas circunferencias? Generaliza e indica el lugar geométrico de esos centros.

15. Para trazar las tangente a la circunferencia de centro O, desde un punto P, hemos dibujado la circunferencia de diámetro OP. Los puntos de corte de ambas circunferencias, S y T, son los puntos de tangencia. Haz la construcción y razona si el enunciado anterior es verdadero o falso.

16. Construye un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia y llámalo (por sus vértices) ABCD. Comprueba y justifica que la suma de los lados AB y DC es igual a la suma de los lados AD y BC.

17. Sabiendo que un trapecio circular es la superficie comprendida entre una corona circular y un sector circular, hallar la superficie del trapecio circular comprendido entre dos circunferencias de radios 5 y 10 cm. y con un ángulo de 60 grados.

18. Deduce la fórmula para hallar la superficie de un trapecio circular, en función de los arcos entre los que está comprendido y la diferencia de radios de las circunferencias.

Unidad n.º 8

Semejanza. Escalas

Objetivos

- Diferenciar los conceptos igual y semejante .... (I-II-III)
- Obtener segmentos proporcionales con razón de proporcionalidad dada y hallar la razón de dos segmentos .... (I-II-III)
- Aplicar el Teorema de Tales .... (I-II-III)
- Obtener la tercera, cuarta y media proporcional .... (II-III)
- Conocer y aplicar los criterios de semejanza de triángulos .... (I-II-III)
- Distinguir polígonos semejantes de los que no lo son .... (I-II-III)
- Aplicar la semejanza a la obtención de superficies .... (II-III)
- Calcular distancias aplicando correctamente la escala de un mapa .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Segmentos proporcionales .... (I-II-III)
2. Teorema de Thales:
   - 2.1. Enunciado .... (I-II-III)
   - 2.2. Teorema de Thales en el triángulo .... (I-II-III)
   - 2.3. La tercera proporcional .... (II-III)
   - 2.4. Cuarta y media proporcional .... (II-III)
3. Semejanza:
   - 3.1. Definición de semejanza de triángulos .... (I-II-III)
   - 3.2. Criterios de semejanza de triángulos .... (I-II-III)
   - 3.3. Semejanza de polígonos .... (I-II-III)
   - 3.4. Figuras semejantes .... (I-II-III)
4. Escalas y mapas .... (I-II-III)

Procedimientos

- Obtención de segmentos proporcionales dada la razón de proporcionalidad .... (I-II-III)
- Aplicación directa del Teorema de Thales .... (I-II-III)
- Aplicación de Thales para hallar la tercera, cuarta y media proporcional .... (II-III)
- Aplicación directa de los criterios de semejanza de triángulos .... (I-II-III)
- Obtención de la razón de semejanza de dos polígonos .... (I-II-III)
- Obtención de la relación entre las áreas de dos polígonos semejantes .... (II-III)
- Aplicación de la semejanza de polígonos a problemas geométricos .... (I-II-III)
- Aplicaciones de la semejanza a la cartografía .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- Esta segunda unidad de Geometría también ha de tener marcado carácter constructivo y manipulativo, sobre todo en el *nivel I*. En este nivel se comprobará gráficamente el Teorema de Thales y se harán tan solo aplicaciones directas. En los *niveles II y III* las aplicaciones podrán ser más complicadas.
- Aunque en el *nivel I* nos conformaremos con la aplicación correcta de los criterios de semejanza de triángulos, en los *niveles II y III* se intentará que se entienda la diferencia entre la definición y los criterios.
- El trabajo con las escalas (muy fácil conceptualmente) ha de quedar fundamentalmente para el *nivel I*.

Criterios de evaluación

- Definir los conceptos de polígonos iguales y polígonos semejantes .... (I-II-III)
- Obtener segmentos proporcionales con razón de proporcionalidad dada y hallar la razón de dos segmentos .... (I-II-III)
- Aplicar el Teorema de Tales en problemas directos .... (I-II-III)
- Obtener la tercera, cuarta y media proporcional .... (II-III)
- Conocer y aplicar los criterios de semejanza de triángulos .... (I-II-III)
- Aplicar la semejanza de polígonos a problemas de la vida cotidiana .... (I-II-III)
- Aplicar la semejanza a la obtención de superficies .... (II-III)
- Utilizar correctamente la escala .... (I-II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Selecciona dos grupos de 4 segmentos de los siguientes de manera que sean proporcionales. Los segmentos miden (en cm.): 3, 6, 5, 10, 7, 21, 8 y 24.

2. Averigua si los siguientes segmentos son proporcionales:

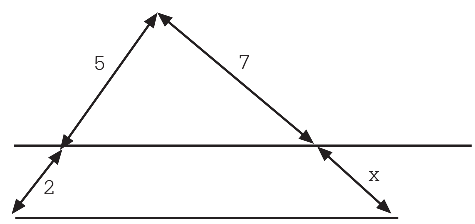
a) 3 cm., 5 cm., 7 cm., 9 cm.

b) 2 cm., 4 cm., 10 cm., 5 cm.

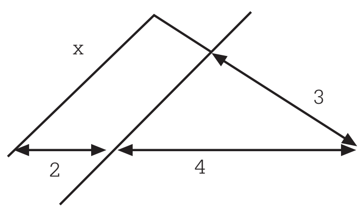
3. Tres segmentos miden respectivamente 5 cm, 7 cm y 10 cm. De entre las posibles medidas que se dan para un cuarto segmento, escoge la adecuada para que los cuatro sean proporcionales: 3 cm., 14 cm. ó 3,5 cm.

4. Utilizando el Teorema de Thales, encontrar las longitudes del segmento x en las siguientes figuras (las medidas están dadas en cm.):

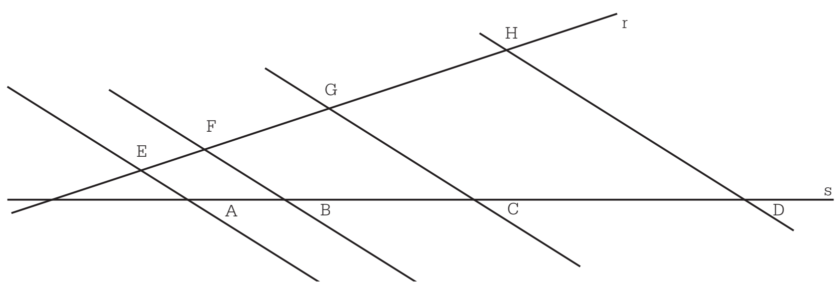
a)



b)



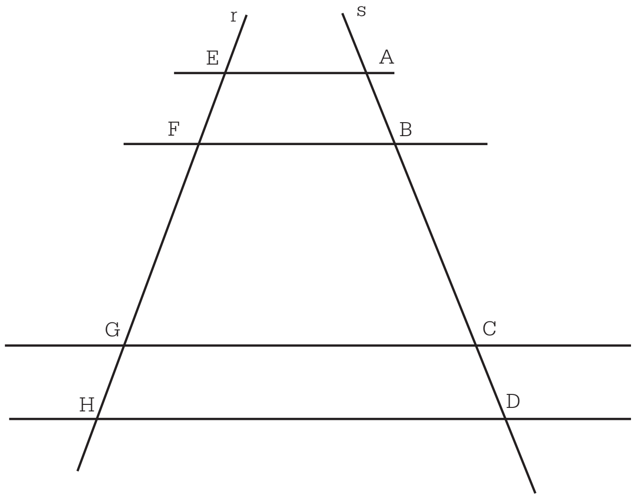
5. Sean r y s dos rectas cortadas por cuatro paralelas tal como se indica en la figura:



Si tenemos que los segmentos BC = 6 cm, EF = 2 cm, CD = 4 cm y GH = 3 cm,

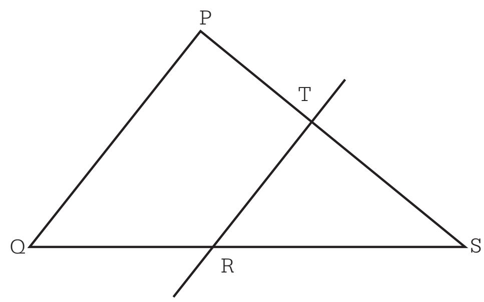
Hallar por el Teorema de Thales las longitudes de los segmentos EG, AC y FH.

6. Sean r y s dos rectas cortadas por 4 paralelas tal como se indica en la figura:



Si los segmentos BC = 6 cm., CD = 2 cm., EF = 4 cm. y GH = 1,5 cm., calcular la longitud de los segmentos EG, AC y FH.

7. En el triángulo de la figura tenemos que los segmentos PS = 10 cm., QS = 12 cm. y TS = 4 cm. Calcular la longitud del segmento RS.



8. Un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 cm. es semejante a otro cuyo lado menor mide 6 cm. Determina la longitud de los otros dos lados.

9. Los tres lados de un triángulo miden 12, 15 y 18 cm. y los de otro miden 8, 10 y 11,5 cm. Determina si son semejantes.

10. Dibuja dos triángulos cuya razón de semejanza sea 2.

11. En el momento en que un palo de 0,9 m. de longitud clavado en el suelo proyecta una sombra de 23 cm., la sombra de la torre de una iglesia es de 13,2 m. ¿Cuál es la altura de la torre?

12. La sombra de un rascacielos en un determinado momento del día mide 192 m. Si en el mismo instante y lugar la sombra de una señal de tráfico de 2,5 m. de altura mide 1,5 m., ¿cuál es la altura del rascacielos?

13. Dibuja un rectángulo de dimensiones 3 x 4 cm. Dibuja otro semejante al anterior con razón de semejanza 2.

14. Los lados de un hexágono miden, respectivamente, 13, 14, 15, 17, 19 y 20 cm. Un lado de otro hexágono semejante mide 80 cm. Si la razón de semejanza es un número entero. ¿Cuál es esa razón de semejanza? ¿Cuánto valen los otros dos lados?

15. La distancia, en línea recta, entre Logroño y Pamplona es de 71 km. ¿A qué distancia se encuentran los puntos representativos de ambas ciudades en un mapa de escala 1:500.000?

16. En un mapa de escala 1:1.400.000 las ciudades de Tarragona y Castellón están separadas 11,8 cm. ¿Cuál es la distancia real entre ambas ciudades?

17. En el plano de Zaragoza se marca el recorrido de una carrera. Si la distancia entre la salida y la llegada es de 80 cm. y el plano está construido a escala 1:12.500, halla los km. de que consta la prueba.

NIVEL II

1. Hallar la medida del segmento cuarto proporcional de los siguientes:
- a) 2 cm., 4 cm., 6 cm.
- b) 3 cm., 4 cm., 6 cm.

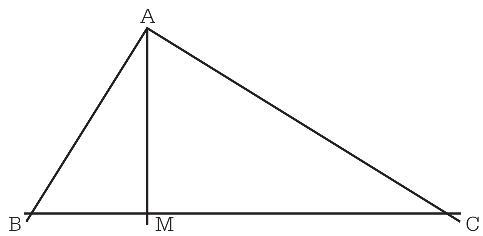
2. Hallar la medida del segmento tercero proporcional de los siguientes:
- a) 5 cm., 8 cm.
- b) 9 cm., 6 cm.

3. Hallar la medida del segmento medio proporcional de los siguientes:
- a) 32 cm., 2 cm.
- b) 7 cm., 10 cm.

4. Sea ABC un triángulo y M y N dos puntos pertenecientes a los segmentos AB y AC. Indica en cada uno de los siguientes casos si la recta que pasa por M y N es paralela o no a la que pasa por B y C.
- a) AB = 9 cm., AC = 6 cm., MB = 3 cm., NC = 1,5 cm.
- b) AB = 6 cm., BC = 8 cm., MN = 4,5 cm., AM = 4 cm.

5. Las bases de un trapecio isósceles miden 12 y 20 cm. cada una. Cada uno de los lados iguales mide 5 cm. Se prolongan los dos lados iguales hasta que se cortan, formándose así otro triángulo isósceles. Determina la longitud del lado AB de este triángulo.

6. En el triángulo rectángulo ABC de la figura se traza la altura correspondiente a la hipotenusa. Razona el motivo de que los triángulos ABC, ABM y AMC sean semejantes.



7. Los lados de un triángulo miden 7, 8 y 10 cm. respectivamente. Halla cuánto valen los lados de un triángulo semejante cuyo perímetro es 125 cm.

8. Un triángulo ABC es semejante a otro triángulo DEF, siendo 2 la razón de semejanza del segundo respecto del primero. A su vez DEF es semejante a otro GHI con razón de semejanza 3 del tercero respecto del segundo. ¿Son semejantes el primero y el tercero? ¿Cuál es la razón de semejanza?

9. Los catetos AB y AC de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 m. y 3 m. Halla la longitud del lado del cuadrado inscrito en el rectángulo con uno de sus vértices en A.

10. A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 32 m. de longitud que consta de 80 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm. del suelo.

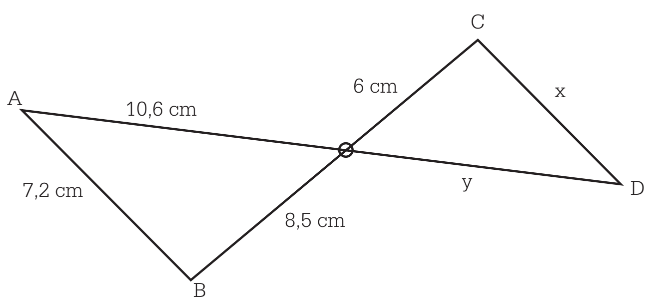
a) ¿Qué altura del edificio alcanzará la escalera?

b) Si el fuego se halla en la quinta planta, y cada planta tiene 4,5 m. de altura, ¿podrán ser rescatados los enfermos que allí se encuentren?

11. Observa esta figura en la que el segmento AB es paralelo al segmento CD.

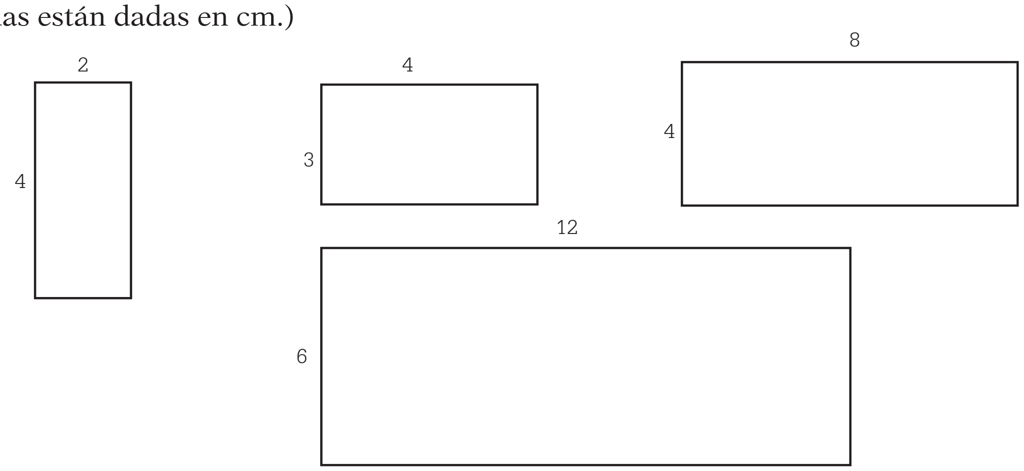
a) Dí por qué son semejantes los triángulos OAB y OCD.

b) Calcula cuánto miden los segmentos x e y.



12. En un triángulo ABC, la base AB mide 5,7 m. y la altura relativa a esa base mide 9,5 m. ¿Cuánto mide la altura de otro triángulo semejante a ABC en el que la base A'B' = 4,14 m.?

13. De los rectángulos de la figura siguiente, ¿cuáles de ellos son semejantes? (las medidas están dadas en cm.)



14. Toma un grupo de 4 rectángulos semejantes. Dibuja las diagonales y mídelas. ¿Qué observas?

15. Se dan las dimensiones de un grupo de etiquetas rectangulares (las medidas están en cm.). Indica todas las que sean semejantes.

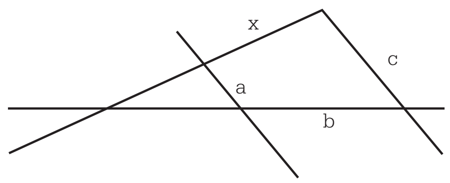
a) 12 x 8
b) 18 x 12
c) 27 x 18
d) 42 x 64
e) 60 x 40
f) 85 x 31

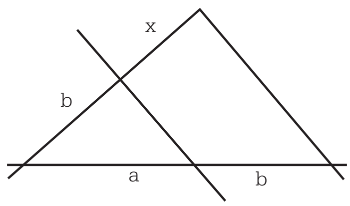
16. Los lados de un pentágono miden 4, 5, 7, 9 y 11 cm. El perímetro de otro pentágono semejante al anterior mide 180 cm. ¿Cuánto mide cada lado de este último?

17. La superficie real de España es de 504.750 km². ¿Qué superficie ocupa nuestra nación en un mapa de escala 1:3.750.000?

NIVEL III

1. Observa las siguientes figuras y, aplicando el Teorema de Thales, dí cuánto vale x en cada uno de los casos, en función de los valores de las constantes a, b, c.

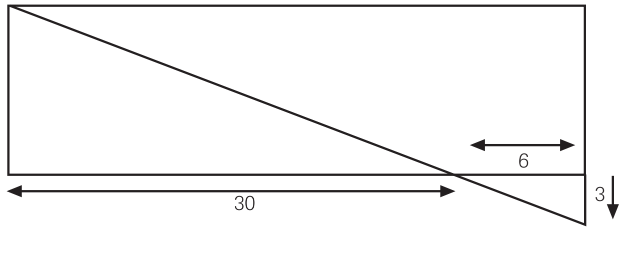




2. Divide, mediante el Teorema de Thales, un segmento de 9 cm. en 7 partes iguales. Comprueba que el nº 9/7 es decimal infinito periódico puro y razona si sería posible hacer esta división del segmento utilizando solamente la regla.

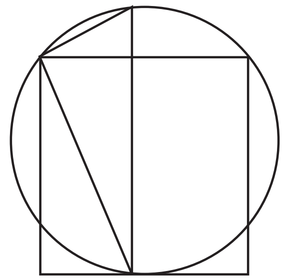
3. Las diagonales de un rombo miden AC = 32 cm. y BD = 24 cm. Por un punto P de la diagonal menor tal que PD = 6 cm., se traza una paralela a la diagonal AC que corta en M y N a los lados AD y CD. Calcula el perímetro del pentágono MABCN.

4. La figura muestra una técnica para medir la anchura de un río sin necesidad de cruzarlo. A la vista de la figura, explica en qué consiste esta técnica y calcula la anchura del río. (Las medidas están tomadas en metros.)



5. Una bicicleta está cuidadosamente colocada delante de un muro. Ante este muro, al nivel del suelo, se encuentra un soporte cuadrado. Curiosamente, las dos esquinas superiores del soporte coinciden con dos puntos de la rueda. Sabiendo que el lado del soporte mide 56 cm., ¿Cuál es el diámetro de la rueda de la bicicleta?

Ten en cuenta que si el lado del soporte (56 cm.) es L, el diámetro de la rueda lo divide en dos partes iguales.

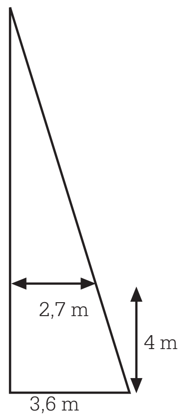


6. Idea una forma de medir la distancia a la que está un barco de la costa, basándote en la semejanza de triángulos y suponiendo que no puedes meterte en el agua, y que tienes un aparato que te mide ángulos.

7. Sabiendo que una circunferencia de radio 4 cm. se ajusta (tiene como tangentes exteriores) a dos rectas concurrentes a 15 cm. del punto donde éstas se cortan, ¿a qué distancia del mismo se ajustará otra circunferencia de 7 cm. de radio?

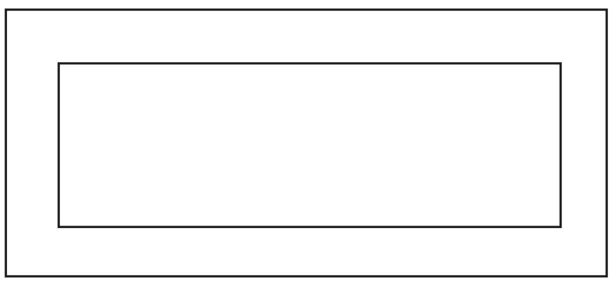
8. Haciendo uso de la semejanza de triángulos, razona por qué los triángulos interior y exterior de una escuadra son semejantes. También los de un cartabón.

9. Una torre metálica del tendido eléctrico tiene la forma de la figura. Conocidos los datos que en ella aparecen, dí la altura que alcanza la torre.



10. Teniendo en cuenta la semejanza de triángulos, determina el valor de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 8 cm. y 18 cm. (Haz un dibujo)

11. ¿Son siempre semejantes los rectángulos construidos como indica la figura? Si no es así, ¿en qué casos son semejantes? Las dimensiones del rectángulo interior son a x b. La distancia entre los lados paralelos de ambos rectángulos es de 2 cm.

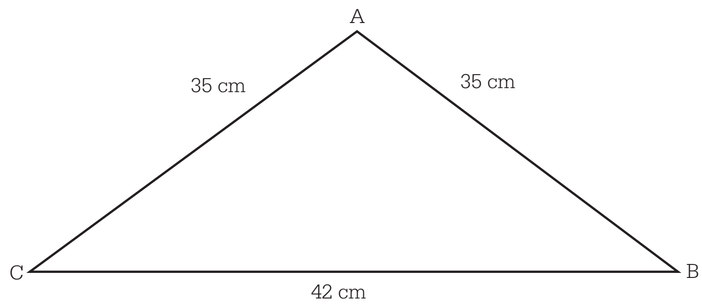


12. Dos trapecios rectángulos son semejantes con razón de semejanza 7/5. Del trapecio menor se sabe que las bases miden 5 cm. y 8 cm., y la altura 4 cm.

a) Averigua las dimensiones del trapecio mayor, sabiendo que su lado oblicuo mide 7 cm.

b) Calcula sus perímetros respectivos y comprueba que mantienen la razón de semejanza.

13. El triángulo ABC es isósceles. Desde un punto M de AB se traza una paralela a AC, que corta al lado BC en un punto N. ¿Cuál debe ser la longitud de BM para que el área del triángulo MBN sea 1/4 de la del triángulo ABC?



14. Dibuja un cuadrado de lado 1 unidad. Llámalo ABCD situando los vértices en el sentido de las agujas del reloj y empezando por la esquina noroeste. ¿Qué longitud has de alargar los lados paralelos AB y CD (hacia el este) para que el nuevo rectángulo AMND sea semejante al nuevo rectángulo BMNC? Haz la construcción y halla la razón de semejanza entre ambos rectángulos.

15. Mide los lados de un folio (llámalos a y b) y halla la relación a/b. Divídelo por la mitad y halla la nueva relación entre el lado mayor y el menor del nuevo rectángulo. Sigue el proceso dos veces más. Verás que los rectángulos son semejantes.

Razona cuál ha de ser la relación exacta entre a y b para que se verifique:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$$

16. Sobre un segmento AB, localiza un punto C de modo que el segmento CB sea tercera proporcional de AB y AC. Llamando ϕ a la relación entre los segmentos AC/CB, intenta hallar de manera exacta el numero ϕ.

Unidad n.º 9

Teoremas del cateto y de la altura. Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Objetivos

- Obtener la proyección ortogonal de un punto y de un segmento sobre una recta .... (II-III)
- Interpretar correctamente el enunciado del teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
- Interpretar correctamente los enunciados de los teoremas sobre triángulos rectángulos: teoremas del cateto y de la altura .... (II-III)
- Aplicar el teorema del cateto para hallar las proyecciones ortogonales sobre la hipotenusa de los catetos de un triángulo rectángulo .... (II-III)
- Conocer algunas demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
- Conocer la demostración, a partir del teorema del cateto, del teorema de Pitágoras .... (II-III)
- Aplicar el teorema de Pitágoras para resolver problemas de la vida cotidiana .... (I-II-III)
- Aplicar los teoremas de la altura y del cateto para resolver problemas de la vida cotidiana (II-III)
- Hallar la superficie de figuras compuestas donde sea necesario aplicar el Teorema de Pitágoras para obtener algún dato .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Proyecciones ortogonales .... (II-III)
2. Relaciones métricas en los triángulos rectángulos.
   - 2.1. Teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
   - 2.2. Teorema del cateto .... (II-III)
   - 2.3. Teorema de la altura .... (II-III)

Procedimientos

- Obtención de la proyección ortogonal de un punto y de un segmento sobre una recta y de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa .... (II-III)
- Identificación y aplicación del teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
- Identificación y aplicación de los teoremas de la altura y del cateto .... (II-III)
- Utilización de las relaciones métricas de un triángulo para hallar algún elemento desconocido... (I-II-III)
- Demostración geométrica del teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
- Demostración a partir del teorema del cateto del teorema de Pitágoras .... (II-III)
- Cálculo de la diagonal de un triángulo rectángulo y de la altura de un triángulo isósceles .... (I-II-III)
- Cálculo de superficies de figuras compuestas .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– Lo más destacable de esta unidad es la resolución de problemas de la vida cotidiana mediante los teoremas de la altura, del cateto y de Pitágoras. Estos conocimientos van a ser aplicados a multitud de situaciones de la vida diaria.
– Será importante la realización de dibujos para la mejor comprensión de los problemas.
– Los resultados más sencillos van a ser utilizados posteriormente en problemas más complejos. En el nivel I, se exigirá, por tanto, la realización de los problemas más sencillos de aplicación directa del teorema de Pitágoras y que estén relacionados con situaciones reales. En los niveles II y III, los problemas serán más complejos y en el nivel III se realizarán también problemas históricos.

Criterios de evaluación

– Obtener la proyección ortogonal de un punto y de un segmento sobre una recta .... (II-III)
– Interpretar correctamente el enunciado del teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
– Interpretar correctamente los enunciados de los teoremas sobre triángulos rectángulos: teoremas del cateto y de la altura .... (II-III)
– Aplicar el teorema del cateto para hallar las proyecciones ortogonales sobre la hipotenusa de los catetos de un triángulo rectángulo .... (II-III)
– Conocer algunas demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras .... (I-II-III)
– Conocer la demostración, a partir del teorema del cateto, del teorema de Pitágoras .... (II-III)
– Aplicar el teorema de Pitágoras para resolver problemas de la vida cotidiana .... (I-II-III)
– Aplicar los teoremas de la altura y del cateto para resolver problemas de la vida cotidiana (II-III)
– Utilizar el teorema de Pitágoras para resolver triángulos .... (I-II-III)
– Utilizar los teoremas de la altura y el cateto para resolver triángulos .... (II-III)
– Calcular la altura de un triángulo isósceles .... (I-II-III)
– Calcular la diagonal de un rectángulo .... (I-II-III)
– Resolver problemas de aplicación de los teoremas .... (I-II-III)
– Hallar superficies de figuras compuestas .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Se muestran las medidas de los lados de algunos triángulos rectángulos:

a) Comprueba si las siguientes ternas son correctas: 21-72-75 y 65-72-73.

b) Calcula el dato que falta en estas ternas y que se señala con una x: 12-35-x y x-28-35.

2. Los siguientes datos corresponden a triángulos. ¿Cuáles de ellos son rectángulos?

Lado 1	*Lado 2*	*Lado 3*	*¿Triángulo rectángulo?*
3	4	5	
3	6	8	
6	8	10	
12	16	20	

3. ¿Se puede construir un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 4,5 m y un cateto 7,5 m?

4. Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto mide 4 cm y el otro 6 cm. Comprueba el resultado, dibujando el triángulo rectángulo con los datos de la solución y mide la hipotenusa con la regla.

5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 37,86 m. Calcula los dos catetos sabiendo que uno de ellos tiene doble longitud que el otro.

6. Calcula la diagonal del rectángulo que tiene de base 28 dm y de altura 21 dm.

7. Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y el lado mayor 8 cm, ¿cuánto mide el otro lado?

8. Calcula la altura sobre el lado distinto del triángulo isósceles de lados 5 cm, 5 cm, y 6 cm.

9. Calcula el lado del cuadrado que tiene la diagonal de 20 cm.

10. Calcula el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 12 m.

11. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 11 m y la hipotenusa un metro más que el otro cateto. Halla el otro lado y el área del triángulo.

12. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm, tres números enteros consecutivos. Halla la medida de dichos lados y el área del triángulo.

13. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm.

14. Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 2 cm.

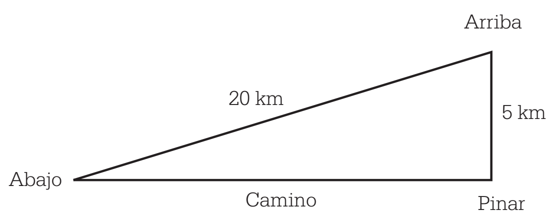
15. Halla el área de un hexágono regular si la apotema mide 8dm. ¿Cuánto mide el área del círculo inscrito en dicho hexágono?

16. Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 4 y 6 cm. Haz el dibujo y calcula el área del rombo.

17. Un albañil apoya una escalera de 5 metros contra un muro vertical. El pie de la escalera está a dos metros del muro. Calcula a qué altura está apoyada la escalera.

18. Una plaza mide 48 m de ancho por 64 m de largo. Un paseante quiere recorrer la máxima distancia sin cambiar de dirección. ¿Podrías indicarle cuál es esa distancia y calcularla?

19. El siguiente dibujo muestra un plano de los pueblos Arriba y Abajo. De Abajo a Arriba hay una carretera de 20 km. y de Arriba al pinar otra de 5 km. de Abajo al pinar hay un camino. ¿Cuántos km. recorren los habitantes de Abajo si van al pinar por la carretera? ¿Y por el camino?



NIVEL II

1. La altura de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos de 8 cm y 2 cm respectivamente. Halla la longitud de dicha altura y los dos catetos.

2. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 3 cm. Determina la longitud de la hipotenusa.

3. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 45 cm y un cateto 15 cm, ¿cuál es el valor de la proyección sobre la hipotenusa?

4. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 3 m y 5 m. Determina sus proyecciones sobre la hipotenusa.

5. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 5 cm. y la hipotenusa 6 cm. Determina la proyección sobre ésta del otro cateto.

6. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 5,5 cm. y la hipotenusa 8,2 cm. Determina la longitud de la altura correspondiente a esta.

7. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 13,1 cm. y su proyección sobre la hipotenusa 9,7 cm. Determina la hipotenusa y el otro cateto.

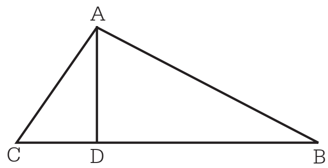
8. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 8,25 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa 4 cm. Determina la hipotenusa y el otro cateto.

9. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 11,27 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa 5,71 cm. Determina las proyecciones de los catetos sobre ésta.

10. Un trapecio isósceles tiene lados de 14 cm, 5 cm, 6 cm y 5 cm. Calcula la distancia entre los lados paralelos.

11. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm y sabemos que la longitud de uno de los catetos es 3/4 de la del otro. Calcula la medida de los lados de un triángulo semejante a este, si la razón de semejanza es de 2/3.

12. Completa el cuadro siguiente, referido al triángulo rectángulo de la figura:



		AC	AB	CB	CD	DB	AD
TRIÁNGULO	1	7,31	10,52				
	2			11,75	2,59		
	3	8,37		9,21			
	4		10,88				6,18
	5				2,90	8,73	
	6					7,97	5,52

13. Un barco parte del puerto de Santander y navega 20 km. en dirección Norte y luego 35 km. en dirección Este. ¿A qué distancia se encuentra el barco de Santander?

14. Determina los lados de un rectángulo sabiendo que la diagonal mide 102 cm y que los lados son proporcionales a 8 y 15.

15. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo semejante al primero cuyo cateto mayor mide 7,95 m.

16. Calcula el lado del cubo cuya diagonal es 64 dm.

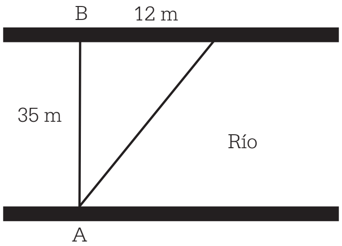
17. Calcula la diagonal del ortoedro cuyas aristas son a = 3, b = 6 y c = 8.

18. Doblando un alambre de 9 cm de longitud se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto mayor es igual al doble del menor. Determina la longitud de los tres lados del triángulo.

19. Dos ciclistas se encuentran en el cruce de dos carreteras que se cortan perpendicularmente. Parten cada uno de una carretera con velocidades 6 m/s y 8 m/s, respectivamente. Calcula la distancia a la que se encuentran al cabo de 10 minutos.

20. Un emisor de televisión tiene 40 m de altura hasta el inicio de la antena. De ahí se sujeta al suelo con tres cables. Si las fijaciones del suelo están a 30 m de la base del emisor, ¿cuál es la longitud de estos cables?

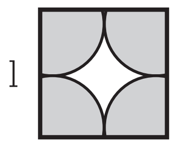
21. Un río tiene 35 m de anchura. Un nadador sale del punto A con intención de llegar al punto B y así cruzar el río. Pero la corriente es fuerte y se desvía de la trayectoria inicial. Llega a la otra orilla del río, pero 12 m. alejado del punto B. ¿Qué distancia ha recorrido?



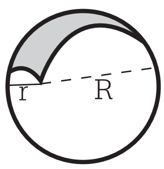
22. Miguel ha construido una cometa con los lados y las diagonales de madera. Calcula la superficie de tela y los cm de madera que ha necesitado para su construcción, si dos triángulos de la cometa miden 24 cm x 32 cm y los otros dos 24 cm x 70 cm. Haz un dibujo.

23. Determina el área de la parte sombreada de las figuras siguientes:

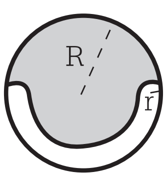
a) Astroide lado del cuadrado = 3 cm



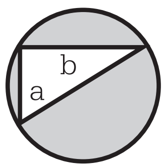
b) Arbelos R = 5, r = 2



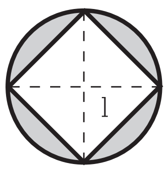
c) Salinón R = 6, r = 2



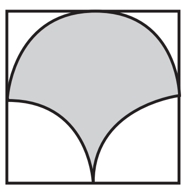
d) a = 3, b = 5



e) l = 6



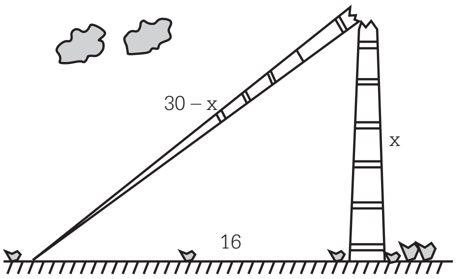
f) lado del cuadrado = 16 cm



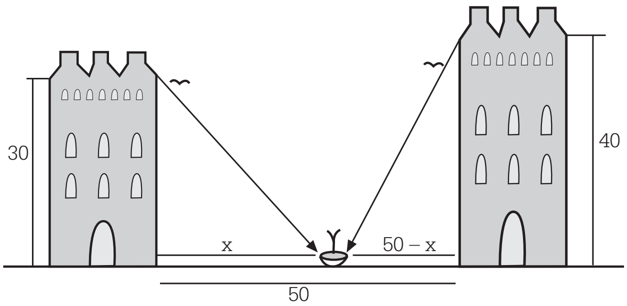
NIVEL III

1. Un cuadrado de 8 cm de lado se inscribe en una circunferencia. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia? Si circunscribes un cuadrado en esa circunferencia, ¿cuál es el lado de este segundo cuadrado?

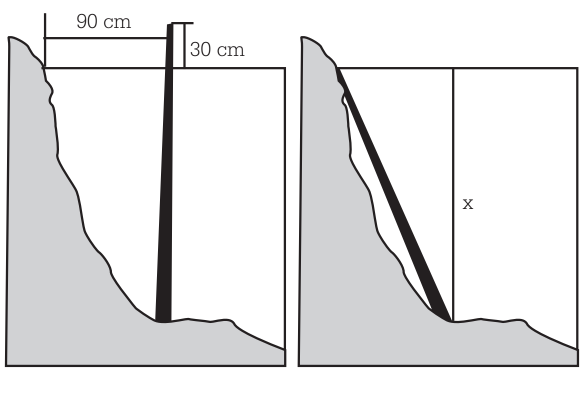
2. Problema del bambú, texto indio del siglo IX. Un bambú que mide 30 codos y que se eleva sobre un terreno plano se rompe en un punto por la fuerza del viento. Su extremidad toca el suelo a 16 codos de su pie. ¿A qué altura se ha roto?



3. Problema de las fuentes. (Leonardo de Pisa). Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40 pasos están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo a igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?



4. Problema del junco, de un texto indio del siglo XI. Un junco enraizado en el fondo de un estanque se encuentra a 90 cm de la orilla y su cabeza se eleva 30 cm sobre el agua. Por la fuerza del viento se ha inclinado desde su raíz de modo que su cabeza toca la orilla a ras del agua. ¿Cuál es la profundidad del estaque y la altura del junco?



5. Un marmolista tiene en su taller una columna de 1,5 m de largo. Si su sección es circular y mide 20 cm de radio, ¿cuáles son las dimensiones aproximadas de la mayor columna de sección cuadrada que puede tallas de dicha columna?

6. En un ortoedro sus dimensiones son proporcionales a 3, 4 y 12 y la diferencia entre la mayor y la menor es 18 m. Halla las dimensiones del ortoedro y la medida de la diagonal.

7. Un triángulo isósceles tiene 160 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 40 cm. Calcula los lados del triángulo y el área.

8. Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a 3, 4 y 5 y la cara que tiene las dos primeras dimensiones tiene una diagonal que mide 30 cm. Calcula las dimensiones del ortoedro.

9. Construye un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 cm.

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa?

b) Traza un segmento de 1 cm de longitud perpendicular a la hipotenusa en uno de sus vértices. Con esta perpendicular y la hipotenusa, construye un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa?

c) Traza un segmento de 1 cm de longitud perpendicular a la hipotenusa del último triángulo en el vértice no común a los dos anteriores. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

d) Repite este proceso hasta tener 10 triángulos. Describe la figura que se forma.

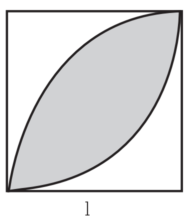
e) ¿Cuál es el perímetro del último triángulo?

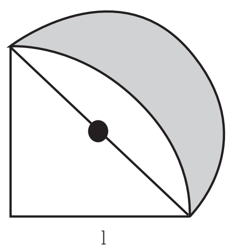
f) Calcula el área de la figura obtenida.

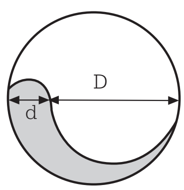
10. Determina el área de las figuras sombreadas:

a) Folium l = 2 cm

b) Lúnula l = 4 cm







D = 6 cm
d = 1 cm

Unidad n.º 10

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Objetivos

– Describir los principales cuerpos geométricos, sus elementos sus desarrollos planos y determinar sus áreas y volúmenes .... (I-II-III)
– Planificar la resolución de los problemas geométricos teniendo en cuenta los datos y las incógnitas que se presenten, la elección del método de resolución, la comprobación de la validez del resultado y la expresión de este en una unidad adecuada .... (I-II-III)
– Reducir problemas complejos a otros más sencillos, mediante la triangulación y descomposición de cuerpos geométricos .... (I-II-III)
– Propiciar la capacidad de visión espacial .... (I-II-III)
– Aprender a relacionar objetos reales con cuerpos geométricos .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Cuerpos geométricos. Poliedros. Teorema de Euler .... (I-II-III)
2. Prismas y pirámides. Área lateral y total .... (I-II-III)
3. Poliedros regulares. El tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Cubo y dodecaedro. Área de los poliedros regulares .... (I-II-III)
4. Dualidad de poliedros .... (III)
5. Ortoedro. Teorema de Pitágoras en el espacio. Área del ortoedro .... (I-II-III)
6. Cilindro y cono. Área lateral y total .... (I-II-III)
7. Esfera. Área de la superficie esférica .... (I-II-III)
8. Volumen de un cuerpo. Principio de Cavalieri .... (II-III)
9. Volúmenes del cubo, ortoedro, prisma y pirámide .... (I-II-III)
10. Volumen de cilindro, cono y esfera .... (I-II-III)
11. Coordenadas esféricas: longitud y latitud .... (I-II-III)

Procedimientos

– Utilización de instrumentos de dibujo adecuados .... (I-II-III)
– Reducción de un problema a otros más sencillos por descomposición .... (I-II-III)
– Obtención del área y volumen de un cuerpo geométrico .... (I-II-III)
– Aplicación de modelos geométricos a situaciones reales .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- En esta unidad el alumno tendrá que deducir de forma gráfica y analítica las fórmulas para calcular las superficies y los volúmenes de los cuerpos geométricos, para ello se apoyará en la forma gráfica para la deducción analítica.
- En el nivel I, los alumnos realizarán actividades de observación y clasificación de los cuerpos geométricos y de sus elementos. Los problemas que resolverán serán de aplicación directa de las fórmulas.
- En el nivel II, se calcularán a partir de áreas y volúmenes las dimensiones de los elementos de los cuerpos geométricos y problemas con algoritmos de más de un paso y se combinarán en los ejercicios distintas figuras geométricas.
- En el nivel III, se utilizarán los conocimientos adquiridos para resolver problemas de la vida real mediante la geometría y de relación entre los distintos cuerpos geométricos.

Criterios de evaluación

- Calcular la superficie de los poliedros regulares utilizando para ello el área de sus caras . (I-II-III)
- Calcular las superficies laterales y totales de los prismas, cilindros, pirámides y conos . (I-II-III)
- Hallar los volúmenes de los prismas, cilindros, pirámides y conos .... (I-II-III)
- Calcular el área de la superficie esférica y el volumen de la esfera .... (I-II-III)
- Determinar áreas y volúmenes aplicando estrategias de medida indirecta .... (II-III)
- Resolver problemas de la vida cotidiana mediante el uso de las áreas lateral y total, y los volúmenes de los diferentes cuerpos regulares .... (III)

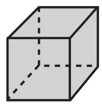
Actividades

NIVEL I

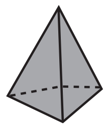
1. Escribe el número de caras, de vértices y el de aristas de los poliedros regulares. Comprueba el teorema de Euler.

Poliedro	*Caras*	*Vértices*	*Aristas*	*Teorema de Euler*

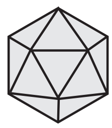
2. Calcula el área de un cubo cuya arista mide 5cm.



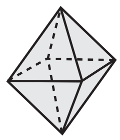
3. Halla el área de un tetraedro cuya arista mide 7,8 cm.



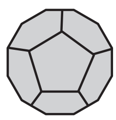
4. Halla el área de un icosaedro cuya arista mide 6,3 cm.



5. Halla el área de un octaedro cuya arista mide 9 cm.



6. Halla el área de un dodecaedro cuya cara mide 7 cm^2.



7. Un mueble archivador tiene forma de cubo cuya arista mide 50 cm. Calcula los metros cuadrados de madera que se necesitan para construirlo.

8. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tienen los siguientes prismas?

Prisma	*Caras*	*Vértices*	*Aristas*
Pentagonal			
Triangular			
Hexagonal			
Cuadrangular			

9. Di que clase de prisma se describe en cada frase:
    a) Su desarrollo plano está formado por 2 pentágonos iguales y 5 rectángulos iguales.
    b) Sus bases son triángulos equiláteros y las caras laterales rectángulos.
    c) Para calcular su área lateral multiplicamos el área de un rectángulo por 4.
    d) Todas sus caras son iguales.

10. Calcula el área y el volumen de un prisma cuadrado sabiendo que la arista de la base mide 6 cm y la altura 8 cm.

11. Calcula el área y el volumen de un prisma triangular regular sabiendo que la arista de la base mide 4 cm y la altura 2 cm.

12. El desarrollo plano de un prisma está formado por dos hexágonos de 2 cm de lado y seis rectángulos de 5 cm de alto. Calcula el área del prisma.

13. Calcula la medida de la diagonal de un ortoedro sabiendo que sus dimensiones son 3,2 cm x 4,3 cm x 8 cm.

14. Calcula el área y el volumen de un ortoedro sabiendo que sus dimensiones son 1 x 4 x 9 cm.

15. Halla el área lateral y total y el volumen de un cono de altura 6 cm y generatriz 10 cm.

16. Calcula el volumen de un cono en el que la circunferencia de su base mide 65,30 cm y su altura 5,6 cm.

17. Calcula el área y el volumen de un cilindro que tiene radio de la base 4 cm y altura 10 cm.

18. Calcula el volumen y el área de una esfera de radio 5 cm de radio.

19. ¿Qué volumen ocupa una canica que tiene 2 cm de diámetro?

NIVEL II

1. Una caja de golosinas tiene forma de tetraedro regular. Para construirla, hemos necesitado 779,4 cm^2 de cartón. Calcula la longitud de la arista.

2. Las dimensiones de un ortoedro son 20 cm x 14 cm x 10 cm. ¿Puede contener un lápiz de 25 cm de longitud?

3. Un bote de cocina tiene forma de prisma hexagonal regular. La arista de la base mide 10 cm y la altura de una cara lateral 15 cm. Calcula el volumen de sal que puede contener el bote.

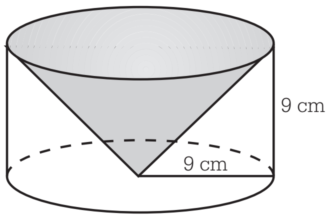
4. Calcula el volumen de aire que hay en una habitación cuyas dimensiones son 5 x 8 x 2,5 cm.

5. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra será necesario sacar para hacer un pozo de 15 m de profundidad y de 3m de diámetro? Si los transportamos en camiones cuyo contenedor mide 5m x 2,5m x 1,5m, ¿Cuántos camiones harán falta para llevarla?

6. Los brick son envases de forma ortoédrica que se usan en alimentación, por ejemplo para almacenar leche, zumos, etc. Las dimensiones más usuales de los que tienen un litro de capacidad son 9,5 x 6,4 x 16,5 cm y están fabricados con cartón impermeable. Si una empresa produce 10.000 bricks diarios, ¿qué cantidad de cartón necesita para fabricarlos?

7. La pirámide roja de Snefru es regular de base cuadrada. El lado de la base mide 216,60 m y su altura 102,90 m. Determina el volumen de la pirámide.

8. A un cilindro de 9 cm de altura y 9 cm de radio de la base, se le ha quitado un cono como muestra la figura. Halla el volumen de la pieza que resulta.



9. Calcula el radio de una esfera, sabiendo que tiene el mismo volumen que un ortoedro cuyas aristas miden 12m, 7m y 24 m.

10. Calcula la altura de un cilindro de 500 cm^3 de volumen y de 8 cm de radio de la base.

11. Un globo esférico tiene 8 m de diámetro. ¿Cuántos metros cúbicos de aire contiene?

12. Se denomina circunferencia máxima de una esfera a la que tiene el mismo radio que la esfera. Si una circunferencia máxima tiene 31,4 m de longitud, calcula el volumen de la esfera.

13. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuyo círculo máximo tiene un área de 128 cm^2?

14. Una superficie esférica tiene 24 m^2 de área. Halla el radio y el volumen de la esfera.

15. Considera la Tierra como una esfera cuyo radio es de 6.375 km. ¿Cuál es la superficie de nuestro planeta? ¿Y su volumen?

NIVEL III

1. Una piscina mide 20 cm de largo y 10 de ancho. De un lado a otro tiene un desnivel de manera que en el lado menos profundo mide 1 m y en el más profundo 2 m.
   a) Haz un boceto del desarrollo plano de la piscina.
   b) Calcula las baldosas necesarias para recubrirla por completo, si las baldosas miden 15 cm x 15 cm.
   c) Calcula el volumen máximo de agua que puede contener la piscina.

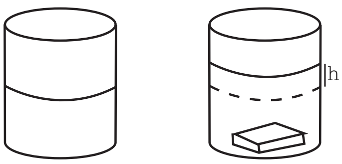
2. Di que poliedro obtenemos si unimos los centros de las caras de un:
   a) Tetraedro regular.
   b) Cubo.
   c) Icosaedro regular.
   d) Dodecaedro regular.
   e) Octaedro regular.

3. Escribe el poliedro dual de los poliedros:
   a) Tetraedro:
   b) Cubo o hexaedro:
   c) Dodecaedro:

4. La arista de un cubo mide 5 cm. ¿Cuánto mide la arista del octaedro dual inscrito en él?

5. ¿Qué poliedro obtenemos si sobre las caras de un octaedro regular construimos tetraedros regulares?

6. Una lata cilíndrica tiene un radio interior de 20 cm y contiene agua que alcanza 20 cm de altura. Calcula el aumento del nivel de altura del agua h que se produce cuando se sumerge un cuerpo de 1500 cm^3.



7. Dos cilindros tienen la misma base. Si uno tiene de altura la mitad del otro, ¿qué relación existe entre sus volúmenes? ¿Y si se trata de pirámides?

8. Una esfera cuyo radio mide 10 cm está inscrita en un cilindro cuyo diámetro de la base y cuya altura son iguales al diámetro de la esfera. Calcula el área lateral del cilindro y la superficie de la esfera. ¿Qué observas?

9. Una esfera de radio 5 cm es equivalente en volumen a un cono de 5 cm de radio de la base. Calcula la altura del cono.

Unidad n.º 11

Funciones. Generalidades. Propiedades de las funciones

Objetivos

- Hallar y reconocer relaciones entre magnitudes .... (I-II-III)
- Descubrir la existencia de relaciones entre parejas de valores de una tabla correspondiente a dos magnitudes concretas .... (I-II-III)
- Seleccionar las unidades y escalas más adecuadas para hacer una representación gráfica . (I-II-III)
- Representar la información de una manera ordenada, diferenciando la magnitud situada en el eje horizontal de la magnitud situada en el eje vertical en unos ejes coordenados .... (I-II-III)
- Leer e interpretar gráficos de funciones sencillas .... (I-II-III)
- Discernir en una determinada situación entre la variable dependiente y la independiente . (I-II-III)
- Distinguir si una función es de variable discreta o continua .... (I-II-III)
- Estudiar de manera intuitiva la continuidad y el crecimiento de una función .... (I-II-III)
- Determinar los puntos singulares de una función .... (I-II-III)
- Determinar, a partir de la gráfica, si una función es simétrica o periódica .... (II-III)
- Determinar la TVM de una función en un intervalo .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Definiciones de magnitud, variable y función .... (I-II-III)
2. Diferentes formas de expresar una función mediante un texto, una tabla de valores, un gráfico o una expresión algebraica .... (I-II-III)
3. Características generales de las funciones: dominio, continuidad, crecimiento y puntos singulares .... (I-II-III)
4. Simetría y periodo .... (II-III)
5. Tasa de variación media .... (II-III)

Procedimientos

- Análisis de la dependencia entre variables .... (I-II-III)
- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico, empleando el vocabulario y los símbolos adecuados .... (I-II-III)
- Interpretación de funciones a partir de un texto, una tabla de valores o un gráfico ...... (I-II-III)
- Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas o de expresiones funcionales .... (I-II-III)
- Uso de expresiones algebraicas para representar funciones .... (I-II-III)
- Representación gráfica de funciones en los ejes de coordenadas .... (I-II-III)
- Análisis de las gráficas para determinar sus características: continuidad, crecimiento y puntos singulares .... (I-II-III)
- Estudio de la simetría y periodicidad de una función a partir de su su gráfica .... (II-III)

– Planteamiento y resolución de situaciones en los que intervengan distintos tipos de funciones .... (II-III)
– Cálculo de la tasa de variación media .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– En este tema el alumno debe saber relacionar dos variables y entender el concepto de función, para ello tendrá que identificar la variable dependiente y la variable independiente en una determinada situación.
– Es importante, también, el que el alumno consiga traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico un determinado problema y viceversa.
– En el nivel I, el grado de complejidad de las actividades es bajo y paulatinamente aumenta hasta el nivel III, en el que se analizarán situaciones más complejas con ejemplos de la vida cotidiana.

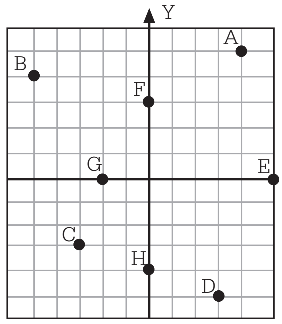
Criterios de evaluación

– Utilizar adecuadamente el lenguaje gráfico .... (I-II-III)
– Conocer el concepto de magnitud y saber distinguir entre variable dependiente e independiente, así como entre variable continua y discreta .... (I-II-III)
– Saber interpretar funciones a partir de un texto, una tabla de valores, un gráfico o una expresión algebraica .... (I-II-III)
– Entender de forma intuitiva, las características fundamentales de las funciones: continuidad, crecimiento y puntos singulares .... (I-II-III)
– Hallar tasas de variación media .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

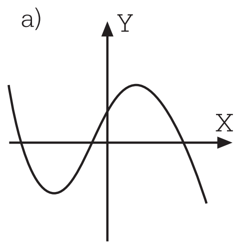
1. Halla las coordenadas de los siguientes puntos:

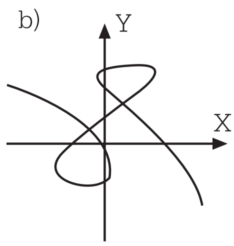


2. Representa en los ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A (4, 6), B (3, -5), C (-3, 0),
D (-4, -2), E (0, 4), F (-1, 5), G (0, -5), H (4, 0)

3. ¿Cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función y por qué?

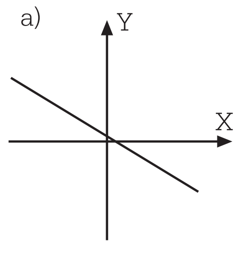


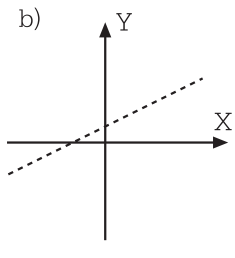


4. ¿Cuáles de las siguientes funciones son discretas y cuáles continuas?

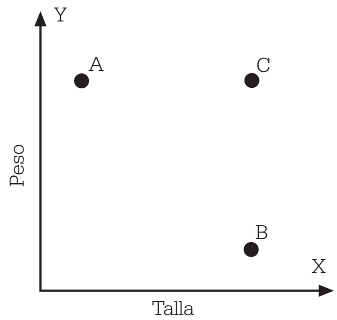
a) El Kg. de azúcar vale a 195 pta.
b) La piña cuesta 350 pta. la pieza.
c) El número de patas de los conejos viene dado por la fórmula p = 4c.
d) El espacio que recorre un coche viene dado por la fórmula e = 100t
e) Un litro de gasolina cuesta 0,7 euros.
f) El número de personas necesarias para hacer un trabajo viene dado por la fórmula y = 24/x, donde x indica el tiempo en días.

5. ¿Cuál de las siguientes funciones es discreta y cuál continua?





6. El siguiente gráfico corresponde a tres personas. Describe cada una de ellas.

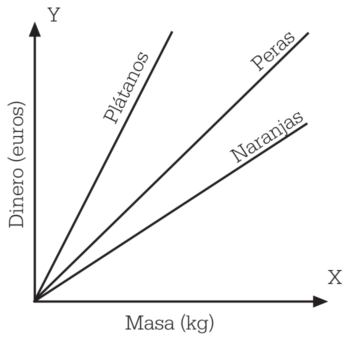


a) Persona A:

b) Persona B:

c) Persona C:

7. En los siguientes ejes están representados el coste de las naranjas, peras y plátanos:



a) ¿Cuál es el más barato?
b) ¿Cuál es el más caro?
c) ¿Cuánto vale un Kg. de peras?

8. Un litro de aceite cuesta 1,5 euros:

a) Haz una tabla de valores

Volumen (litros)	1	2	3	4	5
Dinero (euros)					

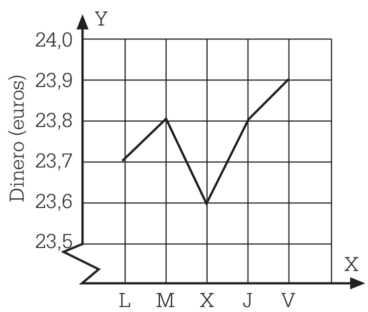
b) Haz la representación gráfica.
c) Escribe la fórmula

9. Dada la siguiente tabla de valores:

Tiempo (min.)	1	2	3	4	5
Capacidad (l.)	5	10	15	20	25

a) Describe verbalmente una función que se ajuste a este comportamiento.
b) Escribe la fórmula.

10. Dada la gráfica siguiente de la bolsa:



Rellena la tabla de valores siguiente:

Tiempo (días)	L	M	X	J	V
Dinero (euros)					

11. La fórmula de una función es y = 0,5x

a) Describe verbalmente una función que se ajuste a este comportamiento.

b) Haz una tabla de valores.

x	1	2	3	4	5	6
y						

c) Haz la representación gráfica

12. Halla la fórmula de las siguientes funciones:

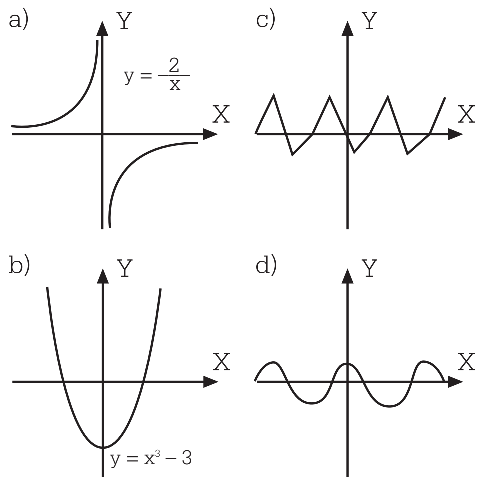
a) Vendemos manzanas a 150 pta./kg. ¿Cuánto ingresamos?

b) Nos hacen un 10% de descuento en todo lo que compramos. ¿Cuánto nos descuentan?

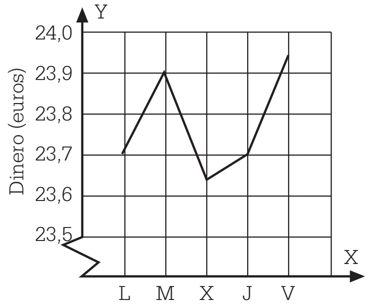
c) Nos hacen un 10% de descuento en todo lo que compramos. ¿Cuánto pagamos?

d) Nos gravan un 16% de IVA en lo que compramos. ¿Cuánto pagamos?

13. Di cuáles de estas funciones son continuas.



14. Dada la siguiente función, calcula:



a) Máximos relativos

b) Mínimos relativos

c) Máximo absoluto

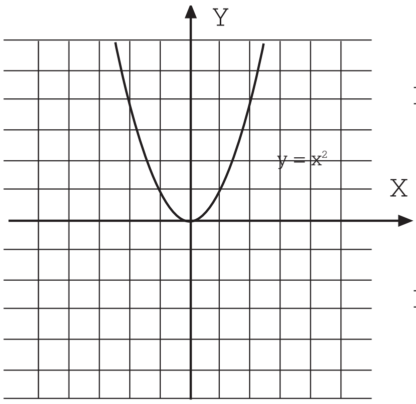
d) Mínimo absoluto

e) Crecimiento

f) Continuidad

NIVEL II

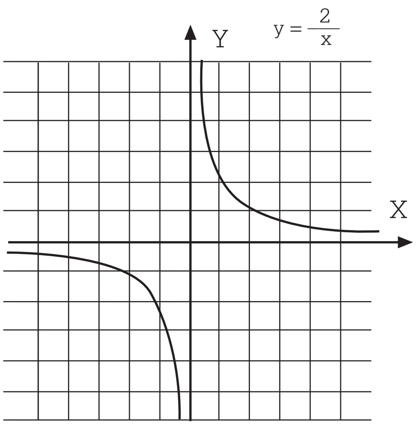
1. Calcula el dominio y la imagen o recorrido de la siguiente función:



Dom (f) =

Im (f) =

2. Calcula el dominio y la imagen o recorrido de la siguiente función:



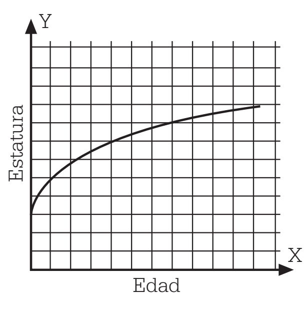
3. Dada la siguiente tabla de valores, contesta a las preguntas planteadas:

Litros	1	2	3	4	5	6
Kilos	1,3	2,6	3,9	4,2	5,5	6,8

a) Magnitud de la variable independiente
b) Magnitud de la variable dependiente
c) Fórmula

4. Dada la siguiente gráfica:

a) ¿Qué magnitudes estamos relacionando?
b) ¿Cuál es la variable independiente?
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
d) ¿Cuál es la unidad de la variable independiente?
e) ¿Cuál es la unidad de la variable dependiente?



5. Dada la siguiente fórmula de un movimiento uniforme e = 100t

a) ¿Qué magnitudes estamos relacionando?
b) ¿Cuál es la variable independiente?
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
d) ¿Cuál es la unidad de la variable independiente?
e) ¿Cuál es la unidad de la variable dependiente?

6. Dada la función y = $|x|$

a) Rellena la siguiente tabla de valores:

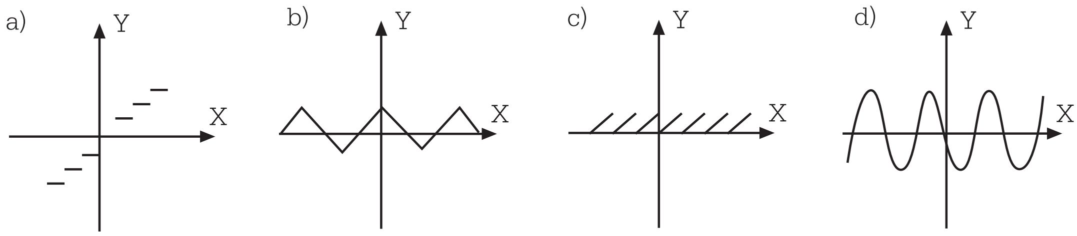
x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y							

b) Represéntala gráficamente
c) ¿Es continua?
d) ¿Es simétrica? Si lo es di respecto de qué

7. De las siguientes funciones $y = x$, $y = x^2$, $y = |x|$, $y = 1/x$ di cuáles son:

a) Continuas
b) Simétricas y di respecto de qué

8. Di si cada una de las funciones siguientes son continuas, simétricas o periódicas.

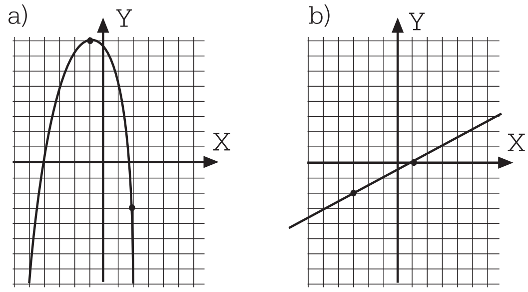


9. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica y di si son crecientes o decrecientes:

$$f(x) = -2x + 3 \text{ en } [1,5]$$

$$g(x) = \frac{12}{x} \text{ en } [3,4]$$

10. Calcula mentalmente la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica y di si son crecientes o decrecientes en dicho intervalo.



TVM (-1, 2) =   TVM (-3, 1) =

11. En la fiesta de aniversario de María se sirven 225 pasteles.

a) Completa la tabla de valores siguiente:

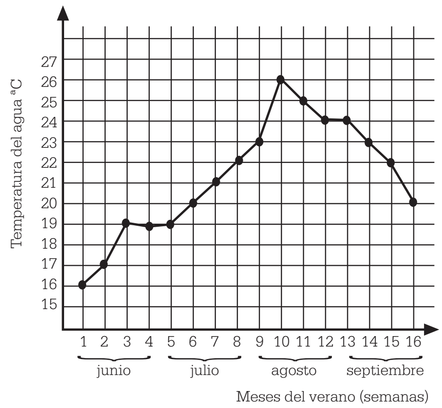
Nº de personas	x	25	15	5	75	45
Nº de pasteles	y	9	15			

b) ¿Son variables continuas o discretas?

c) ¿Podemos decir que son variables inversamente proporcionales?

d) Escribe la expresión algebraica correspondiente.

12. Miguel ha medido este verano la temperatura del agua de su piscina todos los días cada 8 horas y ha calculado un valor medio diario. La representación gráfica es la siguiente:



a) ¿En qué intervalos de tiempo es creciente la función?

b) ¿Cuándo es decreciente?

c) ¿Se mantiene constante en algún momento?

d) ¿Cuál es la temperatura máxima?

e) ¿Cuál es la temperatura mínima?

13. En un centro educativo se ha realizado una encuesta a 100 alumnos de cada curso para determinar que deporte practican preferentemente.

Curso	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
Ciclismo	10	10	20	30
Baloncesto	45	40	45	35
Fútbol	25	35	20	20
Atletismo	20	15	15	15

a) Haz una gráfica

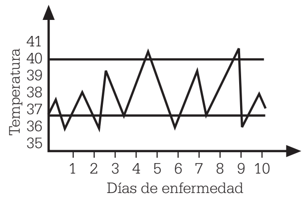
b) Analiza la evolución de los cuatro deportes.

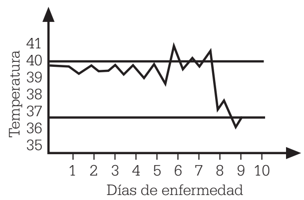
14. En una papelería el precio de cada fotocopia no es fijo y varia según la cantidad de fotocopias que se encarguen.

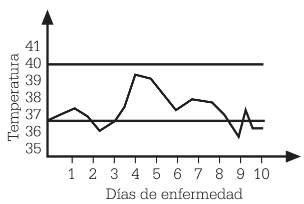
Nº total	*Precio/Unidad*
de 1 a 10	14 pta.
de 11 a 30	10 pta.
más de 30	7 pta.

a) Haz el gráfico correspondiente.
b) Indica la función nº de fotocopias/precio

15. Estas tres gráficas corresponden a un enfermo de malaria, uno de pulmonía y uno de sarampión. Identifica la gráfica de cada una de las enfermedades:



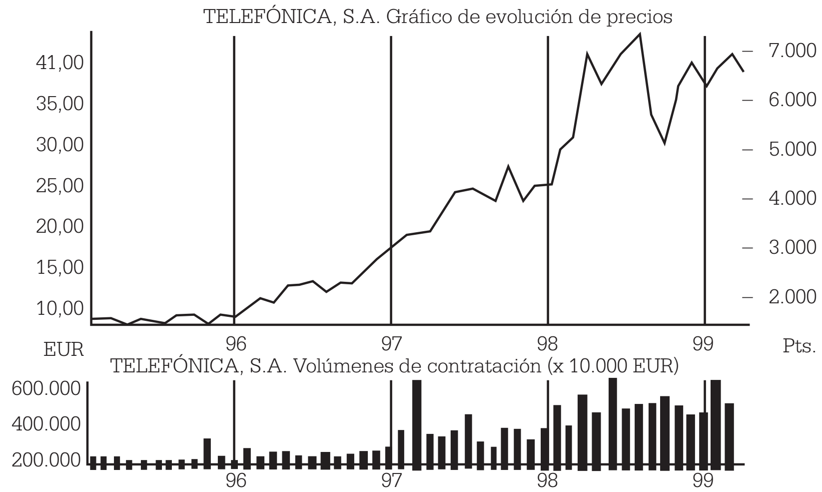




a) Malaria: la temperatura aumenta de día y disminuye de noche.
b) Pulmonía: la temperatura sube rápidamente y continua así unos cuantos días
c) Sarampión: la temperatura es muy irregular

NIVEL III

1. El siguiente gráfico corresponde a la información que aparece en Internet en la página web wwb.bolsamadrid.es de las acciones de telefónica en la bolsa de Madrid. Estudiamos el año 1998



a) ¿En qué meses alcanzó los máximos relativos y qué valor tenía aproximadamente en ellos?
b) ¿En qué mes alcanzó el máximo absoluto y qué valor tenía en él?
c) ¿En qué meses alcanzó los mínimos relativos y que valor tenía aproximadamente en ellos?
d) ¿En qué mes alcanzó el mínimo absoluto y qué valor tenía en él?
e) Calcula el porcentaje de subida del año 1998
f) Si Sonia compró 5.000 euros a principio de año y los vendió a final de año, ¿cuánto ganó?
g) Si los vendió a finales de junio, ¿cuánto ganó?
h) ¿En qué mes fue el máximo absoluto de contratación y qué valor tenía en él?
i) ¿En qué mes fue el mínimo absoluto de contratación y qué valor tenía en él?

2. La tabla de valores siguiente recoge el valor del ángulo interior de algunos polígonos regulares:

Nº de lados	3	4	5	6	7	8	9
Angulo interior	60º	90º		120º			140º

a) Completa la tabla de valores
b) Halla una expresión matemática que nos permita saber el ángulo interior de un polígono regular conocido el número de lados que tiene
c) Calcula el valor de la suma de los ángulos de cada polígono y establece una fórmula para calcularlo, conociendo en número de lados que tiene.

3. En la tabla tienes los datos correspondientes a la densidad demográfica, en habitantes por km^2, y la esperanza de vida, en años, de cinco países de Africa:

País	*Angola*	*Malawi*	*Mozambique*	*Zambia*	*Zimbabwe*
Densidad	8,6	92,9	20,2	12,1	28,7
Esperanza de vida	46,5	44,2	46,8	44,1	55,8

a) Expresa los datos en un sistema de coordenadas
b) Conclusiones que sacas al observar la gráfica

4. Un modelo de coche cuesta 1,8 millones de pesetas. Según las tarifas de precios del mercado de segunda mano, se devalúa a un ritmo del 15% anual:
a) Haz una tabla de valores que exprese el precio del coche durante 6 años
b) Represéntalos gráficamente
c) ¿Es variable discreta o continua?
d) ¿Es una función creciente o decreciente?

5. Una científica del Centro Superior de Investigaciones Científicas estudia el crecimiento de una población de bacterias. Con los datos que tiene ha elaborado la siguiente tabla:

Tiempo (min.)	0	1	2	3	4	5
Nº de bacterias	2	4	8	16	32	64

a) Representa la función gráficamente
b) ¿Son variables directamente proporcionales?
c) ¿Cuál es la expresión matemática que representa el crecimiento de esta población de bacterias?

Unidad n.º 12

La función lineal y afín

Objetivos

– Hallar relaciones entre datos obtenidos o dados para establecer relaciones matemáticas que se derivan de ellos, pasando del lenguaje natural al algebraico y al gráfico ...... (I-II-III)
– Distinguir los problemas que tienen como gráfica una recta y saber diferenciar si se trata de una función lineal, afín o constante .... (I-II-III)
– Conocer e interpretar el concepto de pendiente y ordenada en el origen .... (I-II-III)
– Precisar los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas .... (I-II-III)
– Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados .... (II-III)
– Encontrar la ecuación de la recta paralela a otra y que pasa por un punto dado .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. La función lineal o de proporcionalidad directa:
   1.1. Ecuaciones de la función lineal y = mx .... (I-II-III)
   1.2. Imagen y antiimagen .... (I-II-III)
   1.3. Valor de la pendiente de una recta. Significado geométrico .... (I-II-III)
   1.4. Recta que pasa por un punto .... (I-II-III)
2. La función afín:
   2.1. Ecuación de una función afín y = mx + n .... (I-II-III)
   2.2. Ecuaciones de la recta: implícita y punto pendiente .... (II-III)
   2.3. Pendiente y ordenada en el origen. Significado geométrico .... (I-II-III)
   2.4. Cortes con la gráfica de la función afín .... (I-II-III)
   2.5. Rectas paralelas .... (I-II-III)
   2.6. Haz de rectas que pasan por un punto .... (I-II-III)
3. La función constante. Representación gráfica .... (I-II-III)
4. Rectas de ecuación x = a .... (I-II-III)

Procedimientos

– Representación gráfica de fenómenos dados por una tabla de valores, expresiones algebraicas o textos .... (I-II-III)
– Elaboración de fórmulas de funciones a partir de un texto, de datos conocidos o de una gráfica .... (I-II-III)
– Transformación de unas ecuaciones de la recta a otras .... (II-III)
– Cálculo de la imagen y antiimagen en las funciones lineales y afines .... (I-II-III)
– Comprobación de si tres puntos dados están alineados .... (II-III)
– Cálculo de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos .... (II-III)
– Cálculo la ecuación de una recta paralela a otra dada en forma explícita .... (I-II-III)
– Cálculo de la ecuación de rectas con la misma ordenada en el origen dadas en forma explícita .... (I-II-III)
– Cálculo la ecuación de una recta paralela a otra dada en cualquier forma de la recta .. (II-III)

– Cálculo de la ecuación de rectas con la misma ordenada en el origen en cualquier forma de la recta .... (II-III)
– Cálculo del punto de intersección de dos rectas .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

– Los objetivos de esta unidad son instrumentales, es decir, herramientas que serán utilizadas en otras unidades. Por lo tanto, lo fundamental es que el alumno maneje con soltura el lenguaje algebraico y gráfico para representar mediante rectas situaciones diversas.

Criterios de evaluación

– Hallar relaciones entre datos obtenidos o dados para establecer relaciones matemáticas que se derivan de ellos, pasando del lenguaje natural al algebraico y al gráfico ...... (I-II-III)
– Distinguir los problemas que tienen como gráfica una recta y saber diferenciar si se trata de una función lineal, afín o constante .... (I-II-III)
– Obtener la expresión algebraica de una función a partir de su representación gráfica o los puntos que la definen .... (II-III)
– Conocer e interpretar el concepto de pendiente y ordenada en el origen .... (I-II-III)
– Precisar los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas .... (I-II-III)
– Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados .... (II-III)
– Encontrar la ecuación de la recta paralela a otra y que pasa por un punto dado .... (II-III)
– Cálculo de la imagen y antiimagen en las funciones lineales y afines .... (I-II-III)
– Comprobación de si tres puntos dados están alineados .... (II-III)
– Calcular la ecuación de rectas con la misma ordenada en el origen .... (I-II-III)
– Cálculo del punto de intersección de dos rectas .... (I-II-III)
– Representar funciones cuya gráfica es una recta, en los ejes de coordenadas .... (I-II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Clasifica las siguientes fórmulas como funciones constantes, lineales, afines o no es función y dibuja su gráfica:

a) $y = 4$ c) $x = -3$

b) $y = \frac{-x}{2}$ d) $y = 2x + 3$

2. María, al pasear, camina a razón de 5 km/h. Expresa el espacio recorrido en función del tiempo empleado y represéntalo en una gráfica.

3. La rueda de una bicicleta mide 26 cm de radio.

a) ¿Qué espacio recorrerá al dar 5 vueltas?
b) Haz una tabla de valores.
c) Representa gráficamente los valores.
d) Halla la expresión algebraica de la función.
e) ¿Cuántas vueltas tendrá que dar la rueda para hacer un trayecto de 1,5 km?

4. De una fuente mana un volumen de agua de 120 litros por cada 5 minuto. Elabora una tabla de valores y representa gráficamente cómo varía el volumen en función del tiempo.

5. Dada la función que calcula el perímetro de un triángulo equilátero en función de la medida de su lado:

a) Haz la tabla de valores:

Lado	1	2	3	4
Perímetro				

b) Represéntala
c) Escribe la fórmula y =
d) ¿Qué tipo de función es?
e) Halla la pendiente

6. Al abrir las compuertas de un estanque para regar una huerta, el nivel del agua en el estanque desciende a razón de 6 cm/minuto.

a) Haz la tabla de valores:

Tiempo (min.)	1	2	3	4
Nivel de descenso (cm)				

b) Represéntala.
c) Escribe su fórmula y =
d) ¿Qué tipo de función es?
e) Halla la pendiente

7. Dada la función que calcula el coste del trabajo de un técnico de lavadoras que cobra 10 euros por ir a casa y 20 euros por hora de trabajo:

a) Haz la tabla de valores:

Horas	1	2	3	4
Euros				

b) Represéntala.

c) Escribe la fórmula y =

d) ¿Qué tipo de función es?

e) Halla la pendiente.

8. Dada la función: $f(x) = \dfrac{2 - x}{3}$ calcula:

a) f (-3)

b) La imagen de –1/3

c) La antiimagen de –4/3

d) f (4)

9. Representa gráficamente los pares de funciones siguientes en unos mismos ejes de coordenadas. ¿Qué observas?

a) $f(x) = 2x$ y $g(x) = -2x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x$

10. Sin dibujar la gráfica, determina si los puntos P (2, 6) y Q (-1, 4) pertenecen a la gráfica de la siguiente función: $y = 3x$.

11. Representa gráficamente estas funciones y di cuál es su pendiente y su ordenada.

a) $y = \dfrac{-1}{2}x$

b) $y = \dfrac{2 - x}{3}$

c) $y = \dfrac{3x - 1}{5}$

d) $y = -3$

12. ¿En qué puntos cortan los ejes de coordenadas a las gráficas de estas funciones?

a) $y = -4x$

b) $y = -3x + 9$

c) $y = \dfrac{2 - 4x}{3}$

d) $y = 4$

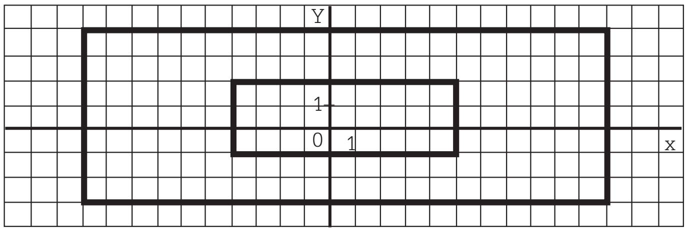
13. Indica cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones y represéntalas.

a) $y = -2x + 1$

b) $y = 3x - 2$

14. La pendiente de una función afín es 3 y su ordenada en el origen 2. Represéntala.

15. Escribe la ecuación de las rectas representadas en el gráfico:



16. Representa en los mismos ejes de coordenadas:

a) $y = 5$

b) $x = -3$

c) $x = 4$

d) $y = 0$

e) $y = \frac{-5}{2}x$

f) $x = 9/4$

17. Halla la ecuación y haz la representación gráfica de:

a) La recta paralela a y = 4 que pasa por el punto (3, -4)

b) La recta paralela a x = 0 que pasa por el punto (-5, -2)

18. Halla la ecuación de la recta y = mx + n que pasa por los puntos (2, -1) y (4, 0).

19. Dada la recta y = 3x – 2, halla una recta que pase por el punto (1, -1) y corte al eje OY en el mismo punto que la anterior.

20. Calcula la recta paralela a $y = -4x + 1/2$ y que pase por el punto: $(1/2,\ 1/3)$.

21. Halla el punto de intersección de la recta $3x - 2y = 0$ y la recta $y = 6x - 2$.

22. ¿Cuál es el punto de intersección de las rectas $y = 3$ y $x = -2$?

23. Señala cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta definida por la función y = -3.

a) (0, -3) b) (-3, 0) c) (-3, -3)

NIVEL II

1. Halla la ecuación de la función lineal que pasa por el punto (3, -1).

2. Averigua si los puntos (1, -3/2); (4, -6) y (2,3) están en línea recta. Hazlo analíticamente y luego comprueba el resultado representándolos.

3. Representa gráficamente las funciones:

a) $y = \dfrac{3 - x}{4}$

c) $y = 2x - \dfrac{1}{2} + x$

b) $y = \dfrac{-1 + 2x}{-7}$

d) $2x - y = 3x$

4. Indica cuál es la pendiente y la ordenada de las funciones:

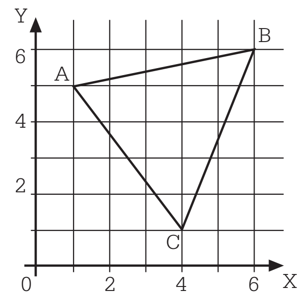
a) $y = \dfrac{2x - 4}{3}$

c) $y = \dfrac{-x}{4} + 7$

b) $y = \dfrac{3 - 2x}{6}$

5. En el nivel de la superficie terrestre la temperatura decrece a razón de 6,4 ºC por km. de altura. Haz una gráfica que exprese el descenso de temperatura de 28 ºC a nivel del mar hasta alcanzar una altura de 11 km.

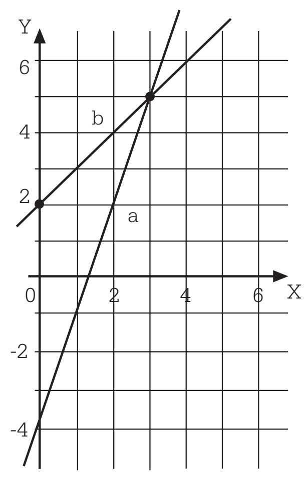
6. Halla la pendiente de AB, BC y AC.



7. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,6) y tiene la misma ordenada en el origen que la recta $y = \dfrac{12 - x}{4}$.

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2, -4) y (2, 4).

9. Halla la ecuación de las rectas a y b:



10. En el pueblo de Pedro hubo en el último mes de junio una tormenta muy fuerte y cayeron muchos rayos, algunos de los cuales quemaron árboles. Se puede saber a que distancia a caído un rayo contando los segundos que pasan desde que se ve la señal luminosa del rayo hasta que se oye el trueno. Las ondas sonoras se propagan por el aire a una velocidad aproximada de 340 m/s.

a) Expresa la distancia que recorre el sonido en función del tiempo.

b) Representa la gráfica de la función.

c) Escribe la fórmula y =

d) ¿Qué tipo de función es?

e) Halla la constante de proporcionalidad

f) Calcula a qué distancia de donde se encuentra Pedro ha caído un rayo si se tarda en oír el sonido 3 segundos.

g) Un rayo ha caído a 1.105 m ¿Cuánto tiempo tardará en oírse el trueno?

11. Una empresa de venta de ordenadores ofrece a sus vendedores dos opciones de contrato:

a) Un sueldo fijo de 130.000 ptas. mensuales.

b) Un sueldo fijo de 50.000 ptas. mensuales, más una comisión de 4.000 ptas. por cada ordenador vendido.

- Encuentra la expresión algebraica para cada opción.
- Si vendes 18 ordenadores un mes, ¿qué opción les interesa a los vendedores?
- Un vendedor ha cobrado este mes 138.000 ptas. ¿Cuántos ordenadores ha vendido?
- Representa gráficamente las dos situaciones en los mismos ejes coordenados. ¿A partir de qué número de ordenadores vendidos le interesa a un vendedor la segunda opción?

12. Un hotel dispone de un ascensor que varía su posición respecto de la planta baja según la siguiente tabla:

Tiempo (s)	0	1	2	3
Posición (m)	-30	-25	-20	-15

a) Si la posición máxima que puede conseguir, es de 80 m. ¿cuántos segundos tardará en realizar el trayecto desde la planta baja?

b) Representa gráficamente los valores de la tabla.

c) Halla la expresión de la función correspondiente.

13. Dada la función $y = \frac{4x - 5}{2}$ localiza el punto de intersección de su gráfica con la bisectriz del segundo cuadrante.

14. Halla el punto de intersección de las rectas:

a) $y = \frac{3x - 2}{7}$ b) $2x - 7y = 8$

15. Cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de la función afín cuya gráfica es una recta que pasa por los puntos P(2, 3) y Q(-6, -1).

16. Se sabe que la gráfica de una función es una recta y pasa por los puntos A(4, -2); B(-3, -2) y C(10, -2). ¿Podemos afirmar, sin representarla, que se trata de una función constante?

17. Halla los vértices del triángulo definido por la intersección de las rectas que son la representación gráfica de las funciones siguientes:

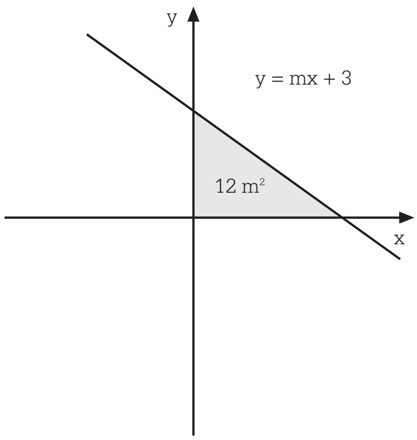
a) $y = -\dfrac{3}{4}x + 4$

b) $y = x - 5$

c) $y = 3$

NIVEL III

1. Calcula el valor de la pendiente de la recta para que el área del triángulo de la figura sea 12 m^2



2. La demanda de un cierto modelo de pantalón viene determinada por la función f (p) = 15.000 – 3p, donde p es el precio de venta y f (p) el número de pantalones de este modelo solicitados. La fábrica ofrece un número de pantalones, g (p) = -6.000 + 4p. Calcula cuál es el punto de equilibrio entre el precio de venta de unos pantalones y el número de pantalones que hay que producir para que se vendan todos.

3. Un jardinero quiere hacer unos parterres en forma de triángulos isósceles de manera que todos tengan un perímetro de 5 m. Elabora una tabla de valores con algunas posibilidades para establecer cuanto tiene que medir el lado desigual en función de lo que midan los dos lados iguales. Representa gráficamente los valores y halla la expresión de la función correspondiente.

4. Representa gráficamente en unos mismos ejes de coordenadas las funciones:

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \dfrac{-1}{3}x + 3$

c) $y = 3$

d) $y = \dfrac{-5x + 9}{3}$

e) ¿Qué observas?

5. Ya sabes que el punto de ebullición del agua pura al nivel del mar es de 100ºC. Si aumentamos la altura h respecto del nivel del mar, el punto de ebullición cambia según la expresión:

$$f(h) = \frac{-1}{1.000} h + 100$$

a) ¿Cuál es el punto de ebullición del agua a una altura de 1.800 m?

b) ¿Cuál es el punto de ebullición en el Everest?

c) ¿Cuál es el punto de ebullición en el Montblanc?

d) ¿Cuál es el punto de ebullición en el Aneto?

6. Las ecuaciones siguientes describen el espacio en Km recorrido por dos camiones en función del tiempo en horas: $f(t) = 70t$ y $g(t) = 50t + 30$

a) ¿Cuál es la distancia que separa inicialmente a los dos camiones? ¿Y después de dos horas de trayecto?

b) ¿Cuántos km. recorre cada camión en una hora? ¿Cuál es la velocidad de cada camión en km./hora?

c) Representa gráficamente cada una de las funciones. ¿En qué momento se encontrarán?

7. Luisa y José viajan en un coche a 100 km/h por la autopista. Una hora más tarde, Carmen y Juan les siguen a 120 km/h. ¿Cuándo y en qué lugar se encontrarán? Resuelve gráficamente el problema, teniendo en cuenta que las velocidades son constantes.

8. Un león que puede alcanzar una velocidad media de 70 km/h ve pasar un antílope que se desplaza a 40 km./h. Cuando el antílope está a 90 m del león, éste decide perseguirlo.

a) ¿Cuántos metros separan al león del antílope después de 5 s de persecución?

b) Si los dos animales se dirigen a un lago que se encuentra a 150 m, ¿quién llegará primero?

c) ¿En qué momento y dónde se encuentran el león y el antílope?

9. La siguiente tabla muestra las medidas de p y z realizadas mediante un experimento:

z	1.2	2.0	2.4	3.2	3.8	4.6
p	11.5	10.2	8.8	7.0	6.0	3.5

a) Dibuja los valores obtenidos con z en el eje horizontal y p en el vertical. Dibuja aproximadamente una recta que pase por esos valores.

b) Halla la pendiente k y la ordenada n aproximadamente de forma que $p = kz + n$.

Unidad n.º 13

La información estadística. Gráficos

Objetivos

- Diferenciar entre población y muestra .... (I-II-III)
- Entender cuándo se debe seleccionar una muestra para el estudio de una población .. (II-III)
- Clasificar variables estadísticas .... (I-II-III)
- Entender la posible utilización de modelos discretos o continuos dependiendo de los casos, viendo que no son excluyentes .... (II-III)
- Elaborar tablas de variables estadísticas cualitativas o cuantitativas discretas .... (I-II-III)
- Elaborar tablas de variables estadísticas cuantitativas continuas .... (I-II-III)
- Saber representar diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores .... (I-II-III)
- Representar histogramas acumulados y polígonos de frecuencias acumulados .... (II-III)
- Saber qué gráfico utilizar para cada tipo de variable .... (I-II-III)
- Mostrar una actitud crítica frente a la información presentada de forma gráfica .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Generalidades:
   - 1.1. Importancia de la información estadística .... (I-II-III)
   - 1.2. Población y muestra .... (I-II-III)
   - 1.3. Definición de variable estadística .... (I-II-III)
   - 1.4. Clasificación de variables estadísticas: Cualitativas y cuantitativas .... (I-II-III)
2. Tablas estadísticas:
   - 2.1. Frecuencias absoluta y relativa .... (I-II-III)
   - 2.2. Frecuencias absoluta y relativa acumuladas .... (I-II-III)
   - 2.3. Propiedades de las frecuencias relativas .... (II-III)
3. Gráficos:
   - 3.1. Diagrama de barras, histograma, polígono de frecuencias, diagrama de sectores . (I-II-III)
   - 3.2. Histograma acumulado y polígono de frecuencias acumulado .... (II-III)
   - 3.3. Otros gráficos estadísticos .... (II-III)

Procedimientos

- Análisis básico de la representatividad de una muestra .... (I-II-III)
- Construcción de tablas a partir de datos que provienen de una variable cualitativa o cuantitativa discreta .... (I-II-III)
- Construcción de tablas a partir de datos que provienen de una variable cuantitativa continua (I-II-III)
- Elaboración de un diagrama de barras, histograma, polígono de frecuencias y diagrama de sectores .... (I-II-III)
- Interpretación de los anteriores gráficos .... (I-II-III)
- Construcción de un histograma acumulado y de un polígono de frecuencias acumulado (II-III)

- Elaboración de otros gráficos estadísticos .... (II-III)
- Interpretación de gráficos en periódicos y revistas .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- En este primer capítulo de Estadística se intentará que todos los alumnos (incluido el *nivel I*) sepan hacer un tratamiento mecánico de la información estadística. Todos deberán saber construir tablas y hacer los gráficos elementales: Diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias. La interpretación de gráficos en este nivel se hará con ejercicios sencillos.
- En los *niveles II y III*, además de lo anterior, se intentará que los alumnos sepan ver la relatividad de la utilización de los modelos discreto y continuo, utilizar otro tipo de gráfico si la situación lo requiere (cartogramas, diagramas lineales...). En estos niveles se insistirá en la crítica hacia posibles representaciones por parte de periódicos y revistas de una misma situación real.

Criterios de evaluación

- Diferenciar entre población y muestra .... (I-II-III)
- Clasificar variables estadísticas .... (I-II-III)
- Utilizar un modelo discreto y otro continuo para una misma situación real .... (II-III)
- Elaborar tablas de todo tipo de variables estadísticas .... (I-II-III)
- Saber representar diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores .... (I-II-III)
- Representar histogramas acumulados y polígonos de frecuencias acumulados .... (II-III)
- Elegir el gráfico adecuado para cada situación de la vida real .... (I-II-III)
- Observar los posibles errores y “formas de confundir” que nos pueden presentar en los gráficos diversos periódicos y revistas .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Se quieren hacer los siguientes estudios:

a) La profesión que piensa tener cada alumno de tu clase.

b) El número de horas diarias que ven la T.V. los chicos y chicas de tu pueblo entre 14 y 16 años de edad.

c) Intención de voto de cada español con derecho a votar.

Responde, razonadamente, si cada uno de estos estudios se pueden hacer tomando las respectivas poblaciones o habría que tomar muestras.

2. Tenemos distintos colectivos:

a) En una fábrica de aspiradores se quiere hacer un control de calidad. Para llevar esto a cabo se seleccionan 50 aspiradores y se analizan.

b) El huerto de un compañero de tu clase tiene 20 árboles frutales. Él desea ensayar un nuevo tipo de abono, para lo cual, después de echado éste, mide el crecimiento que han experimentado.

c) Deseamos conocer la intención de voto de los ciudadanos madrileños. Para ello seleccionamos 1000 ciudadanos.

Razona si los anteriores colectivos son poblaciones o muestras.

3. Clasifica los siguientes caracteres estadísticos:

a) Número de huesos de cada ser vivo.

b) Intención de voto.

c) Velocidad que en un instante dado, llevan los vehículos que circulan por las carreteras españolas.

d) Talla de calzado de los alumnos de tu centro.

e) Tipos de zumos que prefieren los adolescentes.

4. En una encuesta se quiere estudiar una población de 1.750.000 habitantes, el 58% de los cuales son mujeres. ¿Cuántas mujeres debería haber si se toma una muestra de 15.000 personas?

5. Di, en cada caso, cuál es la población y cuál la variable que se quiere estudiar y si ésta es cualitativa o cuantitativa, especificando si es discreta o continua.

a) Tiempo dedicado a las tareas domésticas por los hombres y las mujeres que trabajan fuera del hogar.

b) Estudios que quieren hacer las alumnas y los alumnos de un centro escolar al terminar la ESO.

c) Intención de voto en unas elecciones autonómicas.

6. Para una competición deportiva, se quieren comprar camisetas del mismo color a los alumnos de una clase. Las tallas son las siguientes:

30, 28, 32, 34, 26, 28, 30, 30, 28, 32, 30,
28, 34, 28, 26, 32, 30, 34, 28, 28, 34, 30, 30, 32, 30, 30, 30.

a) ¿Cuántas veces se repite la talla 30? ¿Y la 28?

b) Haz una tabla donde aparezcan las tallas en una columna y el número de veces que se repiten en otra (frecuencia absoluta).

7. Lanzamos cuatro monedas al aire 20 veces y anotamos el número de caras que aparecen en cada lanzamiento. A partir de los datos obtenidos, haz una tabla donde aparezcan las frecuencias absolutas y las relativas.

8. Al contar el número de asignaturas suspendidas por cada alumno y alumna en la primera evaluación de 3º de ESO, hemos obtenido estos datos:

1, 1, 2, 3, 2, 6, 0, 0, 1, 0, 4, 5, 0, 0, 0, 3, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 5, 4, 2.

Haz una tabla de frecuencias absolutas y el diagrama de barras correspondiente.

9. Con los datos del problema anterior, calcula los siguientes porcentajes:

a) Estudiantes que aprobaron todo.

b) Estudiantes con uno o dos suspensos.

c) Estudiantes que suspenden 3 ó más asignaturas.

Haz un diagrama de sectores con esos tres grupos.

10. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de 25 alumnos en unas pruebas que se llevaron a cabo fueron las siguientes:

6, 8, 7, 5, 4, 6, 4, 8, 5, 9, 10, 6, 7, 8, 5, 6, 5, 4, 5, 8, 9, 10, 6, 6, 6.

Representa dichos datos mediante un diagrama de barras, realizando previamente una tabla de frecuencias.

11. Al realizar un recuento de glóbulos rojos en una muestra de sangre utilizando un hemocitómetro (aparato que consta de 169 casillas donde se deposita la sangre y así poder contar mejor el número de glóbulos rojos), miramos las casillas y vamos contando el número de glóbulos rojos. El resultado que obtenemos es el siguiente:

Nº de glóbulos rojos	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº de casillas	6	7	14	15	16	17	20	20	8	17	9	7	3

Estamos estudiando la variable "nº de glóbulos rojos en cada casilla". Haz un diagrama de barras con los datos de la tabla anterior.

12. En un cierto país, las lluvias caídas en sus 100 estaciones meteorológicas durante un año, se han representado en la siguiente tabla:

Precipitaciones(mm.)	[60,70)	[70,80)	[90,100)	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,140)
Nº de estaciones	16	30	15	20	13	3	3

Representa los datos anteriores en un histograma de frecuencias.

13. Los 60 estudiantes de 4º de ESO del Instituto toman en su desayuno lo siguiente:

Alimentos	*Tostada*	*Bollo*	*Galletas*	*Croissant*	*Pastel*	***Total***
Nº de estudiantes	10	7	24	8	11	60

A partir de estos datos construye un diagrama de sectores.

14. Las alturas de los jugadores de baloncesto de un equipo son las que indica la tabla:

Altura (en cm.)	*Nº de jugadores*
[170-180)	1
[180-190)	2
[190-200)	4
[200-210)	4
[210-220)	1

a) ¿Qué porcentaje de los jugadores de este equipo mide menos de 2 m.?
b) ¿Cuál es el porcentaje de jugadores que mide más de 2 m.?
c) Representa gráficamente estos datos.

15. En un pueblo hay 80 personas mayores de edad, entre hombres y mujeres, con el siguiente estado civil:

Estado Civil	*Mujeres*	*Hombres*
Soltero	10	6
Casado	10	10
Separado	8	6
Divorciado	2	5
Viudo	15	8

Dibuja en dos diagramas de sectores, uno para hombres y otro para mujeres, los datos de la tabla.

16. En la liga de baloncesto, los cuatro aleros del equipo han conseguido las estadísticas siguientes en lanzamientos de 3 puntos:

	Intentos	*Transformaciones*
Manuel	97	42
Juan Ramón	107	45
Pedro	65	32
Ignacio	60	37

Piensa que eres entrenador del equipo y que en el partido que se decide el título estáis perdiendo por dos puntos a 10 segundos del final. Si preparas una jugada de tres puntos, ¿a qué alero darías la responsabilidad de tirar? Razona la respuesta.

NIVEL II

1. El director de una fábrica de objetos de vidrio desea hacer un estudio para comprobar durante cuánto tiempo los objetos que fabrica pueden resistir una cierta temperatura. Para ello dispone de un horno que se puede mantener a una temperatura fija todo el tiempo que se desee.

a) Para este estudio, ¿elegirías una muestra o toda la población?

b) Explica cómo harías tú este estudio.

2. Se quiere hacer un estudio sobre la nacionalidad de los turistas que visitan España en el mes de julio. Para ello se eligen como muestra los turistas que llegan al aeropuerto de Palma de Mallorca durante este mes:

a) ¿Cuál es la población?

b) ¿Es accesible esta población o tenemos que recurrir a una muestra?

c) ¿Es representativa la muestra tomada?

3. Las edades de los empleados de una empresa son:

25, 26, 25, 50, 28, 45, 43, 42, 38, 28, 23, 25, 29, 30, 32, 33, 38, 40, 45, 50, 55, 60, 23, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 37, 38, 39, 36, 37, 38, 32, 40.

Agrupa los datos en intervalos de 5 años, y construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

4. Lanza 50 veces dos dados y suma el resultado obtenido. A partir de dichos resultados completa la tabla siguiente:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Frecuencia absoluta												
Frecuencia relativa												

a) ¿Cuál es la suma de todas las frecuencias absolutas?

b) ¿Cuál es la suma de todas las frecuencias relativas?

c) Observa cuál es el valor mínimo y el valor máximo que toman las frecuencias, tanto absolutas como relativas. Intenta enunciar una propiedad general a este respecto.

5. Una muestra de vehículos en circulación en España durante el año 1992 proporcionó los siguientes resultados:

	Seat	*Ford*	*Opel*	*Renault*
Frecuencia absoluta		115		
Frecuencia relativa	0,35	0,23	0,19	

a) ¿Cuántos automóviles Opel tenía la muestra?

b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

c) Completa la tabla anterior.

6. Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad, y los resultados fueron estos:

Respuestas	%
Todos los días	37'3
Una vez por semana	29
Una vez al mes	10'5
Alguna vez al año	12
Nunca	——
No sabe, no contesta	0'4

a) ¿Cuál fue el porcentaje de personas que contestaron "Nunca"?

b) Si las personas que "No sabe, no contesta" fueron 6, ¿cuál fue el tamaño de la muestra?

c) Las personas encuestadas, ¿son muestra o población?

7. En un aula de 3º de ESO hay 30 alumnos con las estaturas siguientes:

1,60 1,73 1,70 1,58 1,70 1,62 1,69 1,62 1,65 1,65 1,68 1,65 1,69 1,63 1,72
1,64 1,60 1,73 1,64 1,80 1,63 1,70 1,82 1,65 1,59 1,72 1,70 1,78 1,74 1,69

a) Agrupa dichos datos en intervalos de longitud 5 y construye una tabla de frecuencias.

b) Representa dichos datos en un histograma.

8. Mediante el gráfico que consideres más adecuado, representa los siguientes datos:

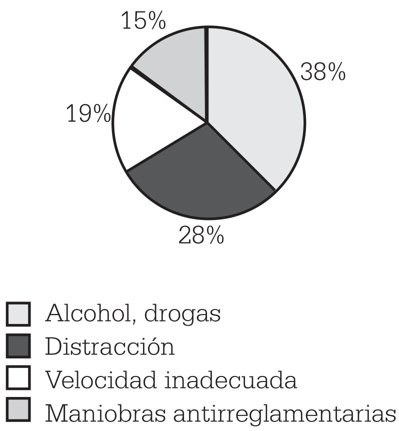
Modo de pasar la tarde del sábado	Ir al cine	Jugar al baloncesto	Pasear	Ver la TV	Estudiar	Total
Nº de jóvenes	25	32	9	14	10	90

9. Un diario nacional publicó esta información el 16/10/97:

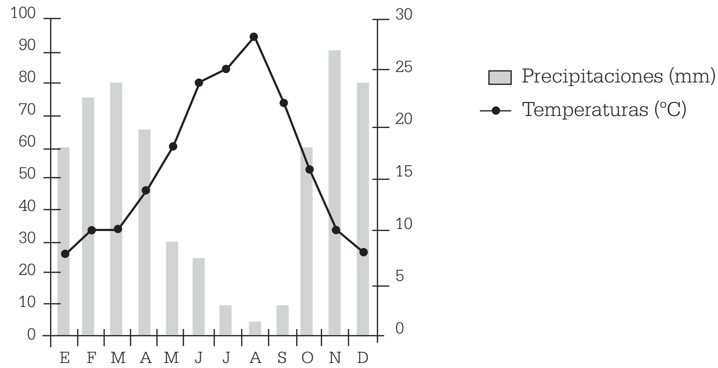
"Desde el inicio del año hasta el pasado lunes, se produjeron 2.712 siniestros, en accidentes de tráfico, en los que perdieron la vida 3.212 personas, 76 más que en el mismo periodo del año anterior". La información presentaba el siguiente gráfico con el encabezamiento: "*Causas de accidentes en España*".

a) ¿Cuántas personas murieron en accidentes cuya causa fue el alcohol o las drogas?

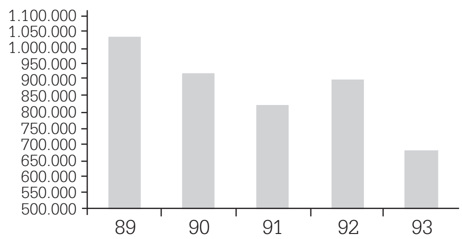
b) El 75% de las distracciones son fruto de la euforia o de la lentitud de reflejos que producen el alcohol y otras drogas. Según esto, ¿qué porcentaje de accidentes está relacionado con el alcohol o las drogas?



10. Este tipo de gráfico se ve con frecuencia en atlas y libros de geografía. Señalan la evolución, en un cierto año, de las precipitaciones y de las temperaturas. Se denominan "climogramas". A la vista del climograma, confecciona las correspondientes tablas.



11. Esta gráfica muestra las ventas de automóviles en España, desde enero a noviembre:

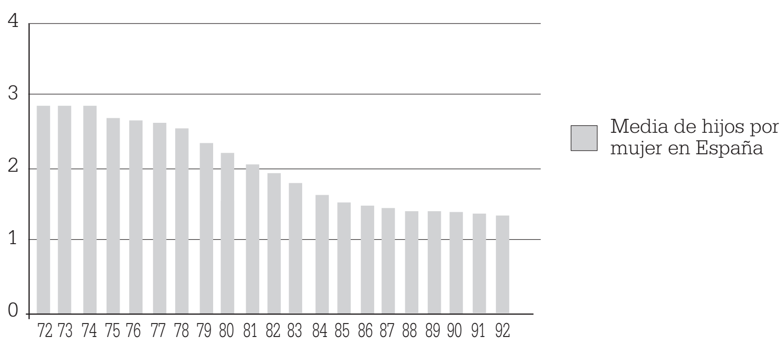


a) Observa que la barra correspondiente a 1993 es menor que la mitad de la correspondiente a 1992. ¿Significa esto que las ventas se redujeron a la mitad?

b) Repite la gráfica, tomando la escala vertical desde 0.

c) Calcula la variación, en %, de las ventas del año 93 respecto al año 92.

12. Imagina que eres periodista y que recibes la gráfica siguiente. El periódico en el que trabajas te pide un comentario sobre ella. Realízalo.



13. Se ha hecho una encuesta a un grupo de 120 estudiantes. Consta de cuatro opciones: a), b), c) y d), de las cuales cada estudiante ha de escoger una. Hecho el recuento, la frecuencia relativa de la opción a) resulta ser de 0,25 y la de la opción b) resulta ser de 0,15. Si las frecuencias absolutas de las opciones c) y d) son iguales, indica el número de estudiantes que escogió cada una de las opciones.

14. Se tira un dado 40 veces obteniéndose los siguientes resultados: 3, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 4, 5, 5, 5, 2, 6, 1, 4, 3, 2, 2, 6, 6, 3, 3, 1, 1, 4, 3, 4, 2, 6, 4, 6, 3, 5, 6, 2, 5, 1, 2, 4, 2.

a) Elabora la tabla de frecuencias.

b) Representa los resultados en dos tipos de gráficos diferentes.

NIVEL III

1. ¿Consideras adecuado entrevistar a media mañana a las amas de casa para conocer la opinión que tienen las mujeres sobre su situación en la sociedad? Razona la respuesta.

2. Hemos encuestado a 3.820 personas para saber la audiencia de un debate (D) y de una película (P) que se emitieron en horas distintas en una cadena de TV.

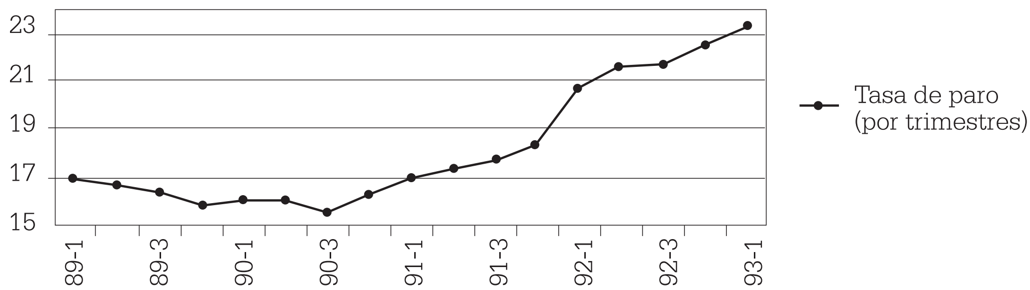
	Vieron el debate	*No vieron el debate*	*Totales*
Vieron la película			2.712
No vieron la película		1.041	
Totales	1.187		3.820

a) Una tabla de este tipo se denomina "Tabla de contingencia". Completa la tabla.

b) ¿Qué porcentaje vio la película y el debate?

c) De los que vieron la película, ¿qué porcentaje no vio el debate?

3. Observa la siguiente gráfica:

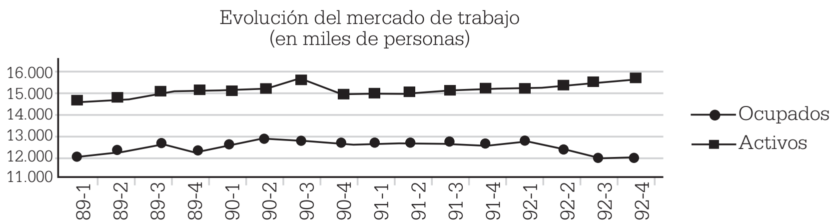


a) Representa esta misma gráfica tomando la escala del eje de ordenadas desde 0 hasta 25.

b) ¿Produce la misma sensación de crecimiento?

c) ¿Cuál crees que elegiría el gobierno y cuál la oposición?

4. En este gráfico se observa la evolución de la población activa y de la población ocupada desde 1989 hasta 1993:



La población activa es aquella que trabaja o que busca trabajo. La población ocupada es la población que tiene trabajo remunerado. Es claro que para calcular el número de parados, basta con restar las dos cantidades anteriores.

a) Halla el nº de parados en el tercer trimestre del año 91.

b) ¿Cuándo fue menor el nº de parados?

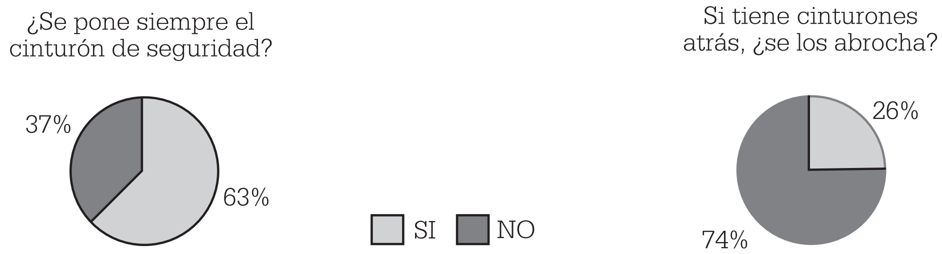
c) ¿Cuándo se llegó a 3 millones de parados?

5. Supón que el índice de popularidad de cierto líder ha evolucionado de la siguiente forma:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Porcentaje de aceptación	58%	55%	60%	54%	54%	50%

Construye, para estos datos, dos gráficos: El que efectuarías si fueses periodista del periódico del partido del líder en cuestión, y el que harías si fueses periodista del periódico de un partido rival. (Nota: Maneja de diferente forma las escalas de los ejes.)

6. En los gráficos siguientes están expresados los resultados de una encuesta realizada a 10.000 conductores sobre la conveniencia de usar el cinturón de seguridad:



a) ¿Cuántos conductores de los encuestados no se pone siempre el cinturón de seguridad?

b) Hay 6.300 conductores que han respondido una de las cuatro respuestas de la encuesta. ¿Cuál ha sido esa respuesta?

7. Tenemos la lista con el número de horas semanales de estudio de un grupo de alumnos: 15, 5, 2, 4, 6, 23, 7, 17, 6, 8, 16, 4, 21, 10, 9, 12, 11, 17, 16, 3, 15, 9, 5, 20, 23, 10, 12, 21, 15, 9.

a) ¿Cuál es la variable estadística que se estudia? ¿De qué tipo es?

b) ¿Crees que tiene sentido estudiarla considerándola como un modelo discreto?

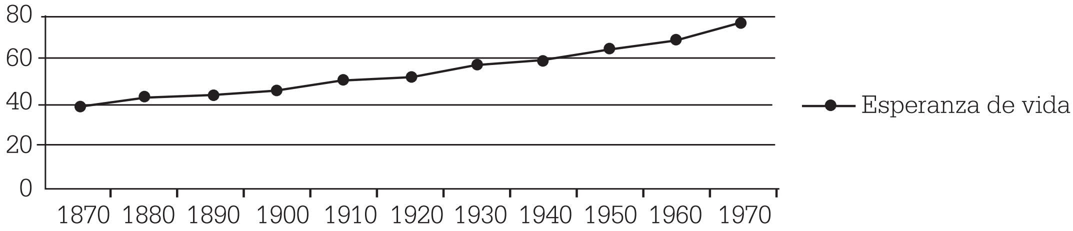
c) Haz la tabla de frecuencias, agrupando la variable en intervalos de amplitud 5. Represéntala gráficamente.

8. Los datos relativos a accidentes de tráfico en una región de España en los años 93, 94 y 95, durante el primer semestre, se recogen en la siguiente tabla:

Año	*Accidentes*	*Muertes*
93	199	234
94	164	194
95	207	258

a) Expresa en tantos por ciento la disminución o aumento del número de accidentes correspondiente al año 94 con respecto al 93, y del 95 respecto al 94. Haz lo mismo con los datos del número de muertes.
b) ¿En qué año ha sido mayor la media del número de muertes por accidente?
c) Representa gráficamente la evolución de las dos magnitudes en estos tres años.

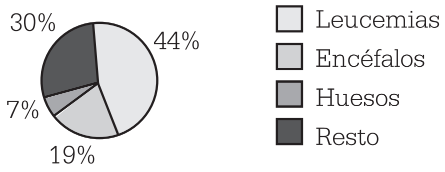
9. En el año 1970 se publicó en "Le Monde" la gráfica siguiente:



a) Comenta la gráfica.
b) Damos una serie de avances científicos. Sitúalos en la gráfica en el periodo que corresponda. (Ayúdate de una enciclopedia):
   – Utilización de los rayos X.
   – Transfusiones de sangre.
   – Utilización de la insulina.
   – Aparición de la penicilina.
   – Utilización de las vacunas antipoliomielítica y antisarampión.
c) Expresa porcentualmente el incremento de la esperanza de vida en esos 100 años.

10. En cierto periódico del día 12 de enero del 98 aparece el siguiente titular. "Desciende la tasa de mortalidad por cáncer infantil". Esta información viene acompañada del siguiente gráfico:

Cáncer Infantil
(Distribución porcentual de la mortalidad)



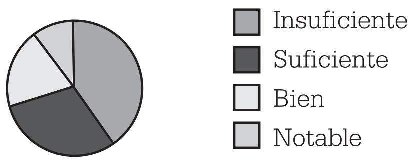
a) ¿Informa la gráfica sobre la noticia del titular de prensa?
b) Di de qué informa y elabora una tabla de frecuencias en el supuesto de que hayan muerto 500 niños de cáncer.

11. La duración en segundos de las llamadas de una empresa tomadas de un recibo son las siguientes: 120, 131, 142, 157, 15, 27, 94, 57, 62, 12, 49, 58, 149, 210, 120, 131, 80, 94, 71, 23, 15, 7, 21, 32, 239, 210, 49, 57, 139, 21, 74, 31, 23, 59, 70, 234, 12, 77, 54, 200, 157, 170, 42, 48, 48, 49.

a) Agrupa los datos en 8 clases y forma la tabla de frecuencias completa.
b) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.
c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias acumulados.

12. Las calificaciones obtenidas por 500 alumnos de un centro en Matemáticas son:
- Insuficiente: 150 alumnos.
- Suficiente: 175 alumnos.
- Bien: 125 alumnos.
- Notable: 50 alumnos.

Se presenta el siguiente gráfico de sectores:



a) ¿Qué ocurre?
b) Construye bien el diagrama de sectores y también un pictograma.

Unidad n.º 14

Parámetros estadísticos

Objetivos

- Calcular la media, moda y mediana de una variable estadística cuantitativa discreta .. (I-II-III)
- Calcular la media de una variable estadística cuantitativa continua .... (I-II-III)
- Calcular la moda y mediana de una variable estadística cuantitativa continua .... (II-III)
- Utilizar la medida de centralización adecuada para cada caso concreto .... (II-III)
- Calcular el rango, varianza y desviación típica para variables cuantitativas discretas .. (I-II-III)
- Calcular rango, varianza y desviación típica para variables cuantitativas continuas .... (II-III)
- Interpretar los parámetros estadísticos en problemas concretos .... (II-III)
- Utilizar conjuntamente la media y la desviación típica para interpretar una distribución (II-III)
- Analizar la representatividad de una medida de dispersión a través del coeficiente de variación .... (III)

Contenidos

Conceptos

1. Medidas de centralización:
   1.1. Necesidad de un parámetro que resuma una distribución .... (I-II-III)
   1.2. Media, moda y mediana .... (I-II-III)
2. Medidas de dispersión:
   2.1. Necesidad de un parámetro que mida la dispersión en una distribución .... (I-II-III)
   2.2. Rango, varianza y desviación típica .... (I-II-III)
3. Utilización conjunta de la media y la desviación típica .... (II-III)
4. El coeficiente de variación .... (III)

Procedimientos

- Cálculo de la moda en variables cualitativas .... (I-II-III)
- Cálculo de la media, moda y mediana en variables cuantitativas discretas .... (I-II-III)
- Cálculo de la media en variables cuantitativas continuas .... (I-II-III)
- Cálculo de la moda y mediana en variables cuantitativas continuas .... (II-III)
- Cálculo del rango, varianza y desviación típica para variables cuantitativas discretas . (I-II-III)
- Cálculo del rango, varianza y desviación típica para variables cuantitativas continuas (II-III)
- Utilización de la calculadora para el cálculo de la media y la desviación típica .... (II-III)
- Utilización conjunta de la media y la desviación típica para observar en qué intervalos están los datos .... (II-III)
- Cálculo e interpretación del coeficiente de variación .... (III)

Orientaciones metodológicas

- En esta segunda unidad de Estadística habría que lograr que todos los alumnos (incluidos los del *nivel I*) vieran la necesidad de resumir en un parámetro los datos de una distribución. Esto no es difícil ya que están acostumbrados a calcular la media aritmética. Se exigiría que en el *nivel I* se supieran calcular media, moda, mediana, rango y desviación típica de una variable cuantitativa discreta.
- Para los *niveles II y III* se exigiría saber calcular esos parámetros también para variables cuantitativas continuas. Además a este alumnado se le insistirá no sólo en el cálculo, sino también en la interpretación y aplicación de estos parámetros.

Criterios de evaluación

- Calcular la media, moda y mediana de una variable estadística cuantitativa discreta .. (I-II-III)
- Calcular la media de una variable estadística cuantitativa continua .... (I-II-III)
- Calcular la moda y mediana de una variable estadística cuantitativa continua .... (II-III)
- Utilizar la medida de centralización adecuada para cada caso concreto .... (II-III)
- Calcular el rango, varianza y desviación típica para variables cuantitativas discretas .. (I-II-III)
- Calcular rango, varianza y desviación típica para variables cuantitativas continuas .... (II-III)
- Utilizar conjuntamente la media y la desviación típica para interpretar una distribución (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Calcula la media aritmética de las notas de Juan el año anterior en Matemáticas. Son las siguientes:

Notas	6	7	7	6	3	8	5	6	5	6

2. Calcula la media, la moda y la mediana de los siguientes datos:

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7.

3. El número de días despejados en cada trimestre del año 98 en Barcelona fue:

	1er trimestre	2º trimestre	3er trimestre	4º trimestre
Nº de días	15	14	27	14

En La Coruña los días despejados fueron:

	1er trimestre	2º trimestre	3er trimestre	4º trimestre
Nº de días	8	10	19	12

a) Calcula la media de días despejados por trimestre para esas dos ciudades.

b) ¿En cuál de las dos ciudades es mayor el nº de días despejados por trimestre?

4. En tu clase hay 9 chicos morenos, 4 rubios y 2 pelirrojos.

a) ¿Cuál es la variable estadística que se estudia?

b) ¿De qué tipo es?

c) ¿Cuál es la moda?

5. Con el fin de estimar el grupo sanguíneo más abundante en un centro, hemos estimado una muestra de 25 alumnos. Los resultados han sido:

A, A, O, A, O, O, O, O, A, O, O, A, A,
O, O, B, AB, B, A, A, A, O, B, B, O.

a) ¿Cuál es la variable que estudiamos? ¿De qué tipo es?

b) Halla la moda, razonando la respuesta.

6. Las notas de Matemáticas de un grupo de alumnos han quedado distribuidas de la siguiente forma:

Calcula la media, la moda y la mediana de las notas de Matemáticas.

Notas	*Nº de alumnos*
1	2
2	2
3	3
4	5
5	7
6	5
7	3
8	2
9	2
10	1
	32

7. En un taller de reparaciones de automóviles se eligieron al azar cinco posibles averías de un coche. Los tiempos que tardan en arreglar las averías son:

Cambiar platinos	*Pinchazo*	*Limpiar bujías*	*Cambiar el embrague*	*Cambiar el radiador*
20 min.	10 min.	30 min.	120 min.	40 min.

a) Calcula el tiempo medio de las distintas reparaciones consideradas.
b) Di cuál es el tiempo mediana, razonando la respuesta.

8. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución, donde se dan los datos (x_i) y las frecuencias (f_i).

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8

9. Los pesos de los jugadores de un equipo de fútbol son los siguientes:
76, 78, 75, 72, 81, 75, 65, 82, 71, 68, 71 (en kg.)
a) Halla el peso medio del equipo y el peso mediana.
b) Calcula la desviación típica de esos pesos.

10. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron éstos:

Elena	18	23	22	24	19	25	16
María	18	26	18	28	22	17	18

a) ¿Cuál de las dos tiene mejor media?
b) ¿Cuál de las dos tiene menor desviación típica? ¿Cuál de las dos es más regular?

11. En la familia Gómez, el salario mensual del padre es de 150.000 pts. y el salario de la madre es de 250.000 pts. En la familia Pérez, el padre gana 310.000 pts. mensuales, y la madre 90.000 pts.
a) Halla el sueldo medio de cada familia.
b) ¿Cuál es el rango en cada familia? ¿En cuál de las dos es menor la dispersión?

12. El número de aparatos de radio que hay en los hogares de un grupo de personas viene dado por la siguiente tabla:

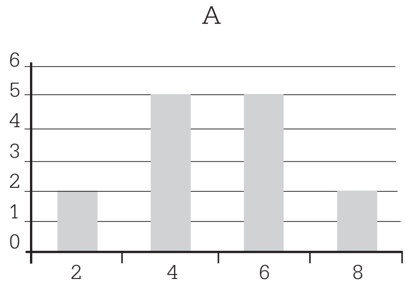
Nº de radios	0	1	2	3	4	5
Nº de familias	3	19	18	6	3	1

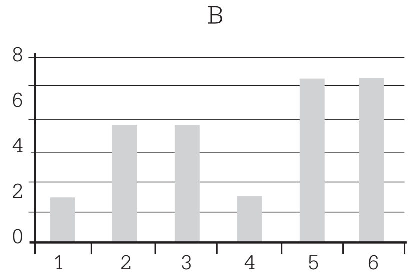
a) Calcula la media y la desviación típica.
b) ¿Cuál es la mediana?
c) ¿Cuántos aparatos de radio y cuántas viviendas hay en esa muestra?

13. Calcula la media y la desviación típica de las edades de los estudiantes de una clase de inglés:

Edad (x_i)	13	14	15	16
Nº de alumnos (f_i)	5	13	10	2

14. Calcula la media de las siguiente distribuciones, de las que se da diagrama de barras:





NIVEL II

1. En una determinada región, se desea instalar un hospital, al cual pueden acceder todos los habitantes de la misma. Hay cinco pueblos que presentan su candidatura y los habitantes desean saber cuál es la más indicada siguiendo el criterio de conseguir que los gastos de desplazamiento sean los mínimos entre ellos.

La distancia en km, entre dichos pueblos viene reflejada en la tabla:

	Valdeperillo	*Fuentestrún*	*Valcorba*	*Villalejo*	*Zarzo*
Valdeperillo		10	65	80	32
Fuentestrún	10		60	54	87
Valcorba	65	60		15	100
Villalejo	80	54	15		93
Zarzo	32	87	100	93	

a) Calcula la distancia media desde Fuentestrún hasta el resto de las localidades.
b) Calcula la distancia media de cada uno de los pueblos al resto.
c) ¿Dónde colocarías el hospital?

2. En unas elecciones escolares el reparto de votos entre los candidatos fue el siguiente:

Elena	Andrés	Juan Luis	Enrique
38%	15%	25%	22%

Indica qué parámetros de centralización (media, moda o mediana) tiene sentido calcular para reflejar esta información.

3. En un control de velocidad en carretera se obtuvieron los siguientes datos:

Velocidad en km/h	*Número de coches*
60-70	5
70-80	15
80-90	27
90-100	38
100-110	23
110-120	17

a) Haz una tabla con las marcas de clase y las frecuencias.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) ¿Qué porcentaje de coches circula por encima de 90 km/h?

4. A la pregunta: "¿Cuántas personas forman tu hogar familiar?", 40 personas responden lo siguiente:

5	5	4	7	4	6	4	6	5	6
3	5	5	3	4	4	6	5	5	5
5	4	7	5	6	3	5	6	7	4
5	5	4	3	5	5	4	3	5	6

a) Haz la tabla de frecuencias y el diagrama correspondiente.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Halla la mediana y la moda.

5. Se ha contado el número de letras que tienen las palabras de un artículo:

Nº de letras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nº de palabras	4	6	4	9	5	7	6	9	7	8	6	4	3

a) Calcula la media (μ) y la desviación típica (σ).
b) ¿Cuántas palabras tienen un número de letras comprendido entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$? ¿Qué porcentaje representan?

6. Se sabe que la distribución de alturas de los soldados en un cierto año es unimodal y bastante simétrica. La media es $\mu = 1{,}74$ m. y la desviación típica es $\sigma = 5$ cm. Se dice que los soldados que tienen su estatura entre $\mu + \sigma$ y $\mu + 3\sigma$ son altos, los que miden entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu - \sigma$ son bajos y los que miden entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ son normales. Si escogemos una muestra de 5.000 soldados ese año, indicar aproximadamente cuántos habrá bajos, cuántos normales y cuántos altos. Indicar también cuáles son los intervalos de clasificación de alturas.

7. En una encuesta sobre la labor de un alcalde se obtuvieron los siguientes datos:

	Número de personas
Muy mala	22
Mala	27
Aceptable	17
Buena	15
Muy buena	15

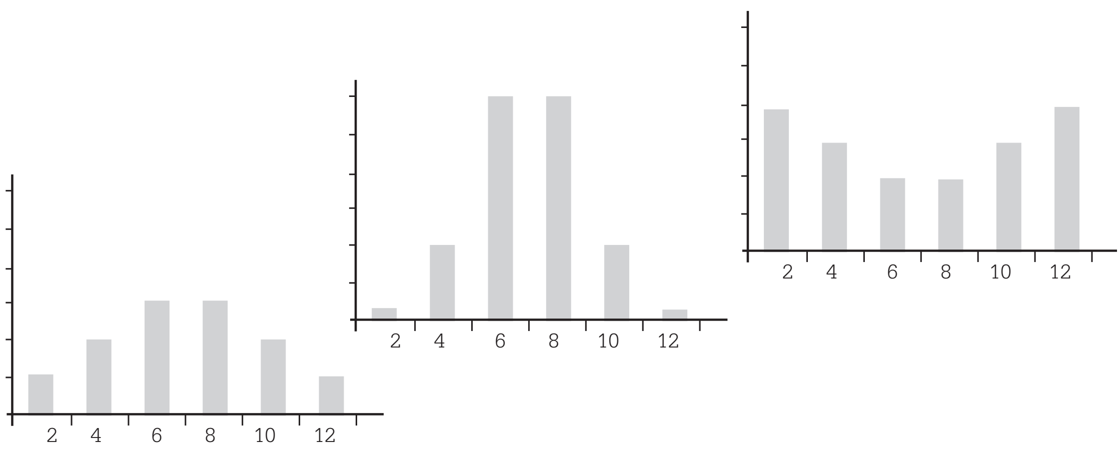
a) ¿Qué porcentaje opina que la labor ha sido mala o muy mala?
b) ¿Qué porcentaje aprueba la labor del alcalde?
c) Halla la moda y la mediana y di cuál de esos dos parámetros representa mejor la opinión de la mayoría.

8. Los pesos en kg. de 40 personas se distribuyen como indica la siguiente tabla:

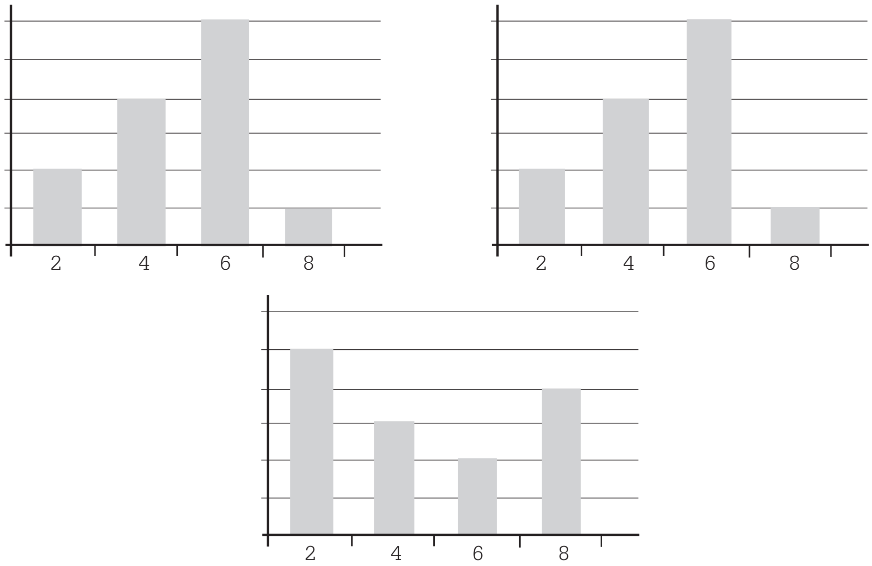
Peso (en kg.)	*Número de personas*
45,5 – 52,5	2
52,5 – 59,5	11
59,5 – 66,5	13
66,5 – 73,5	9
73,5 – 79,5	4
79,5 – 85,5	1

a) Calcula la media (μ) y la desviación típica (σ).
b) Comprueba que la mayor parte de esas personas tienen un peso comprendido entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$. ¿Qué porcentaje representan?

9. Estas tres distribuciones tienen la misma media:
a) ¿Cuánto vale esa media?
b) Si las desviaciones típicas son 3,8, 4,3 y 2,9, asocia a cada distribución con uno de estos valores.



10. Tenemos las siguientes 3 gráficas y la siguiente tabla para tres distribuciones (A, B y C) donde se indican la media y la desviación típica. ¿Qué gráfica corresponde a cada distribución? Razona la respuesta.



	A	B	C
Media	4	5	4,7
Desviación típica	1,7	1,6	2,5

11. Se ha hecho un mismo examen a dos clases y los resultados han sido los siguientes:

	Media	*Desviación típica*
Clase A	5,8	2,9
Clase B	6,3	1,2

Si en una clase hay 6 sobresalientes y 8 suspensos y en la otra hay 2 suspensos y 3 sobresalientes, razona a qué clase corresponden estos resultados.

12. Completa la siguiente tabla, sabiendo que la media de esta distribución es 2,7.

x_i	1	2	3	5
f_i	3	—	7	5

13. Para hallar la nota de una evaluación, se hace la media de cuatro exámenes. Si en los tres primeros tengo una media de 4,2, ¿qué nota mínima habré de sacar en el cuarto examen para aprobar?

14. La nota media de un examen ha sido 6,2 en 3º A, en el que hay 15 estudiantes. En 3º B la nota media ha sido un 4, pero en esta clase hay 35 estudiantes. Calcular la nota media del examen de todos los estudiantes de 3º A y de 3º B.

15. En una distribución en la que se estudia la talla de 500 personas se sabe que la mediana es igual a 1,67 m. ¿Qué quiere decir?

16. En una distribución intervienen 600 personas y se sabe que es unimodal y bastante simétrica. Se sabe que la media aritmética es 50 y la desviación típica es 7. ¿Cuántas personas aproximadamente se distribuyen en el intervalo (43,50)? ¿Y en el intervalo (50,57)? ¿Y en (57,64)?

NIVEL III

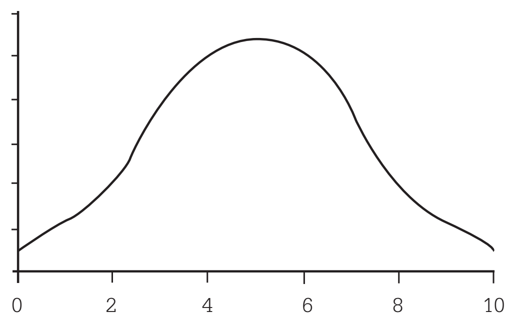
1. Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 10.000.000 de pesetas y una desviación típica de 1.250.000 pts. En otra empresa B, más pequeña, la media es 1.500.000 pts. y la desviación típica es de 250.000 pts. Calcula, mediante el coeficiente de variación, cuál de las dos empresas tiene más dispersión relativa.

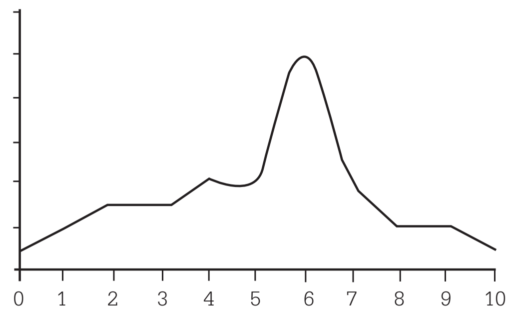
2. En el año 1997, el cambio del dólar frente a la peseta y la lira tuvo estos valores:

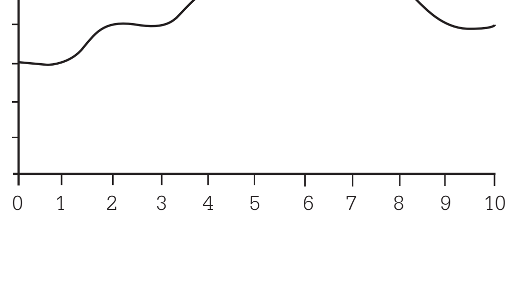
	Media	Desviación típica
Peseta	126,7	2,16
Lira	1.540,4	23,3

Calcula cuál de las dos monedas se mantuvo más estable frente al dólar, comparando sus coeficientes de variación.

3. Se ha hecho un mismo examen en dos clases A y B de 40 alumnos y alumnas cada una. La media y la desviación típica de la clase A son respectivamente 6 y 1, y las de la clase B son 6 y 3.







a) Asigna una de estas gráficas a la clase A y otra a la clase B, razonando la respuesta.

b) En una de las clases hay 15 suspensos y 6 sobresalientes, mientras que en la otra hay 5 suspensos y un sobresaliente. ¿Cuál es la clase A? ¿Y la B?

c) Si Alicia aspira a sobresaliente e Ignacio sólo a aprobar, ¿qué clase te parece la más adecuada para cada uno?

4. En una empresa trabajan 30 empleados y 5 directores. El sueldo medio de la empresa es de 180.000 pts. ¿Cuál será el sueldo medio de los directores si sabemos que el sueldo medio del resto de los empleados es de 127.500 pts.?

5. La media y la mediana de un conjunto de cinco números naturales distintos es 7 y el rango es 6. Halla esos cinco números.

6. Las notas de un examen de Matemáticas en una clase fueron:

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de alumnos	4	3	2	1	7	3	2	8	3	2

a) Halla la nota media de los alumnos suspensos.

b) Halla la nota media de los alumnos aprobados.

c) ¿Cómo se puede hallar la nota media global conociendo las dos anteriores medias solamente y el número de alumnos aprobados y suspensos?

7. ¿Qué les ocurre a la media y a la desviación típica de una distribución si a todos los datos les sumamos el mismo número?

Antes de hacer una generalización, halla la media y la desviación típica de los datos 3, 5, 2, 4, 6, 3. Halla después la media y la desviación de los anteriores datos habiéndoles sumado un número fijo.

8. ¿Qué les ocurre a la media y a la desviación típica de una distribución si todos los datos los multiplicamos por el mismo número?

Comprueba lo que acabas de decir con los datos 3, 5, 2, 4, 6, 3. Multiplícalos luego por un número fijo. Halla la media y la desviación de ambas distribuciones y compara.

9. Para hallar la nota de una asignatura, el segundo examen vale el doble que el primero, y el tercero el triple. ¿Cuál es la nota de una alumna de obtuvo en los exámenes unas notas respectivas de 5, 6 y 4? ¿Y si esas notas representaran respectivamente el 10%, el 40% y el 50% del total?

10. Obtén la raíz cuadrada de los 50 primeros números naturales y considera sólo la parte entera.

a) Haz una tabla con los resultados obtenidos, diciendo cuál es la variable que se estudia.

b) Halla la media, la mediana y la desviación típica de esa distribución.

11. Cuenta la leyenda que 100.000 chinos querían cruzar un río. Como ninguno sabía nadar preguntaron a un lugareño cuál era la profundidad media del río. Les respondió que era de un metro. Todos, confiados ya que la profundidad era pequeña, empezaron a cruzar. Todos los chinos se ahogaron. ¿Puede ser cierto? Razónalo utilizando el significado de la media.

12. La media de los 6 números de la siguiente tabla es 4. ¿Cuál es su mediana?

x	$4x - 3$	$x + 4$	-16	9	$x - 8$

13. Consideramos un número de 4 cifras. La media de las dos primeras cifras es 7, la media de las dos cifras centrales es 2,5, y la media de las dos últimas cifras es 8,5. ¿Cuál es la media de la primera y la última cifra?

14. Estamos estudiando la variable "altura en metros". Razona en qué unidad se expresará la varianza de esa variable.

15. La media de una lista de 10 números es 8. Si a la lista se añaden los números 17 y –1, ¿cuál es el valor de la nueva media?

16. En cinco pruebas donde se puntúa de 1 a 100 (ambos incluidos), Aitor ha sacado una media de 88 puntos. ¿Cuál es la puntuación más baja que ha podido obtener en alguna de las pruebas?

4.º (A) de la E.S.O.

Matemáticas

Temporalización

Evaluación inicial

Revisión del número racional.
2 semanas

Primera evaluación

Unidad 1: El número real.
4 semanas
Unidad 2: Polinomios. Divisibilidad.
2,5 semanas
Unidad 3: Ecuación de segundo grado.
2,5 semanas

Total primera evaluación: *9 semanas*

Segunda evaluación

Unidad 4: Inecuaciones.
2,5 semanas
Unidad 5: Vectores. Movimientos en el plano.
3 semanas
Unidad 6: Trigonometría.
3 semanas
Unidad 7: Funciones. Generalidades. Función afín.
2,5 semanas

Total segunda evaluación: *11 semanas*

Tercera evaluación

Unidad 8: Funciones elementales.
3,5 semanas
Unidad 9: Técnicas de recuento. Combinatoria.
3,5 semanas
Unidad 10: Probabilidad.
4 semanas

Total tercera evaluación: *11 semanas*

Total: 33 semanas

Unidad n.º 1

El número real

Objetivos

- Afianzar el concepto de número racional, las operaciones y la resolución de problemas con estos números .... (I-II-III)
- Reconocer los distintos tipos de números que integran el conjunto de los reales .... (I-II-III)
- Calcular potencias de exponente entero de números reales y utilizar sus propiedades . (I-II-III)
- Calcular raíces .... (I-II-III)
- Aproximar números reales y operar con los valores obtenidos .... (I-II-III)
- Acotar el error absoluto y relativo cometido al aproximar un número .... (II-III)
- Operar con radicales .... (II-III)
- Identificar un radical con una potencia de exponente fraccionario .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. El número racional (repaso):
   - 1.1. Operaciones con números racionales. Jerarquía .... (I-II-III)
   - 1.2. Representación de números racionales .... (I-II-III)
   - 1.3. Paso de fracción a decimal y viceversa .... (I-II-III)
   - 1.4. Notación científica. Órdenes de magnitud .... (II-III)
   - 1.5. Proporcionalidad .... (I-II-III)
   - 1.6. Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales .... (I-II-III)
   - 1.7. Tanto por uno. Números índices .... (II-III)
   - 1.8. Potencias de base racional y exponente entero .... (I-II-III)
   - 1.9. Cálculo aproximado de raíces cuadradas .... (I-II-III)
2. El número irracional:
   - 2.1. Definición y ejemplos de números irracionales .... (I-II-III)
   - 2.2. Representación en la recta de números irracionales .... (II-III)
3. El número real:
   - 3.1. El conjunto de los números reales .... (I-II-III)
   - 3.2. Representación en la recta de los números reales .... (II-III)
   - 3.4. Orden en los números reales .... (I-II-III)
   - 3.5. Números aproximados. Redondeo y truncamiento .... (I-II-III)
   - 3.6. Errores en una aproximación. Error absoluto y relativo .... (II-III)
   - 3.7. Definición y representación de intervalos .... (I-II-III)
   - 3.8. Valor absoluto de un número real .... (I-II-III)
4. Operaciones con números reales:
   - 4.1. Potencias de exponente entero. Propiedades .... (I-II-III)
   - 4.2. Raíz de índice n .... (I-II-III)
   - 4.3. Operaciones con radicales .... (II-III)
   - 4.4. Potencias de exponente fraccionario. Equivalencia con raíces .... (I-II-III)
   - 4.5. Propiedades de las potencias de exponente fraccionario .... (II-III)
   - 4.6. Racionalización .... (II-III)

PROCEDIMIENTOS

– Realización de operaciones con racionales y resolución de problemas .... (I-II-III)
– Estimación, por defecto y por exceso la raíz cuadrada de un número .... (I-II-III)
– Expresión de un número racional en forma decimal y viceversa .... (I-II-III)
– Discriminación de distintos tipos de números reales .... (I-II-III)
– Representación en la recta de números irracionales .... (II-III)
– Comparación de números reales .... (I-II-III)
– Redondeo y truncamiento de un número real .... (I-II-III)
– Acotación del error cometido al aproximar un número real .... (II-III)
– Representación de intervalos en la recta .... (I-II-III)
– Expresión de un número en notación científica y realización de operaciones con ellos, pudiéndose utilizar la calculadora .... (II-III)
– Estimación de magnitudes expresándolas en notación científica .... (II-III)
– Cálculo de raíces con calculadora usando exponentes fraccionarios .... (I-II-III)
– Racionalización de expresiones con radicales de índice dos en el denominador .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– Parece conveniente en esta opción hacer un repaso exhaustivo del número racional antes de iniciar el estudio de los irracionales.
– Es importante que el alumno comprenda la equivalencia entre número racional y número decimal periódico.
– Sobre la representación de los números reales en la recta real, en los niveles II y III hay que hacer notar que los números racionales dejan infinitos huecos y que esos huecos los llenan precisamente los irracionales). En el nivel I no es necesario esto, sino que será suficiente representar las distintas aproximaciones que se consideren.
– En lo referente a errores, en el nivel I bastará que el alumno sepa redondear o truncar hasta la cifra que se indique y que, simplemente, sea consciente de la magnitud del error, mientras que en los demás niveles se puede precisar el error máximo cometido. A estos últimos alumnos debemos hacerles comprender que lo que indica la precisión de una medida es el error relativo y no el absoluto.
– La calculadora es un instrumento útil e importante en esta unidad.
– En el nivel I no se realizarán operaciones con radicales, salvo alguna extremadamente sencilla y siempre que sirva para afianzar el concepto de raíz, mientras que en los niveles II y III se utilizarán sus propiedades.

Criterios de evaluación

- Resolución de problemas con números racionales .... (I-II-III)
- Distinguir los distintos tipos de números reales .... (I-II-III)
- Aplicar correctamente la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis .... (I-II-III)
- Realizar operaciones con potencias de exponente entero usando correctamente sus propiedades .... (I-II-III)
- Operar con radicales utilizando sus propiedades .... (II-III)
- Utilizar correctamente los conceptos de precisión, aproximación y error .... (II-III)
- Racionalizar expresiones con raíces de índice dos en el denominador .... (II-III)
- Operar con números expresados en notación científica .... (II-III)
- Operar con potencias de exponente fraccionario .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{3}{6} - \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{4}{12} - \dfrac{3}{6}\right)$

b) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{6}\right)$

c) $\dfrac{2 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{3}\right)}{\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\left(3 - \dfrac{2}{5}\right)}$

d) $\dfrac{5 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\right)^{-2}}{1 - \dfrac{2}{3 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}}}$

e) $\dfrac{1}{4}\left[\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^{2}\cdot\dfrac{4}{9} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} : \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2}\right]$

2. Representa los siguientes números racionales en la recta:

a) 2/3 b) -3/5 c) 7/3 d) 2,3 e) -14/3

3. Escribe las siguientes fracciones en forma decimal y ordénalas de menor a mayor.:

a) 3/4 b) 7/100 c) -4/5 d) -8/3 e) -4/7

4. Escribe los siguientes números decimales en forma de fracción:

a) 2,75 b) $56,\overline{4}$ c) -7,432 d) $12,\overline{36}$ e) $120,34\overline{21}$

5. Escribe tres números comprendidos entre 6,26 y $6,2\overline{6}$

6. Una herencia se reparte entre tres hermanos. El mayor recibe los 2/5 del total, y el segundo, la sexta parte. ¿Qué fracción del total recibió el tercero? Si la herencia ascendía a 8 millones y medio de pesetas, ¿cuánto recibió cada uno?

7. Tres amigos compran un décimo de lotería que cuesta 3000 ptas. Andrés pone 1300 ptas, Benito, 900 y Carlos, el resto. Si les ha tocado 8 millones de pesetas, ¿cuánto deberá llevarse cada uno?

8. Del dinero que tengo me gasto por la mañana los 2/5, y por la tarde la mitad de lo que me queda.

a) ¿Qué fracción del total me queda?

b) Si me han quedado 600 ptas., ¿cuánto tenía por la mañana?

9. Un medicamento se presenta en pastillas de 120 mg. y de 500 mg. Las primeras contienen 9 miligramos de paracetamol. ¿Qué cantidad de éste medicamento contienen las de 500 mg?

10. Una fotocopiadora reduce el original a sus 3/5 partes. Si de una fotocopia hago otra y repito el proceso cuatro veces, ¿qué fracción del original tiene la cuarta fotocopia? Si el texto del documento original ocupaba una superficie de 25x17 cm., ¿cuál es la superficie del texto de la última fotocopia

11. Expresa los siguientes porcentajes en forma de fracción:

a) 20% b) 37% c) 5% d) 0,7% e) 0,25%

12. En una ciudad de 25.000 habitantes, el 46% son mujeres y el resto hombres. ¿Cuántos hombres y mujeres hay?

13. Un chándal que ayer costaba 8.900 ptas, cuesta hoy 9.300. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida?

14. Invierto dos millones de pesetas al 8% anual. ¿Cuál será el interés en seis meses?

15. El precio sin IVA de un ordenador es de 150.000 ptas. Si me hacen un descuento del 5%, ¿cuánto cuesta? ¿Qué es mejor para el cliente, aplicar primero el IVA y luego el descuento o al revés?

16. El precio de unas deportivas, IVA incluido, es de 9.500 ptas. ¿Cuál es el precio sin IVA?

17. Una calculadora tiene estropeada la tecla de la raíz cuadrada. Halla la raíz cuadrada de 27 con dos cifras decimales.

18. Completa esta tabla con sí o no, según los números pertenezcan o no al conjunto que se indica:

Número	5	$\sqrt{2}$	-1,12	1,1212212221...	7/6	$\sqrt{4}$	$\sqrt{-3}$
Natural							
Entero							
Racional							
Irracional							
Real							

19. Escribe los siguientes nº en forma decimal y redondeando a las centésimas: (puedes usar la calculadora).

a) 2,762 b) 3/5

c) 7,545454... d) 0,1211211112...

e) -7/6 f) π

g) $\sqrt{3}$ h) $14,\overline{56}$

i) -7

20. Los siguientes números debemos aproximarlos con dos cifras decimales. ¿Cómo cometemos menos error, truncándolos o redondeándolos? Efectúa en cada uno la operación más conveniente de las dos.

a) $\sqrt{3}$ b) 2,8953 c) $2,\overline{46}$

d) 34,7637 e) 2/3 f) $123,7\overline{16}$

21. Escribe tres nº racionales comprendidos entre *1/15* y *2/15*

22. Representa en la recta real los siguientes intervalos:

a) [2,6]
b) (-5,-3)
c) [-1,7)
d) (-,5]
e) $(3, +\infty)$

23. Representa en la recta real los números que verifican:

a) $|x| = 3$
b) $|x| = 0$
c) $|x| = |-3|$
d) $|x| = -6$

24. Simplifica todo lo posible:

a) $(2\sqrt{3})^2$ b) $(3\sqrt{5})^3$ c) $(2^4\sqrt{3})^5$ d) $\left((2^3\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2})\right)^6$

25. Calcula:

a) $\sqrt{1024}$
b) $\sqrt{441}$
c) $\sqrt[3]{729}$
d) $\sqrt[4]{1296}$
e) $\sqrt[5]{-1}$
f) $28 - 2\sqrt{81}$
g) $\sqrt{4 + 2 \cdot 16}$
h) $8 + 2\sqrt[3]{-8}$
i) $\sqrt{400 - 16 - 60}$
j) $\sqrt{4,7 + 1,06}$
k) $3\sqrt[3]{0,001 + 2}$
l) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}$
m) $\sqrt[5]{\dfrac{-1}{32}}$

n) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} - \sqrt{\dfrac{9}{25}}$

o) $\sqrt{\dfrac{9}{4} : \sqrt{\dfrac{121}{25}}}$

26. Transforma en radicales

a) $(-3)^{1/5}$ b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3/7}$ c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3/2}$ d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1/4}$

27. Halla, usando la calculadora:

a) $\sqrt[5]{12^3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{7^4}}$ c) $\sqrt[3]{11^2}$

28. Una finca tiene forma cuadrada y su área es de 7.634,5 m^2.

a) ¿Cuánto cuesta cercarla si el metro de valla cuesta 235 ptas?

b) Se quiere dividir en dos fincas triangulares iguales construyendo una tapia a lo largo de su diagonal. El metro de tapia cuesta 1240 ptas. ¿Cuánto cuesta la obra?

29. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir una superficie de 27,04 m^2

30. Un depósito cúbico de chapa tiene un volumen de 46,656 m^3. ¿Cuánto mide su arista? ¿Cuántos metros de chapa se han utilizado para su construcción

NIVEL II

1. Un trabajador empieza a trabajar en una empresa con un sueldo de 3.000.000 ptas. Los tres primeros años le suben un 6% cada año, los 4 siguientes, un 7%, y los cinco siguientes, un 8% cada uno. ¿Cuánto cobra a los doce años?

2. Invierto 3 millones al 6% anual, pero al final de cada año, los intereses que obtengo los reinvierto al mismo rédito. Si hago esto durante cinco años, ¿qué capital tendré?

3. A un artículo se le ha aplicado el 16% de IVA, pero se ha efectuado un descuento del 5%. El cliente pagó 12.400 ptas. ¿Cuál era el precio original sin IVA?

4. El ser vivo más pequeño el un virus que pesa del orden de 10^{-18} g., y el más grande es la ballena azul que pesa, aproximadamente 130 Tn. Estima mentalmente la magnitud del número de virus que hacen falta para conseguir el peso de una ballena y calcúlalo después.

5. La estrella visible más próxima a nuestro sistema solar es Alfa-Centauri, que se encuentra a 4,3 años-luz. Utilizando la notación científica, calcula:

a) La distancia del Sol a Alfa-Centauri en kilómetros.

b) la velocidad en Km/h. a la que tendría que viajar por el espacio una nave espacial para llegar a ella en 75 años.

6. En un concierto celebrado en un campo de fútbol, el público ocupaba medio campo, estando éste a rebosar. ¿Estima cuántas personas había en el concierto.

7. Encuentra todos los números de tres cifras que sean cubos de un número natural

8. Calcula y simplifica

a) $\frac{7}{5}\sqrt{35}$

b) $\sqrt{\frac{3}{2}}\ \sqrt{\frac{8}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{10}{3}}\ \sqrt{7{,}2}$

9. Dibuja un cuadrado de 5 cm. de lado. Dibuja otro cuadrado que tenga doble área

10. Dibuja un rectángulo cuya diagonal valga 5

11. Las dimensiones de un aula son 12 m. de largo, 7 m. de ancho y 3,40 m. de alto. Dos moscas revolotean por el aula ¿Cuál es la distancia máxima a que pueden encontrarse?

12. Representa los siguientes conjuntos de números en la recta real:

a) $[4,6] \cap (9,11)$
b) $[-6,5] \cap (2,5)$
c) $(2,7) \cap (5,9) \cap (6,10)$

13. Represent a en la recta real los intervalos que verifican:

a) $|x| \le 2$ b) $|x| < 2$ c) $|x| \ge 2$ d) $|x| > 2$

14. Ordena los siguientes números reales de menor a mayor:

$-\frac{3}{5}$, 1,3481225..., $-1{,}\overline{82}$, $-\sqrt{2}$, $\left|-\frac{5}{3}\right|$, $\frac{2}{5}$, $\sqrt{3}$, $1{,}\overline{73}$

15. Entre los números $5{,}\overline{27}$ y $2{,}272\overline{7}$, intercala:

a) Dos decimales exactos.
b) Dos periódicos puros.
c) Dos periódicos mixtos.

16. En una tienda de tejidos tienen un metro defectuoso, en lugar de medir 1 m. mide 987 mm. ¿Cuánta tela de menos le han dado a una señora que ha comprado 16 m. de un tejido cuyo precio es de 1.275 ptas./m? ¿Cuál ha sido la cantidad de dinero cobrada de más?

17. Al preguntarle a Luis y Rosa por sus ahorros, afirman tener aproximadamente 50.000 y 18.000 ptas., respectivamente. Luis ha cometido un error absoluto de 1.500 ptas. y Rosa de 850 ptas. ¿Entre qué valores están los ahorros de cada uno? ¿Cuál ha cometido mayor error relativo al dar la aproximación de sus ahorros si éstos son de 48.500 y 17.150 ptas.?

18. Si 4,347 es una aproximación por redondeo de un número, ¿entre qué valores se encuentra dicho número? ¿Cuál es el error máximo absoluto y relativo que se comete?

19. Calcula:

a) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5}+\sqrt{3}) \text{ x } (\sqrt{5}-\sqrt{3})$

b) $(\sqrt{5}-\sqrt{3}+4)(-4+\sqrt{5}+\sqrt{3})$

20. Calcula, extrayendo factores fuera del radical.

a) $\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{180}-\sqrt{20}$

b) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{72} + 3\sqrt{50} + 4\sqrt{2}$

21. El número $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:

a) $6^{1/4}$

b) $2^{1/3}$

c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$

d) 2

22. Calcula, expresando el resultado en forma de radical:

a) $\dfrac{(2^{1/3} \cdot 3^{1/3})^5}{3^3 \cdot 2^{2/5}}$

b) $\dfrac{a^{-1/2}\, a^2\, a^{2/3}}{(a^{-2}\, a^{3/2})^2}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2 b^3}{8c}}\ \sqrt[6]{\dfrac{9c}{4ab^2}}$

23. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

d) $\dfrac{2}{4-\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

NIVEL III

1. Se denomina rectángulo áureo (de oro) a aquél tal que si lo dividimos en un cuadrado y otro rectángulo, éste último es semejante al original. Halla la proporción entre los lados de un rectángulo áureo (al valor obtenido se le llama número áureo)

2. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}$

3. Calcula, racionalizando previamente:

$$\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

4. Encuentra los números capicúas comprendidos entre 400 y 800 que sean cuadrados de un número natural

5. Señala si son ciertos o falsos los siguientes enunciados:

a) El número *7/11* es irracional porque tiene una cantidad ilimitada de cifras decimales

b) La longitud de cualquier circunferencia es más de 6 veces la de su radio

c) 1,73 es una aproximación por defecto de $\sqrt{3}$

d) Todo número real es racional

e) No es posible medir con exactitud la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 8 cm. y 6 cm.

6. Demuestra que $\sqrt{11-4\sqrt{6}}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Indicación: Si dos números son iguales, ¿cómo son sus cuadrados?

7. Calcula *x* (sin calculadora)

a) $0{,}3^x = 0{,}00243$

b) $\sqrt[x]{531.441} = 27$

c) $x^6 = 15625$

8. Halla dos fracciones entre las que se encuentre el número π y que la diferencia entre ellas sea menor que 0,01

9. ¿Cuánto suman las cifras del número $10^{97}-97$?

10. ¿En qué cifra termina 2^{1997}?

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $|x| = 5$

b) $|x - 2| = 3$

c) $3\ |5 - 2x| = 8$

d) $|x| + |x - 3| = 7$

12. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el doble de su cateto menor. Si el otro cateto vale x cm. ¿Cuánto vale la hipotenusa en función de x?

13. La suma de dos números reales es 5 y la diferencia de sus cuadrados $1\text{-}2\sqrt{3}$. Calcula cuáles son esos números.

14. La superficie en m^2 de una esfera es igual numéricamente a su volumen expresado en m^3. ¿Puede ser esto posible? Si tu repuesta es afirmativa ¿Cuánto vale el radio de esa esfera?

15. Calcula el tiempo que tarda la luz solar en llegar a la Tierra.

16. En un mapa a escala 1:250.000, se advierte que el error máximo de medición puede ser del ± 0,5%. Al medir sobre él la distancia en línea recta entre dos ciudades se obtiene 4,3 cm., y se estima que en ese tramo la distancia por carretera es un 20% superior a la distancia en línea recta. Calcula entre qué valores se encuentra la distancia entre las dos ciudades por carretera.

17. En las especificaciones técnicas de una báscula se indica que la precisión es de 0,005 kg. Se ha pesado una manzana y su peso resulta ser de 227 g.

a) ¿Entre qué valores puede estar el peso real de la manzana?

b) ¿Cuál es el error relativo máximo cometido expresado en tanto por ciento?

c) Suponiendo que el peso verdadero fuese 230 g. ¿Cuál sería el error relativo cometido al dar su peso como 227 g.?

Unidad n.º 2

Polinomios.
Divisibilidad

Objetivos

– Distinguir el grado y los coeficientes de un polinomio .... (I-II-III)
– Calcular el valor numérico de un polinomio .... (I-II-III)
– Realizar sumas, restas y multiplicaciones de polinomios .... (I-II-III)
– Realizar divisiones de polinomios, ya sea por el algoritmo normal o utilizando la regla de Ruffini .... (I-II-III)
– Utilizar el teorema del resto para comprobar si un polinomio es múltiplo de otro y para hallar las raíces de un polinomio .... (II-III)
– Construir polinomios que cumplan determinadas condiciones .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Polinomios:
   1.1. Concepto de monomio y polinomio .... (I-II-III)
   1.2. Grado y coeficientes de un polinomio .... (I-II-III)
   1.3. Valor numérico de un polinomio .... (I-II-III)
2. Operaciones con polinomios:
   2.1. Suma y resta de polinomios .... (I-II-III)
   2.2. Multiplicación de polinomios .... (I-II-III)
   2.3. Productos notables .... (I-II-III)
3. División de polinomios:
   3.1. División de un polinomio entre un monomio .... (I-II-III)
   3.2. División de un polinomio entre otro .... (I-II-III)
   3.3. División exacta y división entera .... (I-II-III)
   3.4. Regla de Ruffini .... (I-II-III)
   3.5. Teorema del resto .... (II-III)
   3.6. Raíces de un polinomio .... (II-III)

Procedimientos

– Cálculo del valor numérico de cualquier polinomio .... (I-II-III)
– Realización de sumas, restas y multiplicaciones de polinomios .... (I-II-III)
– Cálculo del cuadrado de una suma, del cuadrado de una diferencia y de una suma por una diferencia .... (I-II-III)
– Utilización del algoritmo de la división para hallar cociente y resto en una división de polinomios .... (I-II-III)
– Utilización de la regla de Ruffini para dividir polinomios .... (I-II-III)
– Utilización del Teorema del resto para comprobar si una división es exacta y para hallar raíces enteras .... (II-III)
– Uso del Teorema del resto para hacer problemas de determinación de polinomios ...... (II-III)
– Construcción de polinomios que cumplan determinadas condiciones .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

- En esta unidad se completarán las operaciones con polinomios vistas en 3º con la división de un polinomio entre un monomio y con la división de polinomios. Los dos primeros epígrafes conceptuales serán un repaso de 3º.
- Por otra parte no se pretende llegar a completar la factorización de polinomios, cosa que se dejaría para 1º de Bachillerato (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales).
- En el *nivel I* nos bastaría con que el alumnado diera un buen repaso de suma, resta y multiplicación de polinomios y completara con los algoritmos básicos de la división (Algoritmo habitual y Ruffini).
- En los *niveles II y III*, además de la mecánica de las operaciones, se intentará que el alumno llegue al concepto de "raíz de un polinomio", y sepa utilizar el Teorema del resto o la regla de Ruffini para hallar raíces enteras. Quedaría todo preparado en los *niveles II y III* para que el siguiente curso se completara la factorización de polinomios.

Criterios de evaluación

– Distinguir el grado y los coeficientes de un polinomio .... (I-II-III)
– Calcular el valor numérico de un polinomio .... (I-II-III)
– Realizar sumas, restas y multiplicaciones de polinomios .... (I-II-III)
– Realizar divisiones de polinomios, ya sea por el algoritmo normal o utilizando la regla de Ruffini .... (I-II-III)
– Utilizar el teorema del resto para comprobar si un polinomio es múltiplo de otro y para hallar las raíces de un polinomio .... (II-III)
– Construir polinomios que cumplan determinadas condiciones .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Indica el grado de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 5x + 7$

b) $2x^7 + x + 1$

c) $-x + x^3 - 2x^4 + 1$

d) $x + x^2 - x^3 + 8x^8$

2. Completa la siguiente tabla:

Monomio	*Coeficiente*	*Valor numérico para x = 3*	*Valor numérico para x = -1*
$-4x$			
$5x^4$			
$-2x^2$			

3. Consideremos el polinomio $p(x) = 2x^3 - 5x + 1$

a) Indica el grado y sus coeficientes.

b) Halla p(0), p(2), p(-3) y p(-1).

4. Dados los polinomios:
$p(x) = x^2 - 2x$; $q(x) = x^3 - 3x + 1$; $r(x) = x - 1$; Calcular:

a) $p(x) + q(x)$

b) $p(x) - q(x)$

c) $p(x) + q(x) + r(x)$

d) $p(x) - \{q(x) - r(x)\}$

e) $q(x) + \{p(x) - r(x)\}$

5. Con los polinomios dados en el problema anterior, calcula:

a) $p(x) \cdot q(x)$

b) $p(x) \cdot r(x)$

c) $r(x) \cdot q(x)$

d) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$

e) $[p(x) + r(x)] \cdot q(x)$

6. Efectúa las siguientes operaciones, utilizando las fórmulas de los productos notables:

a) $(x - 3)^2$ b) $(x^2 + 7)^2$

c) $(x^2 + 5)^2$ d) $(2x^2 + x)^2$

7. Transforma las siguientes expresiones en diferencia de cuadrados:

a) $(x + 3)(x - 3)$

b) $(x - 8)(x + 8)$

c) $(2x^2 + 1)(2x^2 - 1)$

8. Calcula el cociente de las siguientes divisiones:

a) $4x^3 : 3x$ b) $(5/2)x^8 : 5x^2$

c) $3x^4 - 4x^2 + 6x : 2x$ d) $4x^6 - 2x^3 + x^2 : (3x^2)$

9. Halla un polinomio que multiplicado por $2x$ dé como resultado $4x^5 - 2x^2 + 5x$.

10. Efectúa las siguientes divisiones y comprueba que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto:

a) $(x^3 - 2x - 1) : (x^2 + 1)$ b) $(3x^4 + x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$

c) $(x^4 - 8) : (x^2 - 2)$ d) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$

11. Halla, si es posible, un polinomio que multiplicado por $x^2 + 1$ dé como resultado

$$x^4 + 3x^2 + 3$$

12. Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$ b) $(2x^4 + 3x^3 - 2x + 7) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 2x + 6) : (x + 4)$ d) $(x^3 + x - 3) : (x + [1/2])$

13. El valor numérico de $p(x) = x^3 + 2x + k$ para $x = 2$ es 14. Calcula el valor de k.

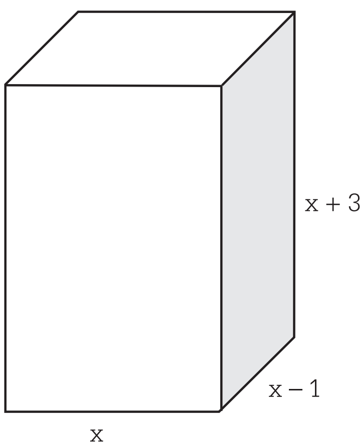
14. En una división de polinomios, el divisor es $3x^2 - 1$, el cociente, $2x - 1$ y el resto $-x + 1$. Halla el dividendo.

15. Hallar el valor del parámetro "K" para que el valor numérico de $p(x) = x^2 + Kx + 8$ en $x = 2$ sea 6.

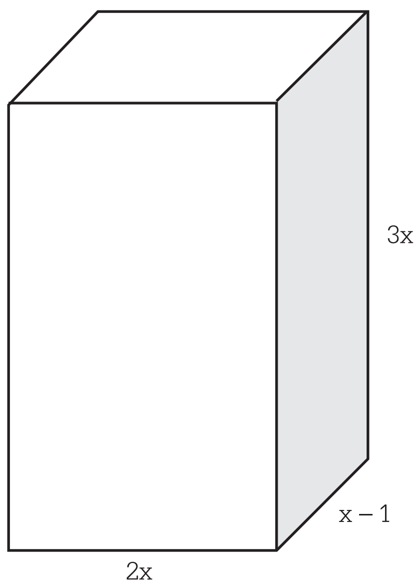
NIVEL II

1. Expresa el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos mediante un polinomio:

a)



b)



2. Escribe ejemplos de polinomios, en la indeterminada x que cumplan, si es posible, las siguientes condiciones:

a) Es de grado 8, el coeficiente del término de mayor grado es -3 y es la suma de cuatro monomios.

b) Es de grado 3, y tiene todos sus coeficientes iguales.

3. Busca el valor numérico de cada uno de los términos de la igualdad $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ para los pares de valores:

a) $x = 1,\ y = 2$

b) $x = 2,\ y = 2$

c) $x = -1,\ y = 0$

d) $x = -3,\ y = -1$

4. Dados los polinomios $p(x) = x^4 - x^2 - 2x + 1$ $q(x) = x^3 - 2$ $r(x) = 5x - 1$

Calcula:

a) $p(x) - q(x)$ b) $p(x) + 7q(x) - 2r(x)$ c) $6r(x) - 7p(x)$

5. Con los polinomios dados en el problema anterior, calcula:

a) $p(x) \cdot q(x)$

b) $p(x) \cdot r(x)$

c) $r(x) \cdot q(x)$

d) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$

e) $[p(x) - r(x)] \cdot q(x)$

6. Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x - 5y)^2$

b) $(x/6 - y/3)^2$

c) $(3x^3 + 2x^2)^2$

d) $(x + y/2)^2$

7. Transforma en diferencia de cuadrados:

a) $(3x + 1)(3x - 1)$

b) $(x^2 - y^2/2)(x^2 + y^2/2)$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x)$

8. Sin efectuar la división, comprueba si las siguientes divisiones son o no exactas. ¿Qué resultado teórico aplicas?

a) $(x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$

b) $(3x^4 + 2x^2 - 2x + 7) : (x + 2)$

c) $[(2/3)x^2 - x + 2) : (x - (1/2)]$

d) $(x^{11} - 2x^9 + 1) : (x + 1)$

9. Halla las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 2$

b) $2x^2 - 3x + 1$

c) $3x^2 - 12x + 12$
d) $(x - 3)(2x + 4)$
e) $x^2 + x + 1$

10. El polinomio $x^3 - 4x + k$ es un múltiplo de $x + 3$. ¿Cuánto vale el resto de la división? ¿Cuánto vale k?

11. Halla los valores de a y b para que la división $(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1)$ sea exacta.

12. ¿Para qué valores de x el valor numérico del polinomio $2x^2 - 3x + 3$ es igual a 5?

13. Halla el valor de K para que el polinomio $p(x) = x^3 + Kx^2 + x + 6$ sea divisible por $x - 2$.

14. El polinomio $x^2 + bx + c$ es múltiplo de $x + 1$. Además, al dividirlo por $x - 1$ y por $x - 3$ se obtiene el mismo resto. Halla a y b.

15. El polinomio $x^3 + 6x^2 + ax + b$ es divisible por $x^2 - 1$. Halla a y b.

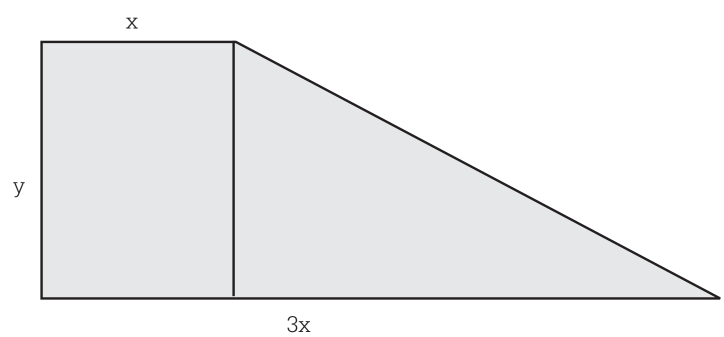
16. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que su coeficiente de mayor grado es igual a 1, que su valor numérico para $x = 3$ es 4 y que es divisible por $x + 2$.

NIVEL III

1. Dados los siguientes polinomios: $p(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 - x + 1$ $q(x) = x^4 - 3$ $r(x) = 5x^2 - 1$
Calcula:
a) $p(x) - q(x)$
b) $p(x) + 4q(x) - 3r(x)$
c) $3r(x) - 7p(x)$

2. Con los polinomios dados en el problema anterior, calcula:
a) $p(x) \cdot q(x)$
b) $p(x) \cdot r(x)$
c) $r(x) \cdot q(x)$
d) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$
e) $[p(x) - r(x)] \cdot q(x)$

3. Hallar la superficie del siguiente trapecio en función de los valores de x e y.



4. Halla un polinomio p(x) tal que p(2) = p(-1) = p(5) = 6.

5. Un polinomio de grado 3 es múltiplo de $x^2 + 1$ y de $2x - 3$. Además su coeficiente de mayor grado es igual a 7. ¿De qué polinomio se trata?

6. Razona qué le ocurre al cociente y al resto de una división de polinomios si al dividendo y al divisor se le multiplica por un mismo número. ¿Ocurre lo mismo si multiplicamos ambos por un mismo polinomio?

7. Halla los valores de a y b para que el resto de la división

$$(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1) \text{ sea } 7x + 4$$

8. Sea "n" un número natural par y "a" un número real cualquiera. Razona cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

a) $x^n - a^n$ es múltiplo de $x - a$

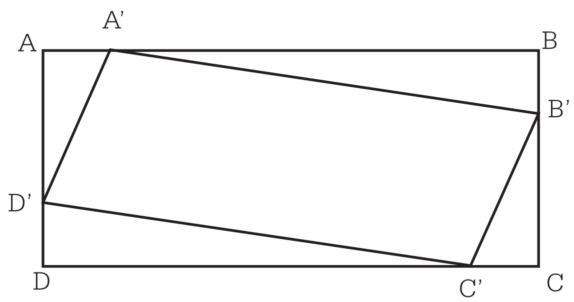
b) $x^n + a^n$ es múltiplo de $x + a$

c) $x + a$ es divisor de $x^n - a^n$

d) $x - a$ es divisor de $x^n + a^n$

9. En el rectángulo ABCD, los puntos A', B', C' y D' son tales que los segmentos AA', BB', CC' y DD' miden x.

Expresa el área del cuadrilátero A'B'C'D' mediante un polinomio de indeterminada x sabiendo que el segmento AB mide 5 cm. y el BC mide 3 cm.



10. Se sabe que la división de un polinomio p(x) por $x^2 - 2x - 3$ es exacta. Calcula el valor numérico de p(x) para $x = 3$.

11. Demuestra que el cuadrado de cualquier número es igual a la suma del cuadrado del anterior más el anterior más el propio número.

12. Comprueba si el polinomio $p(x) = (x-2)^{2n} + (x-3)^n - 1$, en el que n es un número natural par, es divisible por $(x - 2)$ y por $(x - 3)$. ¿Es divisible por $x^2 - 5x + 6$?

13. Demuestra que si "r" es una raíz del polinomio $ax^2 + bx + c$, "1/r" lo es del polinomio $cx^2 + bx + a$.

Generaliza el resultado a un polinomio cualquiera de grado n.

14. Se sabe que el polinomio $p(x)=x^3 + ax^2 + bx + c$ es divisible por $x + 1$. Además, al dividirlo por $x - 1$, el resto de la división es 6, y si se divide por $x + 2$, el resto es -6. Halla a, b y c.

Unidad n.º 3

Ecuación de 2º grado. Sistemas no lineales

Objetivos

- Resolver con corrección ecuaciones de 2º grado .... (I-II-III)
- Resolver problemas cuyo planteamiento da lugar a ecuaciones y sistemas de segundo grado . (I-II-III)
- Discutir una ecuación de segundo grado por el signo del discriminante .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales .... (II-III)
- Resolver ecuaciones de 2º grado completando cuadrados .... (II-III)
- Obtener el valor de la suma y el producto de las soluciones en función de los coeficientes . (III)
- Resolver sistemas de ecuaciones de 2º grado con dos incógnita .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Ecuación de segundo grado (repaso):
   1.1. Definición de ecuación de segundo grado .... (I-II-III)
   1.2. Resolución analítica .... (I-II-III)
2. Raíces de una ecuación de 2º grado:
   2.1. Número de soluciones .... (I-II-III)
   2.2. Suma y producto de las soluciones .... (III)
3. Ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación de 2º grado:
   3.1. Ecuaciones racionales .... (II-III)
   3.2. Ecuaciones irracionales .... (II-III)
   3.3. Ecuaciones bicuadradas .... (II-III)
   3.4. Sistemas de una ecuación lineal y otra de segundo grado .... (I-II-III)
   3.5. Sistemas de dos ecuaciones de segundo grado .... (II-III)

Procedimientos

- Resolución de ecuaciones completas e incompletas de 2º grado aplicando el método más adecuado .... (I-II-III)
- Determinación del número de soluciones de una ecuación de 2º grado a partir del signo del discriminante .... (I-II-III)
- Utilización de la ecuación de 2º grado para factorizar polinomios de segundo grado .. (II-III)
- Aplicación de las relaciones entre la suma y el producto de las raíces y los coeficientes de la ecuación de 2º grado a la resolución de distintos problemas .... (III)
- Resolución de ecuaciones de segundo grado y sistemas con una ecuación lineal y otra de segundo grado y de problemas que den lugar a ellos .... (I-II-III)
- Resolución de sistemas con dos ecuaciones de segundo grado y de problemas cuyo planteamiento dé lugar a ellas .... (II-III)
- Resolución de ecuaciones sencillas reducibles a una de segundo grado .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– Es importante que el alumno vea que al resolver ecuaciones irracionales, a veces se introducen soluciones extrañas, por lo que hay que comprobar los valores obtenidos.
– A pesar de que la factorización de polinomios no es un contenido de 4ºA (se incluirá en los contenidos del Bachillerato), puede hacerse una introducción en los niveles II y III factorizando polinomios de segundo grado a partir de las soluciones de la ecuación correspondiente mediante simple comprobación. Asimismo pueden resolverse ecuaciones racionales sencillas cuando no haya necesidad de factorizar un polinomio o cuando la factorización sea la de un polinomio de grado dos (este último caso, preferentemente en el nivel III). En estas ecuaciones será necesario comprobar que las soluciones obtenidas no anulan ningún denominador.

Criterios de evaluación

– Resolver ecuaciones de 2º grado .... (I-II-III)
– Resolver ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales, comprobando las soluciones . (II-III)
– Resolver sistemas con una ecuación lineal y otra de segundo grado .... (I-II-III)
– Resolver sistemas de 2 ecuaciones de 2º grado .... (II-III)
– Resolver problemas cuyo planteamiento da lugar a ecuaciones y sistemas de 2º grado . (I-II-III)
– Utilizar las propiedades de las raíces de la ecuación de 2º grado en la resolución de problemas... (III)

Actividades

NIVEL I

1. Resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones sin aplicar la fórmula general:

a) $x^2 - 9 = 0$
b) $2x^2+3 = 7$
c) $x(x-3) = 0$
d) $27 - x^2 = 0$
e) $3x^2 - 5x = 0$
f) $(x - 1)^2 = 0$
g) $(x+3)^2 - 9 = 0$
h) $\frac{2}{3} - 2x^2 = \frac{1}{3}$

2. Resuelve sin desarrollar:

a) $(x - 3)(x + 8) = 0$
b) $(2x - 1)(x + 6) = 0$
c) $\left(\frac{2}{3}x + 1\right)\left(3x - \frac{3}{4}\right) = 0$
d) $4(x + 2)(x - 0{,}5) = 0$
e) $65x(x - 4) = 0$
f) $7x(3x + 5) = 0$

3. Plantea ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) 3 y 4
b) 7
c) 2/3 y 0
d) 1/4 y 5/6
e) Sin solución

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 7)$
b) $(2x + 3)^2 = x(1 - 3x)$
c) $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2 + (x - 1)^2$
d) $(5x - 3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x - 1)$
e) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$
f) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

5. ¿Qué número natural es 12 unidades menor que su cuadrado?

6. Halla dos números naturales consecutivos tales que la diferencia entre su producto y su suma sea 305

7. Busca dos enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 61.

8. El área de un rectángulo es 40 cm². Determina sus lados, sabiendo que uno de ellos mide 6 cm. más que el otro.

9. Escribe una ecuación con dos soluciones distintas, otra con una y otra sin solución.

10. Halla el lado de un cuadrado tal que la suma de su área más su perímetro es igual a 252.

11. Un matrimonio tiene de cada hijo tantos nietos como hijos, Si el número total de hijos y nietos es 56, ¿cuántos hijos y nietos tienen?

12. Al añadir tres unidades a la novena parte del cuadrado de cierto número se obtiene el consecutivo de ese número. Hállalo.

13. Calcula el volumen de un hexaedro de 100 cm² de área lateral.

14. Mi hermano es cuatro años mayor que yo. Si multiplicamos nuestras edades obtenemos un número que es el cuádruplo de la suma de las edades que tendremos dentro de 10 años. ¿Cuántos años tengo?

15. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y + 3 = 3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

16. El área de un finca rectangular es 21 hm². y su perímetro, 20 hm. Calcula sus lados.

17. La diferencia de los cuadrados de dos números es 108, y uno de ellos es el doble del otro. Calcúlalos.

18. ¿Qué condición ha de cumplir una ecuación de segundo grado para que una de sus raíces sea 0? Pon un ejemplo que aclare la respuesta.

NIVEL II

1. Una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$ es 3. Halla el valor de c y la otra solución.

2. La media aritmética de dos números es 5 y su media geométrica, 4. Calcúlalos

3. Desarrolla, ordena y resuelve: $x^3 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

4. Escribe los siguientes polinomios como producto de dos de primer grado

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $4x^2 - 20x + 25$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$

d) $3x^2 - 6x - 12$

5. Calcula el valor de a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 1 = 0$ tenga por soluciones $x_1 = 3$ *y* $x_2 = -2$.

6. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{2}$

7. La diferencia entre un número y su inverso es *9/20*. Calcula dicho número.

8. Elimina denominadores y resuelve:

a) $1 + 2x = \frac{6}{x}$

b) $\frac{1}{2x+2} = \frac{2x}{x^2-1}$

c) $\frac{2x-1}{x+3} = x + 1$

d) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1} - 1$

9. Resuelve las ecuaciones:

a) $1 + \sqrt{2x+1} = x$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$

c) $2t + \sqrt{2t-1} = 1$

d) $\frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x-1} = 1$

e) $x + \sqrt{x+1} = 3$

f) $7 + 2x = 1 + x + 3 + 2\sqrt{3+x}$

10. Resuelve:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

c) $(x^2-6) \cdot (x^2 - 2) = 5x^2 - 24$

d) $(x^2 - 2)^2 = (x + 3)(x - 3)$

11. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 12 cm. y uno de los catetos mide 3 cm. Calcula el otro cateto y la hipotenusa.

12. Si el lado de un cuadrado aumenta en tres unidades, su área se dobla. Halla el valor exacto de su lado expresando el resultado simplificado.

13. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2} \\ x = 3y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ xy = 30 \end{cases}$

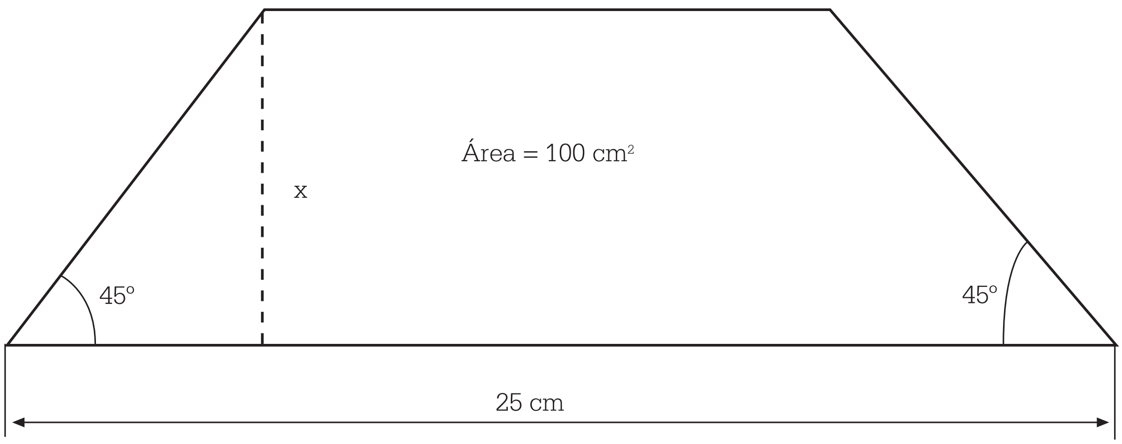
c) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 22 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 9x + 14 = 0 \\ y^2 = 16 + 4x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - y^2 + 2xy = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 8 = 0 \\ y^2 = 6y \end{cases}$

14. Calcula las dimensiones del trapecio.



15. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son tres pares consecutivos. Hállalos.

16. Los lados de un triángulo miden 18, 16 y 9 cm. Determina qué cantidad ha de restarse a los tres para que resulte un triángulo rectángulo.

17. Un padre tenía 25 años cuando nació su hijo. La media geométrica de las edades de ambos supera en 10 al número de años del hijo. Halla las edades actuales de los dos.

18. Un grupo de estudiantes alquila un piso por 70.000 ptas. al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 4.000 ptas. menos. ¿Cuántos son?

19. Una pieza rectangular de cinc es 4 cm. más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm. de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

20. Halla el triángulo equilátero cuya altura es 3 m. menor que el lado.

21. En un comercio se pueden encargar espejos enmarcados a medida. El precio es de 3.000 ptas. por m^2 de espejo y 500 ptas. por m. lineal de marco. Calcula las dimensiones del espejo que se puede comprar por 2.280 ptas.

22. Un barco cubre una línea regular entre dos puertos separados por una distancia de 300 km. Un overcraft recorre el mismo trayecto en 9 horas menos. La velocidad del overcraft excede a la del barco en 30 km/h. Calcula ambas velocidades y el tiempo que cada uno de los medios de transporte tarde en hacer el recorrido.

23. Si aumentamos la longitud de un campo rectangular en 5 metros y la anchura en 7 metros, la superficie aumenta en 830 m^2, mientras que si se disminuye la longitud en 8 metros y la anchura en 4, la superficie disminuye en 700 m^2. Calcula las dimensiones del campo.

24. Halla una fracción equivalente a *5/7*, cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1.184.

25. Un capital invertido a interés simple a cierto rédito, se ha convertido al cabo de un año en 834.000 ptas. Aumentando el capital en 100.000 ptas. y el rédito en *7/4*, al cabo del mismo tiempo el capital se habría convertido en 954.000 ptas, Calcula el capital y el rédito primero (el rédito se considera en tanto por ciento).

26. Cuando se divide un número de dos cifras por el producto de ellas, se obtiene un cociente igual a 2. Si se divide el número que se obtiene al invertir sus cifras por la suma de ellas, el cociente es 7. ¿De qué número se trata?

NIVEL III

1. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $2 - \sqrt{5}$ y $2 + \sqrt{5}$

2. Escribe una ecuación bicuadrada con soluciones:

$$2, \quad -2, \quad 1 + \sqrt{2} \text{ y } -1 - \sqrt{2}$$

3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones referidas a: $x^2 - 6x + 7 = 0$ son verdaderas y cuáles falsas? razona tus respuestas

a) $x = 1$ es una solución de esta ecuación

b) Se puede expresar como $(x + 1)(x + 7) = 0$

c) Puede escribirse en la forma $(x - 3)^2 - 2 = 0$

d) Se puede factorizar como $(x + 1)(x - 7) = 0$

e) Se puede factorizar como $(x - 1)(x - 7) = 0$

f) $x = 7$ es otra solución de esta ecuación.

4. Saca factor común un paréntesis y resuelve:

a) $(2x - 3)^2 + 5(2x - 3) = 0$

b) $(x + 2)\ (x - 2)\ x + 4\,(x - 2) = 0$

c) $(3x + 3)^3 + 3(x + 1)^2 = 0$

5. Resuelve:

a) $x^2 - \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)x + \sqrt{6} = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2x} - \sqrt{2} = 0$

6. Resuelve y comprueba las soluciones:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{1 + x}} = 2$

b) $\sqrt{x + \sqrt{x}} = 2$

c) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 4} = \sqrt{4x + 5}$

7. Resuelve la ecuación

$$\frac{4x}{x^2 - 3x + 2} - \frac{12}{x - 1} = 0$$

8. Dos grifos abiertos a la vez llenan un depósito en 90 minutos. Abiertos por separado, uno de ellos tardaría 4 horas más que el otro. Calcula cuánto tardaría cada uno por separado.

9. La altura de un trapecio isósceles mide 4 cm., la suma de las bases es 14 cm. y los lados oblicuos miden 5 cm. Calcula las bases del trapecio.

10. El número 365 que indica el número de días del año es la suma de los cuadrados de tres enteros consecutivos y, además, es suma de los cuadrados de los dos siguientes. ¿De qué números se trata?

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^6 - 10x^3 + 16 = 0$

b) $(2x^2 + 1)^2 - 5(2x^2 - 1) + 6 = 0$

c) $x^8 - x^4 - 2 = 0$

12. Un alumno dice que toda ecuación general de segundo grado cuyo término independiente es negativo tiene raíces reales. ¿Es cierto?

13. Halla dos números cuya suma, producto y cociente sean iguales entre sí.

14. La suma de las raíces de la ecuación $x^2 - (\mathrm{a} + 2)x + \mathrm{b} = 0$ es -5, y su diferencia 7. Halla a y b.

15. Dada la ecuación $x^2+\mathrm{b}x+1=0$ averigua los valores de b para los que:

a) No hay solución.

b) Hay solución única.

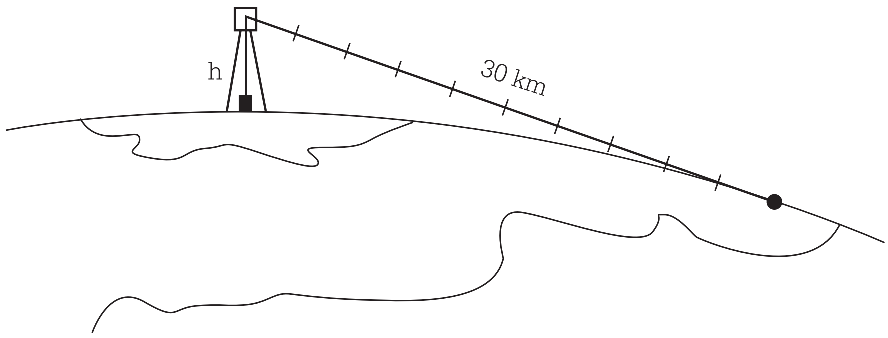
c) Hay dos soluciones negativas.

d) Hay dos soluciones positivas.

e) Hay dos soluciones de distinto signo.

16. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 6 lados? ¿Y uno de n lados?
Sabiendo que el número de diagonales es 28 ¿Cuántos lados tiene el polígono?

17. ¿Cuál es la altura mínima de un faro, sobre la superficie del mar, de modo que su luz se vea desde P? (Radio de la Tierra: 6.360 km.).



18. Las dos cifras de un número suman 11 y el producto de dicho número por el que se obtiene de invertir sus cifras es 3.154. Halla el número.

Unidad n.º 4

Inecuaciones y sistemas de primer grado

Objetivos

- Distinguir una desigualdad de una inecuación .... (I-II-III)
- Resolver algebraicamente inecuaciones y sistemas lineales con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones lineales con una incógnita .... (II-III)
- Plantear y resolver problemas mediante inecuaciones y sistemas lineales con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones y sistemas lineales con dos incógnitas .... (II-III)
- Plantear y resolver problemas mediante las inecuaciones del punto anterior .... (III)

Contenidos

Conceptos

1. Desigualdades e inecuaciones:
   - 1.1. Concepto de desigualdad e inecuación .... (I-II-III)
   - 1.2. Solución de una inecuación .... (I-II-III)
   - 1.3. Propiedades de las desigualdades .... (I-II-III)
   - 1.4. Inecuaciones equivalentes .... (II-III)
2. Inecuaciones y sistemas de primer grado con una incógnita:
   - 2.1. Solución de una inecuación de primer grado con una incógnita .... (I-II-III)
   - 2.2. Solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita ..... (I-II-III)
3. Inecuaciones y sistemas de primer grado con dos incógnitas:
   - 3.1. Soluciones de una inecuación de primer grado con dos incógnitas .... (II-III)
   - 3.2. Soluciones de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas . (II-III)

Procedimientos

- Comprobación de si un número es solución de una inecuación o sistema de inecuaciones con una incógnita .... (I-II-III)
- Comprobación de si un par de números es solución de una inecuación o de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas .... (I-II-III)
- Resolución algebraica de una inecuación lineal con una incógnita y representación de la solución en la recta .... (I-II-III)
- Resolución algebraica de un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita y representación de la solución en la recta .... (I-II-III)
- Resolución gráfica de inecuaciones de primer grado con una incógnita .... (II-III)
- Resolución gráfica de una inecuación lineal con dos incógnitas .... (II-III)
- Resolución gráfica de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas .... (II-III)
- Planteamiento y resolución de problemas mediante inecuaciones y sistemas lineales de una incógnita .... (I-II-III)
- Planteamiento y resolución de problemas mediante inecuaciones o sistemas de primer grado con dos incógnitas .... (III)

Orientaciones metodológicas

- En el *nivel I* se trataría de completar las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones con estas otras expresiones: Las inecuaciones. Conceptualmente se exigiría comprender qué es la solución de una inecuación con una incógnita y se enseñaría el procedimiento para la resolución de una inecuación y de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita. Bastaría aquí resolver algún problema sencillo.
- En los *niveles II y III* se insistiría más en aspectos conceptuales y formales. Además de la mecánica de la resolución de ecuaciones y sistemas se propondrán problemas de dificultad variable que puedan resolverse mediante inecuaciones y sistemas.
- En el *nivel III* se puede intentar demostrar alguna desigualdad con el rigor adecuado.
- *Nota*: Si se considera adecuado, las inecuaciones y sistemas lineales con dos incógnitas, así como los problemas asociados se pueden dejar para 1º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

Criterios de evaluación

- Distinguir una desigualdad de una inecuación .... (I-II-III)
- Resolver algebraicamente inecuaciones y sistemas lineales con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones lineales con una incógnita .... (II-III)
- Plantear y resolver problemas mediante de inecuaciones y sistemas lineales con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones y sistemas lineales con dos incógnitas .... (II-III)
- Plantear y resolver problemas mediante las inecuaciones del punto anterior .... (III)

Actividades

NIVEL I

1. Indica cuáles de los siguientes números son solución de la siguiente inecuación:

$$2x - 4 > \frac{x}{2} + 3$$

a) 2 b) -3 c) -6 d) 7 e) 2/3

2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones, especificando claramente el significado de la incógnita:

a) Pedro tiene menos de 15 años.

b) Ana tiene más de 750 ptas. y menos de 1200.

c) Dentro de tres años tendré más de 18 años.

d) El triple de un número más ocho unidades es mayor que 50.

3. Dada la inecuación

$$\frac{x}{3} + 2 < 2x - \frac{1}{2},$$

indica la inecuación resultante al efectuarle las siguientes transformaciones:

a) Sumar a los dos miembros 3 unidades.

b) Restar a los dos miembros $3x$.

c) Multiplicar a los dos miembros por -6.

d) Sumar a los dos miembros -2.

e) Multiplicar a los dos miembros por 6.

4. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $x - 3$ es positivo, entonces $x > 3$.

b) Si $3x < 3y$, entonces $x < y$.

c) Si $-5x > 5y$, entonces $x > y$.

5. Completa las siguientes frases:

a) Si el lado de un cuadrado es menor que 6 cm., su perímetro es menor que ....

b) Si el radio de un círculo es mayor que 8 cm., su área es mayor que ....

c) Si el lado de un cubo es menor que 5 m., su volumen en menor que ....

6. Representa gráficamente en la recta real los números que verifican las siguientes desigualdades:

a) $x < 5$ b) $x > -3$ c) $2 < x < 4$ d) $x + 1 > 2$

7. Indica a qué inecuación corresponde cada una de los conjuntos solución siguientes.

a) 

b) 

8. Dada la inecuación $3x + 2 < 8x - 15$, escribe la inecuación resultante de sumar a los dos miembros:

a) 5 b) -3 c) $6x$ d) $-7x$

9. Dada la inecuación $2x + 1 \geq 7x - 5$, escribe la inecuación resultante de multiplicar sus dos miembros por:

a) 3 b) -2 c) 4 d) -5

10. Resuelve las siguientes inecuaciones. Expresa la solución en forma de intervalo y represéntala gráficamente en la recta real:

a) $3x - 2 < 8x - 1$

b) $2\,(x - 3) > 5\,(3x - 2) + 3x$

c) $\dfrac{6x - 2}{3} > \dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{1 - 2x}{9} > 1 - \dfrac{x - 4}{6}$

e) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{6} > 2 - \dfrac{x}{3}$

f) $\dfrac{2x - 4}{6} - \dfrac{3x + 1}{3} \leq \dfrac{2x - 5}{12} - 3x$

11. Comprueba cuáles de los siguientes números son solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 1 < x + 3 \\ 2(x + 2) \geq x + 5 \end{cases}$$

a) 0 b) 6 c) 1 d) 4 e) 9 f) -5 g) -4

12. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 4 > 5 \\ 2x + 1 < 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 7 \\ x + 1 > 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x - 1) + x > 7 \\ 2x - 7 > 9 \end{cases}$

13. Con 2.400 ptas. puedo comprar 4 discos, pero no me llega para comprar 5. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de un disco?

14. Aunque al doble de la edad de mi hermano mayor le sumásemos 12 años, obtendríamos un número menor de 50. ¿Cuál es la edad máxima de mi hermano?

15. La suma de tres números naturales consecutivos es inferior a 12. ¿Qué números pueden ser?

NIVEL II

1. Resuelve gráficamente las inecuaciones:

a) $3x - 2 > 0$ b) $-4x + 8 < 0$ c) $2x - 1 < -x + 5$

2. Me bastan con 3.500 pts. para comprar 6 libros, pero con 7.000 pts. no me llega para comprar 13. ¿Cuánto puede costar cada libro?

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x| < 3$ b) $|x - 1| < 5$ c) $|2x + 3| < 4$

4. Se ha medido un campo rectangular con un error menor que un metro. Los valores de los lados, x e y, cumplen $70 < x < 71$ y $47 < y < 48$ (en metros). Determina entre qué valores está el perímetro y el área.

5. ¿Cuáles son los números cuyo triple no sobrepasa su doble en más de 20 unidades?

6. Un ciclista recorre 50 Km. manteniendo una velocidad entre 25 y 30 Km/h. ¿Entre qué valores está comprendido el tiempo que invierte?

7. Un vendedor de enciclopedias de cierta empresa A tiene un sueldo fijo de 60.000 ptas. mensuales y una comisión de 5.000 ptas. por cada enciclopedia vendida. Otra empresa B paga una comisión de 8.000 ptas. por enciclopedia vendida, pero el sueldo fijo que ofrece es de 30.000 ptas. al mes.

¿Cuántas enciclopedias debe vender el de la empresa A para obtener una ganancia mayor que el de la de B?

8. Un alumno de 4º de la ESO ha realizado dos exámenes de Matemáticas obteniendo calificaciones respectivas de 4,5 y 5,7 puntos. ¿Cuánto ha de sacar como mínimo en el tercero para aprobar, si la nota final es la media aritmética de las tres notas? ¿Y si el primer examen cuenta un 15%, el segundo un 35% y el tercero un 50%?

9. Entre los triángulos isósceles de lado desigual igual a 20 cm., ¿cuáles tienen perímetro inferior a 200 cm?

10. Ángel dice: “El triple de mi edad más tres años es mayor que el doble de mi edad más 18 años”. ¿Qué edad tiene Ángel como mínimo?

11. Un padre tiene 33 años más que su hijo y el abuelo 33 años más que el padre. Hace tres años, sus edades sumaban menos de un siglo. ¿Qué edad puede tener cada uno?

12. Para comprar un regalo, Iván ha ido reuniendo monedas de 100 y de 200 pts., juntando en total 20 monedas. El regalo cuesta más de 3.200 pts. y menos de 3600 pts. ¿Qué número de monedas de 200 pts. puede tener?

13. Halla dos fracciones de la forma $1/n$ y $1/n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{9}{188} < \frac{1}{n}$$

14. Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $x - y < 7$ b) $3x + 2y > 6$ c) $-3x + y \geq 7$ d) $y < 5$

15. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y < 3 \\ 2x + 4y \geq 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ 2x + 4y > 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - 3y < 8 \end{cases}$

16. El año pasado, el doble de mi edad era mayor que dicha edad más 13 años. Dentro de tres años, será inferior a la mitad de la actual más 11 años. ¿Qué edad tengo?

NIVEL III

1. Demuestra que un polinomio de segundo grado con sus tres coeficientes iguales, no se puede factorizar.

2. Un padre y su hijo menor se llevan 30 años. Determina en qué periodo de sus vidas la edad del padre excede en más de 10 años al doble de la edad del hijo.

3. ¿Qué número natural puede añadirse al numerador y al denominador de la fracción *2/5* para obtener una nueva comprendida entre *1/2* y *3/4*?

4. Entre todos los triángulos isósceles de lado desigual igual a 10 cm. ¿cuáles tienen el área mayor que 100 cm^2?

5. Las dimensiones de una clase rectangular se han medido con un error menor que 1 dm. Los valores para las longitudes a y b son: 100 dm. $\leq a \leq$ 101 dm.

64 dm. $\leq b \leq$ 65 dm.

a) ¿Entre qué números está comprendido el perímetro?

b) ¿Entre qué números está comprendida la superficie?

6. Razona cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas:

a) Un número positivo es siempre mayor que su opuesto.

b) Si $x > 1$ entonces $x^2 > x$.

c) Si $x > 100$ e $y < 1$, entonces

7. Tres pueblos A, B y C, situados en una planicie forman un triángulo y se quieren unir por carreteras rectas. La distancia entre los pueblos A y B es de 10 km. ¿Cuánto medirá como mínimo la carretera que una los tres pueblos?

8. Razona si son equivalentes las siguientes inecuaciones:

a) $x^2(x-2) > 0$ b) $x - 2 > 0$

9. Para hallar aproximadamente la altura de un tubo cilíndrico se procede de la siguiente manera:

- Se llena con pastillas de 3,6 mm. de espesor y caben 15 pero no 16.
- Se llena con pastillas de 4,2 mm. de grosor y caben 13 pero no 14.
- Se llena con pastillas de 5,6 mm. y caben 10 pero no 11.

Halla el intervalo más pequeño al que puede pertenecer el número que nos da la altura del tubo.

10. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} |x| < 3 \\ |y| < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x - y| < 2 \\ x > 0 \end{cases}$

11. En una fábrica de automóviles se construyen coches utilitarios y de lujo. La factoría está dividida en dos salas: una de montaje y otra de acabado. Los requerimientos de trabajo vienen en la siguiente tabla, así como las horas semanales disponibles en cada una:

	Montaje	*Acabado*
Utilitario	3 horas	2 horas
Lujo	4 horas	3 horas
Disponible	150 h.	120 h.

Si llamamos x al número de utilitarios e y al número de coches de lujo fabricados, expresa las condiciones del cuadro mediante inecuaciones y determina la región solución.

12. En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas a partir de grandes piezas de madera. Las sillas grandes necesitan 4 m^2 de madera y las pequeñas 3 m^2.

El fabricante necesita construir al menos 3 sillas grandes y como mínimo el doble de pequeñas que de grandes. La cantidad total de madera disponible es de 60 m^2.

Sea x el número de sillas grandes e y el de pequeñas que se fabrican.

Plantea el sistema de inecuaciones al que dan lugar las restricciones del problema y representa la región.

13. Resuelve las siguientes inecuaciones:

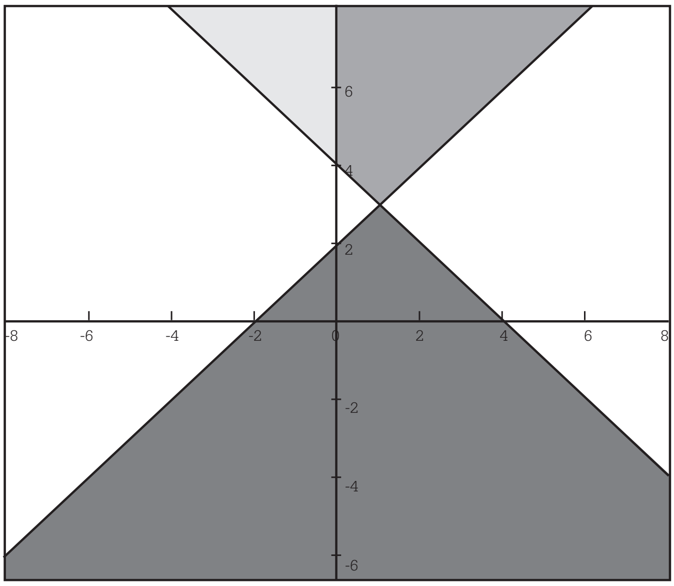
a) $(x - 2)\,(x + 5) > 0$ b) $\dfrac{x + 2}{3x - 1} \leq 0$

14. Determina qué valores de K hacen que la ecuación de segundo grado

$$Kx^2 + (2K - 1)x + (K + 1) = 0$$

tenga dos soluciones reales distintas.

15. Cada una de las tres regiones sombreadas del plano corresponde a la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Indica de cuál en cada caso.



Unidad n.º 5

Vectores.
Movimientos en el plano.
Semejanza

Objetivos

- Definir con precisión los movimientos: traslaciones, giros y simetrías y reconocer sus propiedades ..... (I-II-III)
- Reconocer los elementos que quedan invariantes en cada movimiento ..... (I-II-III)
- Conocer y aplicar el teorema de Thales ..... (I-II-III)
- Reconocer dos figuras semejantes y saber a qué se denomina razón de semejanza ..... (I-II-III)
- Saber manejar las escalas ..... (I-II-III)
- Resolver problemas de semejanza ..... (I-II-III)
- Descubrir en la naturaleza y en el arte ciertas transformaciones geométricas y cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas ..... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Traslaciones. Vector de traslación:
   - 1.1. Vector fijo ..... (I-II-III)
   - 1.2. Características de un vector fijo ..... (I-II-III)
   - 1.3. Equipolencia de vectores. Vector libre ..... (I-II-III)
   - 1.4. Operaciones con vectores e interpretación gráfica ..... (II-III)
   - 1.5. Vector de traslación ..... (I-II-III)
   - 1.6. Traslación de figuras en el plano ..... (I-II-III)
2. Giro. Centro y ángulo orientado:
   - 2.1. Ángulo orientado ..... (I-II-III)
   - 2.2. Centro y amplitud de giro ..... (I-II-III)
   - 2.3. Definición de simetría central. Relación con los giros ..... (I-II-III)
3. Simetrías axiales. Eje de simetría. Composición de movimientos:
   - 3.1. Simetría axial. Eje de simetría ..... (I-II-III)
   - 3.2. Composición de movimientos ..... (II-III)
4. Semejanza:
   - 4.1. Teorema de Thales ..... (I-II-III)
   - 4.2. Triángulos semejantes ..... (I-II-III)
   - 4.3. Razón de semejanza ..... (I-II-III)
   - 4.4. Razón de perímetros, áreas, volúmenes ..... (II-III)
   - 4.5. Escalas ..... (I-II-III)
5. Teselación del plano:
   - 5.1. Definición de teselación ..... (II-III)
   - 5.2. Condiciones que debe cumplir un polígono para la teselación del plano ..... (II-III)
   - 5.3. Teselación del plano con polígonos regulares ..... (II-III)
   - 5.4. Teselación del plano con polígonos irregulares. Condiciones que la hacen posible . (II-III)
   - 5.5. Frisos y mosaicos ..... (II-III)

Procedimientos

- Dibujo de vectores equipolentes ..... (I-II-III)
- Análisis de las propiedades comunes de la figura que se obtiene mediante un movimiento y la figura inicial ..... (I-II-III)

- Reconocimiento de que una figura se obtiene de otra mediante un movimiento, indicando los elementos característicos del mismo .... (I-II-III)
- Realización de giros de centro 0 y amplitud dada de figuras geométricas sencillas ...... (I-II-III)
- Obtención de una figura a partir de otra mediante la composición de dos movimientos (II-III)
- Estudio de recubrimientos del plano que parecen en el arte y la naturaleza .... (II-III)
- Obtención de coordenadas de puntos trasladados .... (I-II-III)
- Obtención de las coordenadas de un punto homólogo a través de un giro de centro O y amplitudes sencillas .... (II-III)
- Obtención de figuras simétricas respecto de un eje .... (I-II-III)
- Estudio de la diferentes simetrías que aparecen en figuras dadas .... (I-II-III)
- Cálculo de las coordenadas del simétrico de un punto respecto a ejes horizontales y verticales (I-II-III)
- Construcción de frisos y mosaicos .... (II-III)
- Identificación de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza en un conjunto dado de figuras .... (I-II-III)
- Cálculo de la distancia aproximada entre dos puntos teniendo un mapa con una escala determinada .... (I-II-III)
- Estudio de recubrimientos del plano que parecen en el arte y la naturaleza .... (II-III)
- Identificación del elemento mínimo de un mosaico .... (II-III)
- Construcción de frisos y mosaicos a partir del diseño de un elemento mínimo .... (II-III)
- Construcción de frisos y mosaicos en el plano a partir de figuras dadas .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

- En esta unidad trataremos de que en todas las actividades hagan un dibujo, aunque luego los de mejor nivel puedan generalizar resultados.
- En el cálculo de coordenadas, en los giros sólo utilizaremos ángulos sencillos y en las simetrías axiales, ejes paralelos a los de coordenadas.

Criterios de evaluación

- Dibujar la transformada de una figura sencilla mediante movimientos .... (I-II-III)
- Identificar el movimiento que transforma una figura en otra y describir sus elementos básicos .... (II-III)
- Utilizar los movimientos para la resolución de problemas geométricos .... (II-III)
- Utilizar los conceptos y propiedades de los movimientos para comprender las relaciones que existen en una figura y su utilidad en el mundo de la Industria y el Arte .... (II-III)
- Calcular las coordenadas de puntos homólogos mediante traslaciones, giros, simetrías, etc. (I-II-III)
- Construir mosaicos mediante el diseño de un elemento mínimo .... (II-III)
- Obtener figuras a partir de otras mediante composición de movimientos .... (II-III)
- Dada una figura y su trasformada, reconocer los movimientos que han originado la transformación .... (II-III)
- Construir mosaicos mediante el diseño de un elemento mínimo .... (II-III)

Actividades

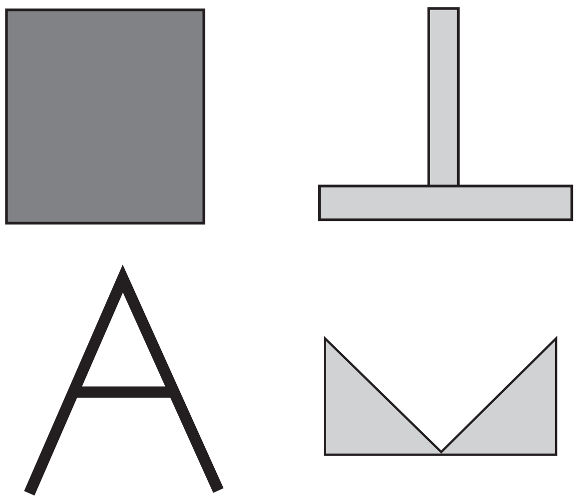
NIVEL I

1. Si al triángulo ABC, cuyos vértices son A (3, 2), B (5, 4) y C (7, 1), se la aplica la traslación de vector $\vec{V}$ (-5, 1) y se obtiene un triángulo A'B'C', ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo A'B'C'?

2. Dado el triángulo A (2, 1) B (5, 1) y C (2,6). Halla el simétrico respecto del eje de abscisas y dibuja la situación.

3. Halla las coordenadas de los vértices del paralelogramo simétrico del A (-8, -1) B (C, -3) C (-2, -3) y D (-4, -1) respecto del eje de ordenadas

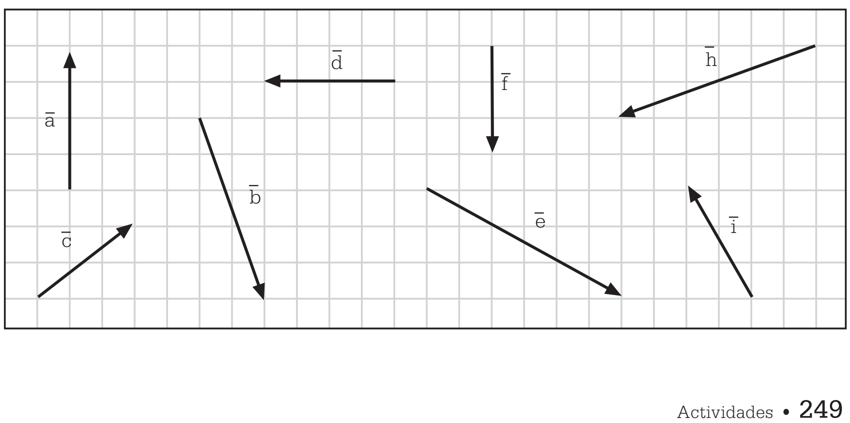
4. Encuentra todos los ejes de simetría de las siguientes figuras.



5. Mediante una traslación de vector $\vec{v}$ el punto A (2, -1) se transforma en el punto A' (4, 2). ¿Cuáles serán las coordenadas del punto B' transformado del B (-3, 2)?

a) (-5, -1)
b) (-1, 5)
c) (-1, -1)

6. Escribe las componentes de los vectores:



7. a) Representa en el plano los siguientes vectores:

$$\vec{a} = (4, 1) \quad \vec{b} = (2, -3) \quad \vec{c} = (-5, 2)$$
$$\vec{d} = (-3, 0) \quad \vec{e} = (0, 4) \quad \vec{f} = (-2, -3)$$

b) Calcula las componentes y representa los vectores:

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{v} = \vec{c} + \vec{d} \qquad \vec{w} = \vec{f} - \vec{d} + \vec{e}$$

8. a) Construye el triángulo A (2, 1) B (5, 1) y C (5, 3)

b) Dibuja el simétrico A'B'C' respecto del origen y calcula las coordenadas de A', B' y C'

9. Dado el cuadrilátero de vértices A (1, 2), B (5, 1), C (6, 5) y D (2, 4), hallar las coordenadas de su simétrico respecto:

a) del eje de ordenadas;

b) del eje de abscisas;

c) del origen.

10. En una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 1)$ se sabe que el transformado del punto C es el punto C' (7, 4). Hallar las coordenadas del punto C.

11. ¿Cuáles son las componentes del vector guía de una traslación que hace corresponder al punto A (1, 2) el punto A' (12, 8)?

12. Dados los puntos A (2, 5), B (-1, 4), C (-5, 6) y D (-2, -7), halla las componentes de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{CD}$, $\vec{DC}$, ¿Cómo son los vectores $\vec{AB}$, y $\vec{BA}$? ¿Y los vectores $\vec{CD}$, $\vec{DC}$?

13. En una traslación de vectores guía $\vec{v} = (5, 4)$, ¿cuáles serán las coordenadas del punto P sabiendo que P' tiene por coordenadas (6, -7)?

14. En un mapa de España figura la escala 1:2 000 000. ¿Cuál es la distancia entre dos ciudades que en el mapa distan 6 cm? ¿Y entre las que el mapa están a 4, 5, 7 y 8 cm?

15. Una traslación lleva el origen de coordenadas al punto A (4, 3). ¿Cuál es el vector guía de la traslación?

16. En una cuadricula, hallar los homólogos de los puntos A (3, 2) y B (6, 5) en un giro de centro el origen y ángulo 90º. ¿Qué coordenadas tienen los puntos homólogos?

17. Son las cuatro de la tarde. ¿Qué ángulo de giro ha recorrido el horario desde las doce del día? ¿Y el minutero?

18. Dibuja un triángulo equilátero ABC. ¿Cuál es el ángulo de giro con centro en A que transforme B en C?

19. Si realizas tres giros consecutivos de centro el punto O y ángulo 45º, 30º y 60º, ¿cuál sería el ángulo de un único giro que produjese el mismo efecto?

20. De las siguientes figuras, di cuáles tienen centro de simetría:

a) Un triángulo equilátero.
b) Un triángulo isósceles.
c) Un cuadrado.
d) Un rectángulo.
e) Un pentágono regular.
f) Una circunferencia.

21. Di cuántos ejes de simetría tienen las figuras propuestas en el ejercicio anterior.

22. El lado de un hexágono mide 24 cm. ¿Cuál es el lado de otro hexágono semejante al anterior y menor que él cuya razón de semejanza es *1/4*?

23. La escala de un mapa es 1:100.000. Si un camino tiene en él una longitud de 3,5 cm, ¿cuál es la longitud de ese camino en la realidad?

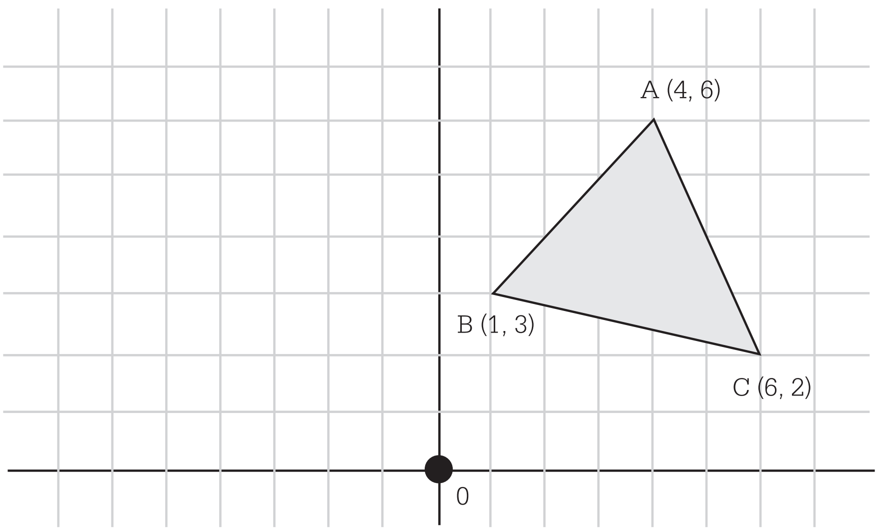
NIVEL II

1. ¿Qué giro ha efectuado la aguja grande de un reloj en 50 minutos? ¿Y la aguja pequeña?

2. Encuentra todos los giros que transforman un triángulo equilátero en sí mismo.

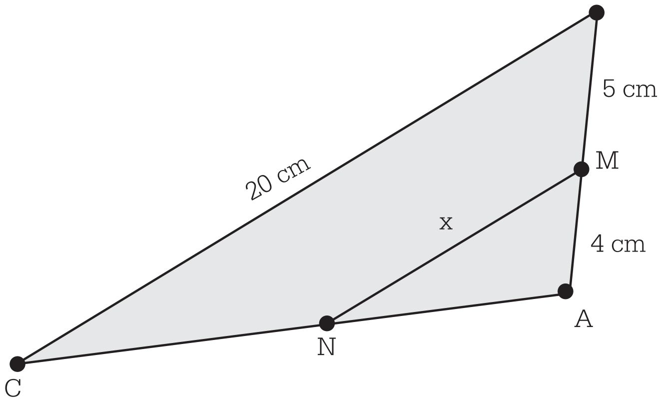
3. Haz lo mismo que en el problema anterior con un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un pentágono regular y un hexágono regular.

4. Encuentra los transformados de los vértices del triangulo ABC mediante una simetría de centro P (2, 3).



5. La letra A es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por su vértice. Encuentra todas las letras MAYÚSCULAS que sean simétricas respecto a algún eje.

6. Observa el triángulo y calcula los valores indicados con las letras:



7. Localiza el centro y el ángulo del giro que transforma un cartabón en el otro.

8. Halla las coordenadas de los transformados del punto A (2, 4) mediante los siguientes giros, todos ellos con centro el origen de coordenadas:

a) 90º en sentido positivo.

b) 90º en sentido negativo.

c) 180º

d) 270º

9. El triángulo ABC, de vértices A(3, 2), B(5, 4) y C(7, 1), se ha trasladado según el vector V(5, 2) y así se obtiene el triángulo A'B'C'.

a) Aplica el triángulo A'B'C' una traslación según el vector guía $\vec{U} = (-6, 5)$.

b) ¿Qué vector de traslación hay que aplicar al triángulo ABC para obtener el triángulo que resulta en el apartado a)?

10. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la simetría central que transforma el punto A (3, 2) en A' (2, -1)?

11. ¿Cuál es el transformado del punto A (2, 4) al aplicarle sucesivamente una simetría central de centro O (1, 2) y otra de centro O' (-2, 3)?

a) (-4, 6) b) (-6, 2) c) (0, 0)

12. Dibuja un rombo y, tomando como centro de giro uno de los vértices, halla su homólogo por medio de un giro de:

a) α = 60º

b) α = 90º

c) α = -135º

d) α = 135º

e) α = 180º

f) α = -180º

13. Dibuja un triángulo rectángulo BAC cuyos catetos midan tres y cuatro unidades. Halla su simétrico tomando como centro:

a) El vértice A (ángulo recto).

b) El vértice B

c) El vértice C

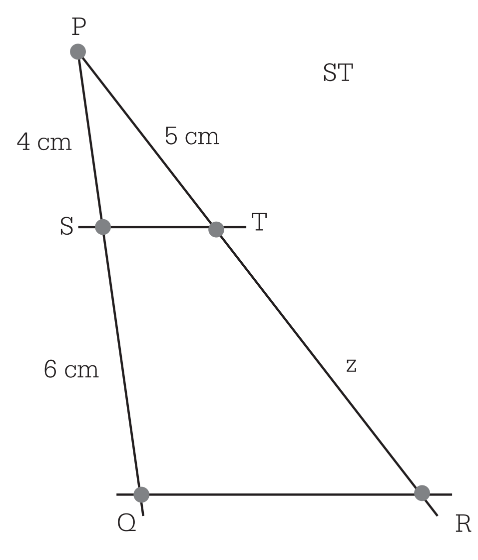
14. Halla el simétrico del triángulo anterior tomando como eje de simetría:

a) La hipotenusa

b) El cateto mayor

15. Las coordenadas de tres vértices de un cuadrado son A (0, 0), B (5, 5) y C (10, 0). Dibuja la figura y calcula las coordenadas del cuarto vértice. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de simetría?

16. Calcular el valor de z:



17. Dibuja un triángulo cualquiera ABC y marca los puntos A', B' y C', puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente.

a) Escribe dos vectores iguales a $\overrightarrow{A'B'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$ y a $\overrightarrow{C'A'}$.

b) Para un cierto valor de k, la igualdad $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{C'B'}$ es verdadera. ¿Para cuál?

18. Juan mide 175 cm. y su sombra 2 m. En el mismo instante la sombra de la torre de la iglesia es de 30 m. ¿Qué altura tiene la torre de la iglesia?

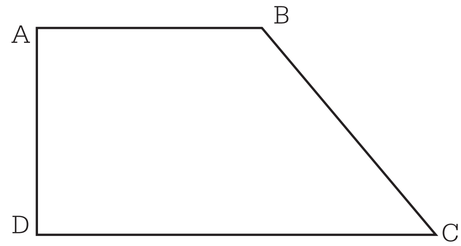
19. Dos lados homólogos de dos polígonos semejantes miden respectivamente 15 y 25 cm. El área del primero es de 150 cm^2. Calcula el área del segundo.

20. Halla los puntos medios de los segmentos:

a) AB A (-5, 3) B (5, 7) b) CD C (3, -4) D (2, -2)

21. De un segmento AB se conoce A (-4, -5) y el punto medio M (-3, 2). Calcula las coordenadas de B.

22. En el trapecio rectángulo ABCD decir si se verifica:



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

23. Dado el segmento de extremos A (2, 3) y B (5, 7), halla el segmento transformado A'B' en una simetría de eje X. A continuación se le aplica una simetría de eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del segmento transformado en las dos simetrías sucesivas?

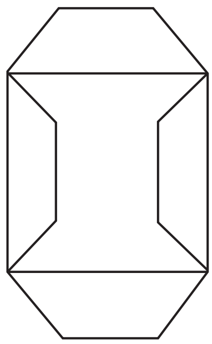
24. En un mapa de España figura la escala 1:2.000.000. ¿Cuál es la distancia entre dos ciudades que en el mapa distan 6 cm? ¿Y entre las que el mapa están a 4, 5, 7 y 8 cm?

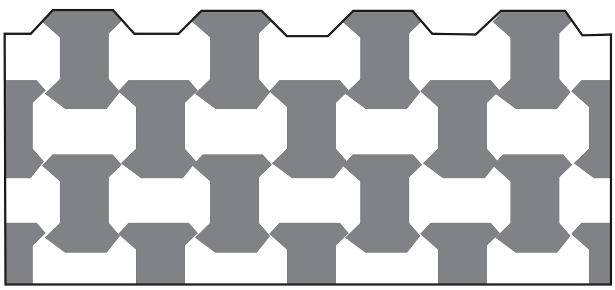
25. Los lados de un cuadrilátero miden 4, 5, 6 y 7 cm. Calcula los lados de otro cuadrilátero semejante al anterior si el menor de sus lados mide 12 cm.

26. Dos segmentos de 22 y 33 cm. son cortados por rectas paralelas que determinan, en el primero, segmentos de 6, 7 y 9 cm., respectivamente. ¿Qué segmentos determinan sobre el segundo segmento?

27. Investiga qué polígonos regulares teselan el plano.

28. A partir de polígonos que teselan el plano, podemos construir baldosas que forman un mosaico. Por ejemplo, a partir de un cuadrado:



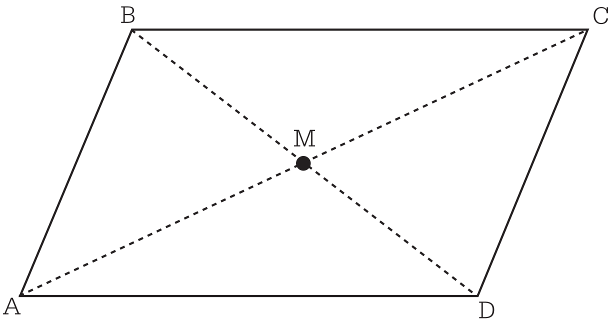


Construye distintos mosaicos con esta técnica.

NIVEL III

1. La figura es un paralelogramo. Decir si se verifican las siguientes igualdades

   a) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
   b) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC}$
   c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
   d) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MC}$
   e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$
   f) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$
   g) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CM}$



2. Responde SÍ o NO:
   a) Dos triángulos equiláteros no son semejantes.
   b) Dos triángulos rectángulos cualesquiera son semejantes.
   c) Un triángulo T con ángulos de 80º y 90º es semejantes.
   d) Dos rectángulos cualesquiera son semejantes.
   e) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º es semejante a otro triángulo rectángulo con un ángulo de 60º.

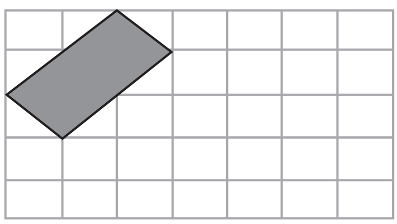
3. Dibuja un paralelogramo ABCD y llama O a su centro. Marca los puntos X, Y, Z, T de forma que:

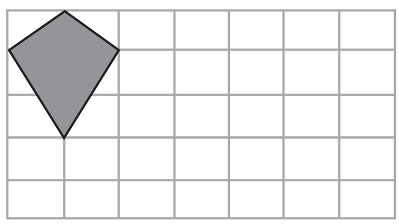
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OX}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OY}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OZ}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DT}$

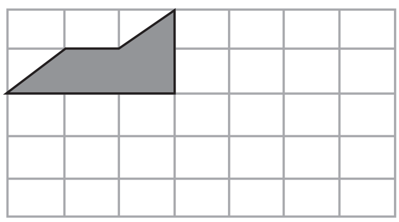
¿De qué tipo es el cuadrilátero XZYT?

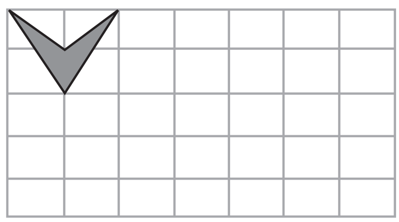
4. Los puntos O (0, 0), B (6, 8) y P (6, 0) están en una circunferencia. Se sabe que O y B son los extremos de un diámetro.
   a) Halla las coordenadas del punto A diametralmente opuesto a P.
   b) ¿Cómo son los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{PB}$?
   c) Calcula la longitud del radio.

5. Forma mosaicos utilizando como figura que se repite las que están dibujadas en cada caso.

1


2


3


4


6. Observa cada uno de los mosaicos que has construido en la actividad anterior.

a) Señala en el mosaico 1 y en el mosaico 2 dos figuras A y A' tal que la figura A' se obtenga mediante un giro de 180º de la figura A. ¿Cuál es en cada caso el centro de giro?

b) Señala en el mosaico 3 y en el mosaico 4 dos figuras A y A' tal que la figura A' se obtenga mediante una traslación de la figura A. ¿Cuál es en cada caso el vector de traslación?

7. El plano de un jardín está formado por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros construidos sobre los lados del cuadrado. La escala es 1:200 y el lado del cuadrado mide 4 cm. Calcula:

a) La distancia real entre dos vértices exteriores de los triángulos.

b) El área real del jardín.

8. Al aplicar un movimiento a un triángulo de vértices A(3, 6), B(6, 4) y C(3, 8) se obtiene otro triángulo de vértices A' (-3, -6), B' (-6, -4), C' (-3, -8). ¿Qué tipo de movimiento se le ha aplicado?

a) Una traslación

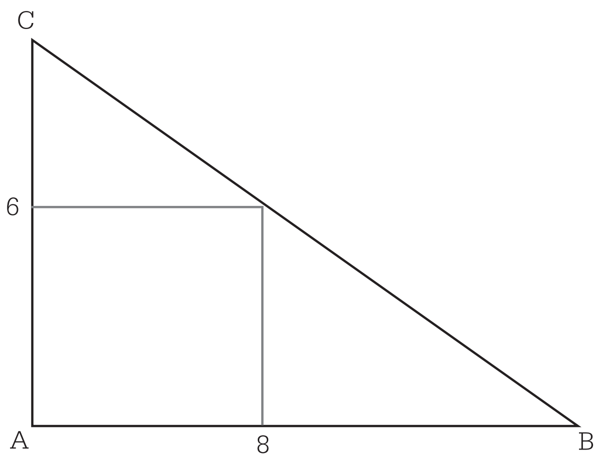
b) Un giro

c) Una simetría axial

d) Una homotecia de razón k = -1

9. La base y la altura de un triángulo miden, 6 y 12 centímetros respectivamente. Un triángulo semejante a éste tiene un área 16 veces mayor. Calcula la base y la altura homólogas.

10. En un triángulo ABC rectángulo en A, cuyos catetos miden 6 y 8 cm. se inscribe un cuadrado como indica la figura. Calcula el lado del cuadrado.



11. En los muelles del Sena, en París, venden reproducciones de la Torre Eiffel que pesan 1,5 Kg. y están elaboradas con el mismo material que la auténtica.

Un folleto turístico indica que la Torre tiene 321 m. de altura y pesa 7 millones de kilos.

¿Cuánto medirá la altura de la reproducción?

12. Una lata cilíndrica de fabada, que se anuncia para dos raciones, tiene un radio de 5 cm. y una altura de 15 cm.

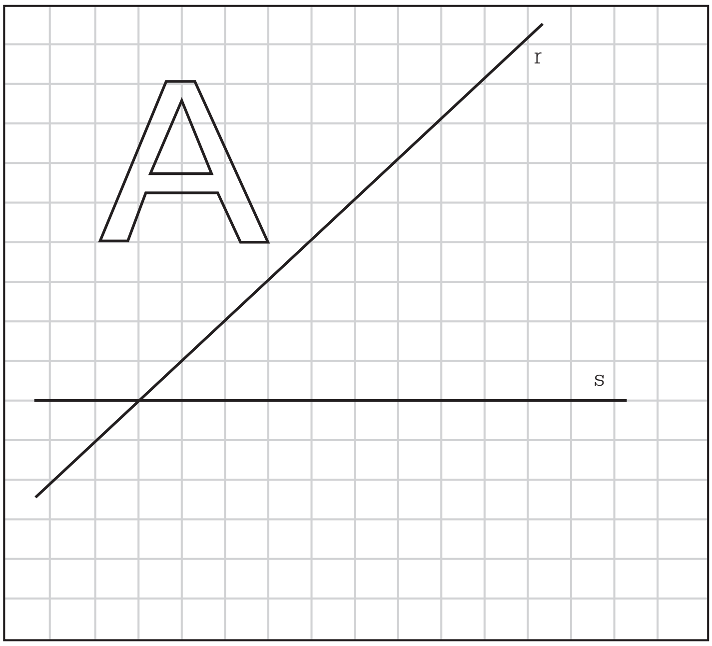
Otra lata de tamaño familiar, semejante a la anterior, se anuncia para 6 personas.

¿Qué volumen y qué dimensiones deberá tener?

Qué relación existe entre las superficies de hojalata de una y otra lata?

13. Investiga qué poliedros regulares son simétricos respecto de un punto

14. Dibuja el transformado de la figura al aplicarle primero una simetría axial de eje la recta r y luego otra de eje s.



Comprueba que el resultado es el mismo que si aplicásemos un giro. ¿De qué giro se trata?

¿Obtienes el mismo resultado si aplicas primero la simetría de eje s y luego la de eje r?

15. Investiga ¿Qué movimientos dejan invariantes a los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados?

16. Verdadero o falso:

a) Dos cuadrados son siempre semejantes.
b) Dos rectángulos son siempre semejantes.
c) Dos circunferencias son siempre semejantes.
d) Dos rombos son siempre semejantes.

17. Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13 cm. El lado menor de otro triángulo semejante mide 10 cm. Calcula:

a) La razón de semejanza y las longitudes de los otros lados.
b) El área del triángulo grande si el área del triángulo pequeño es de 30 cm2.
c) El perímetro de los dos triángulos.
d) La razón de los perímetros.

18. Los lados de un triángulo miden 10, 13 y 15 cm. Otro triángulo semejante tiene 57 cm. de perímetro. Calcula los lados de este triángulo.

19. Tomando como centro de giro el origen de coordenadas, halla las coordenadas de los puntos homólogos de P(1, 3), Q(-4, 2), R(0, 5) mediante un giro de:

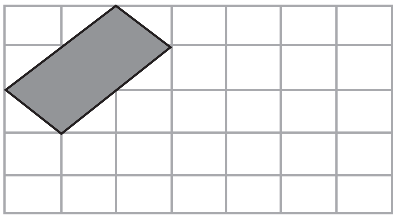
a) $\alpha = 90^{o}$

b) $\alpha = 180^{o}$

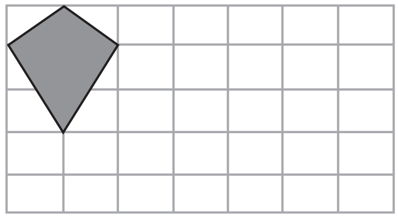
c) $\alpha = -180^{o}$

20. Forma mosaicos utilizando como figura que se repite las que están dibujadas en cada caso.

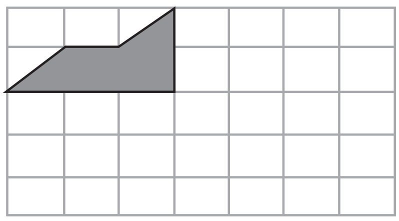
1



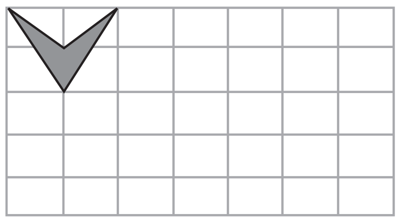
2



3



4



21. Observa cada uno de los mosaicos que has construido en la actividad anterior.

a) Señala en el mosaico 1 y en el mosaico 2 dos figuras A y A' tal que la figura A' se obtenga mediante un giro de 180º de la figura A. ¿Cuál es en cada caso el centro de giro?

b) Señala en el mosaico 3 y en el mosaico 4 dos figuras A y A' tal que la figura A' se obtenga mediante una traslación de la figura A. ¿Cuál es en cada caso el vector de traslación?

Unidad n.º 6

Trigonometría

Objetivos

- Manejar correctamente los dos tipos de medidas de ángulos más usuales (grados sexagesimales y radianes) .... (I-II-III)
- Expresar las razones trigonométricas de un ángulo agudo en función de los lados del triángulo rectángulo que lo contiene .... (I-II-III)
- Hallar la razones trigonométricas de un ángulo agudo con calculadora y el ángulo a partir de una de sus razones .... (I-II-III)
- Utilizar las razones trigonométricas para resolver problemas .... (I-II-III)
- Resolver sencillas ecuaciones trigonométricas .... (II-III)
- Demostrar alguna identidad trigonométrica sencilla .... (III)

Contenidos

Conceptos

1. Revisión del Teorema de Pitágoras y del Teorema de la altura .... (I-II-III)
2. Medida de ángulos. Grados sexagesimales. El radián .... (I-II-III)
3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente) .... (I-II-III)
4. Razones de ángulos complementarios .... (I-II-III)
5. Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo .... (II-III)
6. Razones de 30º, 45º y 60º .... (II-III)

Procedimientos

Todos los procedimientos están referidos a ángulos agudos.

- Utilización de aparatos de medida de ángulos .... (I-II-III)
- Paso de grados sexagesimales a radianes y viceversa, con y sin calculadora .... (I-II-III)
- Realización de operaciones con medidas de ángulos .... (I-II-III)
- Cálculo aproximado de las razones de un ángulo por medición directa en un triángulo rectángulo .... (I-II-III)
- Cálculo de las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º .... (II-III)
- Determinación de las restantes razones de un ángulo conociendo una de ellas .... (II-III)
- Uso de la calculadora para hallar razones trigonométricas y el ángulo conocida una de ellas .. (I-II-III)
- Resolución de triángulos rectángulos .... (I-II-III)
- Utilización de las razones trigonométricas en la resolución de problemas para calcular ángulos y distancias .... (I-II-III)
- Resolución de ecuaciones trigonométricas elementales de manera directa .... (II-III)
- Utilización de las relaciones entre las razones trigonométricas para demostrar alguna identidad trigonométrica sencilla .... (III)
- Resolución de triángulos rectángulos .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- En esta opción no se incluye el estudio de las razones trigonométricas de ángulos no agudos, que se realizará en el Bachillerato.
- Es importante que el alumno sea consciente de que las razones de un ángulo no dependen del triángulo rectángulo elegido para definirlas.
- En los niveles II y III, las ecuaciones trigonométricas se reducirán a las de cálculo directo que no requieran la utilización de técnicas especiales (por ejemplo, sen $3x = 0,5$, etc.).
- Podrían realizarse actividades de cálculo de distancias en exteriores.

Criterios de evaluación

- Expresar ángulos en los dos tipos de medidas utilizados .... (I-II-III)
- Calcular razones de un ángulo con la calculadora .... (I-II-III)
- Calcular el ángulo con la calculadora conociendo una razón .... (I-II-III)
- Hallar las restantes razones de un ángulo conociendo una de ellas .... (II-III)
- Resolver triángulos rectángulos .... (I-II-III)
- Resolver problemas de la vida real utilizando la trigonometría .... (I-II-III)
- Demostrar alguna identidad trigonométrica sencilla .... (III)

Actividades

NIVEL I

1. Con el teodolito, averigua la altura de la pared del aula.

2. Calcula 46º37'13"   24º47'54"

3. Con un rayo láser se apunta a una ventana. El ángulo que forma el rayo con la horizontal es de 43'12º. Con un segundo rayo se apunta justo a la ventana del piso de abajo y el ángulo que forma con la horizontal es, ahora, de 27º'23'. Calcula el ángulo que forman los dos rayos.

4. Expresa los siguientes ángulos en radianes:

a) 37º   b) 67'5º   c) 136º45'   d) 325'75º

5. Pasa de radianes a grados las medidas de los siguientes ángulos.

a) 1 radián   b) 2,24 radianes

c) 3,054 radianes   d) 0,25 radianes

6. Sin utilizar la calculadores, convierte en radianes las siguientes medidas de ángulos, expresándolas en función de p:

a) 30º   b) 45º   c) 90º   d) 120º   e) 315º

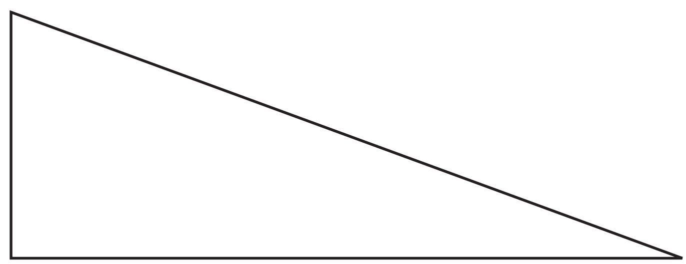
f) 210º   g) 270º   h) 405º   i) 570º   j) 540º

7. Sin utilizar calculadora, pasa a grados sexagesimales las siguientes cantidades en radianes.

a) $\pi/2$ b) $3\pi/4$ c) $2\pi/3$ d) $\pi/6$ e) $\pi/6$

f) $7\pi/4$ g) $5\pi/6$ h) $11\pi/4$ I) $3\pi/2$ j) $13\pi/6$

8. Determina las razones trigonométricas de los ángulos del siguiente triángulo midiendo previamente sus lados.



A continuación, halla el valor de los ángulos.

9. Utilizando un transportador, regla, escuadra y compás, dibuja un triángulo rectángulo del que se conoce:

a) Los dos catetos, que miden, respectivamente 5 y 7 cm.

b) Un cateto, b = 6 cm. y un ángulo a = 65º

c) La hipotenusa, a = 5 cm. y un cateto, b = 4 cm.

d) La hipotenusa, a = 5 cm. y un ángulo a = 40º

10. Calcula:

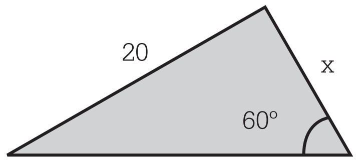
a) sen 34º b) cos 57º23’

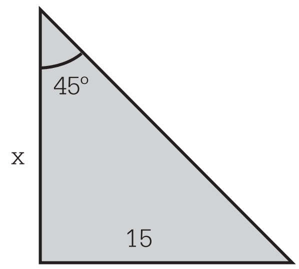
c) tg π/5 d) cos 1’3 rad e) tg 34’72º

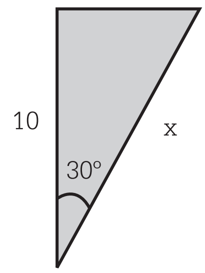
11. Calcula, cuando exista, el ángulo, x, expresándolo en grados, minutos y segundos, cuando:

a) cos x = 0,24 b) tg x = 3,5 c) sen x =7/9 d) tg x = 4 e) sen x = 2

12. Halla el valor x en los siguientes triángulos rectángulos.







13. a) Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 y 8 cm. Mide el ángulo menor con un transportador con la mayor precisión posible.

b) A continuación, calcula, utilizando la definición, las razones trigonométricas del ángulo menor.

c) Finalmente, a partir de una de sus razones trigonométricas y utilizando la calculadora, halla dicho ángulo. ¿Coincide con el valor obtenido mediante medición directa en el apartado b?

14. Determina las razones trigonométricas de los dos ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm. y uno de sus catetos mide 1 cm.

15. Dos lados de un triángulo isósceles miden 20 centímetros y cada uno de los ángulos iguales mide 25º.

Resuelve el triángulo y calcula su área.

16. La base de un triángulo isósceles mide 10 m. y el ángulo opuesto 50º. Halla la altura del triángulo y el área.

17. Determina la altura de un árbol si desde un punto situado a 20 metros de su base se observa su copa bajo un ángulo de 65º 23’.

18. Un triángulo tiene por lados 6 cm., 8 cm. y 10 cm. Halla las razones trigonométricas del ángulo menor

19. Los lados de un triángulo miden 10, 8 y 6 cm. Calcula las razones trigonométricas de su ángulo menor

20. La sombra que proyecta Juan al atardecer de un día de verano mide 2,24 m. El ángulo que forman los rayos solares con el suelo es de 37º. ¿Cuánto mide Juan?

21. Un globo se encuentra a 150 m. de altura. Desde un punto, la línea visual forma un ángulo de 67’4º. ¿A qué distancia en línea recta se encuentra el globo del observador?

22. Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 14 y 9 cm, respectivamente.

23. En un tramo de una carretera de montaña, el desnivel es de 11%. ¿Cuál es el ángulo que forma la carretera con la horizontal?

NIVEL II

1. Dibuja un ángulo cuyo seno es 2/5

2. Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 4 y 8 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos.

3. Dos de los lados de un triángulo rectángulo miden 10 y 20 cm. ¿Cuánto puede medir el tercero? ¿Existe más de una solución?

4. Calcula el lado y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

5. Si sen x =3/4, calcula cos x y tg x sin utilizar la calculadora.

6. Si tg x = 5, calcula sen x y cos x sin hacer uso de la calculadora.

7. Desde un faro colocado a 40 m. sobre el nivel del mar se ve un barco bajo un ángulo de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

8. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El seno de un ángulo puede ser mayor que 1.

b) El seno de un ángulo es siempre menor que 1.

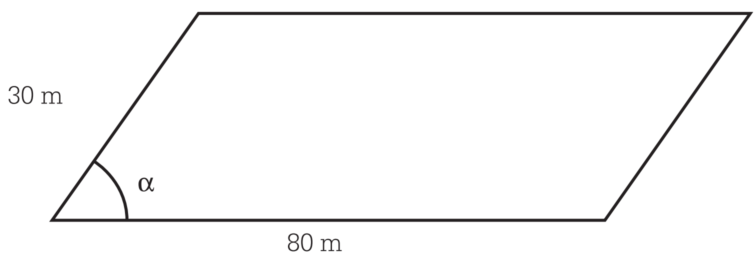
c) El seno de un ángulo puede ser igual a 1.

d) El seno de un ángulo siempre es mayor que 0.

9. Dos lados de un triángulo miden 28 cm. y 18 cm. y el ángulo que forman estos lados mide 57º. ¿Cuánto mide el área?

10. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m. hacia el pie de la torre, ese ángulo mide 60º. Halla la altura de la torre.

11. Dos lados adyacentes de una parcela en forma de paralelogramo de área 851 m^2 tienen unas longitudes de 30 y 80 metros. ¿Cuál es el valor del ángulo α que forman esos lados?



12. El ángulo que forma una carretera con la horizontal en determinado tramo es de 18º. ¿Cuál es el desnivel en tanto por ciento?

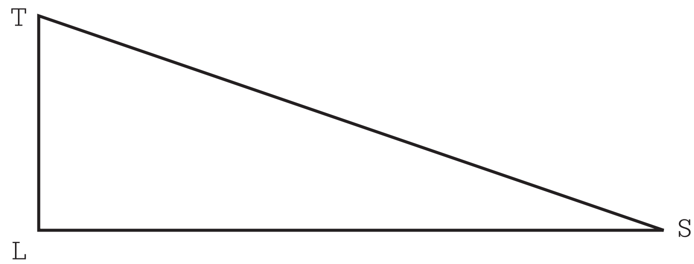
13. Calcula el área de un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 10 y 15 cm. y que los otros dos ángulos distintos al comprendido entre ellos miden 80º y 70º.

14. Una estatua está colocada sobre un pedestal de 2 m. de altura. Desde un punto del suelo se ve la escultura bajo un ángulo de 47º y el pedestal bajo un ángulo de 20º. Calcula la altura de la estatua.

15. La inclinación de un tejado es de 35º. El voladizo del alero, es decir, la proyección ortogonal del alero sobre el suelo, es de 80 cm. ¿Cuánto ha de alargarse el alero para que tenga un voladizo de 150 cm?

16. Observa el método que empleó Aristarco (280 a.C.) para calcular la distancia de la Tierra al Sol. Esperó hasta que la mitad del disco lunar estuviese iluminado, pues pensó, con razón, que en ese momento el ángulo Sol-Luna-observador sería recto. Como conocía la distancia de la Tierra a la Luna que él mismo había calculado, le bastó con medir el ángulo T y, aunque con un error considerable, resolvió el problema. Hazlo tú con los siguientes datos:

$\overline{TL}$ = 384.000 km　　　ángulo T = 89'85º



18. Sin utilizar calculadora, resuelve las ecuaciones trigonométricas siguientes:

a) sen x = 1/2　　b) cos $2x$ = 1/2　　c) tg $3x$ = 1

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) cos $3x$ = 0,3　　b) tg $4x$ = 4/5　　c) 1+ tg $2x$ = 4

NIVEL III

1. Dos hombres que andan a razón de tres kilómetros por hora parten al mismo tiempo de un cruce de dos caminos rectos, que forman entre sí un ángulo de 15º. Los dos van en el mismo sentido. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro al cabo de dos horas?

2. Dos amigos separados 800 m., ven un globo que está entre los dos bajo ángulos de 35º y 55º, respectivamente. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.

3. La superficie de un terreno en forma de trapecio es de 1.200 m². Sabiendo que tiene dos ángulos de 45º y que la base menor es de 65 metros, calcula la base mayor y la distancia entre las bases.

4. Se define cotangente de un ángulo x, y se denota por *cotg x,* como el coseno dividido por el seno de dicho ángulo. Demuestra que

$$1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$$

5. Simplifica:

a) $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen}\, x}$

b) $\text{ctg}^2 x - \text{ctg}^2 x \cos^2 x$

6. Simplifica:

a) $\text{sen}^3 b + \text{sen}\, b \cos^2 b$

b) $\dfrac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^4 x - \cos^4 x}$

c) $\dfrac{2 \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha + 1}{\cos \alpha}$

7. Resuelve:

a) $\dfrac{1 + \cos 3x}{3} = \dfrac{2}{5}$

b) $tg \left(x + \dfrac{\pi}{7} \right) = 7$

c) $sen \left(3x + \dfrac{\pi}{6} \right) = 0{,}8$

8. En una circunferencia de 4 m. de radio se marca un arco de 120º. Halla el área del recinto formado por este arco y las tangentes en sus dos extremos.

9. Considerando que la Tierra es una esfera perfecta de 6.371 km. de radio, determina la longitud en km. del paralelo de Tudela (aproximadamente 42º)

10. Las bases de un trapecio miden 15 y 7 cm, respectivamente. Otro de sus lados mide 4 cm, y el ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 39º. Calcula el área del trapecio.

11. Calcula las razones trigonométricas del ángulo cuya tangente es igual a dos veces su seno.

12. Determina la expresión del área de un polígono regular cualquiera en función de la medida de uno de sus lados y del número de éstos.

13. Las diagonales de un paralelogramo miden 30 y 20 cm. y se cortan formando un ángulo de 40º. Calcula sus lados y su área.

14. Luis vive en el campo en una casa situada sobre una carretera recta. Fuera de la carretera hay una iglesia a 100 m. de distancia. La línea visual que une la casa y la iglesia forma un ángulo de 40º con la carretera. Avanza por la carretera determinada distancia y ahora ve la iglesia formando un ángulo de 25º con la carretera. ¿A qué distancia se encuentra de la iglesia?

15. Calcular la longitud de una correa de transmisión que enlaza dos ruedas de radios 0,5 y 0,2 m., siendo la distancia entre sus centros de 1 metro.

Unidad n.º 7

Funciones. Generalidades

Objetivos

- Utilizar el lenguaje gráfico para describir e interpretar relaciones de tipo funcional .... (I-II-III)
- Interpretar y analizar en su contexto algunas de las características globales de las gráficas: dominio, recorrido, ceros, signo, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y tendencia .... (I-II-III)
- Analizar e interpretar la periodicidad de funciones .... (II-III)
- Analizar e interpretar las discontinuidades y sus tipos. .... (I-II-III)
- Calcular e interpretar la Tasa de Variación Media de una función en un intervalo .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Idea de función. Dominio y recorrido. Terminología .... (I-II-III)
2. Puntos de corte y signo de la función .... (I-II-III)
3. Crecimiento de funciones .... (I-II-III)
4. Funciones definidas a trozos .... (I-II-III)
5. Discontinuidades y tipos .... (I-II-III)
6. Periodicidad de funciones dadas mediante una gráfica. .... (II-III)
7. Simetría de funciones dadas mediante una gráfica .... (II-III)
8. Tasa de Variación Media de una función en un intervalo .... (II-III)

Procedimientos

- Identificación de funciones dadas por tablas, gráficas o formulas .... (I-II-III)
- Interpretación de la idea de función como una relación entre dos magnitudes en las que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda .... (I-II-III)
- Descripción verbal del fenómeno asociado a una gráfica .... (I-II-III)
- Reconocimiento, determinación e interpretación de las características globales de las gráficas: dominio, recorrido, ceros, signo, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimo y tendencia .... (I-II-III)
- Reconocimiento de las simetrías y el periodo de una función dada su gráfica .... (II-III)
- Representación gráfica de algunas funciones sencillas definidas a trozos .... (I-II-III)
- Interpretación y análisis de las discontinuidades y sus tipos en algunas situaciones o fenómenos dados mediante gráfica o enunciado .... (II-III)
- Cálculo e interpretación del significado de la TVM de funciones en distintos intervalos . (II-III)

Orientaciones metodológicas

- Los alumnos ya han estudiado gráficas en 3º ESO, además de en otras áreas. Se trata aquí de conocer y reflexionar sobre un tipo de gráficas que representan la dependencia establecida entre dos magnitudes. No se pretende formalizar los conceptos, pero sí preparar el camino hacia ello, sugiriendo imágenes intuitivas más que definiciones precisas.
- La lectura de todos los aspectos globales (dominio, recorrido, continuidad, crecimiento, extremos, curvatura, tendencia...) que determinan la gráfica se van introduciendo sobre ejemplos concretos, de forma intuitiva y sin llegar a formalizar definiciones.

Criterios de evaluación

- Saber utilizar el lenguaje gráfico para la descripción e interpretación de relaciones de tipo funcional .... (I-II-III)
- Identificar e interpretar en su contexto algunas de las características globales de las gráficas: dominio, recorrido, ceros, signos, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y tendencia .... (I-II-III)
- Identificar e interpretar las discontinuidades y sus tipos en algunas situaciones o fenómenos dados mediante una gráfica .... (I-II-III)
- Calcular e interpretar la TVM de una función en un intervalo .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Comprueba si los pares de valores que figuran en la siguiente tabla corresponden a la función

$$y = 3 - \frac{1}{x-2}$$

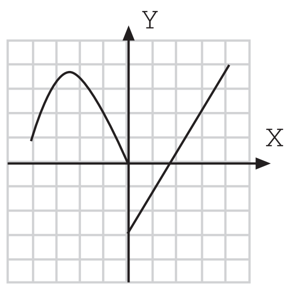
y completa los que faltan:

x	2.01	2.5	1.9	102		
y	-97		13		3.5	103

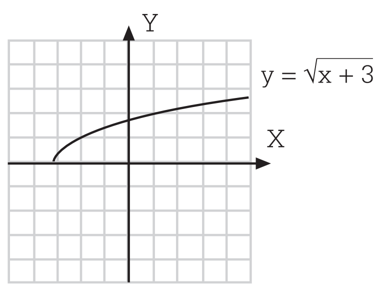
¿Qué valor no podemos dar a x en esta función?

2. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) y = f(x)



b) y = g(x)



Dom (f) =

Img (f) =

Dom (g) =

Img (g) =

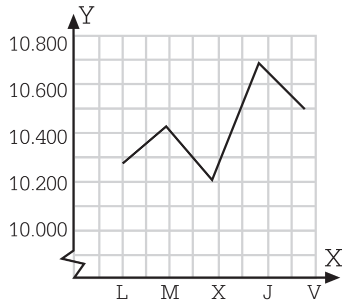
3. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $y = x - 3$

b) $y = \dfrac{1}{x-1}$

c) $y = +\sqrt{x-2}$

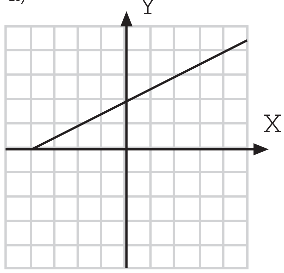
4. Dada la gráfica del IBEX 35 a lo largo de una semana:



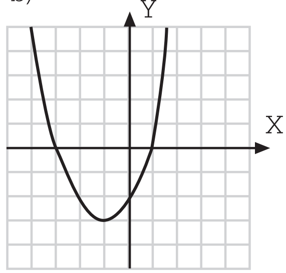
a) ¿Qué magnitud representamos sobre el eje OX?
b) ¿Cuál es la unidad de medida sobre el eje OX?
c) Calcula el dominio de la función
d) ¿Qué magnitud representamos sobre el eje OY?
e) ¿Cuál es la unidad de medida sobre el eje OY?
f) Calcula la imagen o recorrido

5. Halla los puntos de corte de la siguiente recta y parábola con los ejes:

a)

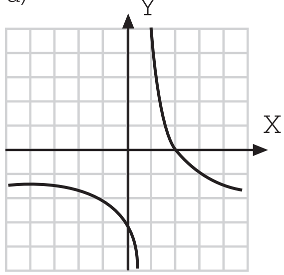


b)

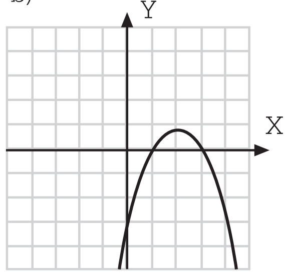


6. Halla los puntos de corte de la siguiente hipérbola y parábola con los ejes:

a)

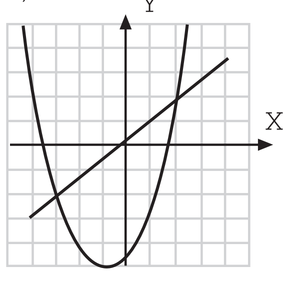


b)

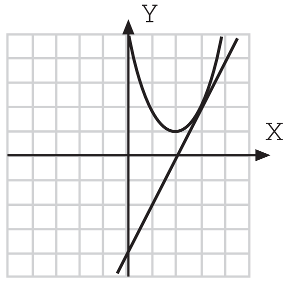


7. Halla los puntos de corte de la siguiente recta con la parábola:

a)



8. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones:



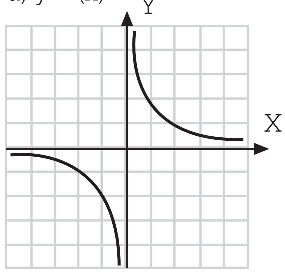
9. Halla gráficamente los puntos simétricos de A (1, 1); B (0, 2); C (-2, -3) y D (-1,6) respecto de:

a) El origen de coordenadas.

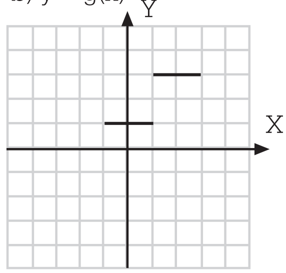
b) El eje de coordenadas.

10. Escribe los intervalos de continuidad de las siguientes funciones:

a) y = (x)



b) y = g(x)

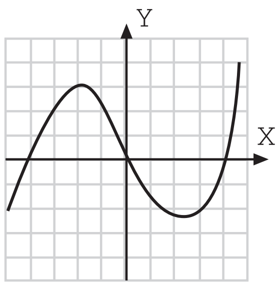


11. Representa las siguientes funciones a trozos y di si son discontinuas en algún punto:

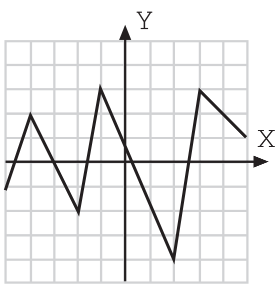
a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

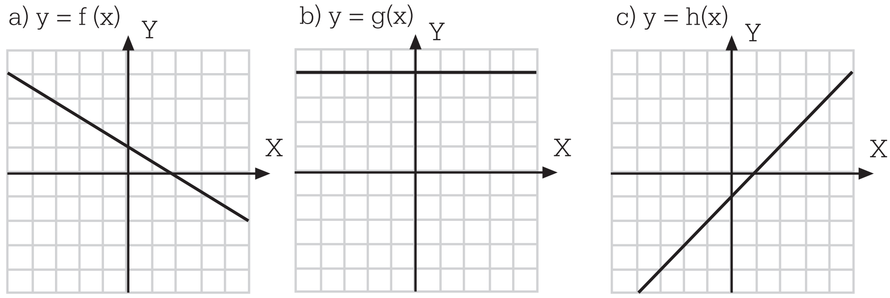
12. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:



13. Halla los puntos en los que la siguiente función alcanza los máximos y mínimos relativos y absolutos:



14. Clasifica las siguientes funciones como crecientes, decrecientes y constantes:



15. Sabiendo que una función f(x) tiene las siguientes características:

a) Está definida en el intervalo [4, 7]

b) Corta al eje OX en (-2, 0) y (5, 0).

c) Corta al eje OY en (0, -3).

d) Es decreciente en [-4, 0] y creciente [0, 7].

¿Sabrías dibujar la gráfica aproximada? Hazlo.

NIVEL II

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes gráficas:

a) $y = 2x + 7$ $\qquad y = \dfrac{5}{2x - 6}$

b) $y = \sqrt{2x + 4}$

2. Calcula los puntos de corte y el signo de la función en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{-2x + 5}{3}$

3. Halla la TVM de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x)= 3x - 1$ en [2, 5], [4, 8] y [-2, 0]

b) $f(x)= 2x^2 - 8$ en [2, 4], [-1, 4] y [-3, -1]

4. Calcula la TVM de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los intervalos que se indican y observa como son las tasas obtenidas:

a) [-3, -2] b) [8, 9]

5. Indica en qué intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones, estudiando el signo de la tasa de variación:

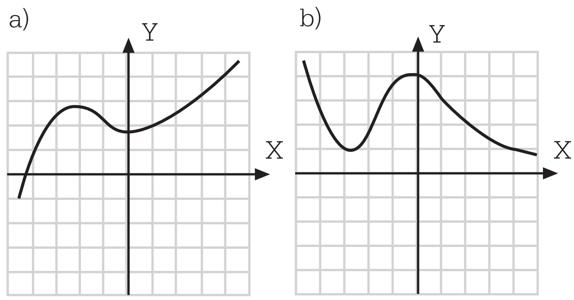
a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

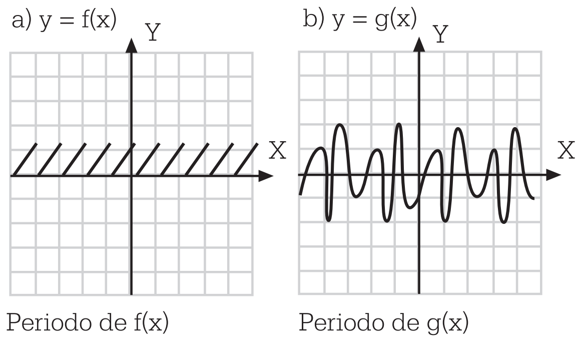
c) $f(x) = -x$

d) $f(x) = -x^2$

6. Halla la TVM de las siguientes funciones en el intervalo [1, 4].



7. Halla el periodo de las siguientes funciones:

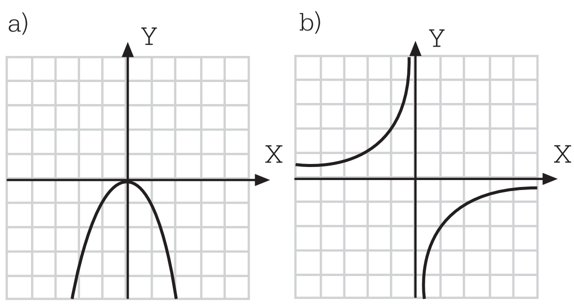


8. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x$

b) $f(x) = x^4 + x^2$

9. Estudia la simetría de las funciones:



10. Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km. de su casa. A los quince minutos de salida, cuando se encuentra a seis km. hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.

a) Representa la gráfica tiempo-distancia a su casa.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? Suponemos que en cada etapa la velocidad es constante?

c) Busca la expresión analítica de esta función.

11. Estudia la continuidad y representa la función cuya expresión analítica es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

12. Estudia la continuidad de la función y represéntala:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ x - 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

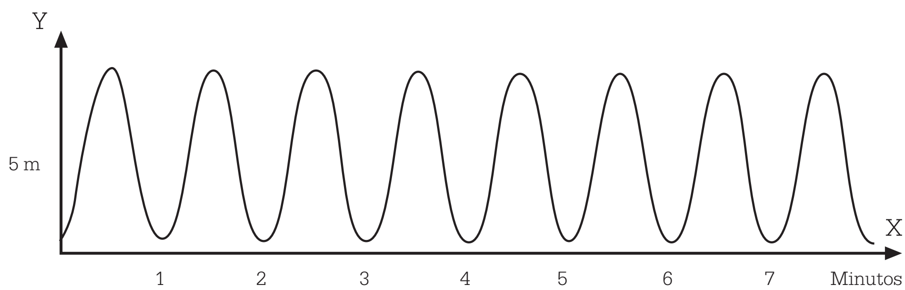
13. En un aparcamiento nos cobran por la primera hora 200 ptas. y cada una de las horas siguientes a 150 ptas. Fíjate en que es una función escalonada:

a) Haz una tabla de valores para las 6 primeras horas.

b) Represéntala gráficamente.

c) ¿En qué puntos es discontinua la función?

14. La siguiente gráfica corresponde ala altura a la que se encuentra una persona cuando monta en una noria.



a) Calcula el periodo.

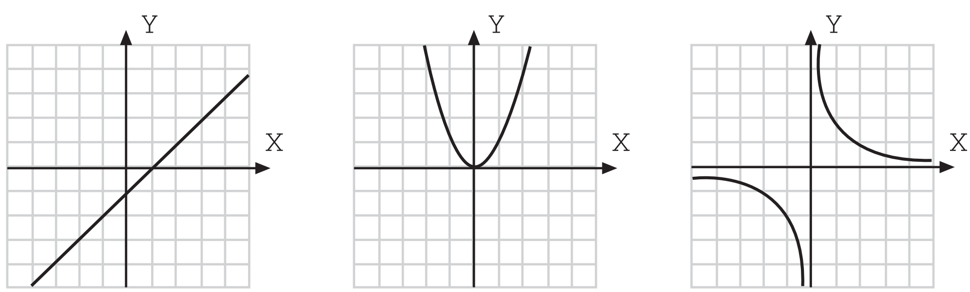
b) ¿Cuándo es creciente?

c) ¿Cuándo es decreciente?

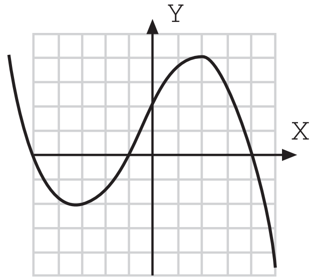
d) Halla la altura máxima que alcanza.

e) Halla la altura mínima que alcanza.

15. Estudia la tendencia de las siguientes funciones:



16. Dada la siguiente gráfica halla:



y = x² – 2x – 3

a) Tipo de función.
b) Dominio.
c) Recorrido.
d) Crecimiento.
e) Continuidad.
f) Periodicidad.
g) Simetrías.
h) Asíntotas.
i) Tendencia.
j) Cortes con el eje OX.
k) Cortes con el eje OY.
l) Máximos relativos y absoluto.
m) Mínimos relativos y absoluto.

NIVEL III

1. ¿Es la función $f(x) = 1/x$ creciente o decreciente en el punto $x = 3$?

2. Ayudándote de la calculadora para estudiar el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ en el punto $x = 1$
b) $f(x) = |x|$ en el punto $x = -2$
c) $f(x) = \dfrac{6}{1 - x}$ en el punto $x = -1$
d) $1 + \sqrt{x + 2}$ en el punto $x = 0$

3. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = x.|x|$ d) $f(x) = x^5 + x^3 + x$
e) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2$ f) $f(x) = \dfrac{6}{x}$

4. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

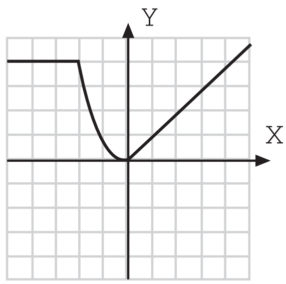
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

5. Representa la siguiente función e indica si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

6. Escribe la ecuación que corresponde a la siguiente gráfica:



7. Comprueba que la función $f(x) = x^2$ es:

a) Decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$.

b) Creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

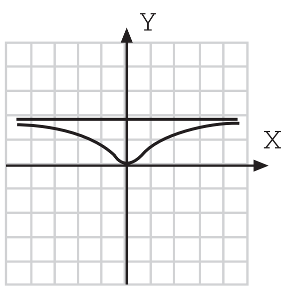
8. Calcula el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$, en $x = 1$

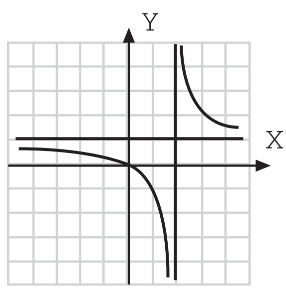
b) $f(x) = \dfrac{x + 5x + 6}{x - 2}$, en $x = 2$

9. Escribe la fórmula de las asíntotas de las siguientes funciones:

a)



b)



10. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

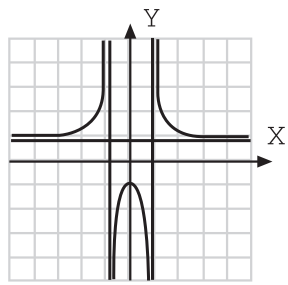
a) $y = \dfrac{5x + 1}{x - 3}$

b) $y = \dfrac{4x - 7}{2x + 6}$

c) $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$

11. Dada la siguiente gráfica halla:

a) Tipo de función.
b) Dominio.
c) Recorrido.
d) Crecimiento.
e) Continuidad.
f) Periodicidad.
g) Simetrías.
h) Asíntotas.
i) Tendencia.
j) Cortes con el eje OX.
k) Cortes con el eje OY.
l) Máximos relativos y absoluto.
m) Mínimos relativos y absoluto.



$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Unidad n.º 8

Funciones elementales

Objetivos

- Descubrir la existencia de relaciones entre parejas de valores correspondientes a dos magnitudes en situaciones concretas .... (I-II-III)
- Reconocer por sus fórmulas y gráficos, los distintos tipos de funciones elementales: constante, lineal, afín, inversa, cuadrática y exponencial .... (I-II-III)
- Reconocer por sus fórmulas y gráficos, los distintos tipos de funciones elementales: cuadrática en todas sus formas, valor absoluto y radical .... (II-III)
- Leer e interpretar gráficos funcionales haciendo uso intuitivo de las nociones de continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad y tendencia .... (I-II-III)
- Representar en un sistema de coordenadas cartesianas fenómenos en los que haya una dependencia funcional: constante, lineal, afín, inversa, cuadrática o exponencial . (I-II-III)
- Representar en un sistema de coordenadas cartesianas fenómenos en los que haya una dependencia funcional: valor absoluto y radical .... (II-III)
- Interpretar fenómenos en los que haya una dependencia funcional: constante, lineal, afín, inversa, cuadrática, valor absoluto, radical o exponencial .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Función de proporcionalidad directa:
   a) Función constante .... (I-II-III)
   b) Función lineal .... (I-II-III)
   c) Función afín .... (I-II-III)
2. Función de proporcionalidad inversa:
   a) Magnitudes inversamente proporcionales .... (I-II-III)
   b) Función de proporcionalidad inversa .... (I-II-III)
   c) Diferencias entre funciones de proporcionalidad directa e inversa .... (I-II-III)
3. Función cuadrática:
   a) Función cuadrática .... (I-II-III)
   b) Función cuadrática $y = \mathrm{a}x^2$ .... (I-II-III)
   c) Traslación vertical $y = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{k}$ .... (II-III)
   d) Traslación horizontal $y = \mathrm{a}\,(x - \mathrm{p})^2$ .... (II-III)
   e) Traslación general $y = \mathrm{a}\,(x - \mathrm{p})^2 + \mathrm{k}$ .... (II-III)
   f) Elementos de la parábola: vértice, eje y cortes con los ejes de coordenadas .... (I-II-III)
4. Función valor absoluto .... (II-III)
5. Función radical .... (II-III)
6. Función exponencial:
   a) Definición .... (I-II-III)
   b) Tabla de valores y gráfica .... (I-II-III)

Procedimientos

- Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas dadas por rectas. .... (I-II-III)
- Construcción de gráficas a partir de tablas funcionales. .... (I-II-III)

- Interpretación y representación gráfica de las funciones constante, lineal y afín. .... (I-II-III)
- Cálculo de la pendiente en las funciones lineal y afín. .... (I-II-III)
- Encontrar la ecuación de una función lineal que verifique ciertas condiciones. .... (II-III)
- Interpretación y representación gráfica de funciones cuadráticas .... (I-II-III)
- Estudio de las funciones cuadráticas $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$. .... (I-II-III)
- Cálculo del vértice, puntos de corte y eje de la parábola y representación .... (I-II-III)
- Construcción de parábolas a partir de otras más sencillas .... (II-III)
- Planteamiento y resolución de problemas sobre funciones cuadráticas .... (II-III)
- Representar en un sistema de coordenadas cartesianas las funciones valor absoluto y radical (II-III)
- Comparación de las representaciones gráficas de la función de crecimiento lineal y exponencial .... (II-III)
- Interpretación, identificación y representación gráfica de funciones exponenciales ..... (I-II-III)
- Cálculo del dominio y recorrido de la función exponenciales .... (I-II-III)
- Comparación de los tipos de funciones exponenciales .... (II-III)
- Resolver problemas mediante la utilización de las funciones elementales. .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

- Las funciones que tienen como gráfica una recta ya se estudiaron en el curso anterior, con lo que ahora se da un repaso. La función inversa se vio también en 3º, aunque aquí se ven también algunas más complejas.
- Las funciones valor absoluto y radical sólo se verán en los niveles II y III.

Criterios de evaluación

- Reconocer por sus fórmulas y gráficos, los distintos tipos de funciones elementales: lineal, afín, inversa, cuadrática y exponencial. .... (I-II-III)
- Reconocer por sus fórmulas y gráficos las funciones valor absoluto y radical .... (II-III)
- Representar en un sistema de coordenadas cartesianas las funciones lineal, afín, inversa, cuadrática y exponencial. .... (I-II-III)
- Representar en un sistema de coordenadas cartesianas las funciones valor absoluto y radical (II-III)
- Leer e interpretar gráficos funcionales haciendo uso intuitivo de las nociones de continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad y tendencia. .... (I-II-III)
- Hallar e interpretar la pendiente de una función lineal o afín .... (I-II-III)
- Encontrar una función lineal a partir de una tabla de valores .... (I-II-III)
- Encontrar una función lineal que verifique ciertas condiciones .... (II-III)
- Obtener una parábola por traslación .... (II-III)
- Hallar el dominio y el recorrido de funciones exponenciales .... (II-III)
- Representar gráficamente funciones exponenciales .... (I-II-III)
- Plantear y resolver problemas con funciones exponenciales .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Clasifica las siguientes funciones como constantes, lineales, afines, inversas o cuadrática. Represéntalas y di que tipo de gráfica tiene cada una:

a) $y = 5x + 3$

b) $y = x^2$

c) $y = x^2 + 5x - 2$

d) $y = \dfrac{1}{x}$

e) $y = 5$

f) $y = 3x$

2. Dadas las siguientes fórmulas, di cuáles son funciones constantes, lineales o afines. Halla la pendiente de cada una de ellas. Indica cuáles son crecientes y cuáles decrecientes:

a) $y = -2x$

b) $y = x + 3$

c) $y = \dfrac{3x}{5} - 2$

d) $y = -5$

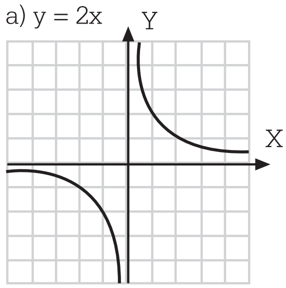
3. Representa las siguientes rectas y halla su punto de corte gráficamente:

a) $y = x$

b) $y = -2x + 3$

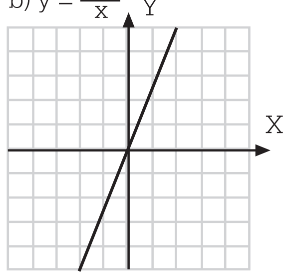
4. Clasifica las siguientes funciones como de proporcionalidad directa o inversa e identifica cada gráfica con su fórmula.

a) $y = 2x$



Tipo

b) $y = \dfrac{2}{x}$



Tipo

5. Compramos azúcar al precio de 150 ptas./kg. y pagamos un 7% de IVA. Escribe la fórmula que nos da el coste en función del número de kilos. ¿Qué tipo de función es?

6. Dada la siguiente tabla de valores:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6
Energía (kw.h)	1.	3	4.5	6	7.5	9

a) Representa los valores en unos ejes coordenados y une los puntos.
b) ¿Qué tipo de gráfica se obtiene?
c) Escribe la fórmula que las relaciona.
d) ¿Es una función de proporcionalidad directa?

7. Un tren lleva una velocidad constante de 120 km./h.
a) Haz una tabla de valores que relacione el tiempo y el espacio recorrido.
b) Escribe la fórmula.
c) ¿Qué tipo de función es?

8. Un coche recorre un espacio de 1.200 km.
a) Haz una tabla de valores que relacione el tiempo que tarda y la velocidad.
b) Escribe la fórmula.
c) ¿Qué tipo de función es?

9. Dibuja la recta que pasa por los puntos A (2, 3) y B (-2, 5).
a) Halla la pendiente.
b) Escribe la fórmula.
c) ¿Qué tipo de función es?

10. Representa las siguientes funciones:
a) $y = 2x^2$
b) $y = \frac{x^2}{5}$
c) $y = -x^2$
d) $y = \frac{x^2}{4}$

11. Representa las siguientes funciones cuadráticas hallando los elementos de la parábola:
a) $y = x^2 - 5x + 3$
b) $y = x^2 + 4x - 2$
c) $y = -x^2 - 4x - 1$
d) $y = -x^2 + x - 1$

12. Da un valor a x, para que se cumpla:
a) $3^x = 27$
b) $2^x = 128$

13. Calcula $(0,2)^x$ para los valores de x = -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4. Utilizando la calculadora.

14. ¿Pertenecen los puntos (0, 2), (1, 3) y (-1, -2) a la gráfica de la función $y = 3^x$?

15. Representa gráficamente las funciones:
a) $y = 4^x$
b) $y = 0.5^x$

NIVEL II

1. Las parábolas siguientes:

$$y = x^2 - 2x + 4; \qquad y = 2x^2 - 4x + 8; \qquad y = \frac{1}{2}x - x + 2$$

tienen el mismo vértice y el mismo eje de simetría. ¿En qué se diferencian?

2. Representar las siguientes funciones cuadráticas, mediante traslaciones:

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = (x - 4)^2$

c) $y = (x + \frac{5}{2})^2$

d) $y = (x + 2)^2 - 3$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 + 6$

b) $y = x^2 - 8x$

c) $y = -(x - 3)^2 - 4$

d) $y = 4x^2 + 4x + 1$

e) $y = 2x^2 + 2x + 4$

f) $y = -x^2 + 4x - 5$

4. La gráfica de la función $y = x^2 - 4x + c$ pasa por el punto (2, 6). Encuentra el valor de c y averigua sí la gráfica corta al eje de abscisas.

5. Dibuja y halla la fórmula de una parábola que pasa por los puntos (-2, 0); (2, 0) y (0, -4).

6. Representa las funciones de valor absoluto:

a) $y = |x|$

b) $y = |x + 1|$

c) $y = |x - 1|$

d) ¿Qué observas?

7. Dada la función radical $y = \sqrt{x}$:

a) Haz una tabla de valores para x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 16. Utilizando la calculadora.

b) Represéntalos en unos ejes coordenados. Dibuja aproximadamente la función.

c) ¿Podrías dar a x valores negativos? ¿Porqué?

8. Representa en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, las funciones $f(x) = -2x^2$, $g(x)= -2x^2 + 3$, $h(x) = -2x^2 - 3$. ¿Puedes obtener alguna conclusión general?

9. Representa en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, las funciones $f(x) = 2x^2$, $g(x)= 2(x - 3)^2$, $h(x) = 2(x +3)^2$. ¿Puedes obtener alguna conclusión general?

10. El espacio recorrido por un coche cuando arranca viene dado por la fórmula

$$e = \frac{1}{3} t^2.$$

a) Haz una tabla de valores para t = 0, 1, 2, 3, 5 y 10 segundos.

b) Represéntala en unos ejes coordenados.

c) ¿Qué dibujo se obtiene?

11. Representa las funciones:

a) $y = 3^x$ b) $y = (1/4)^x$

c) $y = 3 \cdot 2^x$ d) $y = 5 \cdot 0{,}6^x$

12. Calcula las imágenes de x = -2, -1, 0, 1 y 2 en las siguientes funciones y represéntalas en las mismas gráficas. ¿Qué observas?

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

13. Dibuja en la misma gráfica dando valores a x = -2, -1, 0, 1 y 2. ¿Qué observas?

a) $y = 5^{-x}$ b) $y = 5^x$

14. Dibuja en los mismos ejes las funciones:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^x - 1$

c) $y = 2^{x+1}$ d) $y = (1/2)^x$

15. ¿Es más rápido el crecimiento lineal o el exponencial? Pon un ejemplo de cada una de estas funciones.

16. Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = -2x$

b) $y = \sqrt{2x + 1}$

c) $y = \dfrac{2}{x - 1}$

d) $y = |3x + 1|$

e) $y = 1 - x^2$

f) $y = (1/2)^x$

17. La gráfica de una función exponencial del tipo $y = k.a^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (1, 6).

a) Halla los parámetros k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

18. Hemos comprobado experimentalmente que, al variar la altura respecto al nivel del mar, la presión viene dada por la fórmula $P = 0.9^x$, donde P es la presión y x es la altura.

a) Calcula la presión al nivel del mar.

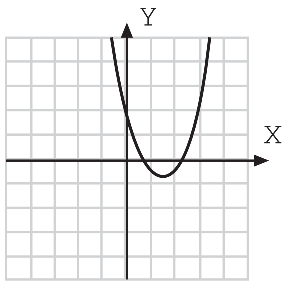
b) Calcula la presión en el punto más alto del monte Mulhacén que se encuentra a 3.478 m. de altitud.

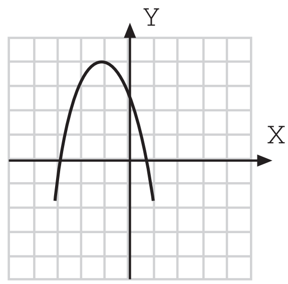
c) Calcula la presión en la parte inferior de un pozo que se encuentra a 500 m. de profundidad.

NIVEL III

1. La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas y presenta un mínimo en (3, -9). Calcula a, b y c y representa gráficamente la función resultante.

2. Cuál es el signo de los coeficientes a, b y c en cada una de las parábolas representadas en la figura siguiente:





3. Dada la función $y = x^2 + bx + 9$, encuentra el valor o los valores de b que hacen que su gráfica tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas. Interpreta el número de soluciones que has encontrado.

4. Indica cuántos puntos de corte con el eje de abscisas tiene una función cuadrática que verifica que:

a) $a > 0$ y el vértice está por encima del eje OX.

b) $a > 0$ y el vértice está en el eje OX.

c) $a < 0$ y el vértice está por encima del eje OX.

d) $a < 0$ y el vértice está por debajo del eje OX.

5. ¿Qué parábola de ecuación $y = ax^2$ es necesario trasladar para obtener la representación gráfica de la parábola $y = -2(x + 2)^2 + 5$?

6. Se sabe que el vértice de una parábola está localizado en el punto (3, -2). Si esta parábola se puede obtener por traslación de la parábola $y = -3x^2$, ¿cuál es la ecuación?

7. Representa gráficamente la función $y = -x^2$ y aplícale consecutivamente las siguientes transformaciones:

a) Traslación de dos unidades hacia la izquierda y tres unidades hacia arriba.

b) Giro de 180º de centro el punto máximo de la función.

¿Cuál es la ecuación de la función resultante?

8. Una empresa de construcción tarda dos semanas en realizar un km. de carretera:

a) Busca una función que relacione el número de empresas y el número de semanas empleadas para construir un km.

b) Escribe una función que relacione el número de empresas y el de km. construidos en dos semanas.

c) Representa gráficamente ambas funciones.

9. Halla los puntos de intersección de las gráficas $y = 2/x$ e $y = 2x$. Represéntalas y comprueba que tus resultados son correctos.

10. Da valores a x y representa la función $y = |x^2 - 5x + 6|$. ¿Qué observas?

11. Representa la función $y = \sqrt{x - 5}$ dando valores a x. ¿Qué valores no puede tomar x?

12. Hay un tipo de bacterias que se reproducen por bipartición cada 10 minutos, es decir, al cabo de este tiempo cada bacteria se divide en dos. Partimos de una bacteria:

a) Haz una tabla.

b) Representa estos valores sobre los ejes.

c) ¿Qué tipo de función es?

d) Calcula su fórmula.

13. Hay en algunos lagos africanos una planta acuática que se reproduce por bipartición. Partiendo de una planta al cabo de un día habrá dos, al siguiente día habrá cuatro, al siguiente ocho y así sucesivamente. Después de un mes, el lago está totalmente cubierto de plantas acuáticas. ¿Cuánto tiempo tardarían cuatro plantas en cubrir todo el lago?

14. El periodo de semidesintegración de una sustancia radiactiva es de 20 años, es decir, si partimos de 100 gramos de sustancia, al cabo de 20 años quedarán 50 gramos, al cabo de 40 años quedarán 25 gramos y así sucesivamente.

a) Completa la siguiente tabla:

Tiempo (años) 20	40	60	80	100
Masa (gramos)				

b) Haz la representación gráfica.

c) Calcula la fórmula de la función.

15. Los arqueólogos utilizan la prueba del carbono 14 para descubrir la antigüedad de los objetos. Para medir la cantidad de carbono 14 que tiene cualquier objeto utilizan la fórmula: $C = 27.e^{-0,12094t}$, donde t es el tiempo en años y C es la cantidad que queda medida en gramos.

a) ¿Qué cantidad de C_{14}, tendrá un trozo de loza de 500 años de antigüedad? ¿Y de 1.000 años?

b) Completa la siguiente tabla utilizando la calculadora:

Tiempo (años)	0	500	1.000	1.500	2.000	2.500
C	27					

c) Haz la representación gráfica.

16. Ingresamos 600 euros en un banco y nos ofrecen estas dos posibilidades para hallar los intereses:

a) Todos los meses nos dan el 6% de la cantidad inicial.

b) Cada mes nos dan el 6% de lo que nos dan el mes anterior.

i) Calcula el dinero que tenemos en el banco durante los seis primeros meses del año según las dos posibilidades.

ii) ¿Qué tipo de crecimiento tiene cada posibilidad?

iii) Halla la fórmula de cada una de ellas.

17. Un profesor le propone a un alumno lo siguiente: tú el primer día me darás 100 euros, el segundo 200 euros, el tercero 300 euros y así sucesivamente durante una semana. Yo en cambio a ti te daré 25 euros por el primer día, 50 por el segundo, 100 euros por el tercero y así sucesivamente.

a) Haz una tabla de valores y calcula las fórmulas correspondientes de lo que le da el alumno al profesor y el profesor al alumno.

b) Quién sale ganando y por qué.

Unidad n.º 9

Técnicas de recuento. Combinatoria

Objetivos

– Deducir el principio multiplicativo utilizando diagramas de árbol .... (I-II-III)
– Utilizar diagramas de árbol para resolver problemas de combinatoria .... (I-II-III)
– Reconocer las variaciones con y sin repetición y las permutaciones, y distinguir unas de otras .... (I-II-III)
– Deducir la fórmula de las combinaciones .... (II-III)
– Resolver problemas de combinatoria .... (I-II-III)
– Utilizar los números combinatorios y sus propiedades .... (III)

Contenidos

Conceptos

1. Principio multiplicativo y diagramas de árbol:
   1.1. Resolución de problemas sencillos mediante diagramas de árbol .... (I-II-III)
   1.2. Principio multiplicatico .... (I-II-III)
2. Variaciones y permutaciones:
   2.1. Variaciones con repetición .... (I-II-III)
   2.2. Variaciones sin repetición .... (I-II-III)
   2.3. Permutaciones ordinarias .... (I-II-III)
   2.4. Permutaciones con repetición .... (II-III)
3. Combinaciones:
   3.1. Combinaciones sin repetición .... (I-II-III)
   3.2. Relación entre las variaciones y las combinaciones .... (I-II-III)
   3.3. Números combinatorios. Propiedades .... (III)

Procedimientos

– Utilización de diagramas de árbol y del principio multiplicativo para calcular todos los casos posibles en un problema .... (I-II-III)
– Reconocimiento de situaciones donde hay que aplicar la combinatoria y aplicación de la más adecuada al contexto, según los elementos que intervienen y si importa o no el orden de éstos .... (I-II-III)
– Utilización de las fórmulas de la combinatoria para resolver distintos problemas, reflexionando siempre sobre la coherencia de los resultados .... (I-II-III)
– Demostración de alguna propiedad de los números combinatorios .... (III)
– Utilización de la calculadora científica para los cálculos de combinatoria .... (III)
– Resolución de problemas reales aplicando las técnicas de la combinatoria .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

– Se debe insistir mucho en la utilización de los diagramas de árbol. Debe ser una unidad eminentemente práctica. Parece mejor plantear un problema real, que lo intenten resolver a su manera y luego resolverlo con las técnicas que nos proporciona la combinatoria. Se dará mucha importancia a la resolución correcta del problema, cualquiera que sea el método utilizado.

Criterios de evaluación

– Utilizar los diagramas de árbol y el principio multiplicativo en la resolución de problemas . (I-II-III)
– Reconocer en qué situaciones hay que aplicar las técnicas de la combinatoria y utilizar la más adecuada .... (I-II-III)
– Distinguir entre variaciones y combinaciones según importe o no el orden .... (I-II-III)
– Utilizar la calculadora científica en las fórmulas de combinatoria (funciones especiales) . (III)
– Demostrar alguna propiedad de los números combinatorios .... (III)

Actividades

NIVEL I

1. Laura tiene tres pares de zapatos, dos pantalones y cuatro camisas.¿De cuántas formas diferentes puede vestirse?

2. La primera división de fútbol está formada por 20 equipos. ¿De cuántas formas diferentes podrán quedar clasificados al final de la temporada los tres primeros equipos?

3. Al lanzar tres veces una moneda ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

4. Se lanzan dos dados de diferentes colores. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? ¿Y si se lanzan tres dados?

5. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, pudiéndose repetir las cifras?

6. ¿De cuantas formas se pueden repartir tres premios distintos entre Juan, María, Pedro, Alicia y Pilar, de manera que, a lo sumo, reciban un único premio?

7. ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, secretario y tesorero de un club de baloncesto sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

8. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?

9. ¿De cuántas formas se pueden sentar seis personas en una fila de butacas de un cine?

10. En una escalada, una determinada cordada está compuesta por cinco escaladores. Teniendo en cuenta que van uno detrás de otro, ¿de cuántas formas podrán llegar a la cima?

11. Una persona ha escrito 4 cartas dirigidas a 4 personas distintas, y sus correspondientes sobres. A la hora de meter las cartas en los sobres la llaman por teléfono y, sin fijarse, va introduciendo, al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas distintas podrá rellenar los sobres?

12. Una prisión tiene 5 celdas individuales. Llegan tres presos.¿De cuántas formas se pueden distribuir?

13. A una reunión asisten 5 personas y se intercambian saludos entre todas. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

14. Cuatro amigos deciden organizar un torneo de ajedrez. En la primera fase se han de enfrentar de todas las formas posibles. ¿Cuántas partidas se realizarán?

15. Un estudiante tiene que contestar ocho de las diez preguntas del examen. ¿De cuántas formas diferentes puede contestar? ¿Y si las tres primeras son obligatorias?

16. En un bar hay cuatro tipos de bocadillos y cinco tipos de bebidas. ¿Cuántas meriendas (bocadillos y bebidas) distintas se pueden elegir?

17. Se lanzan un dado y una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener? Haz un diagrama de árbol.

18. Escribe todas las palabras posibles de tres letras diferentes (con o sin sentido) con las letras de la palabra MORA. Haz el diagrama de árbol correspondiente.

19. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse cinco personas en un banco de tres asientos? ¿Y en un banco de cinco asientos?

20. El menú del día de un restaurante ofrece las siguientes opciones:

Primer plato: Sopa/Ensalada.

Segundo plato: Filete/Merluza/Tortilla.

Postre: Macedonia/Flan.

¿De cuántas formas distintas puede un cliente elegir su menú?

21. En un monte hay ocho casas. Cada casa se comunica con cada una de las restantes por un camino. ¿Cuántos caminos las unen?

22. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono?

23. En una rifa colegial se han hecho mil papeletas, numeradas desde 000 hasta 999. ¿Cuántos capicúas hay?

24. En un equipo de fútbol se cuenta con cinco delanteros centro y el entrenador quiere jugar con dos. Si los cinco tienen las mismas características, ¿de cuántas formas diferentes los puede poner en la alineación?

25. ¿Cuántos son los números naturales que se pueden escribir con dos dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 sin que se repita ninguno? ¿Cuántos terminan en cinco? ¿Cuántos comienzan por tres?

NIVEL II

1. ¿Cuántas columnas rellena un quinielista que juega cinco triples? ¿Y uno que juega siete dobles?

2. ¿Cuántas columnas debe llenar un quinielista para tener la seguridad de acertar los catorce resultados?

3. ¿Cuántos números hay entre 5000 y 6000 que tengan todas sus cifras diferentes?

4. Cinco amigos disponen de un coche para trasladarse de un lugar a otro. Sólo dos de ellos saben conducir. ¿De cuántas maneras podrán colocarse para hacer sus viajes?

5. ¿Cuántos grupos de letras se formarán con las de la palabra Isabel, con tal que no vayan ni dos vocales ni dos consonantes juntas? ¿Cuántos de esos grupos comienzan por vocal?

6. Un equipo de fútbol de primera división tiene tres porteros, siete defensas, cinco centrocampistas y siete delanteros. En cada partido juegan con un sistema uno, cuatro, tres, tres, respectivamente. ¿Cuántas alineaciones distintas podrá hacer el entrenador de dicho equipo si no acostumbra a cambiar a los jugadores de sus líneas habituales?

7. La descomposición factorial de un número es: $N=2^x.3^y.5^z$. Los exponentes son 1,2 y 3 pero no sabemos cuál es cada uno.¿Cuáles son todos los posibles números?

8. Jesús, Marian y Raquel coinciden en el ascensor de su casa, en la planta baja.¿De cuántas formas pueden salir del ascensor atendiendo al número de plantas, sabiendo que la casa tiene 6 plantas? ¿Cuántas de las formas anteriores incluyen tres paradas de ascensor?

9. En un monte hay x casas. Cada casa se comunica con cada una de las restantes por un camino. Si hay 28 caminos, halla x.

10. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de x lados?

11. ¿Cuántas series de 6 signos Morse pueden hacerse con 3 puntos y tres rayas?

12. En el banquete que sigue a una boda se sientan en la mesa presidencial ocho personas, incluidos los novios. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar de manera que los novios no se separen?

13. Halla el número de capicúas de ocho cifras. ¿Cuántos capicúas hay de nueve cifras?

14. ¿Cuántos números de cinco cifras tienen la cifra 1 en las decenas? ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

15. En un centro hay 40 alumnos de 1º, 37 de 2º, 30 de 3º, y 25 de 4º. Para hablar con la dirección se quiere formar una comisión que esté integrada por un alumno de cada curso. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

16. Con nueve alumnos de una clase se desea formar tres equipos de tres alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

17. Para hacer una apuesta a la Lotería Primitiva hay que marcar con cruces seis números comprendidos entre el 1 y el 49. ¿De cuántas formas diferentes una persona puede marcar seis números?

18. Halla:
    a) Vn, 2
    b) Vn + 1,3
    c) Vn – 3,3

19. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\mathrm{V}n{,}2 + \dfrac{n+3}{4} = 22$

b) $\dfrac{\mathrm{V}n{,}\ 3}{n-1} = 48$

c) $\mathrm{V}n{,}2 + \mathrm{V}n\text{-}2,\ 2 + \mathrm{V}n\text{-}4{,}2 = 98$

20. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas, sin empezar por cero, se pueden escribir con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Cuántos son múltiplos de 25?

21. Halla la suma de todos los números de 3 cifras diferentes que pueden formarse con 1, 2, 3, 4 y 5.

22. Un byte es una secuencia de 8 dígitos binarios (solo ceros y uno), como por ejemplo: 01011101. ¿Cuántos bytes distintos hay?

23. En una clase hay 15 chicos y 20 chicas. ¿Cuántas comisiones formadas por 2 chicos y 3 chicas pueden formarse? ¿En cuántas de éstas aparece María? ¿En cuántas no hay ninguno de dos chicos determinados?

24. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de PANAMA si las consonantes deben estar separadas?

NIVEL III

1. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden escribirse con los números 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de estos son pares?

2. Si ordenases de menor a mayor todos los números del problema anterior, ¿cuál ocuparía el lugar 48?

3. ¿Cuánto vale la suma de todos los números de 4 cifras distintas?

4. Halla n sabiendo que $\mathrm{V}10{,}n = 30.240$

5. Halla n sabiendo que $\mathrm{V}n{,}5 = 15440$ y $\mathrm{V}n{,}3 = 1716$

6. Resuelve la ecuación:

$$\frac{(n+3)! \cdot (n-1)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{90}{7}$$

7. Si se ordenan en orden creciente todas las permutaciones posibles de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿qué lugar ocupa en la sucesión el número 34125?

8. Una persona tiene doce libros distintos de tres tamaños diferentes : 3 grandes, 5 medianos y 4 pequeños. ¿De cuántas formas puede alinearlos en un estante si desea colocar juntos los del mismo tamaño?

9. Si ordenamos de menor a mayor todos los números de seis cifras que podemos formar con tres unos, dos doses y un tres, ¿qué número ocupa el lugar 50?

10. ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse con seis unos, cinco equis y cuatro doses?

11. Demuestra que

$$\text{a)}\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

12. Resuelve estas ecuaciones

$$\text{a)}\ \binom{10}{8} = \binom{10}{n}$$

$$\text{b)}\ \binom{20}{n} = \binom{20}{3n}$$

$$\text{c)}\ \binom{28}{n} = \binom{28}{2n-5}$$

13. ¿Cuántas palabras distintas, con sentido o sin él, se pueden formar con todas las letras de a) Pamplona b) Zaragoza c) Matemáticas

14. Demuestra que

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

15. Comprueba la igualdad

$$\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$$

16. Resuelve el sistema:

$$\binom{n}{p-1} = \binom{n}{p+1}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{21}{10}\binom{n}{p-2}$$

17. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 8 regalos distintos entre Carlos, Sabino y Maylo, de modo que a Carlos le correspondan 2, a Sabino 3 y los demás a Maylo?

18. En un sorteo hay 10.000 papeletas numeradas del 0000 al 9999. ¿Cuántas de ellas están formadas por tres cifras distintas (por ejemplo 2472)?

19. Un quinielista juega cada semana tres triples y cinco dobles. ¿Cuántas apuestas realiza?

20. ¿Cuánto vale la suma de todos los capicúas de cinco cifras?

Unidad n.º 10

Probabilidad

Introducción

La estadística y probabilidad son de gran actualidad en el mundo de las Matemáticas y cada día tienen más auge ; se estudian en todo tipo de carreras y tienen relación con las Ciencias aplicadas y con las Ciencias Sociales; son temas de la vida real y que aparecen todos los días en prensa, televisión, etc.

Parece interesante explorar los conocimientos que los alumnos tienen del tema y la idea intuitiva que tienen de probabilidad y a partir de ahí dar forma a los contenidos de esta unidad.

Veremos qué es un experimento aleatorio, espacio muestral,sucesos,operaciones entre sucesos, definición de Probabilidad y la regla de Laplace.

Los tipos de sucesos, los experimentos compuestos y la probabilidad condicionada se explicarán (sobre todo a los de más nivel) después de haber asentado bien los conceptos anteriores con bastantes ejemplos intuitivos.

Conocimientos previos

Esta unidad se dará después de la unidad de Técnicas de Recuento y Combinatoria.

Es importante que dominen las técnicas de recuento, sobre todo el principio multiplicatico y los diagramas de árbol.

Conviene también que sobre todo los de mejor nivel, conozcan la combinatoria e incluso puede ser interesante el manejar los números combinatorios, aunque particularmente no se considera imprescindible.

Objetivos

- Utilizar correctamente el lenguaje básico del azar .... (I-II-III)
- Realizar las operaciones unión e intersección entre sucesos .... (I-II-III)
- Aplicar la regla de LAPLACE para la obtención de la probabilidad de sucesos sencillos (I-II-III)
- Utilizar los diagramas de árbol y las tablas de contingencia para la resolución de problemas (I-II-III)
- Calcular la probabilidad de un suceso, sabiendo que se ha realizado otro (probabilidad condicionada) .... (II-III)
- Hallar la probabilidad de la intersección de dos sucesos dependientes y de dos independientes .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Fenómenos aleatorios. Terminología:
   - 1.1. Experimentos aleatorios .... (I-II-III)
   - 1.2. Definición de espacio muestral. Definición de sucesos .... (I-II-III)
2. Operaciones con sucesos:
   - 2.1. Unión e intersección de sucesos. Definición y ejemplos .... (I-II-III)
   - 2.2. Propiedades de la unión e intersección .... (I-II-III)
   - 2.3. Suceso contrario. Sucesos compatibles e incompatibles .... (I-II-III)
3. Definición de probabilidad. Regla de LAPLACE:
   - 3.1. La frecuencia como probabilidad. Propiedades de la frecuencia .... (I-II-III)
   - 3.2. Asignación de probabilidades. Regla de LAPLACE .... (I-II-III)
   - 3.3. Propiedades de la probabilidad .... (II-III)
4. Probabilidad compuesta:
   - 4.1. Experimentos compuestos .... (II-III)
   - 4.2. Probabilidad condicionada .... (II-III)
   - 4.3. Sucesos dependientes e independientes .... (II-III)

Procedimientos

- Realización de experimentos aleatorios para comprobar el carácter imprevisible del azar . (I-II-III)
- Representación gráfica de la frecuencia relativa de un suceso. Comprobación de la estabilidad de las frecuencias relativas .... (I-II-III)
- Aproximación de la idea de probabilidad a partir de la de frecuencia relativa .... (I-II-III)
- Construcción del espacio muestral asociado a un experimento .... (I-II-III)
- Diagramas de árbol. Recuento de resultados .... (I-II-III)
- Aplicación de la regla de LAPLACE .... (I-II-III)
- Utilización de las técnicas de recuento y combinatorio en los problemas de probabilidad . (II-III)
- Distinción entre sucesos dependientes e independientes .... (II-III)
- Cálculo de probabilidades condicionadas .... (II-III)

Metodología

- Para introducir este tema, conviene empezar jugando. El juego normalmente apasiona a los chicos a esta edad; se puede empezar jugando con un dado o dos, con una baraja, con la lotería, etc. y preguntarles ¿cuál es la probabilidad de...? ¿Qué te parece más probable...?
- Veremos que la idea que tienen de probabilidad es muy aproximada a la de la regla de Laplace; que intuitivamente,sin conocer el concepto de suceso ni de operaciones entre sucesos,resuelven muchos problemas sencillos. Un juego muy bonito para adentrarse en la probabilidad es el juego de “los chinos”. En este juego se dan cuenta que para hallar la probabilidad de

algunos sucesos ya no les vale sólo la intuición; necesitan técnicas como los diagramas de árbol, para resolver muchas cuestiones.

- Les gusta que les cuentes un poco el origen de la probabilidad, los problemas que el caballero de Meré proponía a los matemáticos contemporáneos, antes de entrar en materia.
- Como siempre, conviene que el profesor plantee los objetivos de la unidad; se podría hacer a través del planteamiento de cuestiones y problemas que vamos a tener que resolver.
- Es importante definir los conceptos de espacio muestral y suceso así como las operaciones de unión e intersección, aclarar estos conceptos con ejemplos intuitivos y diagramas de Venn, recordar los conceptos de frecuencia absoluta y relativa y definir la probabilidad como límite de la frecuencia relativa.
- Al tratar la regla de Laplace es preciso hacer hincapié en la exigencia de equiprobabilidad de los sucesos elementales, poner algún ejemplo interesante.
- Conviene hacerles ver que si dos sucesos son incompatibles la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades; que los sucesos contrarios son un caso especial de los incompatibles; mostrarles con ejemplos, cómo en algunos problemas es mejor, en vez de hallar directamente la probabilidad de un suceso, hallar la de su contrario, y luego restarla de uno.
- En caso de sucesos compatibles la intersección es no vacía y por tanto paro hallar la probabilidad de la unión de dos sucesos si sumamos $p(A)$ y $p(B)$ estamos contando dos veces la intersección; hay que restar por tanto $p(A\cap B)$; así podemos explicar $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- Podemos definir los experimentos compuestos como una repetición de experimentos simples. Esto nos permitirá hacerles comprender mejor que la probabilidad de un camino es igual que el producto de las probabilidades de sus ramas.
- Las tablas de contingencia son muy útiles para resolver ciertos problemas de probabilidad.
- Los conceptos de sucesos dependientes e independientes y el de probabilidad condicionada son dos caras de la misma moneda y conviene que los alumnos de más nivel se familiaricen con estos conceptos y hagan problemas para afianzarlo.
- A nivel de funcionamiento en aula, si tenemos alumnos de los tres niveles, en primer lugar se les dará a todos los ejercicios de primer nivel para que hagan en clase (en pequeños grupos o individualmente) y en casa.
- A los que terminen estos ejercicios les daría los de nivel II y a continuación los de nivel III.
- Es una forma de que ellos mismos vayan clasificando sin que se sientan nunca discriminados.
- Se pueden corregir en clase para todos o en pequeños grupos los ejercicios que previamente han intentado hacer y que les planteen dificultades. Aunque los hayan realizado bien, se les pueden mostrar otros procedimientos que los enriquezcan matemáticamente y les aporte ideas nuevas para posteriores problemas.

Temporalización

Si se ha visto la unidad de TÉCNICAS DE RECUENTO Y COMBINATORIA con cierta intensidad, dedicaría a esta unidad de probabilidad 3 semanas aproximadamente (12 sesiones). Las dos últimas sesiones serían la 1ª para hacer el control y la otra para corregirlo en común, analizar los fallos y aciertos y los procedimientos utilizados.

Criterios de evaluación

- Formar el espacio muestral de un experimento, utilizando si se necesita diagramas en árbol (I-II-III)
- Asignar probabilidades en experimentos sencillos .... (I-II-III)
- Calcular la probabilidad de un suceso, aplicando regla de LAPLACE .... (I-II-III)
- Hallar las probabilidades de la unión e intersección de sucesos aplicando las propiedades de la probabilidad .... (II-III)
- Calcular probabilidades condicionadas .... (II-III)

Modelo de prueba objetiva

Se trata de un control de 10 ejercicios. Los 6 primeros corresponden al nivel I, los dos siguientes al nivel II y los dos últimos al nivel III. El control lo hacen todos y cada ejercicio vale un punto.

1. Se lanza un dado. Halla la probabilidad:

a) de salir el 3
b) de salir un número par
c) de salir un número mayor que 2

2. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos monedas:

a) salgan dos caras
b) salgan cara y cruz
c) salgan dos cruces

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de sus puntos sea:

a) igual a 5
b) mayor que 10

4. En una baraja de 40 cartas, se saca una. Halla la probabilidad de que sea:

a) sea el as de oros
b) sea rey
c) sea oros no sea oros

5. En una familia de tres hijos. Cuál es la probabilidad de que:

a) los tres sean chicos
b) sean dos chicos y una chica
c) alguno sea chico

6. El espacio muestral de un experimento aleatorio es E = $\{a,b, c\}$ sabemos que p$\{a\}$ = 0,2 p$\{b\}$= 0,5 ¿Cuánto vale p$\{c\}$?

7. Jaime lanza 6 monedas al aire. Halla la probabilidad de que al menos le salga una cara.

8. Haciendo una apuesta en la lotería primitiva ¿Cuál es la probabilidad de acertar los seis? ¿Y de no acertar ninguno?

9. En una bolsa hay tres bolas numeradas del 1 al 3. Se saca una bola, se vuelve a meter en la bolsa y se saca de nuevo una bola ¿qué probabilidad hay de que al mayor número aparecido sea el dos?

10. Se dispone de una urna A con 7 cartas numeradas del 1 al 7 y una urna B con 5 cartas numeradas del 1 al 5. Se escoge una urna al azar y se saca una carta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?

b) Si el número es par, halla la probabilidad de que la carta proceda de la urna A.

Actividades

NIVEL I

1. Sea el experimento aleatorio "lanzar un dado". Escribe el espacio muestral e indica dos sucesos aleatorios que consten de tres sucesos elementales cada uno.

2. Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Escribe los sucesos contrarios de los siguientes:

a) A = "sacar un as"

b) B = "sacar puntuación inferior a siete"

c) C = "sacar espadas, bastos o copas"

3. Se lanza un dado. Escribe los siguientes sucesos y halla sus probabilidades:

a) A = "obtener un número mayor que 3"

b) B = "obtener un número primo"

c) C = "obtener puntuación impar"

d) D = "obtener puntuación positiva"

4. Con los datos del problema anterior, indica qué sucesos son los siguientes y halla la probabilidad de cada uno.

a) $\bar{A}$

b) $A \cap B$

c) $A \cup C$

d) $B \cap \bar{B}$

e) $\overline{A \cap B}$

f) $\bar{A} \cap \bar{B}$

g) $\overline{A \cup B}$

h) $\bar{A} \cap \bar{B}$

i) $(A \cap B) \cap C$

j) $\overline{(A \cap B) \cap C}$

k) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}$

5. El espacio muestral de un experimento aleatorio es $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Sean los sucesos:

$A = \{3,5,6,8\}$ $B = \{1,2,3,4,8,9\}$ $C = \{1,4,5,7,9\}$

Calcula la probabilidad de los sucesos:

a) $\bar{C}$

b) $A \cup C$

c) $A \cup \bar{C} \cup B$

d) $A \cap \bar{B}$

e) $A \cap \bar{B}$

f) $\bar{A} \cap B$

6. Con los datos anteriores, halla los siguientes sucesos y sus probabilidades.

a) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$

b) $\overline{(A \cap B) \cap C}$

c) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}$

d) $B \cup (A \cap C)$

e) $(B \cup A) \cap (B \cup C)$

f) $B \cap (A \cup C)$

g) $(B \cap A) \cup (B \cap C)$

7. Se considera el experimento aleatorio “lanzar tres monedas”. Construye el espacio muestral.

8. Sea el experimento del problema anterior. Se consideran los sucesos:

A = “sacar solo una cara”

B = “sacar al menos una cruz”

C = “sacar tres caras o tres cruces”

Halla las probabilidades de:

a) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

b) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$

c) $C \cap \bar{B}$

d) $\overline{A \cap \bar{B}}$

e) $\bar{A} \cup B$

f) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$

g) $\overline{(A \cap B) \cap C}$

9. En un determinado experimento aleatorio el espacio muestral consta de sólo tres sucesos elementales siendo la probabilidad de los dos primeros son 0,2 y 0,5. ¿Cuál es la probabilidad del tercero?

10. En un experimento aleatorio el espacio muestral es E = {a, b, c, d} sabiendo que:

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{8} \text{ y } P(\{c\}) = \frac{1}{5} \text{ Halla } P(\{d\})$$

11. Sea el experimento aleatorio “lanzar un dado”. Halla la probabilidad de los sucesos:

A_1 = “sacar un número par”

A_2 = “sacar un número primo”

A_3 = “sacar un número menor que 3”

A_4 = “sacar un número par mayor que 4”

A_5 = “sacar un número par o mayor que 4”

12. Halla la probabilidad de que al lanzar dos dados aparezca:

a) en el primero un número impar y en el segundo un múltiplo de 3

b) en el primero par y en el segundo mayor que 2

13. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de sus puntos sea:

a) 5
b) mayor o igual que 10
c) múltiplo de 3

14. Durante el curso 1986/87 el número de estudiantes de los antiguos BUP y COU, en Aragón, fue:

	Huesca	*Teruel*	*Zaragoza*
Centro Publico	5091	2277	17805
Centro Privado	1284	896	12775

Si hubiese elegido una de esas personas al azar, calcula la probabilidad de que estudiase en:

a) Zaragoza
b) Un centro privado de Teruel
c) Un Centro Público

15. Calcula la probabilidad de que al levantar una ficha del dominó:

a) sea una ficha doble
b) la suma de sus puntos sea 6

16. Tengo en la mano seis cartas con los números 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mi amigo toma una al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número menor que 4?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número que obtenga sea divisible por 2?

17. Si extraes una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de:

a) Que sea un caballo
b) Que sea una copa
c) Que sea el caballo de copas
d) Que sea un caballo o una copa

18. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea roja o verde
b) No sea roja
c) Sea roja o amarilla

19. Una bolsa contiene 100 papeletas de una rifa numeradas del 1 al 100. Se extrae una papeleta al azar. ¿Cuál el la probabilidad de que:

a) el número extraído tenga una sola cifra;
b) el número extraído tenga dos cifras;
c) el número extraído tenga tres cifras;
d) el número extraído tenga cuatro cifras?

20. Tres amigos de edades 14, 15 y 16 años están esquiando juntos. Teniendo en cuenta que llegan al arrastre de uno en uno, ¿cuál es la probabilidad de que lleguen por orden de edades?

21. Se lanza una moneda cuatro veces. ¿Cuál el la probabilidad de que todas sean caras? ¿Y de que todas sean cruces? ¿Y de que todas sean o bien caras o bien cruces?

22. En un instituto hay 1.000 alumnos repartidos por cursos de esta forma:

	Primero	*Segundo*	*Tercero*	*Cuarto*
Chicos	120	100	95	85
Chicas	200	150	130	120

Elegido un alumno al azar, calcula las siguientes probabilidades:

a) Ser chico
b) Ser chica
c) Ser alumno de primero
d) Ser alumno de segundo
e) Ser alumno de tercero
f) Ser alumno de cuarto
g) Ser chica y alumno de cuarto
h) Ser chico y alumno de segundo

23. En una urna hay 50 bolas entre blancas, rojas y negras. ¿Cuántas bolas hay de cada color en los siguientes casos?

a) Si $P(B) = \frac{2}{5}$ y $P(N) = \frac{1}{10}$

b) Si $P(B) = \frac{2}{5}$ y $P(N) = P(R)$

24. Se lanzan dos dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener los siguientes sucesos?

a) Un 4 y un 5
b) Primero 4 y después 5
c) Suma 9
d) Ni 4 ni 5

NIVEL II

1. En una clase hay 12 chicos y 16 chicas. Además, la mitad de las chicas y la cuarta parte de los chicos son morenos. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico y sea moreno?

2. Se elige al azar un número comprendido entre 1 y 99, ¿cuál es la probabilidad de que la cifra de las unidades sea mayor que la de las decenas? ¿Y de que su producto sea 15?

3. Una bolsa tiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 6 verdes. Se extraen sucesivamente dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean:
   a) Del mismo color
   b) De distinto color
   c) Responde a las preguntas anteriores si la extracción se hace con reemplazamiento

4. Lanzamos un dado tres veces. Halla la probabilidad de obtener:
   a) Un 3 en la primera tirada, un 4 en la segunda y un 5 en la tercera
   b) Un 3, un 4 y un 5

5. En una cadena de producción el producto fabricado pasa por tres procesos independientes. En el primero hay un 5% de fallos, en el segundo un 10% y en el tercero un 15%. Calcula la probabilidad de que un producto tenga:
   a) 0 defectos
   b) 1 defecto
   c) 2 defectos

6. De cada 8 partidos que juegan los equipos de Cabanillas y Fustiñana, Cabanillas gana 5, empata 2 y pierde 1. Si ambos juegan un torneo a tres partidos, calcula la probabilidad de que:
   a) Cabanillas gane los tres partidos
   b) Dos partidos terminen en empate

7. El coche de Quique no funciona muy bien, pues el 15% de las veces no arranca a la primera. Cuando arranca, llega tarde al trabajo con una probabilidad de 0,3, pero si no arranca, la probabilidad de que llegue tarde es de 0,8.
   a) Calcula la probabilidad de que llegue tarde y haya arrancado el coche a la primera
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue pronto al trabajo?

8. En un país hay elecciones para la presidencia del Gobierno y se presentan dos candidatos. El 35% de los votantes vota al candidato A, el 32% al candidato B y el resto se abstiene. Se sabe, además, que el 12% de los votantes de A, el 20% de los de B y el 10% de los que se abstienen pertenecen a la clase media. Si elegimos un votante, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la clase media?

9. Una caja de galletas contiene siete galletas de chocolate y cuatro de coco, otra caja tiene cinco de chocolate y tres de coco. Si elegimos una caja al azar y de ella se extraen dos galletas sin reemplazamiento, calcula:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de chocolate?
   b) ¿Y de que las dos sean de coco?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de chocolate y una de coco?

10. La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es de 0,5 y la probabilidad de aprobar ciencias, habiendo aprobado matemáticas, es de 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar matemáticas y ciencias?

11. Se sacan dos cartas sucesivamente y sin devolución de una baraja española. Hallar las siguientes probabilidades:

a) Que la segunda carta extraída sea espada, sabiendo que la primera carta fue espada

b) Que la segunda carta extraída sea espada, sabiendo que la primera carta fue copa

12. De una urna que contiene nueve bolas negras y cinco rojas se extraen sucesivamente dos bolas. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos bolas sean negras

b) Que las dos bolas sean rojas

c) Que la primera sea roja y la segunda negra

d) Que una sea roja y la otra negra

13. Se lanza un dado diez veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo números pares?

14. Un producto está formado por tres partes: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,03, de un defecto en B es 0,04 y de un defecto en C es 0,08. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?

15. En una clase hay 24 chicas y 16 chicos. Se quiere formar, al azar, una comisión compuesta por dos alumnos. Halla la probabilidad de que:

a) Sean dos chicas

b) Sean dos chicos

c) Sean una chica y un chico

16. La probabilidad de que una jugadora de baloncesto enceste al lanzar un tiro libre es *2/3*. Halla la probabilidad de que enceste alguna vez si lanza tres tiros libres.

17. Se considera 10 números, de los cuales cinco son positivos y cinco negativos. Se eligen, al azar, dos y se multiplican. ¿Qué es más fácil, el resultado positivo o el negativo?

18. En un cajón hay 12 calcetines negros y 8 grises. Se eligen dos calcetines al azar. Halla la probabilidad de que sean del mismo color.

19. Un matrimonio piensa tener dos hijos. ¿Qué es más probable, que sean de distinto sexo o que sean del mismo sexo? ¿Y si piensa tener tres hijos?

20. Nicolás lanza siete monedas al aire. Halla la probabilidad de que al menos le salga una cara.

21. En una caja hay diez botellas de naranjada y cinco de limonada. Si una persona coge al azar tres botellas, encuentra la probabilidad de que:

a) las tres sean de naranjada

b) al menos una sea de limonada

22. Si uno de cada cinco estadounidenses está calificado médicamente como “obeso”, halla la probabilidad de que al seleccionar tres de ellos al azar:

a) ninguno sea obeso

b) al menos uno sea obeso

23. De una baraja española de 40 cartas se extraen cuatro. Halla la probabilidad de que:
   a) salgan cuatro oros
   b) salgan cuatro figuras
   c) no haya ninguna figura

24. En un determinado tipo de operación se estima que la probabilidad de que surja alguna complicación es del 2% con la anestesia, del 8% durante la operación y del 3% en el postoperatorio. ¿Qué probabilidad tiene Carlos de no sufrir ninguna complicación en todo el proceso?

25. Aproximadamente, el 52% de estudiantes de 4º de ESO son chicas. ¿Cuál es la probabilidad de que si se eligen al azar dos estudiantes sean de distinto sexo?

NIVEL III

1. En una bolsa hay tres bolas numeradas del 1 al 3. Se saca una bola, se vuelve a meter en la bolsa y se saca de nuevo una bola. ¿Qué probabilidad hay de que el mayor número aparecido sea el dos?

2. En una bolsa hay 4 bolas rojas y 3 blancas, ¿qué probabilidad hay de que, al extraer las siete bolas una a una, salgan las tres blancas al final?

3. Se forman todos los números de tres cifras distintas con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. Si se elige uno al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea múltiplo de 3? ¿Y múltiplo de 9?

4. Tres chicas y tres chicos se sientan en un banco. Halla la probabilidad de que se sienten alternados.

5. ¿Qué probabilidad hay de acertar el pleno de la Lotería Primitiva si se juegan 12 números?

6. Calcula la probabilidad de obtener al menos un rey si se sacan dos cartas, cada una de una baraja de 40 cartas. ¿Y si las dos barajas se mezclan y se sacan dos cartas?

7. Se forman todas las permutaciones sin repetición de las cifras 1, 3, 6 y 9, eligiéndose una de ellas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?

8. Tres cazadores divisan una liebre en el monte y, rápidamente, disparan los tres a la vez. Si la probabilidad de que el primero acierte es de 0,2, la del segundo de 0,4 y la del tercero de 0,5. ¿cuál es la probabilidad de que la liebre siga con vida?

9. En una reunión participan cinco matrimonios. Si se eligen al azar dos personas, hallar la probabilidad de que:
   a) formen matrimonio;
   b) sean de distinto sexo.

10. En un lote de cien paquetes de pipas, hay tres que llevan premio. Si una persona compra cinco paquetes, ¿qué probabilidad tiene de obtener algún premio?

11. Un cierto producto tiene dos componentes, X e Y. Se observa que un 5% de X y un 8% de Y presentan algún defecto. Halla la probabilidad de que el producto sea perfecto.

12. Hay 10 personas haciendo cola en la taquilla de un cine, entre las que se encuentran Ana y Eva. Calcula la probabilidad de que entre las dos haya exactamente 5 personas.

13. Un grupo de turistas está compuesto por 12 personas, cinco de las cuales hablan inglés, tres italiano y el resto ambos idiomas. Si se seleccionan al azar dos personas, ¿cuál es la probabilidad de que hablen el mismo idioma?

14. Formamos todas las permutaciones posibles con las cifras 1, 2, 3, ..., 9.¿Qué probabilidad hay de que al tomar una de ellas al azar aparezcan los dígitos 1 y 2 juntos y exactamente en este orden?

15. En una reunión hay n personas. Si ninguna ha nacido en año bisiesto, halla la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día. Emplea la calculadora para averiguar el número mínimo de personas necesario para que la probabilidad anterior sea superior a 0,5.

16. En el juego del póker se reparten cinco cartas a cada participante y se juega con una baraja de tipo inglés de 52 cartas. ¿Qué probabilidad hay de recibir un póker?

17. ¿Qué probabilidad hay de obtener un full al recibir las cinco cartas en el póker?

18. Siguiendo con el juego del póker, ¿qué probabilidad hay de obtener una escalera de color? Comprueba que esta jugada, al ser más improbable, tiene más valor que un póker.

19. Según los datos del clima en una región, si un día hace sol la probabilidad de que al día siguiente también haga sol es *3/4* ; y si está nublado, la probabilidad de que siga estándolo es de *3/5*. Si el jueves amaneció nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el sábado sea un día resplandeciente?

20. Julián tiene en el bolsillo 2 monedas de 100 ptas, 3 de 25 y 2 de 5 ptas. Saca dos monedas. Calcula la probabilidad de que saque:

a) 200 ptas.
b) 125 ptas.
c) 30 ptas.

21. Sean A y B dos sucesos aleatorios. Supóngase que P (A) = 0,4 mientras que $P(A \cup B) = 0,7$. Sea P (B) = p

a) ¿Para qué valor de p son A y B sucesos incompatibles?
b) ¿Para qué valores de p son A y B independientes?

22. En dos urnas A y B se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca respectivamente. Se selecciona una al azar y se extrae también al azar una bola de dicha urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca?
b) Si la bola extraída resultó ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

23. En un cubo una de las caras va pintada de rojo, dos caras de azul y las tres restantes de negro. Se lanza el cubo tres veces.

a) Hallar la probabilidad de que salga una sola vez el rojo

b) Hallar la probabilidad de que salga las tres veces el mismo color

c) Si las tres veces ha salido el mismo color, hallar la probabilidad de que éste sea el negro.

Dar las soluciones en forma de fracción irreducible

24. Sean A, B sucesos aleatorios. Se sabe que P (A) = 0,6; P (B) = 0,4; P ($A \cap B$) = 0,3

a) ¿Los sucesos A, B son compatibles? ¿Por qué?

b) ¿Los sucesos A, B son independientes? ¿Por qué?

c) Calcular la probabilidad de que ocurra A o B (o ambos)

d) Calcular la probabilidad de que no ocurra ni A ni B

e) Calcular la probabilidad de que ocurra A, pero no B

25. En un determinado curso están matriculados 80 varones y 40 mujeres. Aprueban el curso completo 60 varones y 32 mujeres.

a) Determina la probabilidad de que un alumno del curso sea varón y apruebe

b) Halla la probabilidad de que una persona matriculada suspenda

c) Una de las personas matriculadas ha aprobado. Halla la probabilidad de que sea mujer.

4.º (B) de la E.S.O.

Matemáticas

Temporalización

Evaluación inicial

Revisión del número racional.
1 semana

Primera evaluación

Unidad 1: El número real.
4 semanas
Unidad 2: Polinomios. Factorización.
2,5 semanas
Unidad 3: Ecuación de segundo grado.
2,5 semanas

Total primera evaluación: *9 semanas*

Segunda evaluación

Unidad 4: Inecuaciones.
2,5 semanas
Unidad 5: Sucesiones y progresiones.
2,5 semanas
Unidad 6: Vectores. Movimientos en el plano.
Frisos y mosaicos.
2,5 semanas
Unidad 7: Trigonometría
3 semanas
Unidad 8: Funciones. Generalidades. Función afín.
1,5 semanas

Total segunda evaluación: *12 semanas*

Tercera evaluación

Unidad 9: Funciones elementales. Límites y continuidad
3 semanas
Unidad 10: Las funciones exponencial y logarítmica.
2,5 semanas
Unidad 11: Técnicas de recuento. Combinatoria.
2,5 semanas
Unidad 12: Probabilidad.
3 semanas

Total tercera evaluación: *11 semanas*

Total: 33 semanas

Unidad n.º 1

El
número real

Objetivos

- Reconocer los distintos tipos de números que integran el conjunto de los reales .... (I-II-III)
- Operar con números reales .... (I-II-III)
- Identificar un radical con una potencia de exponente fraccionario .... (I-II-III)
- Manejar la potenciación y radicación de números reales .... (I-II-III)
- Utilizar la calculadora en la obtención de resultados con números reales .... (I-II-III)
- Aproximar números reales .... (I-II-III)
- Acotar el error cometido al aproximar un número .... (II-III)
- Representar y ordenar números reales .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. El número irracional. Errores:
   - 1.1. Repaso de números racionales. Operaciones .... (I-II-III)
   - 1.2. Escribir números racionales en forma decimal y fraccionaria .... (I-II-III).
   - 1.3. Definición y ejemplos de números irracionales .... (I-II-III)
   - 1.4. Números aproximados. Redondeo y truncamiento .... (I-II-III)
   - 1.5. Errores en una aproximación, error absoluto y relativo .... (II-III)
   - 1.6. Existencia de números irracionales .... (II-III)
2. Número real. Representación en la recta real:
   - 2.1. Clasificación de los números reales .... (I-II-III)
   - 2.2. Orden en los números reales .... (I-II-III)
   - 2.3. Intervalos en R .... (I-II-III)
   - 2.4. Valor absoluto de un número real .... (I-II-III).
3. Operaciones con números reales:
   - 3.1. Potencias de exponente entero. Propiedades .... (I-II-III)
   - 3.2. Notación científica: uso y operaciones (con calculadora) .... (II-III)
   - 3.3. Definición de raíz cuadrada .... (I-II-III)
   - 3.4. Definición de raíces de índice n .... (I-II-III)
   - 3.5. Operaciones con radicales .... (I-II-III)
   - 3.6. Potencias de exponente fraccionario. Equivalencia con raíces .... (I-II-III)
   - 3.7. Racionalización .... (II-III)

Procedimientos

- Reconocimiento de los distintos tipos de números .... (I-II-III)
- Ordenación y representación en la recta de números reales (racionales e irracionales) . (I-II-III)
- Expresión de un número racional en forma decimal y viceversa .... (I-II-III)
- Racionalización de expresiones con radicales en el denominador .... (II-III)
- Transformación de potencias de exponente fraccionario en radicales y viceversa .... (I-II-III)
- Redondeo y truncamiento de números reales .... (I-II-III)

– Determinación del error máximo absoluto y relativo al redondear o truncar un número (II-III)
– Expresión de un número en notación científica y operaciones con números expresados en esta forma, pudiéndose utilizar la calculadora .... (II-III)
– Planteamiento y resolución de problemas con radicales .... (II-III)
– Cálculo de raíces con la calculadora utilizando exponentes fraccionarios .... (I-II-III)
– Acotación del error en una suma y un producto de dos aproximaciones de números .. (III)

Orientaciones metodológicas

– Es importante que el alumno comprenda la equivalencia entre número racional y número decimal periódico y que sepa obtener la expresión decimal a partir de la racional y viceversa. Sobre la representación de los números reales en la recta real hacer notar que los números racionales dejan infinitos huecos y que esos huecos los llenan precisamente los irracionales (niveles II y III).
– A los de niveles II y III se les puede demostrar que $\sqrt{2}$, por ejemplo, no es racional.
– En cuanto a los errores debemos hacerles comprender que lo que indica la precisión de una medida es el error relativo. (Sobre todo en los niveles II y III). Además, en estos niveles, se tratará de hacer ver al alumno que los errores van aumentando al realizar operaciones, y de ahí la utilidad de simplificar algunas expresiones.
– La calculadora debe ser un instrumento útil e importante en esta unidad.

Criterios de evaluación

– Manejar los distintos tipos de números .... (I-II-III)
– Aplicar correctamente la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis .... (I-II-III)
– Realizar operaciones con potencias y radicales .... (I-II-III)
– Utilizar correctamente las propiedades de las potencias y radicales en las operaciones (I-II-III)
– Manejar la calculadora en problemas con números reales .... (I-II-III)
– Utilizar correctamente los conceptos de precisión, aproximación y error .... (II-III)
– Racionalizar expresiones con radicales en el denominador .... (II-III)
– Operar con números expresados en notación científica .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Completa esta tabla con sí o no

Número	5	$\sqrt{2}$	-1,12	1,1212212221...	7/6	$\sqrt{4}$	$\sqrt{-3}$
Natural							
Entero							
Racional							
Irracional							
Real							

2. Escribe los siguientes nº en forma decimal y redondeando a las centésimas: (puedes usar la calculadora).

a) π
b) $\sqrt{3}$
c) 1,1616...
d) 1,6565...
e) $\frac{5}{9}$

3. Representa en la recta real los siguientes números reales:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{17}$
d) $\sqrt{3}$

4. Escribe tres nº racionales comprendidos entre *1/15* y *2/15*

5. Representa en la recta real los siguientes intervalos:

a) [2, 3]
b) (-1, -3)
c) [1, 3)
d) (-2, -5]
e) $(-\infty, 7]$

6. Representa en la recta real los números que verifican:

a) $|x| = 0$
b) $|x| = 2$
c) $|x| = |-3|$
d) $|x| = -1$

7. Representa en la recta real los intervalos que verifican:

a) $|x| \leq 2$ b) $|x| < 2$
c) $|x| \geq 2$ d) $|x| > 2$

8. Encuentra las fracciones generatrices de:

a) 1,121 b) $10,\overline{1}$ c) $2,\overline{13}$ d) $3,01\overline{27}$

9. En la descomposición de cierta cantidad de agua por electrólisis, se obtienen 2 litros de hidrógeno y 16 litros de oxígeno ¿Cuál es la producción de hidrógeno? ¿Y de oxígeno? Expresa los resultados en tanto por ciento. ¿Qué cantidad de oxígeno se obtendrán con 54 litros de agua?

10. Ordena de menor a mayor los siguientes números reales:

$\sqrt{3}$, 173, -1/3, 3,14, π, -0,33, $2,\overline{73}$, $1,7\overline{3}$, -1/5

11. Calcula:

a) $\sqrt{1024}$

b) $\sqrt{441}$

c) $\sqrt[3]{729}$

d) $\sqrt[4]{1296}$

e) $\sqrt[5]{-1}$

f) $28 - 2\sqrt{81}$

g) $\sqrt{4 + 2 \cdot 16}$

h) $8 + 2\sqrt[3]{-8}$

i) $\sqrt{400 - 16 - 60}$

j) $\sqrt{5 + \sqrt{13\ \sqrt{9}}}$

k) $\sqrt{10 + 2\sqrt{7 + \sqrt[3]{8}}}$

j) $\sqrt{4{,}7 + 1{,}06}$

l) $3\sqrt[3]{0{,}001 + 2}$

m) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}$

n) $\sqrt[5]{\dfrac{-1}{32}}$

o) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} - \sqrt{\dfrac{9}{25}}$

p) $\sqrt{\dfrac{9}{4} : \sqrt{\dfrac{121}{25}}}$

12. Calcula

a) $\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5-\sqrt{2}}\right)$

b) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\ \sqrt{2}$

13. Transforma en radicales

a) $(-3)^{1/5}$

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3/7}$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3/2}$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1/4}$

14. Halla, usando la calculadora:

$$\sqrt[5]{12^3} \qquad \frac{1}{\sqrt[7]{7^4}} \qquad \sqrt[3]{11^2}$$

15. Encuentra todos los números de tres cifras que sean cubos de un número natural

16. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir una superficie de 27,04 m^2.

17. Halla la arista de un cubo cuyo volumen es 46,656 m^3.

18. Un depósito cúbico tiene una capacidad de 157.464 litros. ¿Cuál es la superficie de cada una de las paredes del deposito?

19. Calcula y simplifica

a) $\sqrt{12} - \sqrt{48} + \sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{81}$

20. Calcula y simplifica

a) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

21. Calcula y simplifica

a) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}\ \sqrt{35}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

c) $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ $\sqrt{7{,}5}$

NIVEL II

1. Dibuja un cuadrado de 5 cm. de lado. Dibuja otro cuadrado que tenga doble área

2. Dibuja un rectángulo cuya diagonal valga 5

3. Las dimensiones de un aula son 12m de largo, 7m de ancho y 3,40m de alto. Dos moscas revolotean por el aula ¿Cuál es la distancia máxima a que pueden encontrarse?

4. Representa:

a) $[4, 6] \cup (9, 11)$

b) $[-6, 5] \cap (2, 5)$

c) $(2, 7) \cap (5, 9) \cap (6, 10)$

5. Racionalizar

a) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$

d) $\dfrac{a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

6. Calcula, expresando el resultado en forma de radical:

a) $\dfrac{(2^{1/3} \,.\, 3^{1/2})^5}{3^3 \,.\, 2^{2/5}}$

b) $\dfrac{a^{-1/2}\, a^2\, a^{2/3}}{(a^{-2}\, a^{3/2})^2}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^3}{8c}}\ \sqrt[6]{\dfrac{9c}{4ab^2}}$

7. Una célula se divide en dos partes cada 0,5 segundos, que a su vez se dividen en otras dos en el mismo tiempo ¿Cuántas células habrá al cabo de 20 segundos? Expresa el resultado en notación científica.

8. Encuentra los números capicúas comprendidos entre 400 y 800 que sean cuadrados de un número natural.

9. Efectúa y simplifica: (sin calculadora).

a) $\dfrac{5\sqrt{108} + 2\sqrt{243}}{5\sqrt{48}}$

b) $\dfrac{2 + 10^{-2}}{2 - 10^{-2}}$

c) $\dfrac{3\sqrt{125}}{4\sqrt{405} - 3\sqrt{80}}$

d) $\dfrac{2{,}53 : 10^{-2} + 3{,}5 \,.\, 10^{-1}}{3\sqrt{4/9}}$

10. Señala si son ciertos o falsos los siguientes enunciados:

a) El número *7/11* es irracional porque tiene una cantidad ilimitada de cifras decimales.

b) La longitud de cualquier circunferencia es más de 6 veces la de su radio.

c) 1,73 es una aproximación por defecto de $\sqrt{3}$.

d) Todo número real es racional.

e) No es posible medir con exactitud la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 8 cm y 6 cm.

11. El número $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:

a) $6^{1/4}$

b) $2^{1/3}$

c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$

d) 2

12. Simplifica estas expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[6]{2^5}}$

b) $(\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{\sqrt[3]{8}}$

c) $\sqrt{125} - 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$

d) $\dfrac{5}{3}\sqrt{27} - \dfrac{3}{5}\sqrt{75} + 25\sqrt{\dfrac{3}{625}}$

13. En una tienda de tejidos tienen un metro defectuoso, en lugar de medir 1 m mide 987 mm. ¿Cuánta tela de menos le han dado a una señora que ha comprado 16 m. de un tejido cuyo precio es de 1.275 ptas./m?¿Cuál ha sido la cantidad de dinero cobrada de más?

14. Al preguntarle a Luis y Rosa por sus ahorros, afirman tener aproximadamente 50.000 y 18.000 ptas., respectivamente. Luis ha cometido un error absoluto de 1.500 ptas. y Rosa de 850 ptas. ¿Entre qué valores están los ahorros de cada uno? ¿Cuál ha cometido mayor error relativo al dar la aproximación de sus ahorros si éstos son de 48.500 y 17.150 ptas.?

15. Intercala entre $2,\overline{27}$ y $2,2\overline{7}$:

a) Dos decimales periódicos puros

b) Dos decimales periódicos mixtos

c) Dos decimales exactos

16. Calcula el área y la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden $1 + 3\sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ cm. respectivamente.

17. El volumen de un prisma de base cuadrada es $4 + 3\sqrt{2}$ cm., y el lado de la base $1 + \sqrt{2}$ cm. Calcula su altura, la diagonal de la base y su diagonal.

NIVEL III

1. Demuestra que

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

2. Halla dos nº irracionales cuya suma y producto sean racionales

3. Simplifica

a) $\dfrac{6x^5y^2 + 12x^5y^4}{72x^{-1}\,y^3}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x^{-4}} - \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}}$

4. Calcula x (sin calculadora)

a) $0,3^x = 0,00243$

b) $\sqrt[x]{531.441} = 27$

c) $x^6 = 15.625$

5. Halla dos fracciones entre las que se encuentre el número π y que la diferencia entre ellas sea menor que 0,01.

6. ¿Cuánto suman las cifras del número $10^{97} - 97$?

7 ¿En qué cifra termina 2^{1997}?

8. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $|x| = 5$

b) $|x - 2| = 3$

c) $3\,|5 - 2x| = 8$

d) $|x| + |x - 3| = 7$

9. Resuelve estas ecuaciones:

$\sqrt[4]{10^{8x-4}} = \sqrt{10} \,.\, 10^{x^2-5/2};$

$\sqrt[6]{10^{6x+6}} = \sqrt[6]{3^{-12}} \,.\, 3^{x^2}$

10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el doble de su cateto menor. Si el otro cateto vale x cm. ¿Cuánto vale la hipotenusa en función de *x*?

11. La suma de dos números reales es 5 y la diferencia de sus cuadrados $1\text{-}2\sqrt{3}$. Calcula cuáles son esos números.

12. Comprueba que:

$$\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2+1}$$

13. La superficie en m^2 de una esfera es igual numéricamente a su volumen expresado en m^3. ¿Puede ser esto posible? Si tu repuesta es afirmativa ¿Cuánto vale el radio de esa esfera?

14. Un cono que tiene el diámetro de su base igual a su generatriz se dice que es equilátero. Investiga cuál es la razón de los volúmenes de dos conos equiláteros, si uno está inscrito y el otro circunscrito a una esfera de radio x. Contesta razonadamente si esa razón depende o no del número x.

15. El padre de Ana pide un presupuesto al taller para reparar el coche; le dan como cifra aproximada 35.000 ptas. y le advierten que pueden cometer un error que en ningún caso superará el 12% del presupuesto, y que el IVA (16%) no está incluido. ¿Cuál será el precio máximo que puede pagar por la reparación? ¿Y el precio mínimo?

16. En las especificaciones técnicas de una báscula indican que la precisión es de 0,005 kg. Se ha pesado una manzana y su peso resulta ser de 227 g. ¿Entre qué valores puede estar el peso real de la manzana? Suponiendo que el peso verdadero fuese 230 g. ¿Cuál sería el error relativo cometido al dar su peso como 227 g.?

17. Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{a}{\sqrt{a}-a} + \dfrac{1}{1+\sqrt{a}}$

b) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-7}$

18. Para calcular la longitud de una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ se toma como aproximación de π, 3,1415, y como aproximación de $\sqrt{2}$, 1,4142, ambas obtenidas como resultado de truncar los dos números a cuatro cifras decimales. Calcula cuántas cifras decimales correctas tiene la longitud de la circunferencia. ¿Cuál es el error máximo cometido (absoluto y relativo)?

Unidad n.º 2

Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas

Objetivos

– Calcular cocientes y restos en divisiones de polinomios .... (I-II-III)
– Aplicar la regla de Ruffini para comprobar la divisibilidad entre polinomios .... (I-II-III)
– Aplicar el Teorema del Resto .... (I-II-III)
– Factorizar un polinomio .... (I-II-III)
– Calcular el mcd y mcm .... (II-III)
– Simplificar y operar con fracciones algebraicas .... (II-III)
– Utilizar el Tª del Resto y otros resultados sobre divisibilidad de polinomios para resolver problemas .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Divisibilidad de polinomios:
   - 1.1. Cociente de monomios .... (I-II-III)
   - 1.2. Cociente de un polinomio y un monomio .... (I-II-III)
   - 1.3. Cociente de dos polinomios .... (I-II-III)
   - 1.4. División exacta. Múltiplos y divisores .... (I-II-III)
2. Factorización de polinomios:
   - 2.1. Regla de Ruffinni .... (I-II-III)
   - 2.2. Teorema del resto .... (I-II-III)
   - 2.3. M.C.D. y m.c.m. .... (II-III)
   - 2.4. Algoritmo de Euclides para el cálculo del M.C.D. .... (III)
3. Fracciones algebraicas:
   - 3.1. Valor numérico de una fracción algebraica .... (II-III)
   - 3.2. Fracciones equivalentes .... (II-III)
   - 3.3. Operaciones con fracciones algebraicas .... (II-III)

Procedimientos

– Realización de divisiones entre monomios mediante las propiedades de las potencias .. (I-II-III)
– Comprobación de que el dividendo es igual al cociente por el divisor más el resto .... (I-II-III)
– Utilización del algoritmo de la división de polinomios y de la Regla de Ruffinni para hallar el cociente y el resto y para verificar si un polinomio es múltiplo o divisor de otro .... (I-II-III)
– Utilización del Teorema del Resto para comprobar si una división es exacta y para buscar raíces enteras .... (I-II-III)
– Factorización de polinomios mediante búsqueda de raíces por tanteo y mediante resolución de una ecuación de segundo grado .... (I-II-III)
– Uso del Tª del Resto para resolver problemas de determinación de polinomios .... (II-III)
– Construcción de polinomios que cumplan determinadas condiciones .... (II-III)
– Cálculo de mcd y mcm mediante factorización de polinomios .... (II-III)

– Simplificación y realización de operaciones con fracciones algebraicas .... (II-III)
– Cálculo del mcd mediante el Algoritmo de Euclides .... (III)
– Cálculo de los coeficientes en una descomposición de una fracción en suma de fracciones simples .... (III)

Orientaciones metodológicas

– En el nivel I, el Teorema del resto únicamente se utilizará en ejercicios prácticos para calcular restos. En los niveles II y III, además de demostrarse, se utilizará para la resolución de problemas.
– Para el nivel I, bastará que el alumno adquiera los mecanismos para factorizar polinomios sencillos de forma sistemática.
– En el nivel III no se sistematizará en la descomposición de fracciones algebraicas, sino que se facilitará al alumno las fracciones simples en la que se descompone la inicial para que él, únicamente, calcule las constantes correspondientes.

Criterios de evaluación

– Calcular cocientes y restos en divisiones de polinomios mediante el algoritmo de la división y la regla de Ruffinni .... (I-II-III)
– Aplicar el Teorema del Resto para comprobar la divisibilidad entre dos polinomios .... (I-II-III)
– Factorizar un polinomio .... (I-II-III)
– Calcular el mcd y mcm factorizando previamente los polinomios .... (II-III)
– Calcular el mcd mediante el algoritmo de Euclides .... (III)
– Simplificar y operar con fracciones algebraicas .... (II-III)
– Resolver problemas utilizando el Tª del Resto y otros resultados sobre divisibilidad de polinomios .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Calcula el cociente de las siguientes divisiones:

a) $(4x^3) : (3x)$

b) $(5/2)x^4 : (5x^2)$

c) $(3x^3 - 4x^2 + 6x) : (2x)$

d) $(4x^4 - 2x^3 + x^2) : (3x^2)$

2. Halla un polinomio que multiplicado por $2x$ dé como resultado $4x^4 - 2x^2 + 5x$.

3. Efectúa las siguientes divisiones y comprueba que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto:

a) $(x^3 - 2x - 1) : (x^2 + 1)$

b) $(3x^4 + x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$

c) $(x^4 - 8) : (x^2 - 2)$

d) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$

e) $(2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x) : (x^3 - x + 1)$

¿En algún caso es el dividendo múltiplo del divisor?

4. Halla, si es posible, un polinomio que multiplicado por $x^2 + 1$ dé como resultado $x^4 + 3x^2 + 3$.

5. Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$

b) $(2x^4 + 3x^3 - 2x + 7) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 2x + 6) : (x + 4)$

d) $(x^3 + x - 3) : (x + (1/2)$

6. Sin efectuar la división, comprueba si las siguientes divisiones son o no exactas. ¿Qué resultado teórico aplicas?

a) $(x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$

b) $(3x^4 + 2x^2 - 2x + 7) : (x + 2)$

c) $((2/3)x^2 - x + 2) : (x - [1/2])$

d) $(x^{11} - 2x^9 + 1) : (x + 1)$

Cuando la división sea exacta, halla dos divisores del dividendo.

7. El valor numérico de $p(x) = x^3 + 2x + k$ para $x = 2$ es 14. Calcula el valor de k.

8. En el problema anterior, el número 14 es el resto de la división de $p(x)$ por otro polinomio. ¿De cuál?

9. En una división de polinomios, el divisor es $3x^2 - 1$, el cociente, $2x - 1$ y el resto $-x + 1$. Halla el dividendo.

10. Comprueba, sin efectuar la división, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) $x^{23} - 1$ tiene por factor $x - 1$

b) $x^{43} + 1$ es divisible por $x + 1$

c) $x - 4$ es un divisor de $x^4 - 4x^3 + 2x - 8$

d) $2x^3 + 3x - 1$ es múltiplo de $x + 2$

e) $x^8 - 1$ es divisible por $x + 1$

f) $x - 3$ divide a $x^3 + 27$

g) $x + 2$ no es múltiplo de $x^4 + 16$

11. Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común y haciendo uso de los productos notables:

a) $x^3 - 3x$

b) $2x^4 + 4x^2 - 4x$

c) $x^2 - 4$

d) $x^2 + 6x + 9$

e) $x^3 - x$

f) $x^6 - x^2$

12. Halla las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 2$

b) $2x^2 - 3x + 1$

c) $3x^2 - 12x + 12$

d) $(x - 3)(2x + 4)$

e) $x^2 + x + 1$

13. Factoriza, cuando sea posible, los siguientes polinomios de segundo grado, calculando previamente sus raíces:

a) $x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 + 4x - 12$

c) $3x^2 - 4x + 6$

d) $2x^2 - 5x + 6$

e) $2x^2 - x - 1$

14. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - x^2 - 4$

b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

d) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$

e) $2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$

15. Si $x^3 - 4x + k$ es un múltiplo de $x + 3$, ¿cuánto vale el resto de la división?¿Cuánto vale k?

16. Determina un polinomio de grado dos cuyas raíces sean 3 y 1.

NIVEL II

1. Halla los valores de a y b para que la división $(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1)$ sea exacta.

2. ¿Para qué valores de x el valor numérico del polinomio $2x^2 - 3x + 3$ es igual a 5?

3. Halla el valor de K para que el polinomio $p(x) = x^3 + Kx^2 + x + 6$ sea divisible por $x - 2$. Una vez hallado K, factoriza $p(x)$.

4. Con una cartulina cuadrada de lado x construimos un prisma cuadrado sin bases y de altura x, doblándola en cuatro pliegues. Expresa mediante un polinomio de indeterminada x el área lateral del prisma y su volumen.

5. Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 4, -2 y 1.

6. El polinomio $x^2 + ax + b$ es múltiplo de $x + 1$. Además, al dividirlo por $x - 1$ y por $x - 3$ se obtiene el mismo resto. Halla a y b y todos sus divisores.

7. Determina un polinomio de tercer grado cuyas raíces son 2, 3 y -5 y cuyo coeficiente independiente es igual a 60.

8. El polinomio $x^3 + 6x^2 + ax + b$ es divisible por $x^2 - 1$. Halla a y b y factorízalo.

9. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que su coeficiente de mayor grado es igual a 1, que su valor numérico para $x = 3$ es 4 y que es divisible por $x + 2$.

10. Halla un polinomio $p(x)$ tal que $p(2) = p(-1) = p(5) = 6$.

11. Factoriza el polinomio $x^2 - 2x - 1$.

12. Calcula el m.c.m. y el m.c.d de los siguientes polinomios:

a) $(3x - 1)^2 (x + 5)^3 (4x - 1)x$ y $(3x - 1) (x+5)^2 x^2$

b) $(x + 5) (2x + 7)^4 (x^2 + 1)^2$ y $(3x + 7)^3 (x^2 + 1)^3$

c) $x^4 - 3x^2 + 2x$ y $x^5 + 4x^4 + 4x^3$

13. Un polinomio de grado 3 es múltiplo de $x^2 + 1$ y de $2x - 3$. Además su coeficiente de mayor grado es igual a 7. ¿De qué polinomio se trata?

14. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^5 - x^3}{x^7 + x^4}$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x}{x^3 - x}$

c) $\dfrac{(x^2 - 1)(x + 3)^2}{(x + 1)(x + 3)}$

d) $\dfrac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{x^4 - 9x^2 - 4x + 12}$

15. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x}{\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}}+\dfrac{2}{x}$

b) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}-\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{3x+1}{x+3}$

NIVEL III

1. Razona qué le ocurre al cociente y al resto de una división de polinomios si al dividendo y al divisor se le multiplica por un mismo número. ¿Ocurre lo mismo si multiplicamos ambos por un mismo polinomio?

2. Halla los valores de a y b para que el resto de la división $(x^4-5x^3+3x^2+\mathrm{a}x+\mathrm{b}):(x^2-5x+1)$ sea $7x+4$

3. Sea n un número natural par y a un número real cualquiera. Razona cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

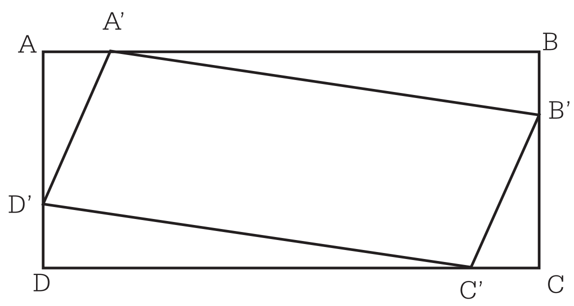
a) x^n-a^n es múltiplo de $x-a$

b) x^n+a^n es múltiplo de $x+a$

c) $x+a$ es divisor de x^n-a^n

d) $x-a$ es divisor de x^n+a^n

4. En el rectángulo ABCD, los puntos A', B', C' y D' son tales que los segmentos AA', BB', CC' y DD' miden x.



Expresa el área del cuadrilátero A'B'C'D' mediante un polinomio de indeterminada x sabiendo que el segmento AB mide 5 cm. y el BC mide 3 cm.

5. Demuestra que si a, b y c son números positivos, el polinomio $\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x-\mathrm{c}$ tiene dos raíces reales distintas de distinto signo.

6. Se sabe que la división de un polinomio p(x) por x^2-2x-3 es exacta. Calcula el valor numérico de p(x) para $x=3$.

7. Demuestra que el cuadrado de cualquier número es igual a la suma del cuadrado del anterior más el anterior más el propio número.

8. Comprueba si el polinomio $p(x)=(x-2)^{2n}+(x-3)^n-1$, en el que n es un número natural par, es divisible por $(x-2)$ y por $(x-3)$. ¿Es divisible por x^2-5x+6?

9. Calcula los valores de A,B y C para que sea cierta la siguiente igualdad para cualquier valor de x:

$$\frac{6x^2 - 5x - 9}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

10. Demuestra que un polinomio de grado n, tiene como máximo n raíces reales.

11. Demuestra que si n es un número entero distinto de cero y de -1, se cumple que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

A partir de la igualdad anterior, calcula:

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{99\,.\,100}$$

12. Demuestra que si **r** es una raíz del polinomio ax^2 + bx + c, **1/r** lo es del polinomio cx^2 + bx + a.

Generaliza el resultado a un polinomio cualquiera de grado n.

13. A una fracción algebraica F la convertimos en $\frac{1-F}{1+F}$. Prueba que si le aplicamos de nuevo la misma transformación se obtiene la fracción original F.

¿Qué ocurre si se le aplica 30 veces la transformación $\frac{1+F}{1-F}$?

14. Se sabe que el polinomio p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c es divisible por $x + 1$. Además, al dividirlo por $x - 1$, el resto de la división es 6, y si se divide por $x + 2$, el resto es -6. Halla a, b y c.

15. Utilizando el Algoritmo de Euclides, halla el mcd de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $x^3 - 7x - 6$ y $x^3 - 3x + 2$

c) $x^6 - 1$ y $x^3 - x$

Unidad n.º 3

Ecuación de 2º grado. Sistemas no lineales

Objetivos

- Resolver con corrección ecuaciones de 2º grado .... (I-II-III)
- Resolver problemas en los que intervenga la ecuación de 2º grado .... (I-II-III)
- Predecir, sin resolver la ecuación, la naturaleza y el número de soluciones analizando el discriminante .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales .... (II-III)
- Resolver ecuaciones de 2º grado completando cuadrados .... (II-III)
- Obtener el valor de la suma y el producto de las soluciones en función de los coeficientes . (II-III)
- Resolver sistemas de ecuaciones de 2º grado con dos incógnitas .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Ecuación de segundo grado:
   1.1. Definición de ecuación de segundo grado .... (I-II-III)
   1.2. Resolución analítica .... (I-II-III)
2. Raíces de una ecuación de 2º grado:
   2.1. Estudio del discriminante. Número de soluciones .... (I-II-III)
   2.2. Propiedades de las raíces; suma y producto .... (II-III)
3. Ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación de 2º grado:
   3.1. Ecuaciones racionales .... (II-III)
   3.2. Ecuaciones irracionales .... (II-III)
   3.3. Ecuaciones bicuadradas .... (II-III)
   3.4. Sistemas de una ecuación lineal y otra de segundo grado .... (I-II-III)
   3.5. Sistemas con dos ecuaciones de segundo grado .... (II-III)

Procedimientos

- Resolución de ecuaciones completas e incompletas de 2º grado aplicando el método más adecuado .... (I-II-III)
- Determinación del número de soluciones de una ecuación de 2º grado a partir del valor del discriminante .... (I-II-III)
- Aplicación de las relaciones entre la suma y el producto de las raíces y los coeficientes de la ecuación de 2º grado a la resolución de distintos problemas .... (II-III)
- Utilización de la ecuación de 2º grado para factorizar polinomios .... (I-II-III)
- Demostración de la fórmula de las soluciones de una ecuación de 2º grado .... (II-III)
- Demostración de la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de 2º grado . (II-III)
- Planteamiento y solución de problemas relacionados con ecuaciones de 2º grado .... (I-II-III)
- Resolución de un sistema formado por una ecuación lineal y otra de segundo grado .. (I-II-III)
- Resolución de sistemas con dos ecuaciones de segundo grado .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

- Puede ser interesante (Niveles II y III) que resuelvan ecuaciones por el método de completar cuadrados.
- Conviene que a los alumnos de niveles II y III se exija el método de obtención de la fórmula de resolución de la ecuación de 2º grado, así como las de la suma y producto.
- Es importante que vean que al resolver ecuaciones irracionales, a veces aparecen soluciones extrañas que hay que analizar, y que al resolver racionales, no sirven los valores que anulan a los denominadores.

Criterios de evaluación

- Resolver ecuaciones de 2º grado .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales .... (II-III)
- Resolver sistemas de 2 ecuaciones con dos incógnitas, alguna de ellas de 2º grado ...... (II-III)
- Resolver problemas cuyo planteamiento da lugar a ecuaciones y sistemas de 2º grado . (I-II-III)
- Manejar las propiedades de las raíces de la ecuación de 2º grado .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Desarrolla, ordena y resuelve:

a) $(2x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 7)$

b) $(2x + 3)^2 = x(1 - 3x)$

c) $x^3 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

2. Factoriza las expresiones:

a) $4x^2 - 20x + 25$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$

c) $3x^2 - 6x - 12$

3. Factoriza y simplifica:

a) $\frac{3x^2 + 16x + 5}{2x + 10}$

b) $\frac{x^2 - 16}{x^2 + 7x + 12}$

4. Calcula el valor de a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 1 = 0$ tenga por soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

5. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) 2 y $-\frac{3}{4}$

b) 0 y 10

c) 7 y -7

d) $5 + \sqrt{3}$ y $5 - \sqrt{3}$

6. ¿Qué número natural es 12 unidades menor que su cuadrado?

7. La diferencia entre un número y su inverso es *9/20*. Calcúlalos.

8. Halla dos números naturales consecutivos tales que la diferencia entre su producto y su suma sea 305

9. Busca dos enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 61.

10. El producto de dos números enteros consecutivos es 272. ¿Cuáles son esos números?

11. El área de un rectángulo es 40 cm^2. Determina sus lados, sabiendo que uno de ellos mide 6 cm más que el otro.

12. Calcula el volumen de un hexaedro (o cubo) de 100 cm^2 de área lateral.

13. Un agricultor tiene un campo de forma cuadrada de 25 ha. de extensión, que quiere vallar con cerca de madera que le cuesta a 2.000 ptas. el metro. ¿Cuál será el precio total?

14. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones referidas a: $x^2 - 6x + 7 = 0$ son verdaderas y cuáles falsas? razona tus respuestas

a) $x = 1$ es una solución de esta ecuación
b) Puede escribirse en la forma $(x - 3)^2 - 2 = 0$
c) Se puede factorizar como $(x + 1)(x + 7) = 0$
d) Se puede factorizar como $(x + 1)(x - 7) = 0$
e) Se puede factorizar como $(x - 1)(x - 7) = 0$
f) $x = 7$ es otra solución de esta ecuación.

15. Un factor de $x^2 - 11x - 12 = 0$ es $(x + 1)$

a) Encuentra el otro factor.
b) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?
c) Halla el valor de x que es la solución, a la vez, de la ecuación dada y de $x^2 - 8x - 9 = 0$
d) Factoriza esta última ecuación y obtén la otra solución.

16. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10m y su capacidad 4000 m^3. Halla el lado de la base sabiendo que es cuadrada.

17. ¿Qué condición ha de cumplir una ecuación de segundo grado para que una de sus raíces sea 0? Pon un ejemplo que aclare la respuesta.

18. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y + 3 = 3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

NIVEL II

1. Elimina denominadores y resuelve:

a) $1 + 2x = \dfrac{6}{x}$

b) $\dfrac{1}{2x + 2} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{2x - 1}{x + 3} = x + 1$

d) $\dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{x}{x - 1} - 1$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $1 + \sqrt{2x + 1} = x$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = 1$

c) $2t + \sqrt{2t - 1} = 1$

d) $\dfrac{\sqrt{x^2 - x - 1}}{x - 1} = 1$

e) $x + \sqrt{x + 1} = 3$

3. Escribe una ecuación de segundo grado, de soluciones 5 y -3, de modo que:

a) El coeficiente de x^2 sea 6.

b) El coeficiente del término en x sea 6.

4. Escribe una ecuación bicuadrada con soluciones:

$$1,\ -1,\ 2 + \sqrt{2} \quad \text{y} \quad -2 - \sqrt{2}$$

5. Determina el valor del parámetro m de modo que $x^2 + (1+ \mathrm{m})\, x - 2\,\mathrm{m} = 0$ tenga una solución igual a 3.

6. Averigua el valor del parámetro m de modo que en la ecuación $x^2 - x + \mathrm{m} = 0$

a) El producto de las soluciones sea 6.

b) La suma de las soluciones sea igual a su producto.

c) La diferencia entre las soluciones sea 3.

d) Las dos soluciones sean iguales.

7. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2} \\ x = 3y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ xy = 30 \end{cases}$

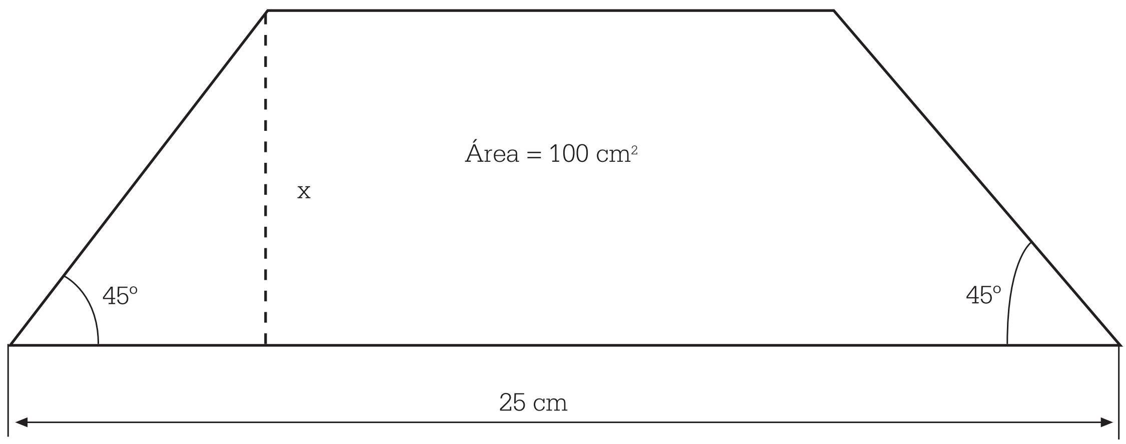
c) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 22 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 9x + 14 = 0 \\ y^2 = 16 + 4x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - y^2 + 2xy = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 8 = 0 \\ y^2 = 6y \end{cases}$

8. Calcula las dimensiones del trapecio.



9. ¿Qué círculo dobla su área al aumentar su radio 3 centímetros?

10. Varios amigos deciden comprarse un ordenador que cuesta 156.000 ptas.

A última hora se les unen dos más, y gracias a ello paga cada uno 13.000 ptas menos. Calcula el número inicial de amigos.

11. La gasolina costaba en enero 130 ptas/litro. En febrero, la subieron un tanto por ciento **r**. En marzo, la volvieron a subir en el mismo porcentaje, **r**, con lo que el litro ascendió a 132,9 pesetas. Calcula el porcentaje de subida (3 decimales).

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

c) $2x^4 + 4x^2 + 2 = 0$

d) $(x^2 - 2)^2 = (x + 3)(x - 3)$

13. Saca factor común un paréntesis y resuelve:

a) $(2x - 3)^2 + 5(2x - 3) = 0$

b) $(x + 2)(x - 2)x + 4(x - 2) = 0$

c) $(3x + 3)^3 + 3(x + 1)^2 = 0$

14. Resuelve:

a) $x^2 - \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)x + \sqrt{6} = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{2} = 0$

15. Resuelve y comprueba las soluciones:

a) $\dfrac{x + 5}{x + 2} + \dfrac{x + 2}{x} = 5$

b) $\dfrac{2x}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{1}{x - 1}$

16. Resuelve y comprueba las soluciones:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{1 + x}} = 2$

b) $\sqrt{x + \sqrt{x}} = 3$

c) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 4} = \sqrt{4x + 5}$

17. El área total de un cilindro de 9 cm. de altura es de 250 cm^2. Calcula su volumen.

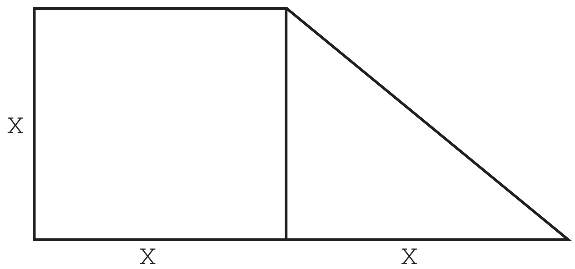
18. Halla las dimensiones:

a) De un triángulo rectángulo de perímetro 12 e hipotenusa 5.
b) De un cuadrado cuya diagonal es 2 cm mayor que el lado.
c) De un triángulo equilátero de altura 3 cm menor que el lado

19. Escribe una ecuación de segundo grado, suponiendo que la media aritmética de sus soluciones es -5 y su media proporcional,4.

20. Un padre tenía 25 años cuando nació su hijo. La media geométrica de las edades de ambos supera en 10 al número de años del hijo. Halla las edades actuales de los dos.

21. Se pretende repoblar con 60.000 árboles un bosque quemado hace dos años y cuya forma aproximada muestra la figura. Si cada árbol dispone de 1 m^2 de superficie, ¿cuánto mide el perímetro del campo?



22. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.

23. Una pieza rectangular de cinc es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^2 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

24. En cada una de las esquinas de una plancha de cartón de forma cuadrada se recorta un cuadrado de 5 cm de lado y entonces, doblando y pegando, se forma una caja de 1280 cm^2. Halla el lado de la hoja inicial.

25. Un alumno dice que toda ecuación general de segundo grado cuyo término independiente es negativo tiene raíces reales. ¿Es cierto?

26. Un librero piensa adquirir por 2520 pesetas cierto número de ejemplares de una novela. Al hacer el pedido a la editorial, ésta le contesta que el precio de cada ejemplar ha subido 3 pesetas. Entonces el librero calcula que si ha de invertir la misma cantidad tiene que adquirir 4 ejemplares menos de los que pensó en un principio. ¿Cuántos ejemplares pensó adquirir y a que precio?

27. La diagonal de un rectángulo mide 13 cm y el perímetro 34 cm. Halla los lados del rectángulo.

28. Calcula las dimensiones de un rectángulo conociendo su diagonal, 17m, y su superficie, 120 m².

29. ¿Existirá algún número tal que la suma de su cuadrado con el inverso de su cuadrado sea 6?

NIVEL III

1. Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} xy = 5 \\ x^2y = 2 \end{cases}$

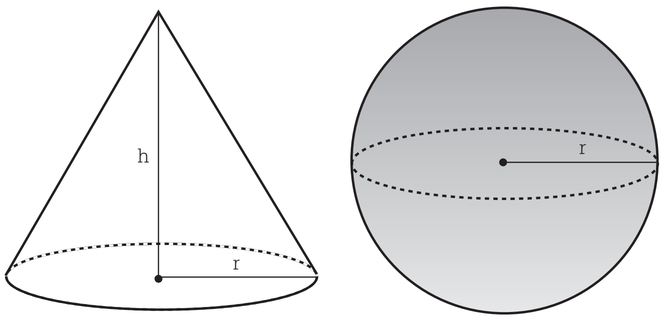
b) $\begin{cases} (x-y)^2 = 16 \\ x + y = 38 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

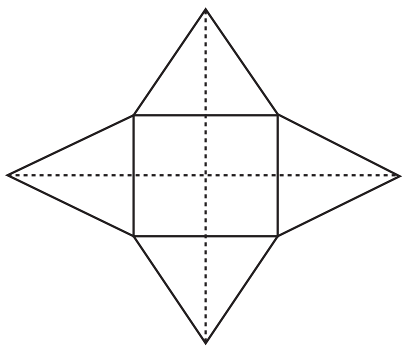
d) $\begin{cases} xy + x = 20 \\ xy + y = 18 \end{cases}$

2. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 6 lados? ¿Y uno de n lados?
Sabiendo que el número de diagonales es 28 ¿Cuántos lados tiene el polígono?

3. El cono y la esfera tienen igual volumen. Prueba que h tiene que medir cuatro veces r.



4. La distancia entre dos puntas opuestas de la estrella es 5 cm. Calcula el lado del cuadrado y la altura de los triángulos de modo que el área de la estrella sea de 9 cm².



5. Un vehículo recorre 600 Km. con una cierta velocidad media. Si la velocidad disminuyese en 10 km/h, el tiempo empleado aumentaría en una hora. ¿Qué velocidad lleva el vehículo?

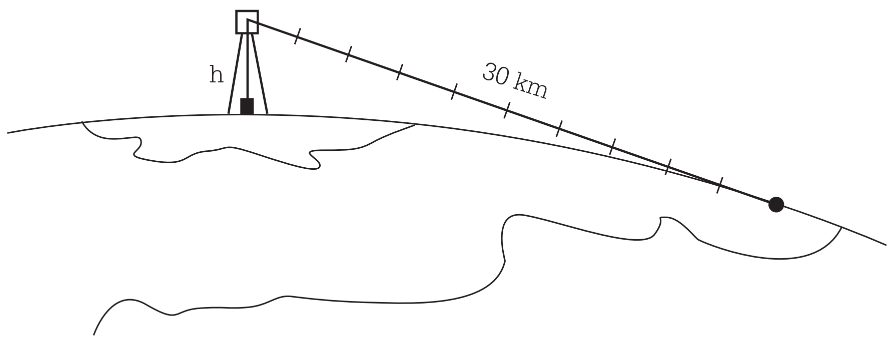
Indicación:

Espacio: e	*Velocidad: v*	*Tiempo: t*
600	V	t
600	v-10	t+1

Recuerda : e = v . t

6. Preguntado el anfitrión de una fiesta por el número de asistentes contesta: "Todos nos hemos saludado una vez estrechándonos la mano y el número de saludos ha sido 210". ¿Cuántos asistieron?

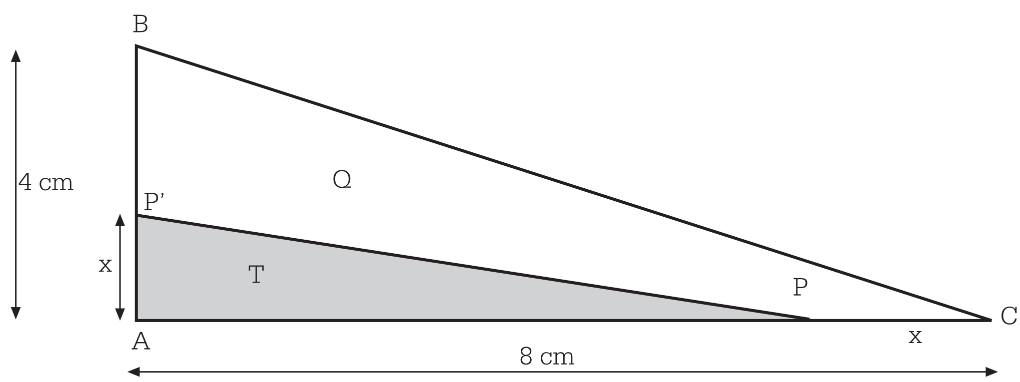
7. ¿Cuál es la altura mínima de un faro, sobre la superficie del mar, de modo que su luz se vea desde P? (Radio de la Tierra: 6360 Km.)



8. En el triángulo rectángulo ABC se toman dos puntos P y P' a una misma distancia, x, de C y de A.

a) Expresa el área del triángulo T en función de x.

b) Expresa el área del cuadrilátero Q en función de x.



c) ¿Para qué valor de x coinciden las áreas anteriores?

9. Una "ecuación" con demasiadas soluciones. Halla tres números enteros consecutivos de modo que el cuadrado del número intermedio supere en una unidad al producto de los otros dos.

10. Las dos cifras de un número suman 12. Si se suman 48 unidades al cuadrado de dicho número, se obtiene un tercio del cuadrado del número que resulta al invertir el orden de las cifras del primero. ¿Cuál es ese número?

11. Las dos cifras de un número suman 11 y el producto de dicho número por el que se obtiene de invertir sus cifras es 3154. Halla el número.

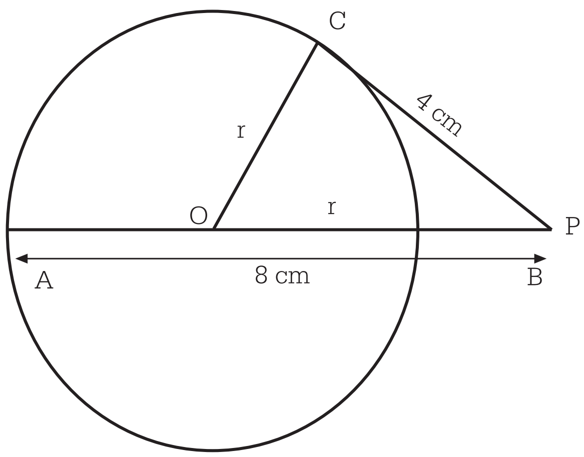
12. La proyección de unos de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa mide 54 cm y la suma de la altura con la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa mide 60 cm. Calcula dicha proyección.

13. Dos grifos vierten a la vez en un depósito y tardan dos horas en llenarlo. ¿Cuánto tiempo empleará cada grifo en llenar dicho depósito si se sabe que el segundo tarda tres horas más que el primero?

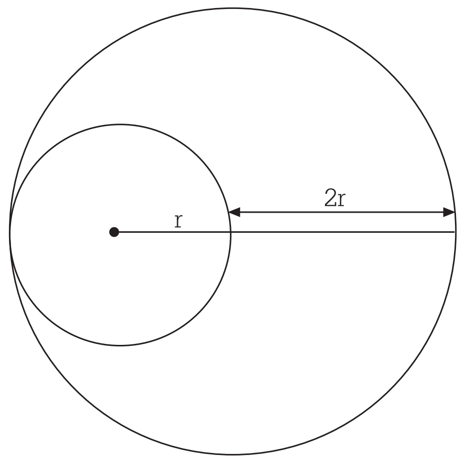
14. En un recorrido de 150 Km., un ciclista llegaría dos horas y media antes si llevase una media de 5 Km. más por hora. Averigua el tiempo que tarda en el recorrido.

15. Un barquero sube por un río 1800 m. Para bajar emplea nueve minutos menos que para subir, pues la corriente aumenta su velocidad en 100 m por minuto respecto a la velocidad que llevaba al subir ¿Cuál es el tiempo que emplea en subir? ¿Y en bajar?

16. Observa atentamente la figura y halla el radio de la circunferencia.



17. Una circunferencia pasa por el centro de la mayor y, a su vez, es tangente a ella. El área del círculo más pequeño es 4 cm^2. ¿Cuál será el área del circulo mayor?



18. Si a la medida de dos lados paralelos de un cuadrado le aumentas el 25% y a la medida los otros dos le quitas el 40 %. ¿qué le ocurre a su área?

19. Si $x + y = 5$ y $x^2 + 3x y + 2 y^2 = 40$, obtén el valor de $2x + 4 y$

20. Dos caños A y B llenan juntos una piscina en dos horas; A lo hace por sí solo en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda cada uno separadamente?

21. Un caño tarda 2 horas más que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos juntos se llena en 1 hora y 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo cada uno por separado?

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^6 - 10x^3 + 16 = 0$ b) $(2x^2 + 1)^2 - 5(2x^2 - 1) + 6 = 0$ c) $x^8 - x^4 - 2 = 0$

Unidad n.º 4

Inecuaciones y sistemas de primer grado

Objetivos

- Reconocer y distinguir los conceptos de desigualdad e inecuación .... (I-II-III)
- Resolver algebraicamente inecuaciones y sistemas lineales con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones lineales con una incógnita .... (II-III)
- Resolver problemas mediante planteamiento y resolución de inecuaciones lineales con una incógnita .... (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones y sistemas lineales con dos incógnitas .... (II-III)
- Plantear y resolver el sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas correspondiente a un problema de enunciado .... (III)
- Resolver inecuaciones reducibles a otras de primer grado .... (III)

Contenidos

Conceptos

1. Desigualdades e inecuaciones:
   - 1.1. Desigualdades e inecuaciones .... (I-II-III)
   - 1.2. Solución de una inecuación .... (I-II-III)
   - 1.3. Propiedades de las desigualdades. Inecuaciones equivalentes .... (I-II-III)
2. Inecuaciones y sistemas de primer grado con una incógnita:
   - 2.1. Inecuaciones de primer grado con una incógnita .... (I-II-III)
   - 2.2. Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita .... (I-II-III)
3. Inecuaciones y sistemas de primer grado con dos incógnitas:
   - 3.1. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas .... (II-III)
   - 3.2. Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas .... (II-III)
4. Inecuaciones reducibles a otras de primer grado .... (III)

Procedimientos

- Comprobación de si un número es solución de una inecuación o sistema .... (I-II-III)
- Resolución algebraica de inecuaciones y sistemas lineales con una incógnita y representación de la solución en la recta .... (I-II-III)
- Resolución gráfica de inecuaciones de primer grado con una incógnita mediante representación gráfica de la recta que define la inecuación .... (II-III)
- Planteamiento y resolución de problemas mediante inecuaciones y sistemas lineales de una incógnita .... (I-II-III)
- Resolución de inecuaciones y sistemas lineales con dos incógnitas .... (II-III)
- Resolución de problemas cuyo planteamiento dé lugar a una inecuación o sistema de primer grado con dos incógnitas .... (III)
- Acotación de errores en la aproximación de números y al operar con ellos .... (III)

Criterios de evaluación

- Resolver inecuaciones y sistemas lineales de una incógnita y problemas de enunciado . (I-II-III)
- Resolver gráficamente inecuaciones lineales con una incógnita .... (II-III)
- Resolver inecuaciones y sistemas lineales con dos incógnitas y problemas cuyo planteamiento dan lugar a ellos .... (II-III)
- Resolver inecuaciones reducibles a otras de primer grado .... (III)

Orientaciones metodológicas

- La solución gráfica de una inecuación de primer grado como valores de x cuya imagen en la función afín es positiva (o negativa) se realizará únicamente en los niveles II y III
- En cuanto a los sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en el nivel II bastará con dos inecuaciones, mientras que en el nivel tres se podrán resolver sistemas de más de dos.
- En el nivel III podrán resolverse inecuaciones del tipo “producto o cociente de factores de primer grado mayor que cero (o menor)”.
- En el nivel III puede darse la definición formal de $a<b$ y utilizarla para demostrar algunos resultado con el rigor adecuado.

Actividades

NIVEL I

1. Indica cuáles de los siguientes números son solución de la siguiente inecuación:

$$2x - 4 > \frac{x}{2} + 3$$

a) 2   b) -3   c) -6   d) 7   e) 2/3   f) 14/3   g) 0

2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones, especificando cláramente el significado de la incógnita:

a) Pedro tiene menos de 15 años.
b) Ana tiene más de 750 ptas. y menos de 1200.
c) Dentro de tres años tendré más de 18 años.
d) El triple de un número más ocho unidades es mayor que 50.
e) Si Laura midiese 8 cm. más, superaría la altura de su hermano, que es de 175 cm.
f) Si al doble de un número le sumamos tres unidades, obtenemos un número mayor que 11.

3. Dada la inecuación $\frac{x}{3} + 2 < 2x - \frac{1}{2}$,

indica la inecuación resultante al efectuarle las siguientes transformaciones:

a) Sumar a los dos miembros 3 unidades.
b) Restar a los dos miembros $3x$.
c) Multiplicar a los dos miembros por -6.
d) Sumar a los dos miembros -2.
e) Multiplicar a los dos miembros por 6.

4. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $x - 3$ es positivo, entonces $x > 3$.
b) Si $3x < 3y$, entonces $x < y$.
c) Si $-5x > 5y$, entonces $x > y$.

5. Completa las siguientes frases:

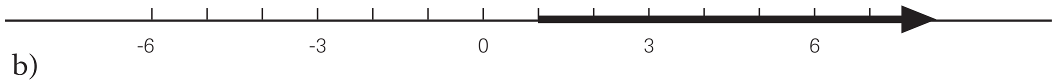
a) Si el lado de un cuadrado es menor que 6 cm., su perímetro es menor que ....
b) Si el radio de un círculo es mayor que 8 cm., su área es mayor que ....
c) Si el lado de un cubo es menor que 5 m., su volumen en menor que ....

6. Representa gráficamente en la recta real los números que verifican las siguientes desigualdades:

a) $x < 5$ b) $x > -3$ c) $2 < x < 4$
d) $x + 1 > 2$ e) $2x < 8$

7. Indica a qué inecuación corresponde cada una de los conjuntos solución siguientes.

a)



b)

8. Resuelve las siguientes inecuaciones. Expresa la solución en forma de intervalo y represéntala gráficamente en la recta real:

a) $3x - 2 < 8x - 1$

b) $2\,(x - 3) > 5\,(3x - 2) + 3x$

c) $3(2 - x) - 4(2x - 1) \geq 2x - 1 + 3(4 - x)$

d) $\dfrac{6x - 2}{3} > \dfrac{3}{2}$

e) $\dfrac{1 - 2x}{9} > 1 - \dfrac{x - 4}{6}$

f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{6} > 2 - \dfrac{x}{3}$

g) $\dfrac{2x - 4}{6} - \dfrac{3x + 1}{3} \leq \dfrac{2x - 5}{12} - 3x$

h) $\dfrac{1 - 3x}{2} - \dfrac{2(x - 3)}{8} > \dfrac{2(x - 3)}{4}$

9. Comprueba cuáles de los siguientes números son solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 1 < x + 3 \\ 2(x + 2) \geq x + 5: \end{cases}$$

a) 0 b) 6 c) 1 d) 4 e) 9 f) -5 g) -4 h) -1 i) 2/3 j) -5/2

10. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 4 > 5 \\ 2x + 1 < 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 7 \\ x + 1 > 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x - 1) + x > 7 \\ 2x - 7 > 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2 < \dfrac{2(x - 1)}{3} \\ \\ \dfrac{x}{2} \geq \dfrac{2 - x}{3} \end{cases}$

11. Con 2.400 ptas. puedo comprar 4 discos, pero no me llega para comprar 5. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de un disco?

12. Aunque al doble de la edad de mi hermano mayor le sumásemos 12 años, obtendríamos un número menor de 50. ¿Qué edad tiene si yo tengo 16 años?

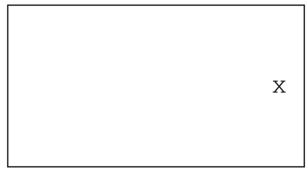
13. El rectángulo de la figura tiene una base de 8 cm. Calcular los posibles valores de x para que:

a) El área sea superior a 48 cm^2.

b) El perímetro sea inferior a 28 cm.

c) El perímetro esté comprendido entre 30 y 60 cm.

d) El área esté comprendida entre 40 y 80 cm^2.



14. La suma de tres números naturales consecutivos es inferior a 12. ¿Qué números pueden ser?

NIVEL II

1. Resuelve gráficamente las inecuaciones:

a) $3x - 2 > 0$ b) $-4x + 8 < 0$ c) $2x - 1 < -x + 5$ d) $2x - 1 > -x + 5$

2. Me bastan con 3500 ptas. para comprar 6 libros, pero con 7.000 ptas. no me llega para comprar 13. ¿Cuánto puede costar cada libro?

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x| < 3$ b) $|x-1| < 5$ c) $|2x + 3| < 4$ d) $|3x| > 7$

4. Se ha medido un campo rectangular con un error menor que un metro. Los valores de los lados, x e y, cumplen $70 < x < 71$ y $47 < y < 48$. Determina entre qué valores está el perímetro y el área.

5. Siete ovejas y cinco cabras de determinadas especies, producen en dos días tanta leche como tres ovejas y cuatro cabras en tres días. ¿Qué animal produce más leche?

6. Un ciclista recorre 50 Km. manteniendo una velocidad entre 25 y 30 Km./h. ¿Entre qué valores está comprendido el tiempo que invierte?

7. Un vendedor de enciclopedias de cierta empresa A tiene un sueldo fijo de 60000 ptas. mensuales y una comisión de 5000 ptas. por cada enciclopedia vendida. Otra empresa B paga una comisión de 8000 ptas. por enciclopedia vendida, pero el sueldo fijo que ofrece es de 30000 ptas. al mes.

¿Cuántas enciclopedias debe vender el de la empresa A para obtener una ganancia mayor que el de la de B?

8. Un alumno de 4º de la ESO ha realizado dos exámenes de Matemáticas obteniendo calificaciones respectivas de 4,5 y 5,7 puntos. ¿Cuánto ha de sacar como mínimo en el tercero para aprobar, si la nota final es la media aritmética de las tres notas? ¿Y si el primer examen cuenta un 15%, el segundo un 35% y el tercero un 50%?

9. Entre los triángulos isósceles de lado desigual igual a 20 cm., ¿cuáles tienen perímetro inferior a 200 cm.?

10. Indica razonadamente cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

a) Existen inecuaciones de primer grado con una incógnita que no tienen solución.

b) Existen inecuaciones de primer grado con una incógnita cuya solución es el conjunto de los números reales.

c) Existen inecuaciones de primer grado con una incógnita que tienen una única solución.

d) Existen sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita que tienen una única solución.

11. Un padre tiene 33 años más que su hijo y el abuelo 33 años más que el padre. Hace tres años, sus edades sumaban menos de un siglo. ¿Qué edad puede tener cada uno?

12. Para comprar un regalo, Iván ha ido reuniendo monedas de 100 y de 200 ptas., juntando en total 20 monedas. El regalo cuesta más de 3200 y menos de 3600 ptas. ¿Qué número de monedas de 200 ptas. puede tener?

13. Halla dos fracciones de la forma 1/n y 1/n+1, con $n \in N$, de manera que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{9}{188} < \frac{1}{n}$$

14. Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $x - y < 7$ b) $3x + 2y > 6$ c) $-3x + y \geq 7$ d) $y < 5$ e) $x \leq -3$

15. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$

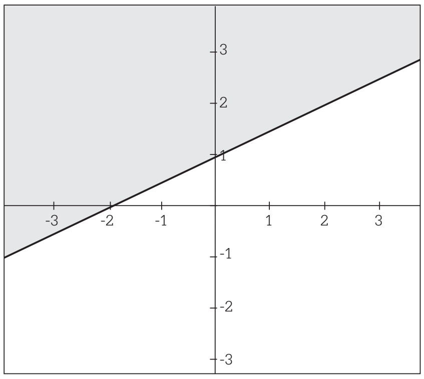
b) $\begin{cases} x + 2y < 3 \\ 2x + 4y \geq 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ 2x + 4y > 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - 3y < 8 \end{cases}$

16. El año pasado, el doble de mi edad era mayor que dicha edad más 13 años. Dentro de tres años, será inferior a la mitad de la actual más 11 años. ¿Qué edad tengo?

17. ¿De qué inecuación es solución la región sombreada de la figura?



NIVEL III

1. Alberto, Benito, Carlos y Daniel han ido de pesca. El resultado ha sido el siguiente:

Daniel ha cogido más peces que Carlos, y Alberto y Benito han pescado entre los dos tantos como Carlos y Daniel.

Además, Alberto y Daniel no han cogido tantos como Benito y Carlos.

Ordena a los cuatro amigos según los peces capturados.

2. ¿Qué número natural puede añadirse al numerador y al denominador de la fracción *2/5* para obtener una nueva comprendida entre *1/2* y *3/4*?

3. Entre todos los triángulos isósceles de lado desigual igual a 10 cm, ¿cuáles tienen el área mayor que 100 cm^2?

4. Si $a < b$, razona qué desigualdad cumplen $1/a$ y $1/b$.

5. Razona cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas:

a) Un número positivo es siempre mayor que su opuesto.

b) Si $x > 1$ entonces $x^2 > x$.

c) Si $x > 100$ e $y < 1$, entonces $\dfrac{x}{10} + 10y > 20$

6. Estudia bajo qué condiciones es cierto el siguiente razonamiento:

"Si $a < b$ y $c < d$, entonces $ac < bd$"

7. Investiga si el número 1999^{1999} tiene más de 5000 cifras. (Indicación: Halla primero un número natural n que verifique las desigualdades $10^n < 1999 < 10^{n+1}$.

8. Para hallar aproximadamente la altura de un tubo cilíndrico se procede de la siguiente manera:

– Se llena con pastillas de 3,6 mm. de espesor y caben 15 pero no 16

– Se llena con pastillas de 4,2 mm. de grosor y caben 13 pero no 14.

– Se llena con pastillas de 5,6 mm. y caben 10 pero no 11.

Halla el intervalo más pequeño al que puede pertenecer el número que nos da la altura del tubo.

9. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} |x| < 3 \\ |y| < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x - y| < 2 \\ x > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x - y| < 4 \\ |x + y| < 4 \end{cases}$

10. En una fábrica de automóviles se construyen coches utilitarios y de lujo. La factoría está dividida en dos salas: una de montaje y otra de acabado. Los requerimientos de trabajo vienen en la siguiente tabla, así como las horas semanales disponibles en cada una:

	Montaje	*Acabado*
Utilitario	3 horas	2 horas
Lujo	4 horas	3 horas
Disponible	150 h.	120 h.

Si llamamos **x** al número de utilitarios e **y** al número de coches de lujo fabricados, expresa las condiciones del cuadro mediante inecuaciones y determina la región solución.

11. En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas a partir de grandes piezas de madera. Las sillas grandes necesitan 4 m^2. de madera y las pequeñas 3 m^2.

El fabricante necesita construir al menos 3 sillas grandes y como mínimo el doble de pequeñas que de grandes. La cantidad total de madera disponible es de 60 m^2.

Sea **x** el número de sillas grandes e **y** el de pequeñas que se fabrican.

Plantea el sistema de inecuaciones al que dan lugar las restricciones del problema y representa la región.

12. Resuelve las siguientes inecuaciones:

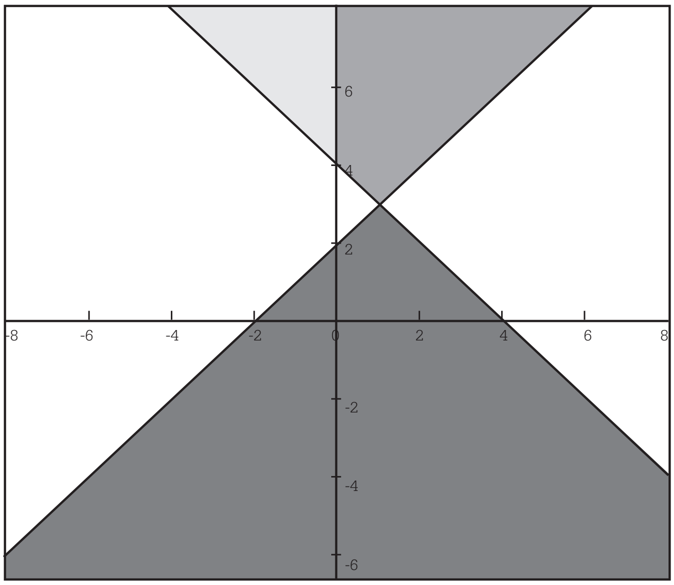
a) $(x - 2)(x + 5) > 0$ b) $\dfrac{x + 2}{3x - 1} \leq 0$

13. Determina qué valores de K hacen que la ecuación de segundo grado

$$Kx^2 + (2K - 1)x + (K + 1) = 0$$

tenga dos soluciones reales distintas.

14. Cada una de las tres regiones sombreadas del plano corresponde a la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Indica de cuál en cada caso.



15. Se consideran los siguientes sistemas de inecuaciones,

a) $\begin{cases} 2x + 3y < 4 \\ 3x + 4y < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y < 3 \\ 4x + 5y < 6 \end{cases}$

¿Cuál es el punto de corte de las dos rectas en cada caso? ¿Cuál es la solución del sistema de inecuaciones?

Haz una conjetura sobre cuál será la solución del sistema siguiente y compruébala.

$$\begin{cases} ax + (a + 1)y < a + 2 \\ bx + (b + 1)y < \mathrm{b} + 2 \end{cases}$$

16. Para hallar la longitud de una circunferencia de radio $\sqrt{3}$, se toma como aproximación de este valor, 1,73; como aproximación de π se toma 3,14.

a) Teniendo en cuenta que $\sqrt{3}$ está entre 1,73 y 1,74, y que p está entre 3,14 y 3,15, ¿entre qué valores podemos asegurar que se encuentra dicha longitud?

b) Si tomamos como aproximación de la longitud $2 \cdot 1{,}73 \cdot 3{,}14 = 10{,}8644$, ¿qué error máximo estaremos cometiendo?

c) ¿Qué valor deberíamos tomar como aproximación de la longitud para asegurarnos que el error cometido es el menor posible?

Unidad n.º 5

Progresiones

Objetivos

- Encontrar regularidades en secuencias de números reales .... (I-II-III)
- Hallar términos de una sucesión .... (I-II-III)
- Encontrar el término general de una sucesión o su ley de recurrencia .... (II-III)
- Hallar el término general de una progresión y cualquier término partir del mismo ..... (I-II-III)
- Hallar la suma de n términos de una progresión .... (I-II-III)
- Hallar la suma de los infinitos términos de una p.g. en la que $|r|<1$ .... (II-III)
- Interpolar términos en progresión aritmética .... (I-II-III)
- Utilizar técnicas de progresiones para resolver problemas .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Sucesiones de números reales:
   - 1.1. Sucesiones .... (I-II-III)
   - 1.2. Término general y ley de recurrencia .... (I-II-III)
2. Progresiones aritméticas:
   - 2.1. Progresiones aritméticas. Definición .... (I-II-III)
   - 2.2. Término general .... (I-II-III)
   - 2.3. Suma de n términos .... (I-II-III)
   - 2.4. Interpolación .... (I-II-III)
3. Progresiones geométricas:
   - 3.1. Progresiones geométricas. Definición .... (I-II-III)
   - 3.2. Término general .... (I-II-III)
   - 3.3. Producto de n términos .... (III)
   - 3.4. Suma de n términos .... (I-II-III)
   - 3.5. Suma de los infinitos términos cuando $|r|<1$ .... (II-III)
   - 3.6. Interpolación .... (II-III)

Procedimientos

- Identificación de progresiones y determinación del término general .... (I-II-III)
- Determinación de términos de una sucesión a partir de su término general o ley de recurrencia .... (I-II-III)
- Determinación del término general o ley de formación de una sucesión .... (II-III)
- Cálculo de la suma de términos de una progresión .... (I-II-III)
- Interpolación de términos formando progresión aritmética .... (I-II-III)
- Representación gráfica de una progresión aritmética .... (II-III)
- Interpolación de términos en progresión geométrica .... (II-III)
- Resolución de problemas de crecimiento poblacional, interés compuesto, etc. .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– En cuanto a la suma de términos de una progresión, en el nivel I bastará que el alumno sepa determinarla identificando el tipo de progresión de la que se trata y utilizando correctamente la fórmula adecuada. En los otros dos niveles se deberá saber demostrar las fórmulas.

Criterios de evaluación

– Hallar regularidades en secuencias numéricas o geométrica .... (I-II-III)
– Hallar términos de sucesiones .... (I-II-III)
– Hallar el término general de una sucesión .... (II-III)
– Hallar el término general de una progresión .... (I-II-III)
– Calcular la suma de términos de una progresión aritmética o geométrica .... (I-II-III)
– Interpolar términos formando una progresión .... (II-III)
– Resolver problemas mediante progresiones .... (I-II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Hallar los dos términos siguientes de las sucesiones que se indican:

a) 4, 6, 8, 10 ...

b) -5, -2, 1, 4, 7 ...

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, ...$

d) $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, ...$

e) -3, 5, -7, 9, -11...

f) 1, 4, 9, 16, 25 ...

g) 1, 2, 4, 7, 11...

h) $\frac{5}{3}, \frac{10}{4}, \frac{17}{5}, \frac{26}{6}, \frac{37}{7}, ...$

i) 1, -2, 3, -4, 5, -6...

j) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, ...$

2. Cada día me duplican el dinero que tengo y me dan una peseta más. Si el primer día tengo 5 ptas, construye la sucesión que indica el dinero que tengo cada día.

3. Formamos la siguiente secuencia de figuras: la primera es un cubo; la segunda figura, dos cubos unidos por una de sus caras; la tercera, tres cubos, uno a continuación de otro, unidos cada dos por una de sus caras, y así sucesivamente.

Construye las sucesiones siguientes:

a) La que nos indica el número de caras ocultas.

b) La que nos indica el número de caras visibles.

¿Cuál es el criterio de formación de cada una?

4. Comprueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones y, las que lo sean, indica si son aritméticas o geométricas:

a) -3, 0, 6, 9, ...

b) 2, 4, 7, 11, 16, ...

c) 7, 5, 3, 1, -1, -3, ...

d) 5, 15, 45, 135, ...

e) 2, 4, 8, 24, 96, ...

f) 2/3, 2/9, 2/27, 2/81, ...

5. Halla los siete primeros términos una progresión aritmética:

a) cuyo primer término es 5 y su diferencia 3

b) cuyo primer término es -4 y su diferencia 2

c) cuyo tercer término es 7 y su diferencia 3

d) cuyo quinto término es 17 y su diferencia -3.

6. Halla el término general de la una progresión aritmética si su primer término es 5 y su diferencia es 3.

7. Halla el término general de una progresión aritmética si sus dos primeros términos son 4 y 9. Halla también su vigésimo término y la suma de los veinte primeros.

8. En una granja hay 200 pollos y cada día nacen 15. ¿Cuántos hay al cabo de 20 días si no ha muerto ninguno?

9. Interpola cinco números entre 5 y 23 de manera que estén en progresión aritmética.

10. Un agricultor posee una finca a la orilla de una carretera. Decide vallar este lado de la finca que tiene una longitud de 240 metros. Si dispone de 61 estacas, ¿cuál deberá ser la separación entre ellas?

11. Si en una progresión aritmética quitamos los términos pares, lo que queda ¿es una progresión? En caso afirmativo indica cuál es la diferencia o la razón.

12. Halla la suma de los 200 primeros números naturales.

13. Halla la suma de los 100 primeros números pares.

14. Alberto decide ahorrar y guarda en la hucha 100 ptas la primera semana, 125 la segunda, 150 la tercera y así sucesivamente. ¿Cuánto tiene ahorrado al cabo de 20 semanas?

15. Entre las siguientes progresiones, identifica las aritméticas y las geométricas. Indica en cada caso cuál es la diferencia o la razón:

a) 2, 4, 8, 16, ...

b) 4, 12, 36, 108, ...

c) 20, 40, 60, 80, ...

d) 2/3, 4/9, 8/27, 16/81, ...

e) 2, -4, 8, -16, 32, ...

f) 6, 3, 3/2, 3/4, ...

g) 2, -2, 2, -2, ...

h) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, ...

i) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, ...

16. Halla el término general de una progresión geométrica de razón 3 y cuyo primer término es 2. Halla también el séptimo término.

17. Halla el término general de una progresión geométrica cuyos segundo y tercer términos son 6 y 12, respectivamente.¿Cuál es su octavo término?

18. Construye la progresión geométrica que empieza por 25 y en la que cada término es los 2/5 del anterior.

19. Se deja caer una pelota desde una altura de 12 metros. Cada vez que rebota en el suelo alcanza una altura igual a los 2/3 de la altura anterior. Construye la sucesión que nos da la altura alcanzada tras los sucesivos rebotes. ¿Qué tipo de sucesión es? Halla el término general.

20. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica de razón 3 sabiendo que su primer término es 1/9.

21. Un asalariado gana un sueldo bruto de 3 millones de pesetas. La Dirección decide subirle el sueldo durante diez años, de manera que el nuevo sueldo de cada año va a ser el del anterior multiplicado por 1,1 (es decir, aumentado en un 10%). Construye la sucesión que indica el sueldo en los distintos años, halla el término general y cuánto ganará en el último año.

22. Un buscador de oro encuentra el primer día 3 gr. de dicho metal y cada día consigue doble cantidad que el día anterior. ¿Cuánto oro reunió en 15 días?

NIVEL II

1. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

a) -3, -1, 1, 3, 5, ...

b) 1, 8, 27, 64, ...

c) 2, 5, 10, 17, 26, ...

d) $\frac{1}{3}, \frac{8}{5}, \frac{27}{7}, \frac{64}{9}, \ldots$

e) $\frac{3}{-3}, \frac{6}{1}, \frac{9}{5}, \frac{12}{9}, \frac{15}{13}, \ldots$

f) -1, 2, -3, 4, -5, ...

g) $\frac{5}{3}, \frac{10}{4}, \frac{17}{5}, \frac{26}{6}, \frac{37}{7}, \ldots$

h) 4, 8, 16, 32, ...

2. Halla los términos 4º y 7º de las sucesiones cuyo término general es:

a) $\frac{n^2 - 3}{n + 1}$

b) $(-1)^n (n + 3)$

3. Halla los cinco primeros términos de las sucesiones cuya ley de recurrencia es:

a) $a_1 = 2; a_n = a_{n-1} + 2n \ (n > 1)$

b) $a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n > 2)$

4. Halla el término general de una progresión aritmética en los siguientes casos.

a) $a_5 = 23$ y $a_{10} = 43$

b) $a_4 = 10$ y $d = 3$

c) $a_4 = 13$ y $a_2 + a_{11} = 41$

d) $a_2 = 5$ y $S_{20} = 610$

Representa gráficamente la progresión en cada uno de los casos.

5. Comprueba que la sucesión de término general $a_n = 4n - 5$ es una p.a. y halla su diferencia.

¿Es 395 un término de la progresión?¿Qué lugar ocupa?

¿Es 900 un término de la progresión?

6. Si multiplicamos por un mismo número todos los términos de una progresión aritmética, ¿se obtiene otra progresión aritmética? ¿Y si sumamos a todos los términos una cantidad fija? En caso afirmativo, ¿cuál es la diferencia?

Responde a las mismas preguntas en el caso de una progresión geométrica.

7. Los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y el menor mide 40º. Halla los otros dos.

8. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 255 y 1170.

9. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 menores que 2000 que no sean múltiplos de 11.

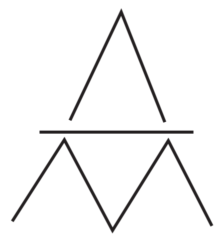
10. Un castillo de naipes tiene el diseño de la figura del margen

Halla el término general o la ley de recurrencia de la sucesión que indica el número de naipes de cada fila, empezando por la superior.

(Se considera que $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, etc.).

¿Cuántos naipes tiene un castillo de 20 filas?

¿Se puede construir un castillo completo con una baraja de 54 naipes?



11. Comprueba que la sucesión $1 + \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, $2 + 2\sqrt{2}$, es una progresión geométrica. Halla el término general y la suma de los 10 primeros términos.

12. Calcula el término general y el producto de los 10 primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_2 = 3/2$ y $a_4 = 12$.

13. En una prueba de laboratorio se ha comprobado que el número de bacterias crece en progresión geométrica a medida que pasan los días. Si al iniciarse el experimento había 250.000 y el sexto día 8.000.000, ¿cuántas había los días del 2º al 5º?

14. En cierta ciudad un ciudadano se enteró casualmente de un chisme sobre el alcalde. Al cabo de una hora lo había contado a otras cinco personas. Cada una de éstas, a su vez, lo cuenta a otras cinco en la siguiente hora, y así sucesivamente. ¿Cuántos habitantes conocían el chisme al cabo de siete horas?

15. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente propuesta: "Yo pagaré 1.000 ptas. el primer día, 2.000 el segundo, 3.000 el tercero y así sucesivamente; a cambio usted me dará 1 céntimo el primer día, 2 el segundo y cada día el doble que el anterior durante un mes". ¿Quién salió ganando?

16. En un cuadrado de lado 1 m. se inscribe otro cuadrado uniendo sus puntos medios; es éste se inscribe otro y se repite el proceso indefinidamente. Calcula la suma de las áreas y de los perímetros de los infinitos cuadrados.

17. Colocamos un capital de 2 millones de pesetas a un interés compuesto del 7%. Calcula el capital en el que se convierte a los 2, 3, 4, ... n años. ¿Qué tipo de sucesión se obtiene?

NIVEL III

1. Halla el 4º y 6º término de las sucesiones siguientes:

$$a_n = \frac{(-1)^{3n-1} \cdot 2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2}{5n^3 - n}$$

2. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{4}{5 \cdot 6}, \ldots$

b) $-\frac{1}{6}, \frac{4}{26}, -\frac{7}{126}, \frac{10}{626}, \ldots$

c) $\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{9}, 2, \frac{1}{27}, -1, \frac{1}{81}, 4, \frac{1}{243}, -1, \frac{1}{729}, 8, \ldots$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{125}, \frac{1}{343},$

3. Demuestra que si en una progresión geométrica suprimimos los términos impares, queda otra progresión geométrica. ¿Cuál es su razón?

4. Halla la suma de todos los múltiplos de 17 que tienen cuatro cifras.

5. Los ángulos de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Hállalos.

6. En una progresión aritmética el primer término es 30 y la diferencia -1,7. ¿Qué lugares ocupan los términos de la progresión que son enteros y negativos?

7. Dada la sucesión -1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 8, 5, ...

a) Halla su término general.

b) Halla la suma de los cien primeros términos.

8. Halla la suma de los mil primeros números naturales tales que al dividirlos por 9 dan de resto 4.

9. Halla la suma de los quince primeros términos de una progresión aritmética en la que el octavo vale 17.

10. Halla todas las progresiones aritméticas de diferencia entera cuyo primer término es 8 y de manera que el número 103 pertenezca a la progresión

11. Expresa el número $3,\overline{57}$ como suma de infinitas fracciones y súmalas. ¿Qué interpretación tiene el número obtenido?

12. En una población de P habitantes, cada año muere el 10% de la población y nace una sexta parte. Construye la sucesión que nos da el número de habitantes en los sucesivos años y halla su término general. ¿Se trata de algún tipo especial de sucesión?

13. Un caminante ha de recorrer 500 Km. El primer día hace 10 Km. y va aumentando cada día 2 kilómetros más. ¿Cuánto tardará en hacer los 500 Km.?

14. Se invierten 5 millones de pesetas a un interés compuesto del 8%. Los intereses se perciben (y por lo tanto se acumulan al capital) cada 3 meses. ¿Cuál será el capital al cabo de n años?

15. Una persona se quiere hacer un plan de pensiones aportando al principio de cada año 500.000 ptas. El banco le da un interés compuesto del 6%. ¿Con qué capital contará al cabo de 20 años?

16. En una circunferencia de radio r se inscribe un cuadrado; en éste se inscribe otra circunferencia, en ella otro cuadrado y así sucesivamente. Calcula:

a) La suma de la áreas de los infinitos cuadrados.

b) La suma de las áreas de los infinitos círculos.

c) La suma de los perímetros de los infinitos cuadrados.

d) La suma de las longitudes de las infinitas circunferencias.

17. Una jarra contiene 2 l. de zumo de naranja. Sacamos 1 dl. y lo sustituimos por la misma cantidad de agua. Si repetimos el proceso n veces, ¿cuál es el porcentaje que queda de zumo?

Unidad n.º 6

Vectores.
Movimientos en el plano.
Homotecias. Semejanzas

Objetivos

– Definir con precisión los movimientos: traslaciones, giros y simetrías y reconocer sus propiedades .... (I-II-III)
– Hallar la figura homóloga de otra dada mediante un movimiento .... (I-II-III)
– Reconocer los elementos que quedan invariantes en cada movimiento .... (I-II-III)
– Hallar la figura homotética de una dada y reconocer y aplicar las propiedades de las homotecias .... (II-III)
– Conocer y aplicar el teorema de Thales .... (I-II-III)
– Reconocer dos figuras semejantes y saber a qué se denomina razón semejanza .... (I-II-III)
– Saber manejar las escalas .... (I-II-III)
– Resolver problemas de semejanza .... (I-II-III)
– Descubrir en la naturaleza y en el arte ciertas transformaciones geométricas y cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Traslaciones. Vector de traslación:
   1.1. Vector fijo .... (I-II-III)
   1.2. Características de un vector fijo .... (I-II-III)
   1.3. Equipolencia de vectores. Vector libre .... (I-II-III)
   1.4. Operaciones con vectores e interpretación gráfica .... (II-III)
   1.5. Vector de traslación .... (I-II-III)
   1.6. Traslación de figuras en el plano .... (I-II-III)
2. Giro. Centro y ángulo orientado:
   2.1. Ángulo orientado .... (I-II-III)
   2.2. Centro y amplitud de giro .... (I-II-III)
   2.3. Simetría central. Relación con los giros .... (I-II-III)
3. Simetrías axiales. Eje de simetría. Composición de movimientos:
   3.1. Simetría axial. Eje de simetría .... (I-II-III)
   3.2. Composición de movimientos .... (II-III)
   3.3. Relación de determinados movimientos con la composición de otros (producto de simetrías con traslación o giro) .... (III)
4. Homotecias:
   4.1. Centro de homotecia y razón de homotecia .... (II-III)
   4.2. Homotecia directa y homotecia inversa .... (II-III)
   4.3. Propiedades de las homotecias .... (II-III)
5. Semejanza:
   5.1. Teorema de Thales .... (I-II-III)
   5.2. Triángulos semejantes .... (I-II-III)
   5.3. Razón de semejanza .... (I-II-III)
   5.4. Razón de perímetros, áreas, volúmenes .... (II-III)
   5.5. Escalas .... (I-II-III)

PROCEDIMIENTOS

- Dibujo de vectores equipolentes .... (I-II-III)
- Análisis de las propiedades comunes de la figura que se obtiene mediante un movimiento y la figura inicial .... (I-II-III)
- Reconocimiento de que una figura se obtiene de otra mediante un movimiento, indicando los elementos característicos del mismo .... (I-II-III)
- Realización de giros de centro O y amplitud dada de figuras geométricas sencillas ..... (I-II-III)
- Obtención de una figura a partir de otra mediante la composición de dos movimientos (II-III)
- Obtención de coordenadas de puntos trasladados .... (I-II-III)
- Obtención de las coordenadas de un punto homólogo a través de un giro de centro O y amplitudes sencillas .... (II-III)
- Obtención de figuras simétricas respecto de un eje .... (I-II-III)
- Estudio de la diferentes simetrías que aparecen en figuras dadas .... (I-II-III)
- Cálculo de las coordenadas del simétrico de un punto respecto de ejes horizontales y verticales .... (I-II-III)
- Identificación de figuras homotéticas .... (II-III)
- Obtención de figuras homotéticas .... (II-III)
- Relación entre homotecia y semejanza .... (II-III)
- Identificación de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza en un conjunto dado de figuras .... (I-II-III)
- Cálculo de la distancia aproximada entre dos puntos teniendo un mapa con una escala determinada .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

- En esta unidad trataremos de que en todas las actividades hagan un dibujo, aunque luego los de mejor nivel puedan generalizar resultados.
- A los de Nivel II y III les pediremos que hagan composición de transformaciones y que deduzcan alguna generalización.
- En el cálculo de coordenadas en los giros solo utilizaremos ángulos sencillos y en las simetrías axiales ejes paralelos a los de coordenadas.

Criterios de evaluación

- Dibujar la transformada de una figura sencilla mediante movimientos .... (I-II-III)
- Identificar el movimiento que transforma una figura en otra y describir sus elementos básicos .... (II-III)
- Utilizar los movimientos para la resolución de problemas geométricos .... (II-III)

- Utilizar los conceptos y propiedades de los movimientos para comprender las relaciones que existen en una figura y su utilidad en el mundo de la Industria y el Arte .... (II-III)
- Calcular las coordenadas de puntos homólogos mediante traslaciones, giros, simetrías, etc. (I-II-III)
- Obtener figuras a partir de otras mediante composición de movimientos .... (II-III)
- Dada una figura y su trasformada, reconocer los movimientos que han originado la transformación .... (II-III)

Actividades

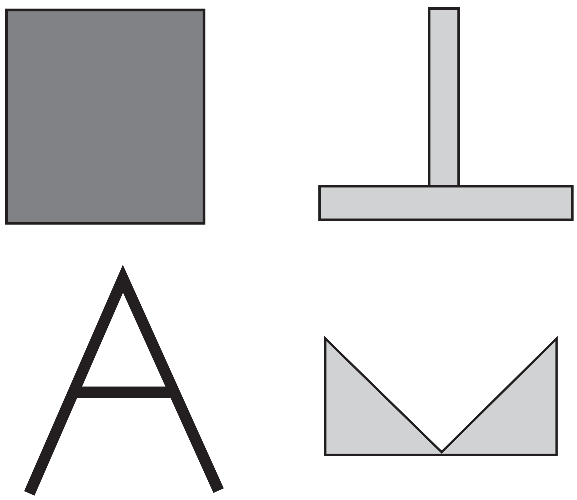
NIVEL I

1. Si al triángulo ABC, cuyos vértices son A (3, 2), B (5, 4) y C (7, 1), se la aplica la traslación de vector $\vec{V}$ (-5, 1) y se obtiene un triángulo A' B' C', ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo A' B' C'?

2. Dado el triángulo A (2, 1) B (5, 1) y C (2,6). Halla el simétrico respecto del eje de abscisas y dibuja la situación.

3. Halla las coordenadas de los vértices del paralelogramo simétrico del A (-8, -1) B (-C, -3) C (-2, -3) y D (-4, -1) respecto del eje de ordenadas

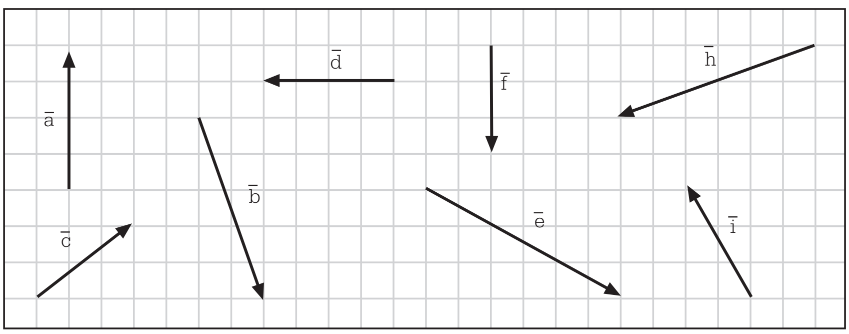
4. Encuentra todos los ejes de simetría de las siguientes figuras.



5. Mediante una traslación de vector $\vec{v}$ el punto A (2, -1) se transforma en el punto A' (4, 2). ¿Cuáles serán las coordenadas del punto B' transformado del B (-3, 2)?

a) (-5, -1)
b) (-1, 5)
c) (-1, -1)

6. Escribe las componentes de los vectores:



7. a) Representa en el plano los siguientes vectores:

$$\vec{a} = (4, 1) \qquad \vec{b} = (2, -3) \qquad \vec{c} = (-5, 2)$$
$$\vec{d} = (-3, 0) \qquad \vec{e} = (0, 4) \qquad \vec{f} = (-2, -3)$$

b) Calcula las componentes y representa los vectores:

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{v} = \vec{c} + \vec{d} \qquad \vec{w} = \vec{f} - \vec{d} + \vec{e}$$

8. a) Construye el triángulo A (2, 1) B (5, 1) y C (5, 3)

b) Dibuja el simétrico A'B'C' respecto del origen y calcula las coordenadas de A', B' y C'

9. Dado el cuadrilátero de vértices A (1, 2), B (5, 1), C (6, 5) y D (2, 4), hallar las coordenadas de su simétrico respecto:

a) del eje de ordenadas;

b) del eje de abscisas;

c) del origen.

10. En una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 1)$ se sabe que el transformado del punto C es el punto C' (7, 4). Hallar las coordenadas del punto C.

11. ¿Cuáles son las componentes del vector guía de una traslación que hace corresponder al punto A (1, 2) el punto A' (12, 8)?

12. Dados los puntos A (2, 5), B (-1, 4), C (-5, 6) y D (-2, -7), halla las componentes de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{CD}$, $\vec{DC}$, ¿Cómo son los vectores $\vec{AB}$, y $\vec{BA}$? ¿Y los vectores $\vec{CD}$, $\vec{DC}$?

13. En una traslación de vector guía $\vec{v} = (5, 4)$, ¿cuáles serán las coordenadas del punto P sabiendo que P' tiene por coordenadas (6, -7)?

14. En un mapa de España figura la escala 1:2.000.000. ¿Cuál es la distancia entre dos ciudades que en el mapa distan 6 cm? ¿Y entre las que el mapa están a 4, 5, 7 y 8 cm?

15. Una traslación lleva el origen de coordenadas al punto A (4, 3). ¿Cuál es el vector guía de la traslación?

16. En una cuadricula, hallar los homólogos de los puntos A (3, 2) y B (6, 5) en un giro de centro el origen y ángulo 90º. ¿Qué coordenadas tienen los puntos homólogos?

17. Son las cuatro de la tarde. ¿Qué ángulo de giro ha recorrido el horario desde las doce del día? ¿Y el minutero?

18. Dibuja un triángulo equilátero ABC. ¿Cuál es el ángulo de giro con centro en A que transforme B en C?

19. Si realizas tres giros consecutivos de centro el punto O y ángulo 45º, 30º y 60º, ¿cuál sería el ángulo de un único giro que produjese el mismo efecto?

20. De las siguientes figuras, di cuáles tienen centro de simetría:

a) Un triángulo equilátero.
b) Un triángulo isósceles.
c) Un cuadrado.
d) Un rectángulo.
e) Un pentágono regular.
f) Una circunferencia.

21. Di cuántos ejes de simetría tienen las figuras propuestas en el ejercicio anterior.

22. El lado de un hexágono mide 24 cm. ¿Cuál es el lado de otro hexágono semejante al anterior y menor que él cuya razón de semejanza es *1/4*?

23. La escala de un mapa es 1:100.000. Si un camino tiene en él una longitud de 3,5 cm, ¿cuál es la longitud de ese camino en la realidad?

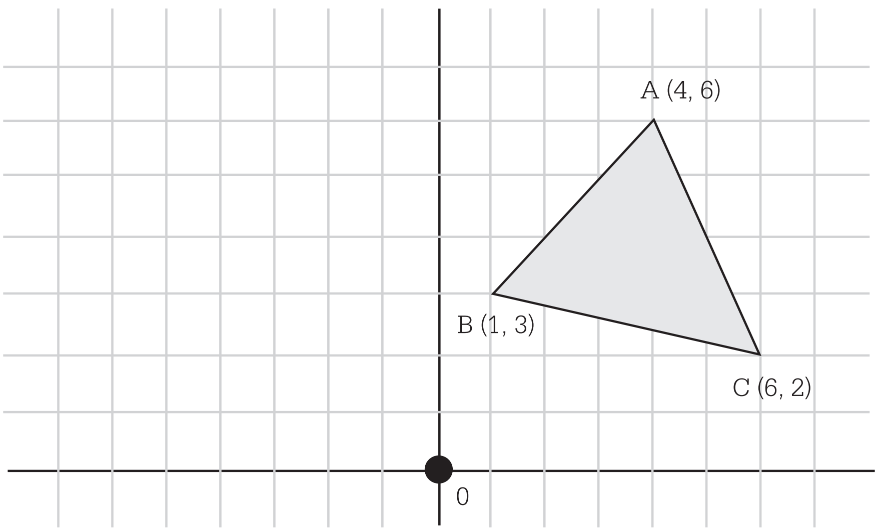
NIVEL II

1. ¿Qué giro ha efectuado la aguja grande de un reloj en 50 min.? ¿Y la aguja pequeña?

2. Encuentra todos los giros que transforman un triángulo equilátero en sí mismo.

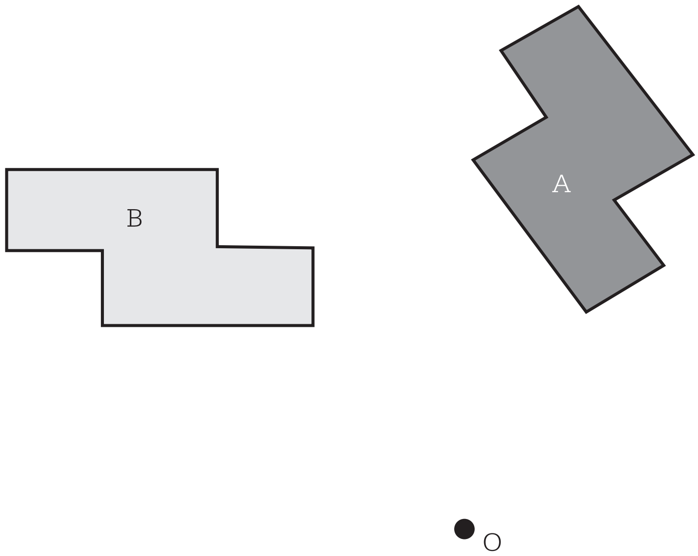
3. Haz lo mismo que en el problema anterior con un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un pentágono regular y un hexágono regular.

4. Encuentra los transformados de los vértices del triangulo ABC mediante una simetría de centro P (2, 3).



5. La letra A es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por su vértice. Encuentra todas las letras MAYÚSCULAS que sean simétricas respecto a algún eje.

6. Utiliza un transportador de ángulos para hallar el ángulo del giro que transforma A en B.



7. Localiza el centro y el ángulo del giro que transforma un cartabón en el otro.

8. Halla las coordenadas de los transformados del punto A (2, 4) mediante los siguientes giros, todos ellos con centro el origen de coordenadas:

a) 90º en sentido positivo.

b) 90º en sentido negativo.

c) 180º

d) 270º

9. El triángulo ABC, de vértices A(3, 2), B(5, 4) y C(7, 1), se ha trasladado según el vector $\vec{V}(5, 2)$ y así se obtiene el triángulo A'B'C'.

a) Aplica el triángulo A'B'C' una traslación según el vector guía $\vec{U} = (-6, 5)$.

b) ¿Qué vector de traslación hay que aplicar al triángulo ABC para obtener el triángulo que resulta en el apartado a)?

10. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la simetría central que transforma el punto A (3, 2) en A' (2, -1)?

11. ¿Cuál es el transformado del punto A (2, 4) al aplicarle sucesivamente una simetría central de centro O (1, 2) y otra de centro O' (-2, 3)?

a) (-4, 6) b) (-6, 2) c) (0, 0)

12. Dibuja un rombo y, tomando como centro de giro uno de los vértices, halla su homólogo por medio de un giro de:

a) $\alpha = 60^{o}$
b) $\alpha = 90^{o}$
c) $\alpha = -135^{o}$
d) $\alpha = 135^{o}$
e) $\alpha = 180^{o}$
f) $\alpha = -180^{o}$

13. Dibuja un triángulo rectángulo BAC cuyos catetos midan tres y cuatro unidades. Halla su simétrico tomando como centro:

a) El vértice A (ángulo recto).
b) El vértice B
c) El vértice C

14. Halla el simétrico del triángulo anterior tomando como eje de simetría:

a) La hipotenusa
b) El cateto mayor

15. Las coordenadas de tres vértices de un cuadrado son A (0, 0), B (5, 5) y C (10, 0). Dibuja la figura y calcula las coordenadas del cuarto vértice. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de simetría?

16. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado, toma como centro de homotecia un vértice y halla los triángulos homotéticos de razón:

a) $k = 2$ b) $k = \frac{1}{2}$ c) $k = -\frac{2}{3}$

17. Dibuja un triángulo cualquiera ABC y marca los puntos A', B' y C', puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente.

a) Escribe dos vectores iguales a $\overrightarrow{A'B'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$ y a $\overrightarrow{C'A'}$.
b) Para un cierto valor de k, la igualdad $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{C'B'}$ es verdadera. ¿Para cuál?

18. Dibuja un cuadrado cuyos cuatro vértices tienen de coordenadas A (2, 2), B (2, 6), C (6, 6), D (6, 2). Tomando como centro de homotecia el origen de coordenadas O(0, 0), calcula las coordenadas de los vértices de los cuadrados homotéticos en los casos siguientes:

a) $k = -1$
b) $k = \frac{1}{2}$
c) $k = \frac{3}{2}$
d) $k = 2$

19. En una homotecia de centro O(0,0) son homólogos los puntos P (3, 0) y P’ (6, 0). ¿Cuál es la razón de homotecia?

En esta misma homotecia, ¿cuáles son los homólogos de A (2, 3), B (4, 8) y C (6, -2)?

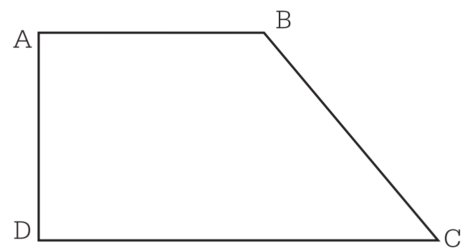
20. Halla los puntos medios de los segmentos:

a) AB   A (-5, 3)   B (5, 7)

b) CD   C (3, -4)   D (2, -2)

21. De un segmento AB se conoce A (-4, -5) y el punto medio M (-3, 2). Calcula las coordenadas de B.

22. En el trapecio rectángulo ABCD decir si se verifica:



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

23. Dado el segmento de extremos A (2, 3) y B (5, 7), halla el segmento transformado A’B’ en una simetría de eje X. A continuación se le aplica una simetría de eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del segmento transformado en las dos simetrías sucesivas?

24. Los lados de un cuadrilátero miden 4, 5, 6 y 7 cm. Calcula los lados de otro cuadrilátero semejante al anterior si el menor de sus lados mide 12 cm.

25. Dos segmentos de 22 y 33 cm son cortados por rectas paralelas que determinan, en el primero, segmentos de 6, 7 y 9 cm, respectivamente. ¿Qué segmentos determinan sobre el segundo segmento?

NIVEL III

1. La figura es un paralelogramo. Decir si se verifican las siguientes igualdades

a) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC}$

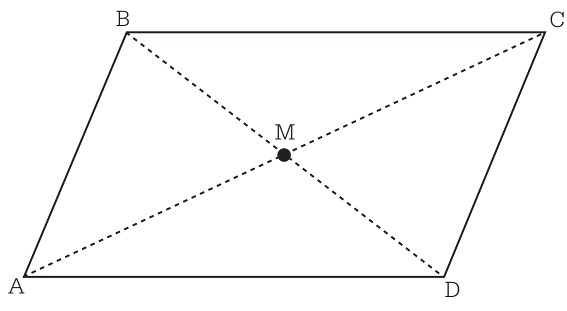
c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MC}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

g) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CM}$



2. Inscribe un triángulo equilátero en un cuadrado de modo que los dos polígonos tengan un vértice común. Imagina el problema resuelto y, aplicando giros, encuentra la solución.

3. Dibuja un paralelogramo ABCD y llama O a su centro. Marca los puntos X, Y, Z, T de forma que:

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{OX} \qquad \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{OY}$$
$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{OZ} \qquad \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DT}$$

¿De qué tipo es el cuadrilátero XZYT?

4. Los puntos O (0, 0), B (6, 8) y P (6, 0) están en una circunferencia. Se sabe que O y B son los extremos de un diámetro.

a) Halla las coordenadas del punto A diametralmente opuesto a P.

b) ¿Cómo son los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{PB}$?

c) Calcula la longitud del radio.

5. Dibuja el triángulo de vértices A (2, 0), B (2, 2), C (0, 2) y aplícale la homotecia de centro el origen de coordenadas O y la razón $k_1 = 2$. Después aplica al triángulo A'B'C' la homotecia de centro O y razón $k_2 = 3$. Finalmente aplica al triángulo A"B"C" la simetría de eje el eje de abscisas y llama A'"B'"C'" al triangulo que resulta.

a) ¿Qué tipo de transformación geométrica permite pasar del triángulo ABC al triángulo A'"B'"C'"?

b) Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo A'"B'"C'".

6. Al aplicar un movimiento a un triángulo de vértices A (3, 6), B (6, 4) y C (3, 8) se obtiene otro triángulo de vértices A' (-3, -6), B' (-6, -4), C' (-3, -8). ¿Qué tipo de movimiento se le ha aplicado?

a) Una traslación

b) Un giro

c) Una simetría axial

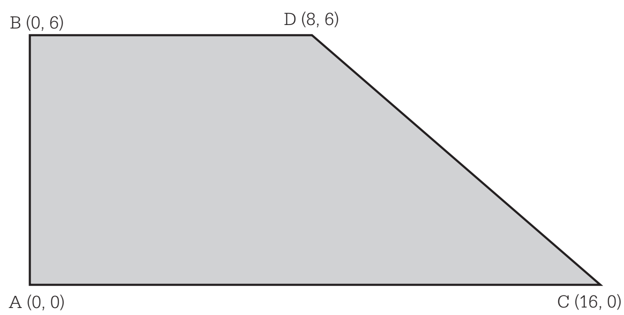
d) Una homotecia de razón k = -1

7. Demuestra que el paralelogramo obtenido uniendo los puntos medios consecutivos de los lados de un cuadrilátero cualquiera y el que resulta de trazar por los extremos de cada diagonal paralelas a la otra, son homotéticos. Halla también el centro y la razón de la homotecia.

8. Un grupo de alumnos afirma que si la razón de homotecia es 2, nunca puede haber una recta que se transforme en sí misma. ¿Estas de acuerdo?

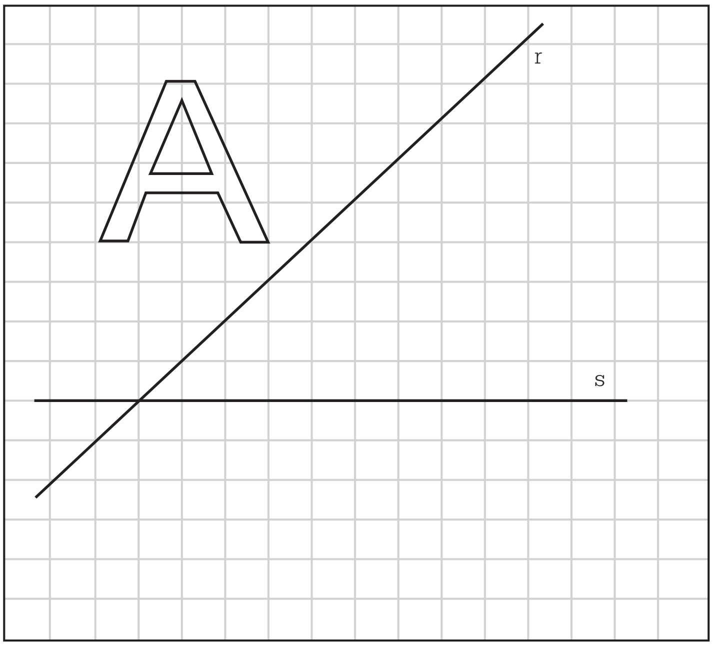
9. Dibuja en el plano dos segmentos paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ de extremos A (7, 2), B (9, 6), A' (11, 1), B' (14, 7). Calcula los centros de homotecia que transforman un segmento en otro, y el valor de la constante de homotecia en cada caso.

10. En el trapecio rectángulo de la figura, calcula la razón de homotecia y el centro de homotecia que transforma $\overline{AC}$ en $\overline{BD}$.



11. Investiga qué poliedros regulares son simétricos respecto de un punto

12. Dibuja el transformado de la figura al aplicarle primero una simetría axial de eje la recta r y luego otra de eje s.



Comprueba que el resultado es el mismo que si aplicásemos un giro. ¿De qué giro se trata?

¿Obtienes el mismo resultado si aplicas primero la simetría de eje s y luego la de eje r?

13. Investiga ¿Qué movimientos dejan invariantes a los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados?

14. Verdadero o falso:

a) Dos cuadrados son siempre semejantes.
b) Dos rectángulos son siempre semejantes.
c) Dos circunferencias son siempre semejantes.
d) Dos rombos son siempre semejantes.

15. Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13 cm. El lado menor de otro triángulo semejante mide 10 cm. Calcula:

a) La razón de semejanza y las longitudes de los otros lados.
b) El área del triángulo grande si el área del triángulo pequeño es de 30 cm^2.
c) El perímetro de los dos triángulos.
d) La razón de los perímetros.

16. Los lados de un triángulo miden 10, 13 y 15 cm. Otro triángulo semejante tiene 57 cm de perímetro. Calcula los lados de este triángulo.

17. Tomando como centro de giro el origen de coordenadas, halla las coordenadas de los puntos homólogos de P(1, 3), Q(-4, 2), R(0, 5) mediante un giro de:

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ$
c) $\alpha = -135^\circ$ d) $\alpha = 135^\circ$
e) $\alpha = 180^\circ$ f) $\alpha = -180^\circ$

Unidad n.° 7

Trigonometría

Objetivos

– Definir y calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo y de un ángulo cualquiera (I-II-III)
– Utilizar las funciones de la calculadora para obtener las razones trigonométricas de un ángulo y viceversa .... (I-II-III)
– Obtener el signo de las razones trigonométricas en función del cuadrante .... (I-II-III)
– Establecer relaciones sencillas entre las razones trigonométricas de un ángulo .... (I-II-III)
– Hallar las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una de ellas .... (I-II-III)
– Obtener relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios suplementarios, opuestos, etc. .... (II-III)
– Resolver triángulos rectángulos .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo:
   1.1. Ángulo orientado. Medidas de ángulos. El radián .... (I-II-III)
   1.2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Definición y cálculo a partir de un triángulo rectángulo .... (I-II-III)
   1.3. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60 .... (II-III)
   1.4. Las razones trigonométricas en la calculadora .... (I-II-III)
2. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera:
   2.1. Definición a partir de la circunferencia goniométrica .... (I-II-III)
   2.2. Signo de las razones trigonométricas en función del cuadrante .... (I-II-III)
   2.3. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo .... (I-II-III)
   2.4. Reducción de un ángulo al primer cuadrante .... (II-III)

Procedimientos

– Construcción de un ángulo a partir de una de sus razones trigonométricas .... (II-III)
– Cálculo de razones trigonométricas mediante medición directa .... (I-II-III)
– Paso de grados a radianes y viceversa .... (I-II-III)
– Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo y viceversa con la calculadora ... (I-II-III)
– Reconocimiento del signo de las razones trigonométricas .... (I-II-III)
– Cálculo de las razones trigonométricas a partir de una que se conoce .... (I-II-III)
– Resolución de triángulos rectángulos .... (I-II-III)
– Utilización de la trigonometría para resolver problemas geométricos de la vida real ... (I-II-III)
– Simplificación de expresiones trigonométricas .... (II-III)
– Demostraciones de identidades trigonométricas .... (II-III)
– Resolución de sencillas ecuaciones trigonométricas .... (III)
– Utilización de las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios, suplementarios, opuestos, etc. en la resolución de problemas .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– Cuando se definen las razones trigonométricas es importante que las definiciones queden claras y que el alumno reflexione sobre si el valor de las razones depende del triángulo elegido.
– Conviene utilizar las figuras para que los alumnos comprendan mejor las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarias, suplementarios, etc.
– Habrá que hacer hincapié en los valores que puede tomar el seno y el coseno, así como la tangente y que lo analicen.

Criterios de evaluación

– Utilizar la calculadora para conocer las razones trigonométricas de un ángulo y viceversa (I-II-III)
– Utilizar la calculadora para conocer los ángulos que tienen una determinada razón trigonométrica .... (II-III)
– Dibujar los ángulos que tienen una determinada razón .... (II-III)
– Resolver problemas geométricos a través de la trigonometría .... (I-II-III)
– Calcular todas las razones conociendo una .... (I-II-III)
– Reducir ángulos al primer cuadrante .... (II-III)
– Demostrar sencillas identidades trigonométricas .... (II-III)
– Resolver sencillas ecuaciones trigonométricas .... (III)

Actividades

NIVEL I

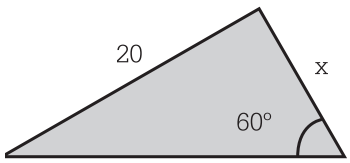
1. Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos identificando el cuadrante en que se encuentran.

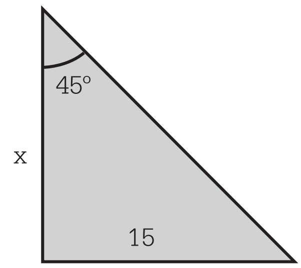
a) 66º b) 175º c) 342º
d) -18º e) 135º f) -120º

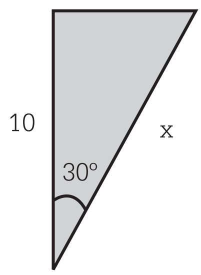
2. Dos lados de un triángulo isósceles miden 20 centímetros y cada uno de los ángulos iguales mide 25º.

Resuelve el triángulo y calcula su área.

3. Halla el valor *x* en los siguientes triángulos rectángulos.







4. Completa la siguiente tabla.

Grados	105º		320º		35º
Radianes		$4\pi/9$		$7\pi/15$	

5. Determina las razones trigonométricas de los dos ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus catetos mide 1 cm.

6. Indica, sin calcular su valor, el signo de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 179º
b) $\frac{3\pi}{4}$
c) 342º
d) $\frac{7\pi}{2}$
e) -18º
f) $\frac{3\pi}{4}$
g) -120º
h) $\frac{4\pi}{5}$

7. Si $\cos x = \sqrt{2}$, ¿qué se puede asegurar del ángulo x?

8. Determina la altura de un árbol si desde un punto situado a 20 metros de su base se observa su copa con un ángulo de 65º 23'.

9. Si $\text{sen}\, x = 4/5$ y x es ángulo agudo. Calcula $\cos x$ y $\text{tg}\, x$

10. Si el radio de un pentágono regular mide 10 cm. ¿Cuánto mide el lado?

11. Si $\text{tg}\, x = 4/3$ y x es agudo. Calcula $\text{sen}\, x$ y $\cos x$

12. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos 0º, 90º, 180º y 270º

13. Un triángulo tiene por lados 6 cm, 8 cm y 10 cm. Halla las razones trigonométricas del ángulo menor

14. Calcula el radio, la apotema y el área de un octógono de lado 10 cm.

15. Desde un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco bajo un ángulo de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

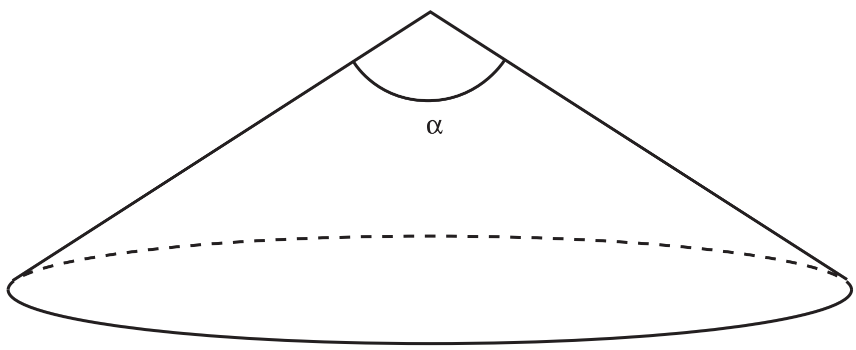
16. La base de un triángulo isósceles mide 10 m y el ángulo opuesto 50º. Halla la altura del triángulo y el área.

17. Verdadero o falso. ¿Por qué?:
    a) El seno de un ángulo puede ser mayor que 1.
    b) El seno de un ángulo es siempre menor que 1.
    c) El seno de un ángulo puede ser igual a 1.
    d) El seno de un ángulo siempre es mayor que 0.

18. Desde el nivel del mar podemos ver la cima de una montaña a 3.500 m de distancia en línea recta. La visual forma un ángulo con la horizontal de 20º. ¿Qué altitud tiene la montaña?

19. Desde un avión a 1.700 m de altura se divisa la torre de control del aeropuerto bajo un ángulo con la vertical de 60º. ¿Cuál el la distancia en línea recta desde el avión a la torre de control?

20. Queremos fabricar una lámpara cónica de 20 cm de altura y 0,6 m de diámetro en la base. ¿Cuál es el ángulo de abertura que la debemos dar?



NIVEL II

1. Halla el valor del ángulo α sabiendo que:

a) Pertenece al segundo cuadrante y sen $\alpha = 1/2$

b) Pertenece al cuarto cuadrante y tg $\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $180^o < \alpha < 270^o$ y cos $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Calcula las siguientes razones trigonométricas:

a) sen (-120º)

b) cos (-30º)

c) tg (-150º)

d) sen 4420º

3. Calcula las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 2700º

b) tg (-275º)

c) sen (-25º)

d) tg 4500º

4. Calcula las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) sen $\alpha = \dfrac{-1}{2}$, $270^o \leq \alpha \leq 360^o$

b) cos $\alpha = \dfrac{-1}{2}$, $180^o < \alpha < 270^o$

c) tg $\alpha = 4$, $0^o < \alpha < 90^o$

5. Dos amigos han creído ver un ovni, desde dos puntos situados a 800 m, con ángulos de elevación de 30º y 75º, respectivamente. Halla la altura a la que está el ovni sabiendo que se encuentra entre ellos.

6. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo mide 60º. Halla la altura de la torre.

7. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 45º, y si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30º. Halla la altura del árbol y el ancho del río.

8. Sabiendo las razones trigonométricas de 30º, calcula las de 60º, 150º y 330º.

$$\text{Sen } 30^o = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. Si sen $\alpha = 3/4$ y α es un ángulo agudo, halla sin utilizar la calculadora:

a) sen $(90^o - \alpha)$

b) cos $(180^o - \alpha)$

c) tg $(-\alpha)$

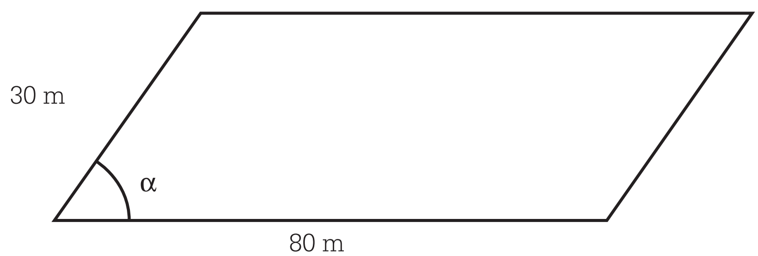
10. Si cos (180º – α) = *-1/3* y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) sen α
b) cos (90º – α)
c) tg (– α)

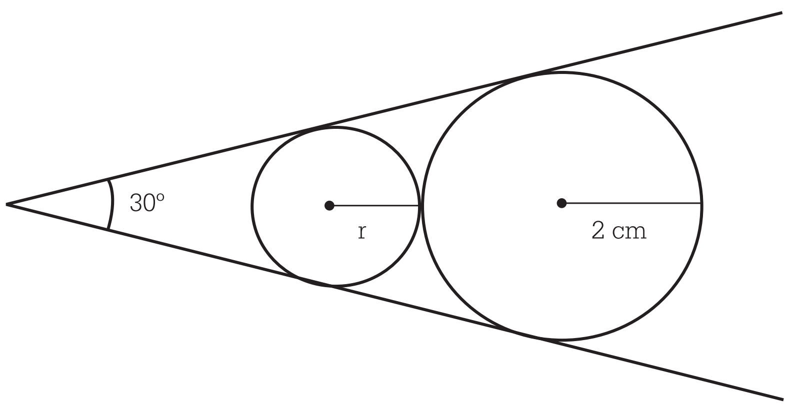
11. La superficie de un terreno de forma trapezoidal es de 1.200 m². Sabiendo que tiene dos ángulos de 45º y que la base menor es de 65 metros, calcula la base mayor y la distancia entre las bases.

12. Calcula el área de un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 10 y 15 cm y que los otros dos ángulos distintos al comprendido entre ellos miden 80º y 70º.

13. Dos lados adyacentes de una parcela en forma de paralelogramo de área 851 m² tienen unas longitudes de 30 y 80 metros. ¿Cuál es el valor del ángulo α que forman esos lados?



14. Halla el valor del radio **r** de la figura.



15. Demuestra que $1+ \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ y que $1 + \text{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$

16. Conociendo sen 11º = 0,19 y cos 11º = 0,98, calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos:

a) α = 79º b) α = 101º
c) α = 169º d) α = 191º
e) α = 259º f) α = 281º
g) α = 349º h) α = 371º

17. Los lados de un triángulo son 14,6 cm, 16,7 cm y 18,8 cm, respectivamente. Calcula la longitud de la altura desde el vértice del ángulo mayor sobre el lado opuesto.

NIVEL III

1. Simplifica:

a) $\text{sen}^3 b + \text{sen } b \cos^2 b$

b) $\dfrac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^4 x - \cos^4 x}$

2. En una circunferencia de 4 m de radio se marca un arco de 120º. Halla el área del recinto formado por este arco y las tangentes en sus dos extremos.

3. Simplifica:

$$\frac{\text{sen}(\pi + A)\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sec(\pi + A)}{\text{cosec}(-A)\ \text{ctg}(2\pi + A)\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}$$

4. Simplifica:

$$\text{sen}(\pi - x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x)\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

5. Suponiendo que la tierra es una esfera de 6.400 Km. de radio, determina la longitud en Km. del paralelo de Tudela (aproximadamente 42º).

6. Simplifica:

$$\frac{\text{sen}(90 - A)\ \text{tg}(90 - A) \cos(180 + A)\ \text{tg}(180 - A)}{\text{sen}(90 + A)\ \text{tg}(180 + A) \cos(-A)}$$

7. Demuestra que

$$\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\text{cosec}\alpha - \text{sen}\alpha} = \text{tg}^3\alpha$$

8. Simplifica:

a) $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen}x}$

b) $\text{ctg}^2 x - \text{ctg}^2 x \cos^2 x$

9. Halla en radianes todos los ángulos cuya tangente vale

$$\sqrt{\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{\sqrt{12} + \sqrt{3}}} \qquad \text{(sin calculadora)}$$

10. Simplifica:

a) $\dfrac{2\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 1}{\cos\alpha}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)\ \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)}$

11. Halla sin calculadora

a) tg (– 1935º)

b) $\cos \dfrac{19\pi}{3}$

c) sen 570º

12. Demuestra que

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - b\right)}{\operatorname{tg}(\pi + a) + \operatorname{tg}(\pi - b)} = \operatorname{ctg}a\ \operatorname{ctg}b$$

13. Demuestra que

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^2 x$$

14. Resuelve la ecuación

$$\operatorname{tg} \frac{2x + 1}{3} = 1$$

15. Si sen x = 0,2 y 0º < α < 90º Calcula

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(2\pi + \alpha)}$$

16. El área de un círculo es 25 π cm^2. Desde un punto exterior que dista 18 cm del centro se trazan las dos tangentes a la circunferencia. Hallar:

a) La longitud de los segmentos de tangente desde el punto exterior a los puntos de tangencia

b) Ángulo que forman dichas tangentes

c) Área del cuadrilátero formado por las tangentes y los radios trazados a los puntos de tangencia

17. Dos lados de un triángulo miden 28 cm y 18 cm y el ángulo que forman estos lados mide 57º. ¿Cuánto mide el área?

18. Dos hombres que andan a razón de tres kilómetros por hora parten al mismo tiempo de un cruce de dos caminos rectos, que forman entre sí un ángulo de 15º. Los dos van en el mismo sentido. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de dos horas?

Unidad n.º 8

Funciones

Objetivos

- Reconocer una función en sus diferentes formas y conocer su utilidad .... (I-II-III)
- Utilizar el vocabulario adecuado en el manejo de funciones .... (I-II-III)
- Interpretar y criticar gráficas relativas a distintos fenómenos .... (I-II-III)
- Representar funciones obteniendo puntos de la misma .... (I-II-III)
- Determinar funciones dadas por un texto .... (I-II-III)
- Hallar e interpretar límites laterales finitos .... (II-III)
- Reconocer una función continua .... (I-II-III)
- Calcular e interpretar la tasa de variación media de una función .... (II-III)
- Operar con funciones .... (I-II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Funciones (Repaso):
   1.1. Relaciones dadas mediante gráficas .... (I-II-III)
   1.2. Definiciones. Función, variable independiente, variable dependiente, imagen, anti-imagen, dominio, recorrido .... (I-II-III)
   1.3. Gráfica de una función .... (I-II-III)
   1.4. Formas de expresar una función (frase, tabla, gráfica, fórmula) .... (I-II-III)
2. La función afín (Repaso):
   2.1. Función lineal y afín .... (I-II-III)
   2.2. Representación gráfica .... (I-II-III)
   2.3. Pendiente de una recta. Interpretación .... (I-II-III)
   2.4. Cortes con los ejes .... (I-II-III)
3. Funciones definidas por intervalos (“a trozos”) .... (I-II-III)
4. Características de una función:
   4.1. Puntos de corte con los ejes .... (I-II-III)
   4.2. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos .... (I-II-III)
   4.3. Máximo y mínimo absoluto en todo el dominio .... (I-II-III)
   4.4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión .... (I-II-III)
   4.5. Simetrías .... (II-III)
   4.6. Funciones periódicas .... (II-III)
   4.7. Idea intuitiva de continuidad .... (I-II-III)
5. Límite finito de una función en un punto:
   5.1. Límites laterales (finitos) .... (II-III)
   5.2. Límite finito de una función en un punto .... (II-III)
   5.3. Definición de continuidad en un punto .... (II-III)
6. Variación de una función:
   6.1. Variación de una función en un intervalo .... (I-II-III)
   6.2. Tasa de variación media .... (II-III)

7. Operaciones con funciones
    7.1. Suma, resta, producto y cociente .... (I-II-III)
    7.2. Composición de funciones .... (II-III)
8. Función inversa
    8.1. Inversa de una función .... (II-III)
    8.2. Gráfica de la función inversa .... (II-III)
9. Interpretación del área bajo una gráfica .... (III)

PROCEDIMIENTOS

- Representación de funciones a partir de tablas o de expresiones algebraicas sencillas mediante obtención de valores .... (I-II-III)
- Utilización de la escala adecuada para representar una función que describa un fenómeno (I-II-III)
- Estudio e interpretación de las características de una función a la vista de la gráfica .. (I-II-III)
- Obtención de la expresión algebraica de la función que describe un fenómeno .... (I-II-III)
- Determinación e interpretación de la pendiente de una recta y de su ecuación .... (I-II-III)
- Utilización de funciones a trozos para calcular límites laterales finitos .... (II-III)
- Utilización de la notación de límite y de límites laterales en un punto .... (II-III)
- Comprobación, usando la definición, de la continuidad de una función en un punto .. (II-III)
- Cálculo e interpretación de la variación de una función en un intervalo .... (I-II-III)
- Cálculo e interpretación de la tasa de variación media de una función en un intervalo . (II-III)
- Cálculo e interpretación del área bajo una curva en funciones definidas mediante segmentos (III)

Orientaciones metodológicas

- Es importante que se distinga el dominio de una función como expresión matemática y en el contexto en el que se trabaja.
- En el nivel I, bastará con que el concepto de continuidad se adquiera de forma intuitiva, sin tratar el concepto de límite. En los niveles II y III, tras realizar una introducción intuitiva, se pasará a dar la definición formal y a utilizarla.
- En esta unidad sólo se estudiarán límites laterales y límite en un punto cuando sean finitos.
- No es un contenido de este curso el estudio de las diversas técnicas de cálculo de límites. Éstos se calcularán a la vista de la gráfica. Hecho esto, puede ser conveniente observar que los límites laterales se obtienen sustituyendo en las expresiones a izquierda y derecha del punto.
- En esta unidad las funciones a trozos estarán compuestas por funciones constantes o afines. Para el nivel I bastarán dos intervalos, o, si hay más, que la función sea constante en cada uno.

- Identificar variable dependiente e independiente, imagen y anti-imagen y calcular éstas . (I-II-III)
- Hallar el dominio y recorrido de una función .... (I-II-III)
- Representar una función .... (I-II-III)
- Determinar e interpretar las características de una función a partir de su gráfica .... (I-II-III)
- Calcular la ecuación de una recta a partir de dos puntos o de uno y la pendiente .... (I-II-III)
- Representar funciones que cumplan determinadas condiciones .... (I-II-III)
- Calcular los límites laterales de una función en un punto .... (II-III)
- Identificar una función continua en un punto usando la definición .... (II-III)
- Hallar los puntos de discontinuidad de una función .... (I-II-III)
- Calcular e interpretar en el contexto la variación de una función que describe un fenómeno . (I-II-III)
- Calcular e interpretar la T.V.M. de una función en un intervalo .... (II-III)
- Realizar operaciones con funciones (suma, resta, producto y cociente) .... (I-II-III)
- Hallar la función compuesta de dos funciones .... (II-III)
- Hallar la función inversa de una dada .... (II-III)
- Dibujar la inversa de una función, dada la gráfica de ésta .... (II-III)
- Calcular e interpretar el área bajo la gráfica de una función formada por “trozos” de constantes y afines .... (III)

Actividades

NIVEL I

1. La concentración de plomo acumulada por los líquenes de un bosque, en función de su distancia a la autopista viene dada en la gráfica. La concentración viene medida en microgramos de plomo por gramo de liquen.

a) ¿Qué concentración de plomo hay a 100 m. de la autopista?

b) ¿Hasta qué distancia de la autopista hay una concentración de plomo mayor que 100 mg/g.?

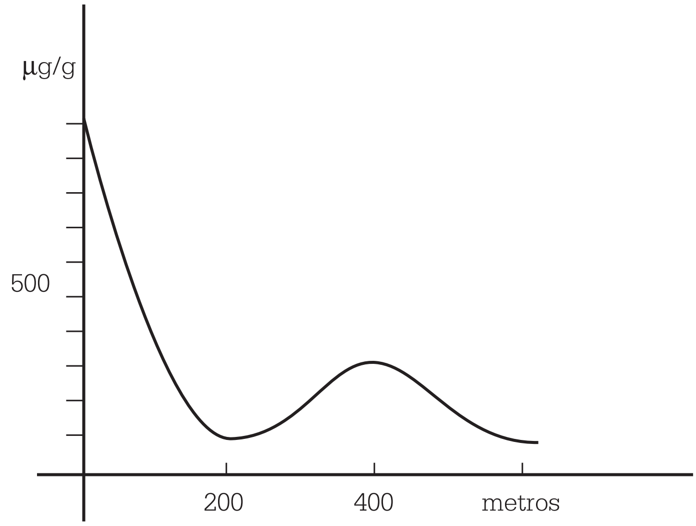
c) ¿Qué concentración hay a 400m? y ¿a 500 m?

d) ¿A qué distancia hay una concentración de 400 mg/g?

e) ¿Qué concentración hay al borde de la autopista?

f) Estudia e interpreta el crecimiento de la gráfica y sus máximos y mínimos.

g) Indica en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles convexa.



2. La gráfica muestra la temperatura de un enfermo entre las 0h y 22h.

a) ¿Hubo algún descenso de temperatura durante la madrugada?¿Entre qué horas?

b) ¿Cuál fue la temperatura a las 14h?

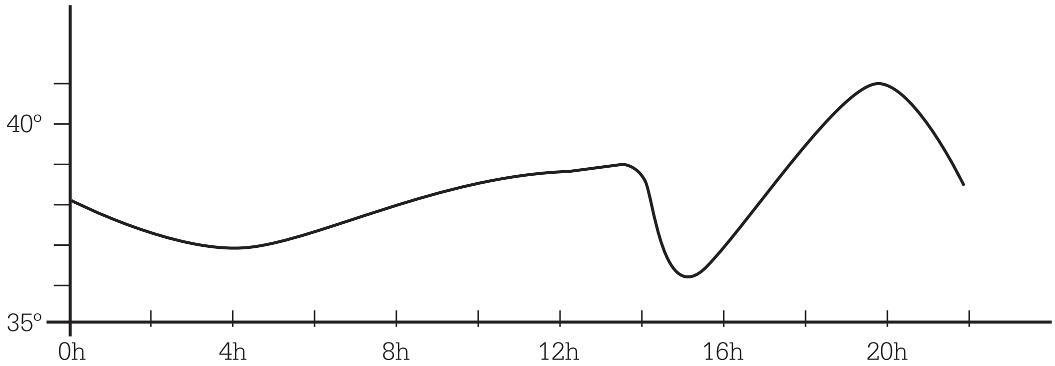
c) ¿A qué hora la temperatura fue de 37 ºC?

d) Halla e interpreta la imagen de 4 y la anti-imagen o anti-imágenes de 38 ºC.

e) En un momento dado el enfermo sufrió un brusco descenso de la temperatura. ¿Cuándo?

f) ¿Tuvo el enfermo algún momento de peligro?

g) Estudia e interpreta el crecimiento de la función y sus máximos y mínimos relativos.



3. Dibuja la gráfica que ilustra la siguiente sesión de la bolsa, de una duración de 6 horas:

"La bolsa abrió con el índice 900. Durante la primera media hora las oscilaciones fueron mínimas, pero al recibirse noticias sobre fusiones en la eléctricas, la compra de éstas hizo que el índice general subiese rápidamente hasta el 980, que se mantuvo hasta la mitad de la sesión.

Durante las dos horas siguientes se produjo una subida sostenida hasta alcanzar el 1000. En la última hora hubo leves oscilaciones entre el 990 y el 1010, con una caída brusca de 50 puntos en los últimos minutos".

4. Halla la función que expresa:

a) El área de un cuadrado en función del lado.

b) El perímetro de un rombo en función del lado.

c) El precio de x Kg. de producto si cuesta 439 ptas./Kg.

d) El espacio recorrido en función del tiempo por un móvil cuya velocidad es de 90 Km./h.

e) El precio de x fotografías si cada una cuesta 60 ptas. y se pagan 420 ptas. por el revelado.

¿Cuál es el dominio de las funciones anteriores?

¿Cuáles de ellas tienen por representación gráfica una recta? En estos casos, ¿cuál es su pendiente?

¿Qué interpretación tiene en cada una la imagen de 12?

5. Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = 3x - 6 \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \frac{5x}{x^2 + 6}$$

Halla en cada una de ellas:

a) La imagen de 3

b) La anti-imagen o anti-imágenes de 1.

c) Su dominio.

6. Dibuja la gráfica de una función que cumpla:

a) Su dominio es R y su recorrido R

b) Su dominio es R y su recorrido el intervalo $[0, +\infty)$

c) Su dominio es $[2, +\infty)$ y su recorrido $(-\infty,3]$
d) Su dominio es $[0,3]$ y su recorrido $[2,6]$

7. Representa las siguientes funciones afines e indica cuál es la pendiente de cada una de las rectas:

a) $y = 2x - 1$ b) $-3x + 2$ c) $y = \frac{1}{3}x + 3$

8. Halla los puntos en los que las siguientes rectas cortan a los ejes de coordenadas y represéntalas gráficamente:

a) $y = -3x + 2$ b) $y = 2x + \frac{2}{3}$ c) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{2}$

9. Halla la ecuación de la recta que:
a) pasa por los puntos A (-4, 1) y B (-2, 5)
b) tiene de pendiente 3 y ordenada en el origen 6.
c) tiene pendiente -4 y pasa por el punto (1, 6)

10. Halla el dominio de las siguientes funciones:
a) $y = \frac{1}{x - 6}$
b) $y = \frac{1}{x} - 5$
c) $y = \sqrt{x - 4}$
d) $\frac{x}{\sqrt{2x - 6}}$

11. Representa gráficamente las siguientes funciones dando valores a la variable independiente:
a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x - 2}$
c) $y = \frac{8}{x^2 + 2}$

Estudia el crecimiento de cada una.

12. La tarifa de un párking es de 200 ptas. por hora o fracción. Representa la función que nos da el coste total en función de las horas de aparcamiento durante las ocho primeras horas. Estudia el dominio y la continuidad de la función.

13. El sueldo mensual de un vendedor consta de 90.000 ptas. fijas más una comisión del 8% del total de las ventas.
a) Expresa el sueldo total en función de las ventas.
b) Halla e interpreta la imagen de 700.000 en la función.
c) Halla e interpreta la anti-imagen de 180.000.
d) Representa gráficamente la función. ¿Qué interpretación tiene que sea siempre creciente?

e) ¿Cuánto varía el sueldo cuando pasa de realizar unas ventas de 300.000 a 700.000

f) Halla e interpreta la variación de la función en el intervalo [500.000, 800.000].

14. Representa las funciones siguientes, halla su dominio y recorrido y estudia su crecimiento y su continuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x \leq 0 \\ 2x + 1 & si \quad 0 < x \leq 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x < 2 \\ 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x < -2 \\ 2 & si \quad -2 \leq x < 4 \\ 1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

15. Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones siguientes:

– Su dominio es R.

– Es creciente en el intervalo $(-\infty,2]$ y en $[5, +\infty)$ y decreciente en el resto.

– Es continua en todo su dominio excepto en el punto $x = 5$

16. Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones del ejercicio anterior y que además corte al eje OX en el punto (1, 0) y al eje OY en el (0, -2).

17. La tarifa por mano de obra de un taller de reparación de automóviles en función de las horas de trabajo viene dada por la función $y = 4.000x + 1000$.

a) Representa la función. ¿Es continua?

b) Halla e interpreta la imagen de 3 y de 4,5.

c) Un cliente ha pagado por mano de obra 22.000 ptas. ¿Cuántas horas ha durado la reparación?

d) ¿En cuánto aumenta la factura por cada hora que se incrementa la reparación?

18. El coste por unidad de fabricación de unos componentes electrónicos en función del número de unidades fabricadas viene dado por

$$C(x) = \frac{800 + 40x}{x}$$

a) Si se fabrican 30 unidades, ¿a cuánto sale la pieza?

b) ¿Cuántas piezas se deben fabricas para que salga cada una a 80 ptas.?

c) Halla el dominio de la función.

d) Representa la función dando valores a x. ¿Tiene sentido unir los puntos?

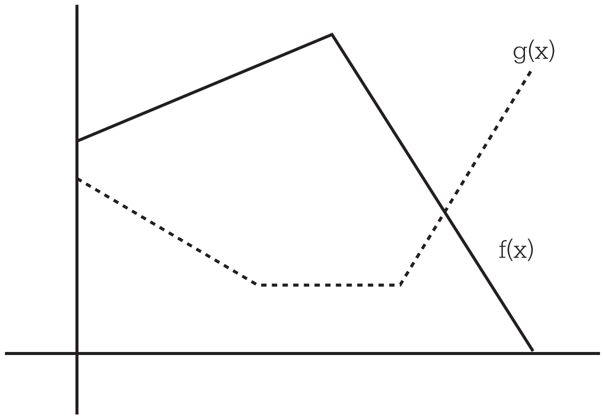
e) Estudia e interpreta el crecimiento de la función.

19. Dadas las funciones

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1, \qquad g(x) = x^2 + 3, \qquad h(x) = \frac{x}{x + 1}, \text{ halla:}$$

$$f + g, \quad f - g, \quad 2f - 3g, \quad f \,.\, g, \quad f \,.\, h, \quad f/2h$$

20. Las gráficas de las funciones f(x) y g(x) son las siguientes.



Dibuja la función f + g.

NIVEL II

1. Determina la función que expresa:

a) La diagonal de un rectángulo de perímetro 12 cm. en función de su base.

b) El área total de un prisma cuadrado de 5m. de altura en función del lado de la base.

c) La altura que alcanza el agua en un depósito en forma de cono invertido de 3 m. de radio y 8m. de altura, en función del volumen

¿Cuál es el dominio de las funciones anteriores?

2. Ascendiendo por una montaña medimos la temperatura a diferentes alturas y obtuvimos los siguientes datos:

Altura (m)	0	360	720	990
Temperatura (ºC)	10	8	6	4,5

a) Representa la función Altura-Temperatura y determina su expresión analítica.

b) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0ºC?

c) ¿De qué tipo de función se trata? ¿Tiene sentido hablar de la pendiente? En caso afirmativo, interprétala.

3. Dos trenes salen de dos ciudades, A y B, distantes 300 Km., en direcciones contrarias. Sus velocidades son de 100 Km./h y 120 Km./h, respectivamente.

a) Determina las funciones que nos dan la distancia de cada tren a la ciudad A en función del tiempo y represéntalas.

b) Halla e interpreta el punto de corte de las dos funciones.

4. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{3x}{\sqrt{x^4 - x^2}}$

5. Halla la TVM de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 1$ en [2, 5], [4, 8] y [-2, 0]

b) $f(x) = 2x^2 - 8$ en [2, 4], [-1, 4] y [-3, -1]

6. En determinado país, el impuesto que se paga en función de la renta viene dado por:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}2x - 0{,}2 & si \quad 1 \le x < 5 \\ 0{,}4x & si \quad x \ge 5 \end{cases}$$

en la que, tanto los ingresos, **x**, como el impuesto, ***I***, vienen dados en millones de pesetas.

a) Representa gráficamente la función.

b) Halla e interpreta la imagen de 0,5; 3 y 6.

c) Halla e interpreta la o las anti-imágenes de 1.

d) Estudia e interpreta el crecimiento de la función.

e) Calcula e interpreta la variación de la función en el intervalo [3,6].

f) Halla e interpreta la tasa de variación media en el intervalo [1,4].

g) ¿Qué porcentaje de su renta paga una persona con un sueldo bruto de 3.520.000 ptas.?

h) Determina la función que expresa el porcentaje de la renta que se paga en función de ésta.

i) ¿Qué defecto le ves a esta tarifa?

7. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 1 \\ -x + 2 & si \quad 1 \le x < 3, \\ \dfrac{1}{2}x - 3 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

a) Calcula los límites laterales en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$. Razona si es continua en estos puntos.

b) Represéntala gráficamente y estudia su crecimiento y extremos.

8. La siguiente gráfica corresponde a una función a trozos.

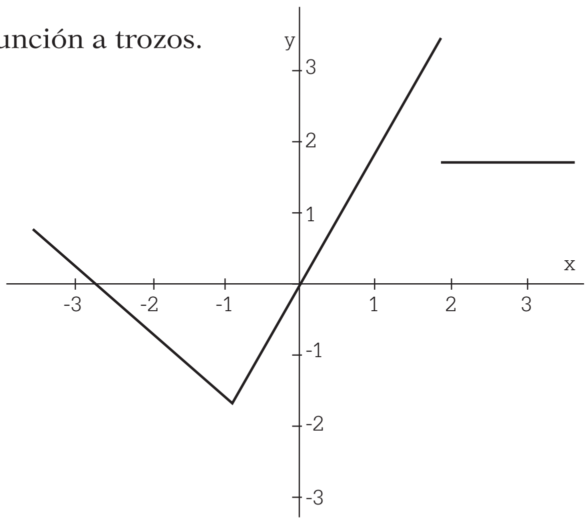
a) Determina su expresión analítica.

b) Estudia su crecimiento y sus máximos y mínimos.

c) Halla su variación en el intervalo [-2,2]

d) Halla su tasa de variación media en el mismo intervalo e interpreta el resultado.

e) Calcula los límites laterales en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$ e indica si la función es continua en ellos.



9. Dibuja una función que verifique simultáneamente las siguientes condiciones.

– $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$

– $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 3$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$

– $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 2 = \lim_{x \to 4^+} f(x)$, pero no es continua en $x = 4$

– es convexa en (-1, 2) y cóncava en el resto.

10. En una empresa de alquiler de coches, la tarifa es la siguiente: 5000 ptas. de tasa fija que incluyen 100 kilómetros gratuitos; los kilómetros que pasen de 100 se cobran a 20 ptas. cada uno.

a) Determina y representa la función que expresa el coste en función de los kilómetros recorridos.

b) Halla el dominio y el recorrido y estudia su monotonía, extremos y continuidad.

c) ¿A cuánto le sale el kilómetro a un cliente que haya hecho 350?

d) Halla e interpreta la tasa de variación media en el intervalo [80,200]

11. Estudia y representa la función $f(x) = |x|$

12. Escribe la expresión analítica de una función cuyos límites laterales en $x = 3$ sean iguales, y sin embargo, la función no sea continua en ese punto.

13. Dadas las funciones $f(x) = (1/5x)\ (x+ 4)$ y $g(x) = (1/4)x^3$, ¿cuál de ellas crece más deprisa, f en el intervalo [1,5] o g en [1,3]?

14. Estudia si las siguientes funciones son simétricas respecto al origen o al eje OY:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^4 + x^2$

c) $f(x) = -x^4$

d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = |x|$

f) $f(x) = x|x|$

g) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

15. Dibuja la gráfica de una función que cumpla todas las condiciones siguientes:

– Es creciente y convexa en el intervalo $[-\infty, 0]$, y decreciente y cóncava en el resto.

– Es discontinua en $x = 0$.

– Corta al eje OX en los puntos $x = -3$ y $x = -1$

– $\lim_{x \to 4^-} = -3$ y $\lim_{x \to 4^+} = 1$

– Tiene, al menos, un máximo relativo.

16. Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

a) Halla, con la calculadora los límites laterales en $x = 2$.

b) ¿Existe el límite de la función en $x = 2$?

c) ¿Es f continua en $x = 2$?

17. Representa la función y = E(x) (parte entera de x). Halla su dominio y recorrido y estudia su crecimiento y su continuidad.

18. Representa la función y = $|f(x)|$ siendo $f(x)$ la función del ejercicio 7.

19. Completa las siguientes funciones sabiendo que son continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x \leq 0 \\ \ldots \; si \; 0 < x \leq 3 \\ 5 \; si \; x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 \; si \; x \neq 2 \\ \ldots \; si \; x = 2 \end{cases}$

20. Calcula f∘g y g∘f, en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$; $g(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 3}$ $g(x) = 3x + 1$

21. Expresa las siguientes funciones como composición de otras dos.

a) $y = 3x^6 - 2x^2$

b) $y = \dfrac{3}{2x - 2}$

c) $y = \sqrt{3x^2 + 1}$

22. Halla la inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3x - 2$

b) $y = \sqrt{3x + 2}$

c) $y = \dfrac{3}{x - 1}$

23. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Existen funciones cuyo recorrido se reduce a un solo punto.

b) Si la variación de una función en un intervalo [a,b] es positiva, la función es creciente en dicho intervalo.

c) Existen funciones que son simultáneamente simétricas respecto al eje OY y al origen de coordenadas.

d) Una función sólo puede cortar al eje OY en un punto.

e) Existen funciones que no cortan a ninguno de los dos ejes de coordenadas.

f) Si dos intervalos tienen la misma longitud, la tasa de variación media de una función es igual en los dos intervalos.

NIVEL III

1. Demuestra algebraicamente que si una recta tiene pendiente positiva, es una función creciente en todo R.

2. Representa la función y = $x - |x|$ y estudia su dominio, recorrido, monotonía y extremos y continuidad.

3. Representa la función $f(x) = x\text{-}E(x)$. Indica cuál es su dominio y recorrido y estudia su crecimiento, extremos relativos, continuidad y periodicidad.

4. Estudia y representa la función y = $E(x/2)$

5. Una compañía aérea permite facturar gratuitamente 30 Kg. de equipaje. Cuando se sobrepasa este peso, cobra 600 ptas por cada 5 Kg. o fracción del exceso de equipaje. Halla la expresión analítica de la función que da el precio total a pagar por x kilogramos de equipaje (Indicación: utiliza la función "parte entera")

6. Expresa la siguiente función como composición de tres:

$$f(x) = \frac{2}{(5x-1)^2}$$

7. Representa la función y = $|x\text{-}3|$ y estudia su monotonía y continuidad.

8. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x < 2 \\ -x + 4 & si \quad 2 \leq x < 5 \\ x - E(x) & si \quad 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente e indica su dominio y recorrido.

b) Halla los límites laterales en los puntos $x = 0$, $x = 2$, $x = 5$ y $x = 6$. ¿Es continua en ellos?

c) Estudia su monotonía y extremos.

d) Estudia su continuidad.

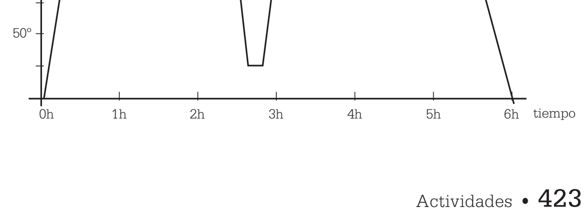
9. En una fotocopistería el precio de cada fotocopia es fijo y depende del número total de copias que se encarguen. Los precios son:

nº total	de 1 a 10	de 11 a 30	más de 30
precio/unidad	12 ptas.	10 ptas.	8 ptas.

a) Determina la expresión analítica del precio en función del número de fotocopias y representa la función.

b) A la vista de la gráfica, critica la tarifa.

10. La velocidad de un tren durante las 6 horas que dura su viaje viene dada por la siguiente gráfica:



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función e interpreta el resultado.
b) Halla el espacio recorrido entre las 3,5h y las 5,5h. ¿Qué interpretación gráfica tiene?
c) Halla el espacio recorrido en las 6 horas e indica qué interpretación tiene en la gráfica.
d) Generaliza el resultado cuando la velocidad en cada instante viene dada por una gráfica cualquiera.

11. Indica razonadamente cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si la TVM de una función en un intervalo [a,b] es positiva, la función es creciente en dicho intervalo.
b) En una función afín, la TVM en cualquier intervalo es siempre la misma.
c) Si una función es creciente en [a,b], su TVM en ese intervalo es positiva.
d) La suma de dos funciones crecientes es creciente.
e) El producto de dos funciones crecientes es creciente.
f) Si una función es par, tiene, al menos, un extremo relativo.

12. Una empresa de refrescos desea fabricar latas de 1/3 de litro de contenido, de manera que el gasto en material sea el mínimo posible, es decir, de manera que la superficie total de la lata sea mínima.

a) Halla la función que expresa el área total en función del radio de la base.
b) Representa gráficamente la función dando valores. Utiliza una calculadora programable o una hoja de cálculo en el ordenador.
c) A la vista de la gráfica, ¿para qué valor del radio de la base se obtiene la lata más barata?¿cuál será su altura?
d) Si el material cuesta 500 ptas./m^2, halla la función que nos da el coste de la lata en función del radio de la base. ¿Dónde se alcanzará el mínimo?

13. Un depósito está formado por dos cilindros. El de abajo, de radio de la base 1m. y altura 2 m. Sobre él, otro de 2 m. de altura y radio de la base 3 m. Un grifo vierte agua a razón de 3 litros por segundo.

Halla la función “a trozos” que expresa la altura que alcanza el agua en función del tiempo y estudia su continuidad.

Unidad n.º 9

Funciones elementales. Límites

Objetivos

– Identificar funciones cuadráticas y de proporcionalidad inversa dada sus expresiones y en diferentes contextos, representarlas gráficamente y utilizarlas en la resolución de problemas .... (I-II-III)
– Averiguar la tendencia en 0 y en ∞ de la función de proporcionalidad inversa .... (I-II-III)
– Hallar e interpretar límites laterales infinitos y límites en el ∞ a partir de la gráfica de una función .... (II-III)
– Reconocer los distintos tipos de discontinuidad de una función .... (II-III)
– Representar funciones mediante traslaciones y multiplicación de las variables independiente y/o dependiente por una constante .... (II-III)
– Reconocer y representar las funciones $y = x^n$ e $y = \sqrt[n]{x}$ .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. La función cuadrática .... (I-II-III)
   1.1. La función $y = ax^2$. Gráfica. Vértice. Propiedades (abertura, crecimiento, máximos y mínimos, continuidad) .... (I-II-III)
   1.2. La función $y = ax^2+bx+c$. Gráfica. Vértice. Propiedades .... (I-II-III)
2. La función de proporcionalidad inversa:
   2.1. La función $y = 1/x$. Gráfica y propiedades (crecimiento, continuidad, asíntotas) .. (I-II-III)
   2.2. La función $y = K/x$. Gráfica. Propiedades .... (I-II-III)
3. Límites laterales infinitos en un punto. Interpretación gráfica .... (II-III)
4. Límites finitos en el infinito. Interpretación gráfica .... (II-III)
5. Las funciones $y = x^n$ e $y = \sqrt[n]{x}$ .... (II-III)
6. Límites infinitos en el infinito. Interpretación gráfica .... (II-III)
7. Clasificación de puntos de discontinuidad .... (II-III)
8. Familias de funciones: Gráfica de $-f(x)$; $|f(x)|$; $f(x)+k$; $f(x-h)$; $kf(x)$ y $f(kx)$ a partir de la de $f(x)$ .... (II-III)

Procedimientos

– Representación de la función $y = ax^2$ mediante obtención de puntos de la misma .... (I-II-III)
– Representación de la función cuadrática general a partir de $y = ax^2$ mediante traslaciones (II-III)
– Representación de parábolas a partir del vértice y de sus propiedades .... (I-II-III)
– Representación de la función $y = K/x$ .... (I-II-III)
– Resolución de problemas mediante la utilización de funciones cuadráticas y de proporcionalidad inversa .... (I-II-III)
– Cálculo de los puntos de corte de las gráficas de dos funciones .... (I-II-III)
– Interpretación gráfica del límite en un punto y en el infinito .... (II-III)
– Determinación de límites en un punto y en el infinito a partir de la gráfica de una función (II-III)

– Determinación de la tendencia de una función a la izquierda y derecha de una asíntota vertical .... (II-III)
– Determinación de límites de algunas funciones racionales y radicales sencillas .... (II-III)
– Representación de funciones que cumplan determinadas condiciones sobre límites y asíntotas .... (II-III)
– Representación de funciones definidas a trozos con las nuevas funciones estudiadas . (II-III)

Orientaciones metodológicas

– En el nivel I, las funciones contextualizadas son facilitadas al alumno, mientras que en los niveles superiores se pide al alumno su determinación.
– El léxico y la notación de límites se limitará a los niveles II y III. En el nivel I bastará usar expresiones como “cuando *x* se acera a...”, “cuando *x* es cada vez más grande”, etc. para representar e interpretar las asíntotas verticales y horizontales en la función de proporcionalidad inversa.
– No se estudiarán técnicas de cálculo de límites. La determinación se hará a la vista de la gráfica o directamente en los casos sencillos sin indeterminación que sean intuitivos ($\infty + \infty$; $\infty . \infty$; K/∞; $K/0$; ∞^n y $\sqrt[n]{\infty}$)

Criterios de evaluación

– Estudiar y representar funciones cuadráticas .... (I-II-III)
– Resolver problemas de enunciado .... (I-II-III)
– Identificar funciones cuadráticas y de proporcionalidad inversa a partir de su gráfica ... (I-II-III)
– Construir y utilizar funciones cuadráticas y de proporcionalidad inversa a partir de un texto o de determinadas condiciones que deban cumplir .... (II-III)
– Hallar e interpretar límites y asíntotas de una función .... (II-III)
– Representar funciones por traslación .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas dando valores a x:

a) $y = x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = 2x^2$

d) $y = 3x^2$ e) $y = (1/3)x^2$ f) $y = -2x^2$

2. Halla el vértice, eje de simetría y los puntos de corte con los ejes de coordenadas, cuando existan, de las siguientes parábolas. Represéntalas gráficamente:

a) $y = x^2 - 3x$ b) $y = 3x^2 + 12x - 5$ c) $y = x^2 + 5x - 6$

¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada una?

3. Halla los puntos de corte de la parábola y la recta que se indican.

a) $y = x^2 + 3x + 2;$ $y = 2$

b) $y = -x^2 - 5x + 4;$ $y = 4$

c) $y = x^2 - 4x + 1;$ $y = 3x - 1$

4. Representa las siguientes parábolas, determinando previamente el vértice y los puntos de corte con la recta y = c (siendo c el término independiente de la función cuadrática)

a) $y = x^2 + x + 1$

b) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 4$

c) $y = -2x^2 + 4x - 3$

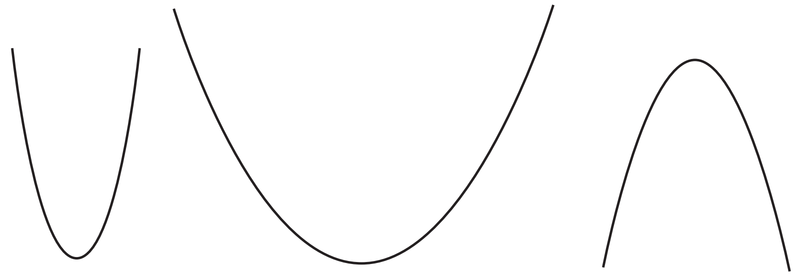
5. Dada la función $y = 2x^2 - 5x + 1$, halla, si existen, todos los números cuya imagen es:

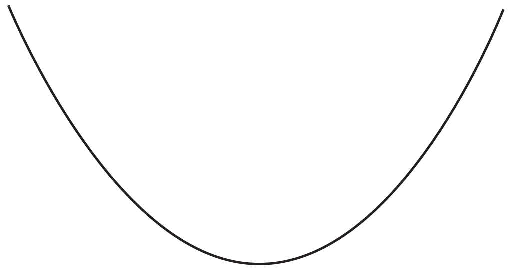
a) -1

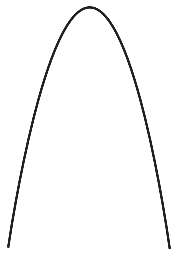
b) -11/4

c) -5

6. Las gráficas siguientes corresponden a las funciones $y = 2x^2$, $y = -x^2$, $y = (1/3)x^2$, $y = (1/5)x^2$ e $y = -2x^2$. Identifica cada una.







7. En una carrera ciclista se comienza a ascender un puerto. La pendiente del mismo (medida en porcentaje) a los x kilómetros de ascensión viene dado por la función:

$$p(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{10}x + 6$$

a) ¿Cuál es la pendiente al comenzar el puerto?
b) ¿Cuál es la pendiente a los 6 km.?
c) ¿En algún kilómetro del puerto la pendiente es del 9%?
d) Representa la función y estudia e interpreta su crecimiento.

8. Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 20 m/s. La altura, medida en metros, a la que se encuentra del suelo trascurridos t segundos desde su lanzamiento viene dada por la función $y = -5t^2 + 20t$. Representa la función y responde:
a) Halla e interpreta la imagen de 2.
b) ¿A qué altura se encuentra a los 3 segundos?
c) ¿En qué instante se encuentra a 15 metros del suelo?
d) Estudia e interpreta el crecimiento de la función
e) ¿Cuál es el dominio de la función en el contexto del problema?
f) ¿Cuánto tiempo tarda en volver al suelo?

9. Una empresa que fabrica cintas de vídeo ha comprobado que si vende cada cinta a x euros, los beneficios diarios que obtiene, en millones de euros, vienen dados por la función

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}$$

a) Representa la función y determina su dominio.
b) ¿Cuándo obtiene más beneficios, vendiendo a 6 ó a 6,5 euros la cinta?
c) ¿A cuánto ha de vender la cinta para obtener los máximos beneficios?

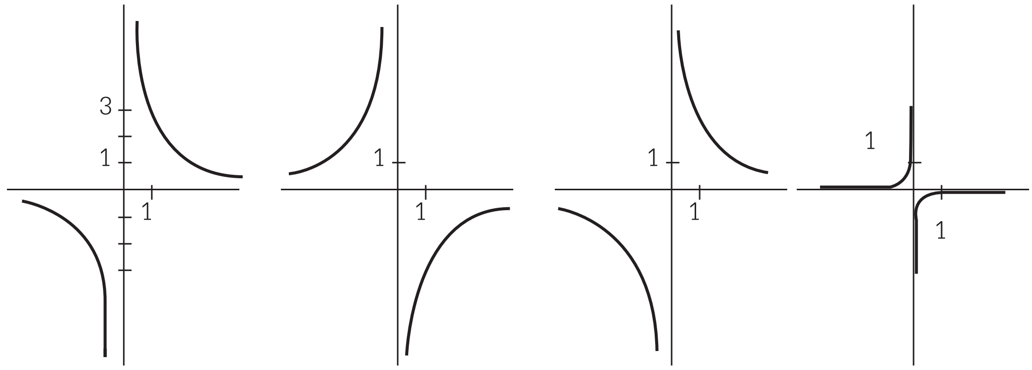
10. Representa las siguientes funciones dando valores a x:

a) $y = 1/x$ b) $y = -2/x$ c) $y = 4/x$ d) $y = 1/3x$

11. Las gráficas corresponden a las funciones siguientes:

a) $y = \frac{3}{x}$ b) $y = -\frac{2}{x}$ c) $-\frac{1}{3x}$ d) $y = \frac{2}{x}$

Identifícalas.



12. Calcula la altura de un rectángulo de 5 cm^2 de área en función de su base. ¿Qué le ocurre a la altura cuando la base va tomando valores cada vez más próximos a cero? ¿y cuando la base se va haciendo cada vez más grande?

Representa gráficamente la función.

13. Un fabricante de refrescos ha comprobado que el coste de fabricación por litro viene dado por la función $y = 30 + 50/x$, en donde x es el número de litros producidos e y es el coste en pesetas.

a) ¿Cuál es el coste por litro cuando se producen 10 litros? ¿Y cuando se producen 100?

b) ¿A cuánto se va aproximando el precio por litro conforme la producción se va haciendo muy grande?

c) Si la producción es muy pequeña (muy cercana a 0 litros), ¿qué le ocurre al precio por litro?

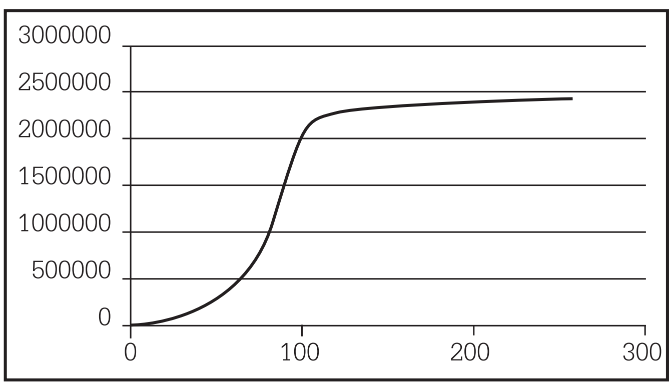
d) Representa la función.

14. El número de árboles de un bosque en función de la edad de éste viene dado por la gráfica siguiente:

a) ¿Cuántos árboles había a los 100 años?

b) Estudia el crecimiento de la función. ¿Cuándo el crecimiento empezó a no ser tan fuerte?

c) Cuanto más edad tiene el bosque, ¿a cuánto se aproxima número de árboles?



15. Halla, si los hay, los puntos de corte de las siguientes funciones:

a) $y = x^2$; $\quad y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = -2x^2 + 4x$; $\quad y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = x^2 - 2x + 2$; $\quad y = -2x^2 - 2x$

16. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) El recorrido de la función $y = x^2$ es el intervalo $[0, +\infty]$

b) El domino de la función $y = 1/(x - 2)$ es el conjunto de los números reales.

c) La parábola $y = x^2 - 6x + 8$ corta al eje OX en los puntos (2, 0) y (4, 0).

d) La parábola de ecuación $y = (x - 1)^2$ es simétrica respecto al eje OY.

e) La gráfica de $y = -4x^2$ es una parábola abierta hacia abajo y es más abierta que $y = x^2$.

f) El punto mínimo de la parábola $y = x^2 - 6x + 4$ es el (3, -5).

NIVEL II

1. Representa las siguientes funciones mediante traslación de la función $y = ax^2$ que corresponda en cada caso. Indica cuál es el vértice de cada una:

a) $y = x^2 + 3$

b) $y = 2x^2 + 1$

c) $y = (x + 2)^2$

d) $y = (x - 3)^2 - 4$

e) $y = -2(x - 1)^2 + 2$

f) $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 3$

g) $y = \dfrac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$

h) $y = (x - \sqrt{5})^2 - \sqrt{3}$

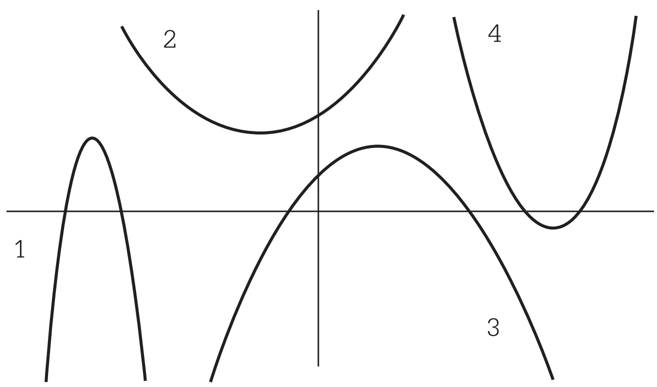
2. En la figura están representadas las parábolas correspondientes a las siguientes funciones:

1: $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$

2: $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

3: $y = a_3x^2 + b_3x + c_3$

4: $y = a_4x^2 + b_4x + c_4$



a) Indica el signo de las constantes a_1, a_2, a_3 y a_4, y ordénalas de menor a mayor.

b) Haz lo mismo con las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4

3. Una parábola tiene su vértice en el punto V(1,2) y pasa por el punto (3,6). Halla su ecuación.

4. Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 3$, halla todos los números reales cuya imagen es positiva. ¿Cómo se puede enunciar este ejercicio en términos de inecuaciones? Se te ocurre algún método para resolver inecuaciones de segundo grado?

5. Con 22 metros de tela metálica se quiere acotar un corral de forma rectangular. Uno de sus lados coincide con una tapia ya construida, por lo que no necesita valla. Halla la expresión que da el área en función de uno de los lados del rectángulo, su dominio, represéntala gráficamente y determina qué dimensiones ha de tener el corral para que el área sea máxima.

6. Se dispone de 400 Kg. de manzanas cuyo precio actual es de 80 ptas/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg. y el precio aumenta 2 ptas/kg. ¿Cuántos días hemos de esperar a venderlas para obtener el máximo beneficio?¿cuál será éste?

7. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x < 0 \\ 2x - x^2 \ si \ 0 \le x < 3 \\ 2x - 1 \ si \ x \ge 3 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente.
b) Estudia su crecimiento y sus máximos y mínimos.
c) Calcula los límites laterales en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Existe el límite en estos puntos?
d) Estudia su continuidad.

8. Un coche y una moto salen simultáneamente de una población. La velocidad del coche es de 80 km/h. La distancia en kilómetros a la que se encuentra la moto de la población en función del tiempo en horas viene dado por la función $e(t) = 10t^2 + 20t$. Calcula a qué distancia de la población volverán encontrarse y el tiempo que tardarán.

9. Determina la función que expresa en función de la velocidad, el tiempo que le cuesta a un automóvil recorrer 10 Km. Halla el dominio y representa la función. Calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

10. Dada la función:

$$f(x) = \frac{2}{x-3},$$

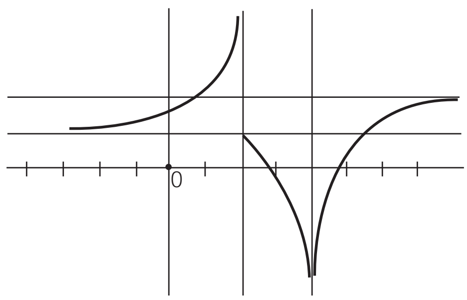
a) Calcula los límites laterales en x=3. Interpreta gráficamente el resultado.
b) Calcula los límites cuando x tiende a -∞ y a +∞ e interprétalos gráficamente.

11. Dada la siguiente función, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



12. Dibuja una función que cumpla todas las condiciones siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$

c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$

e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

g) Es creciente en $(-4, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en el resto

13. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 4/x \; si \; x < 2; \\ x^2 - 4x \; si \; 2 \le x < 5; \\ -x + 10 \; si \; x > 5 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente.

b) Estudia su crecimiento y sus máximos y mínimos.

c) Estudia su continuidad y clasifica sus puntos de discontinuidad.

d) Determina sus asíntotas y la tendencia a ambos lados de la asíntota vertical.

14. Indica el dominio y recorrido de las siguientes funciones y calcula los límites cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$ cuando sea posible:

a) $y = 2x^2$ b) $y = 3x^5$

c) $y = -(1/2)x^6$ d) $y = -5x^7$

e) $y = \sqrt{x}=$ f) $y = \sqrt[5]{x}$

g) $y = \sqrt[3]{-x}$ h) $y = \sqrt[4]{-x}$

Haz un esbozo de su gráficas.

15. Representa las siguientes funciones por traslación, calcula los límites que se indican y determina las asíntotas de cada una, si existen.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

b) $f(x) = \dfrac{4}{2-x}$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

c) $f(x) = \dfrac{2}{x-4} + 3$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

d) $f(x) = \sqrt{x-4}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

e) $f(x) = \sqrt{x} + 4$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

g) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

16. Representa las siguientes funciones y determina los límites en -∞ y en +∞.

a) $y = \left|\frac{1}{x}\right|$

b) $y = |x^2 - 4|$

c) $y = |x^2 + 2x - 3|$

17. Halla las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{2x - 1}$$

NIVEL III

1. Expresa las siguientes funciones cuadráticas en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ y represéntalas directamente a partir de la función $y = ax^2$ correspondiente en cada caso:

a) $y = x^2 - 4x - 1$ b) $y = x^2 + 3x + 5$ c) $y = -2x^2 + 3x - 5$

2. Calcula el valor de K para que la parábola $y = 2x^2 - 10x + K$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas.

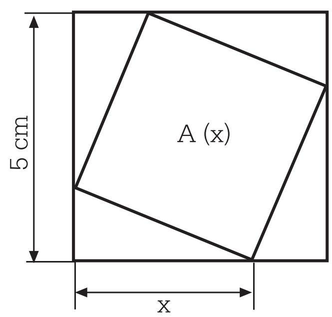
3. Halla los valores de K que hacen que en la función $y = x^2 + 4x + K$, todos los números reales tengan imagen positiva.

4. En un circuito se realiza la siguiente prueba a un automóvil:

Estando el vehículo parado, se acelera bruscamente durante unos segundos y a continuación se levanta el pie del acelerador. Se comprueba que la velocidad alcanzada a los t segundos de iniciarse el movimiento viene dada por una función cuadrática, y que a los 3 y a los 9 segundos, la velocidad alcanzada fue de 81 Km/h.

¿En qué momento se alcanzó la velocidad máxima y cuál fue? ¿Cuánto tiempo duró la prueba?

5. En un cuadrado de lado 5 cm. inscribimos otro como se indica en la figura. Calcula cuánto ha de medir el lado del cuadrado inscrito para que su área sea mínima.



6. Determina qué condiciones han de cumplir los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ para que el vértice:

a) Sea el origen de coordenadas

b) Se encuentre en el eje OX.

c) Se encuentre en el eje OY.

d) Se encuentre en la recta $y = x$

Pon un ejemplo de cada una.

7. Halla la función cuadrática que pasa por los puntos (0, -3), (2, 5) y (-1, -4).

8. Se desea transportar x litros de aceite desde el trujal a la planta embotelladora. El transporte se realiza en una furgoneta con capacidad para 500 litros. Cada viaje de la furgoneta cuesta 2000 ptas. Halla la función p(x) que indica el precio por litro que cuesta el transporte y represéntala en el intervalo [0,1500]. Estudia la continuidad de la función y clasifica sus puntos de discontinuidad.

9. Representa la función $y = 4/x^2$. Determina sus asíntotas.

10. Representa la función $y = \sqrt[3]{x^2}$, especificando su dominio y recorrido. Determina los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ y los límites laterales en $x = 0$.

11. Dada la función

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$$

a) Exprésala en la forma $y = A+B/(x-2)$

b) Represéntala gráficamente mediante traslaciones.

c) Clasifica sus puntos de discontinuidad.

d) Determina sus asíntotas y la tendencia de la gráfica a la izquierda y derecha de la asíntota vertical.

12. Halla las asíntotas de la función

$$y = \frac{ax+b}{x-c}$$

13. Un barco dispara su cañón contra un objetivo situado sobre un acantilado en la costa a 84 m. de altura sobre el nivel del mar. La distancia entre el barco y la costa es de 280 m. El proyectil describe una trayectoria parabólica, y la máxima altura que alcanza es de 100 m. Además, la distancia entre el barco y el pie de la perpendicular trazada desde el vértice es 200 m. ¿Dará el proyectil en el blanco?

Unidad n.º 10

Las funciones exponencial y logarítmica

Objetivos

- Identificar funciones exponenciales dada su expresión o su gráfica y conocer sus propiedades (I-II-III)
- Interpretar funciones exponenciales en diferentes contextos .... (I-II-III)
- Calcular logaritmos .... (I-II-III)
- Conocer y utilizar las propiedades de los logaritmos .... (I-II-III)
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas .... (II-III)
- Identificar la función logarítmica como inversa de la exponencial y conocer sus propiedades.... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. La función exponencial:
   - 1.1. La función $y = a^x$: Propiedades (dominio, recorrido, continuidad, crecimiento, tendencia en $-\infty$ y $+\infty$) y gráfica .... (I-II-III)
   - 1.2. Las funciones $y= Ka^x$ e $y = a^{Cx}$: propiedades y gráfica .... (I-II-III)
2. La función logarítmica:
   - 2.1. Logaritmo de un número .... (I-II-III)
   - 2.2. Propiedades de los logaritmos .... (I-II-III)
   - 2.3. Cambio de base .... (III)
   - 2.4. La función logarítmica. Propiedades .... (II-III)
   - 2.5. Gráfica de la función logarítmica .... (II-III)
3. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales .... (II-III)
4. Aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica .... (I-II-III)

Procedimientos

- Uso de la calculadora para hallar imágenes en la función exponencial .... (I-II-III)
- Representación de funciones exponenciales de distintas bases, menores y mayores que 1 y estudio de la relación entre sus gráficas .... (I-II-III)
- Identificación de la función $y = a^{-x}$ con $y = (1/a)^x$ .... (I-II-III)
- Identificación de la función $y = a^x$ con $y = e^{Cx}$ .... (II-III)
- Determinación del límite de la función exponencial en $-\infty$ y $+\infty$ .... (II-III)
- Resolución de problemas sobre fenómenos que respondan a la función exponencial .. (I-II-III)
- Cálculo de logaritmos por la definición o con calculadora .... (I-II-III)
- Estudio y representación de funciones “a trozos” en las que intervengan las funciones exponencial y logarítmica .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

- Igual que en la unidad 9, en el nivel I, las funciones contextualizadas son facilitadas al alumno, salvo en algún caso muy sencillo, mientras que en los niveles superiores se pide al alumno su determinación.
- En el nivel I sólo se resolverán ecuaciones exponenciales en las que sólo haya que despejar de la función exponencial, con el fin de calcular anti-imágenes en distintos contextos. El ejercicio 14 del nivel I tiene ese fin, mientras que el objetivo del número 10 es únicamente afianzar el concepto de logaritmo.

Criterios de evaluación

- Representar funciones exponenciales de distintas bases .... (I-II-III)
- Comparar potencias .... (I-II-III)
- Hallar e interpretar imágenes y anti-imágenes en la función exponencial e interpretar la gráfica en distintos contextos .... (I-II-III)
- Hallar límites y asíntotas de funciones exponenciales y logarítmicas .... (II-III)
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas .... (II-III)
- Hallar, estudiar e interpretar la función exponencial que corresponda a determinados fenómenos .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales y estudia la relación entre las de cada apartado:

a) $y = 2^x$; $y = (1/2)^x$; $y = 2^{-x}$; $y = 0{,}5^x$

b) $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$

c) $y = 4^x$; $y = (1/4)^x$; $y = 4^{-x}$

d) $y = 1{,}5^x$; $y = (2/3)^x$

Observa cómo crecen las distintas funciones exponenciales según los valores de la base.

2. En un laboratorio se realiza un cultivo de bacterias. El número estas se duplica cada minuto, y al comenzar el cultivo era de 1 millón. Construye una tabla de valores en la que figure el número de bacterias existente cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4, 5 y 6 minutos.

Expresa el número de bacterias en función del tiempo y representa gráficamente la función.

3. Un depósito de agua se está vaciando de manera que la cantidad de agua, en miles de litros, que queda a los t minutos de haberse abierto el desagüe viene dado por la función $y = 1{,}1^{-x}$.

a) Halla e interpreta la imagen de 4 en la función.

b) ¿Cuánta agua queda a los 3 minutos?

c) ¿Qué cantidad de agua había en el momento de abrirse el desagüe?

d) Representa la función en el intervalo [0,7]

e) ¿Qué ocurre cuando el tiempo va aumentando indefinidamente? ¿Te parece que la función realmente se ajusta al fenómeno?

4. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia la relación entre las de cada apartado:

a) $y = 2^x$; $y = 3 \cdot 2^x$; $y = 4 \cdot 2^x$

b) $y = 3^{-x}$; $y = 2 \cdot 3^{-x}$; $y = (1/2) \cdot 3^{-x}$

c) $y = e^x$; $y = 2 \cdot e^x$; $y = (1/3)e^x$

d) $y = 2^{2x}$; $y = 4^x$

e) $y = 4^{0{,}5x}$; $y = 2^x$

f) $y = 3^{0{,}4x}$; $y = 1{,}5518^x$

5. Sin hacer ninguna comprobación, di cuáles de las siguientes funciones exponenciales son crecientes y cuáles decrecientes:

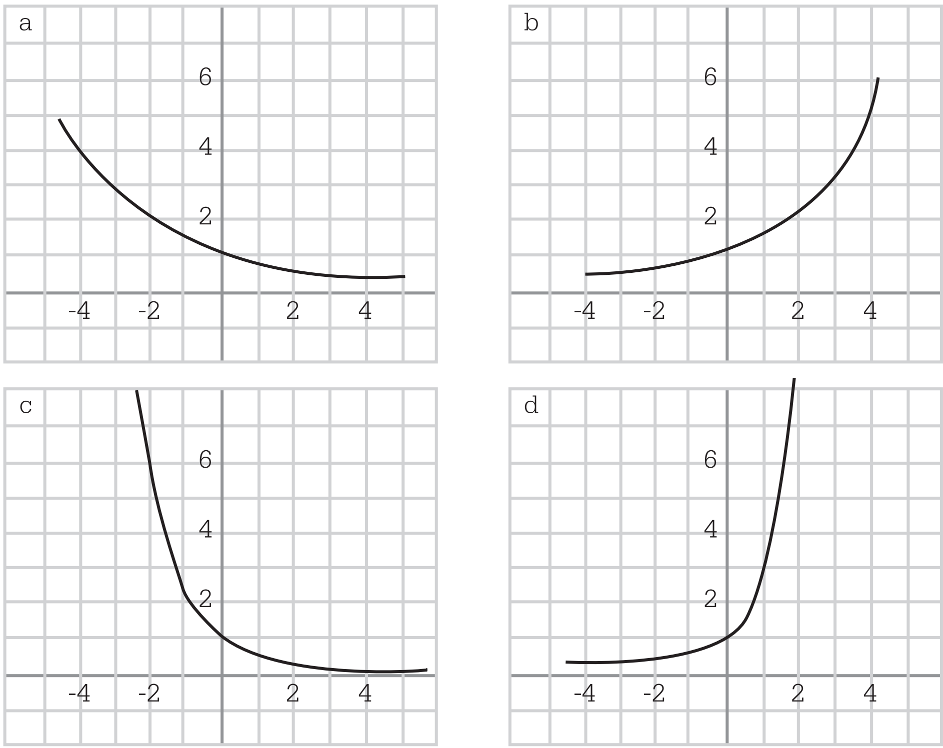
a) $y = 2{,}5^{-x}$ b) $y = 0{,}9^x$ c) $y = (2/5)^x$

d) $y = 0{,}75^{-x}$ e) $y = 2 \cdot 0{,}76^x$ f) $y = (1/3) \cdot 3^{-x}$

g) $y = 2^{3x}$ h) $y = 0{,}7^{2x}$

6. Identifica cada función con su gráfica.

a) $y = 3^x$ b) $y = 1{,}5^x$ c) $y = 0{,}4^x$ d) $y = 0{,}7^x$



7. Ordena los siguientes pares de potencias, preferiblemente sin utilizar la calculadora:

a) $1{,}7^3$; $1{,}7^5$ b) $0{,}5^2$; $0{,}5^4$

c) $0{,}7^{1/4}$; $0{,}7^{2/3}$ d) $(3/2)^{0{,}3}$; $(3/2)^{0{,}35}$

8. El precio de un coche a los t años de su compra viene dado por la función siguiente.

$$y = 4 \cdot 2^{-0{,}3t}$$

a) ¿Cuánto costó en el momento de la compra?

b) ¿Cuál es su valor a los 3 años?

c) Representa la función. Estudia e interpreta su crecimiento.

d) En los tres primeros años, ¿aumentó o disminuyó su valor?, ¿en qué porcentaje?

9. Un trabajador entra en una empresa con un sueldo anual de 3,5 millones de pesetas. En el convenio colectivo está estipulado que durante los próximos diez años, el salario que percibirá a los t años de su ingreso viene dado por la función $y = 3{,}5 \bullet (1{,}03)^t$.

a) Halla el sueldo que cobrará el segundo año y calcula el porcentaje que supone el incremento.

b) Representa la función. Estudia e interpreta su crecimiento.

10. Aplicando la definición de logaritmo, calcula:

a) $\log_4 16$ b) $\log_5 625$ c) $\log_2 1/2$ d) $\log_4(1/16)$

e) $\log_5(1/125)$ f) $\log_7 1$ g) $\log_4 1$ h) $\log_5\sqrt[3]{25}$

i) $\log_9 9$ j) $\log_4(1/64)$ k) $\log_3 81$ l) $\log_2\sqrt[3]{1024}$

11. Calcula el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_x \sqrt{2} = 4$ b) $\log_3(1/3) = x$ c) $\log_x 25 = -2$ d) $\log_x 121 = 2$

e) $\log_x 3 = 1$ f) $\log_x 1 = 0$ g) $\log_x \sqrt{3} = 1/2$ h) $\log_{25} 5 = x$

i) $x = 3^{\log_3 7}$ j) $x = \log_5 5^4$ k) $x = 10^{\log 2}$ l) $x = \log_4 4^3$

12. Sabiendo que log 2 = 0,301 y log 3 = 0,477, calcula, utilizando las propiedades de los logaritmos:

a) log 6 b) log 36 c) log 12 d) $\log \sqrt{\dfrac{4}{3}}$

13. Expresa los siguientes logaritmos de manera que sólo aparezcan sumas y restas de logaritmos:

a) $\log(a.b)$ b) $\ln(a^3b)$ c) $\log\dfrac{a^3}{\sqrt{b}}$ d) $\ln \sqrt{\dfrac{a^3b^2}{c^4}}$

14. Comprime las siguientes expresiones de manera que el logaritmo aparezca una sola vez:

a) $\log x^3 - \log y$ b) $2 \ln x + \ln y - 3 \ln z$ c) $\log x - 2 \log y^3$ d) $\dfrac{\log x}{2} + \dfrac{1}{4}\log y$

15. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $2^x = 64$ b) $3^x = 19$ c) $e^{2x} = 7$ d) $5e^{-x} = 10$

e) $3^{-x} = 27$ f) $2^{4x} = 15$ g) $3.2^{0,3x} = 8$ h) $2e^{2x+1} = 7$

16. Si en un país la tasa de inflación anual es del 3%, un artículo que hoy cuesta 1000 ptas., costará dentro de t años $P(t) = 1000 \cdot (1,03)^t$ ptas.

a) ¿Cuánto costará dentro de cinco años?
b) ¿Qué porcentaje habrá subido en esos cinco años?
c) ¿Cuántos años han de transcurrir para que su precio sea de 1558 ptas?
d) ¿Cuántos años han de transcurrir para que se duplique su precio?

17. La cantidad de carbono 14 que queda a los t años de la muerte de determinado ser vivo viene dado por la función $C(t) = 27 \cdot e^{-0,12094t}$ (C expresado en gramos).

a) ¿Se trata de una función creciente o decreciente?¿Por qué?
b) ¿Qué cantidad de Carbono 14 tenía en el momento de su muerte
c) ¿Cuántos gramos quedan a los 10 años de su muerte?
d) ¿Cuántos años han de transcurrir para que la cantidad de Carbono 14 se reduzca a 1 gramo?¿Y para que quede la décima parte de la cantidad inicial?

NIVEL II

1. Representa mediante traslaciones las siguientes funciones.

a) $y = 2+2^x$ b) $y = 3+e^{-x}$ c) $y = 2^{x-3}$

d) $y = e^{-x+4}$ e) $y = (1/2)e^{-x}$ f) $y = 1+2^{x+4}$

Halla los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ en cada una e interpreta gráficamente el resultado.

2. Si la base de la exponencial es muy próxima a 1, cerca del origen su gráfica crece muy despacio y no difiere mucho de una recta horizontal, pero para valores grandes la función crece mucho más deprisa que cualquier función de las que conoces. Compruébalo rellenando la siguiente tabla (utiliza la notación científica):

x	5	10	15	100	500	1000	2500	5000	10000
x^2									
x^6									
$1{,}01^x$									

3. La función exponencial $y = Ka^x$ pasa por los puntos (0; 2) y (2; 1,28). Calcula las constantes K y a y representa la función.

4. Ordena las siguientes potencias sin utilizar calculadora:

a) $\sqrt[3]{1{,}2^4}$; $\sqrt{1{,}45}$

b) $0{,}2^7$; $1{,}3^{1{,}001}$

c) $2^{0{,}3}$; $3^{-0{,}2}$; $4^{0{,}2}$

d) $(1/2)^{-1/2}$; $(1/3)^{-1/3}$; $(1/4)^{-1/4}$

5. Se colocan 2 millones de pesetas a un interés compuesto del 6% anual. Determina la función que da el capital total al cabo de t años. Representa la función.

6. Sea la función:

$$f(x) \begin{cases} 2^x \ \ si\ x < 0; \\ -x^2 + 4\ si\ 0 \leq x < 2; \\ \dfrac{1}{x-3}\ \ si\ \ x \geq 2 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente.

b) Estudia su crecimiento y extremos.

c) Halla los límites laterales en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$, los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ e interpreta gráficamente los valores obtenidos.

d) Estudia su continuidad y clasifica sus puntos de discontinuidad.

7. La producción de determinada empresa a los t años de su creación viene dada por la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 5e^{t-2}\ si\ 0 \leq t < 2; \\ \dfrac{-t+12}{2}\ \ si\ \ 2 \leq t \leq 4 \end{cases} \qquad \text{(P en miles de toneladas)}$$

a) Representa la función.

b) Halla los límites laterales en $x = 2$ y estudia su continuidad.

c) Estudia e interpreta su crecimiento. ¿Cuándo se alcanzó la máxima producción y cuál fue?

d) Halla e interpreta la tasa de variación media en el intervalo [0,2].

8. Expresa las siguientes funciones exponenciales en la forma $y = Ae^{bx}$

a) $y = 4^3$ b) $y = 2^{3x}$ c) $y = 2^{2x+1}$ d) $y = 5 \cdot 7^{2x+3}$

9. Calcula x en las siguientes igualdades:

a) $x = \log_5 0{,}008$ b) $\log_3 \sqrt{x} = 1/2$ c) $\log_8 2^9 = x$ d) $\log_x 2x = 2$

e) $\log_x \sqrt{3} = 1/2$ f) $\log_x(9/25) = -2$ g) $\log_x(1/3) = -1/2$ h) $\log_{10} \sqrt[4]{0{,}001} = x$

10. Representa las siguientes funciones logarítmicas a partir de sus inversas:

a) $y = \log_2 x$ b) $y = \ln x$ c) $y = (1/2) \ln x$ d) $y = -\log_2 x$

11. Representa las siguientes funciones mediante traslaciones:

a) $y = 3 + \log_2 x$ b) $y = 1 - \ln x$ c) $y = \log_3(x-2)$ d) $y = 2 + \ln(x + 3)$

12. Halla fog y gof siendo:

a) $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$; $g(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $g(x) = 2^x$

c) $f(x) = \ln x$; $g(x) = \dfrac{x^2}{3x - 2}$

d) $f(x) = e^{3x}$; $g(x) = \ln x$

13. Halla el dominio de las siguientes funciones y determina sus inversas:

a) $y = \log(x-2)$ b) $y = \ln(2x+3)$ c) $y = \ln(1/x^2)$ d) $y = \ln^2 x$

14. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & si\ x \le 0; \\ \ln x & si\ 0 < x \le 1; \\ -\dfrac{x-1}{2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente e indica cuál es su dominio y recorrido.
b) Estudia su crecimiento y sus máximos y mínimos.
c) Estudia su continuidad, especificando el valor de los límites laterales en los puntos de discontinuidad y en los dudosos.
d) Halla los límites en $-\infty$ y en $+\infty$.
e) Halla sus asíntotas.

15. Un bosque tiene una masa forestal de 40.000 m^3 de madera. Se calcula que a causa de los incendios forestales decrece un 6% anual. Determina la expresión de la cantidad de madera en función de los años transcurridos.

a) ¿Cuántos años tardará en reducirse a la mitad?, ¿y a la cuarta parte?
b) Responde a las mismas cuestiones si la cantidad inicial de madera fuese de 50.000 m^3.
c) Expresa las funciones anteriores mediante una exponencial de base e.

16. ¿A qué tanto por ciento ha de estar invertido a interés compuesto un capital para que se duplique en 10 años?

17. Las cantidades en mg. de dos cultivos de levadura a las t horas del comienzo vienen dadas por las funciones:

$$C_1(t) = 3{,}2 \cdot 1{,}19^{3t} \qquad C_2(t) = 5{,}4 \cdot 1{,}65^{t}$$

¿Al cabo de cuánto tiempo habrá igual masa de una que de otra? A partir de ese momento, ¿qué cultivo crece más deprisa?

18. ¿Qué números tienen imagen negativa en cualquier función logarítmica? ¿E imagen mayor que 1?

19. Halla la inversa de las siguientes funciones.

a) $y = 3^{2x}$ b) $y = e^{3x-2}$ c) $y = 3^{x^2}$ d) $y = 3e^{2x}$

¿Cuál es el dominio de las funciones obtenidas?

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5^{2x-1} = 25$ b) $5^{x^2-5x+6} = 1$ c) $3^x . (3^x)^2 = 9^3$
d) 2^{2x}-10.2^x+$16 = 0$ e) $2^x = 3^{x+1}$ f) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 56$
g) $5^{2x+4} - 7^{2x-3} = 0$ h) $1{,}5^x = 0{,}84$ i) $2^{x^2+1} = 87$
j) $\log(x^2 + x + 1) = \lg(3x+1)$ k) $\log x = \log 4 + \log 3$ l) $\log x = 5 \log 3$
m) $\log_5 x + \log_5 30 = 3$ n) $\ln(3-x) + 4 = \ln(x-5)$ o) $1/2\log x = \log x^2$

NIVEL III

1. De la función y = A•b^x se sabe que f(-2) = 3/4 y que f(1) = 6. Halla A y b.

2. Tres países, A, B y C tienen cada una una población de 1 millón de personas. La población del país crece uniformemente un millón cada periodo de 10 años; la de B crece uniformemente 2 millones cada periodo de 10 años; la de C se multiplica por 1,5 cada periodo de 10 años.

a) Determina las funciones que indican la población de cada país en función del tiempo.
b) Dibuja en unos mismo ejes las tres gráficas
c) ¿En qué periodo alcanzará la población de C a la de A?

3. La cantidad de sustancia radiactiva que queda de una cantidad inicial de M gr. viene dada por una función exponencial del tipo C(t) = Me^{kt}, en donde t son los años transcurridos y k una constante que depende del tipo de sustancia.

Se sabe que el radio tarda 1690 años en reducirse a la mitad de la masa. ¿Cuántos años tardará en reducirse a su quinta parte?

4. El número de bacterias que hay en un cultivo de laboratorio a las t horas de iniciado éste es

$$C(t) = \frac{60000}{1 + 14 \,.\, e^{-0{,}4t}}$$

a) ¿Cuál era el número de bacterias al iniciarse el cultivo?
b) ¿Cuántas horas han de transcurrir hasta que el número de bacterias sea de 20.000?
c) Calcula el límite cuando t tiende a +∞ e interprétalo.

5. Calcula la tasa de variación media de la función $y = 2^x$ en los intervalos [1,2], [2,3], [3,4], etc.

Determina la función que a cada valor de x le asigna como imagen la tasa de variación media de la función anterior en el intervalo $[x, x + 1]$. ¿Ocurrirá lo mismo con cualquier función exponencial?

6. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & si\ x < 1 \\ -e^{-x} + k & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halla k para que sea continua en $x = 1$
b) Represéntala gráficamente.
c) Halla sus asíntotas.

7. Calcula:

$$\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \ldots + \log \frac{1000}{999}$$

8. Utiliza logaritmos decimales para averiguar cuantas cifras tiene el número 73^{734}.

9. Calcula las soluciones de la ecuación $3^x + 9^{x-1} = 69$ en forma decimal con dos cifras decimales exactas.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log|1-3x| = 2/5$ b) $|\log(2x + 1)| = 3$ c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

11. a) Cambio de base: Expresa el logaritmo en base a de un número x en función de su logaritmo en otra base b. Para ello, llama y al logaritmo en una base y utiliza la función exponencial.

b) Resuelve la ecuación $\log x - 3\ln x = 4$

12. Encuentra la base del sistema de logaritmos en la que el logaritmo de 48 excede al logaritmo de 6 en 3 unidades.

13. Demuestra que los logaritmos en cualquier base de los términos de una progresión geométrica forman una progresión aritmética. ¿Cuál es su diferencia?

14. El sueldo de una persona es de 180.000 ptas. Durante los próximos 5 años le efectuarán una subida salarial anual del 5%, mientras que se espera que la inflación anual en esos 5 años sea del 6% anual. Halla la función que nos da el poder adquisitivo (sueldo en pesetas actuales quitando el efecto de la inflación) a los t años. ¿Cuál será éste al quinto año?

15. Si se invierten 2 millones de pesetas a un interés compuesto del 8% anual, el capital conseguido a los t años es, en realidad $C(t) = 2 \cdot (1{,}08)^{E(t)}$. Razona por qué esto es así y representa la función.

Unidad n.º 11

Técnicas de recuento. Combinatoria

Objetivos

- Deducir el principio multiplicativo utilizando diagramas de árbol .... (I-II-III)
- Utilizar diagramas de árbol para resolver problemas de combinatoria .... (I-II-III)
- Distinguir entre variaciones con y sin repetición, permutaciones y combinaciones ..... (I-II-III)
- Deducir la fórmula de las combinaciones .... (II-III).
- Resolver problemas de combinatoria .... (I-II-III)
- Utilizar los números combinatorios y sus propiedades .... (II-III)
- Construir el triángulo de Tartaglia a partir de los números combinatorios .... (II-III)
- Desarrollar el binomio de Newton utilizando el triángulo de Tataglia .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Principio multiplicativo y diagramas de árbol:
   - 1.1. Resolución de problemas sencillos mediante diagramas de árbol .... (I-II-III)
   - 1.2. Principio multiplicatico .... (I-II-III)
2. Variaciones y permutaciones:
   - 2.1. Variaciones con repetición .... (I-II-III)
   - 2.2. Variaciones sin repetición .... (I-II-III)
   - 2.3. Permutaciones ordinarias .... (I-II-III)
   - 2.4. Permutaciones con repetición .... (II-III)
3. Combinaciones:
   - 3.1. Combinaciones sin repetición .... (I-II-III)
   - 3.2. Relación entre las variaciones y las combinaciones .... (I-II-III)
   - 3.3. Combinaciones con repetición .... (III)
4. Números combinatorios. Binomio de Newton:
   - 4.1. Números combinatorios. Propiedades .... (II-III)
   - 4.2. Triángulo de Tartaglia .... (II-III)
   - 4.3. Binomio de Newton .... (II-III)

Procedimientos

- Utilización de diagramas de árbol y del principio multiplicativo para calcular todos los casos posibles en un problema .... (I-II-III)
- Reconocimiento de situaciones donde hay que aplicar la combinatoria y aplicación de la más adecuada al contexto, según los elementos que intervienen y si importa o no el orden de éstos .... (I-II-III)
- Utilización de las fórmulas de la combinatoria para resolver distintos problemas, reflexionando siempre sobre la coherencia de los resultados .... (I-II-III)
- Reconocimiento de los números combinatorios y sus propiedades, del triángulo de Tartaglia y del binomio de Newton, y utilizarlos para desarrollar potencias de un binomio .... (II-III)

– Demostración de las propiedades de los números combinatorios .... (III)
– Utilización de la calculadora científica para los cálculos de combinatoria (funciones especiales) .... (II-III)
– Resolución de problemas reales aplicando las técnicas de la combinatoria .... (I-II-III)

Orientaciones metodológicas

– Se debe insistir mucho en la utilización de los diagramas de árbol. Debe ser una unidad eminentemente práctica. Parece mejor plantear un problema real que, lo intenten resolver a su manera y luego resolverlo con las técnicas que nos proporciona la combinatoria. Se dará mucha importancia a la resolución correcta del problema, cualquiera que sea el método utilizado.

Criterios de evaluación

– Utilizar los diagramas de árbol y el principio multiplicativo en la resolución de problemas . (I-II-III)
– Reconocer en qué situaciones hay que aplicar las técnicas de la combinatoria y utilizar la más adecuada .... (I-II-III)
– Distinguir entre variaciones y combinaciones según importe o no el orden .... (I-II-III)
– Manejar los números combinatorios y sus propiedades .... (II-III)
– Utilizar el triángulo de Tartaglia y el binomio de Newton para hallar las potencias de un binomio .... (II-III)
– Utilizar la calculadora científica en las fórmulas de combinatoria (funciones especiales) . (II-III)
– Demostrar alguna propiedad de los números combinatorios .... (III)

Actividades

NIVEL I

1. El modelo Laguna de la marca de coches Renault se fabrica en cuatro versiones distintas, que son: RN, RT, RTX y RTI. Además, para cada una de las versiones se pueden ofertar seis colores diferentes: gris, negro, rojo, verde, azul y blanco. Si quieres adquirir uno de estos modelos, ¿entre cuántos puedes escoger?

2. La primera división de fútbol está formada por 20 equipos. ¿De cuántas formas diferentes podrán quedar clasificados al final de la temporada los tres primeros equipos?

3. Al lanzar tres veces una moneda ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

4. Se lanzan dos dados de diferentes colores. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? ¿Y si se lanzan tres dados?

5. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, pudiéndose repetir las cifras?

6. ¿De cuantas formas se pueden repartir tres premios distintos entre Juan, María, Pedro, Alicia y Pilar, de manera que, a lo sumo, reciban un único premio?

7. ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, secretario y tesorero de un club de baloncesto sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

8. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?

9. ¿De cuántas formas se pueden sentar seis personas en una fila de butacas de un cine?

10. En una escalada, una determinada cordada está compuesta por cinco escaladores. Teniendo en cuenta que van uno detrás de otro, ¿de cuántas formas podrán llegar a la cima?

11. Una persona ha escrito 12 cartas dirigidas a 12 personas distintas, y sus correspondientes sobres. A la hora de meter las cartas en los sobres la llaman por teléfono y, sin fijarse, va introduciendo, al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas distintas podrá rellenar los sobres?

12. En una cierta provincia existen 10 pueblos que están incomunicados entre sí. ¿Cuántos caminos hay que realizar para que siempre exista comunicación entre dos pueblos cualesquiera?

13. A una reunión asisten 17 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

14. Cuatro amigos deciden organizar un torneo de ajedrez. En la primera fase se han de enfrentar de todas las formas posibles. ¿Cuántas partidas se realizarán?

15. Un estudiante tiene que contestar ocho de las diez preguntas del examen. ¿De cuántos formas diferentes puede contestar? ¿Y si las tres primeras son obligatorias?

16. En un bar hay cuatro tipos de bocadillos y cinco tipos de bebidas. ¿Cuántas meriendas (bocadillos y bebidas) distintas se pueden elegir?

17. Se lanzan un dado y una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener? Haz un diagrama de árbol.

18. Escribe todas las palabras posibles de tres letras diferentes (con o sin sentido) con las letras de la palabra MORA. Haz el diagrama de árbol correspondiente.

19. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse cinco personas en un banco de tres asientos? ¿Y en un banco de cinco asientos?

20. En un colegio, los alumnos venden bocadillos para obtener dinero que les ayude a pagar un viaje. Hay cinco alumnos en grupos de tres que atienden el puesto de bocadillos.

a) ¿Cuántos grupos diferentes de tres alumnos se pueden formar?

b) ¿En cuántos de esos grupos entra Sergio, que es uno de los cinco alumnos?

21. En un monte hay ocho casas. Cada casa se comunica con cada una de las restantes por un camino. ¿Cuántos caminos las unen?

22. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono?

23. En una rifa colegial se han hecho mil papeletas, numeradas desde 000 hasta 999. ¿Cuántos capicúas hay?

24. En un equipo de fútbol se cuenta con cinco delanteros centro y el entrenador quiere jugar con dos. Si los cinco tienen las mismas características, ¿de cuántas formas diferentes los puede poner en la alineación?

25. ¿Cuántos son los números naturales que se pueden escribir con dos dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 sin que se repita ninguno? ¿Cuántos terminan en cinco? ¿Cuántos comienzan por tres?

NIVEL II

1. ¿Cuántas columnas rellena un quinielista que juega cinco triples? ¿Y uno que juega siete dobles?

2. ¿Cuántas columnas debe llenar un quinielista para tener la seguridad de acertar los catorce resultados?

3. ¿Cuántas matrículas de coches pueden existir en una provincia española si cada matrícula consta de dos letras distintas, precedidas de cuatro cifras que se pueden repetir?

4. Cinco amigos disponen de un coche para trasladarse de un lugar a otro. Sólo dos de ellos saben conducir. ¿De cuántas maneras podrán colocarse para hacer sus viajes?

5. ¿Cuántos grupos de letras se formarán con las de la palabra Isabel, con tal que no vayan ni dos vocales ni dos consonantes juntas? ¿Cuántos de esos grupos comienzan por vocal?

6. Un equipo de fútbol de primera división tiene tres porteros, siete defensas, cinco centrocampistas y siete delanteros. En cada partido juegan con un sistema uno, cuatro, tres, tres, respectivamente. ¿Cuántas alineaciones distintas podrá hacer el entrenador de dicho equipo si no acostumbra a cambiar a los jugadores de sus líneas habituales?

7. Calcula:

a) $(a + b)^3$ multiplicando $(a + b)^2$ por $(a + b)$.

b) $(a + b)^4$ multiplicando $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

8. Desarrolla:

a) $(a + b)^3$	c) $(a - b)^4$	e) $(a - b)^5$	g) $(a - b)^6$
b) $(2 + 3x)^4$	d) $(2 + 3x)^5$	f) $(2 - 3x)^5$	h) $(2x + 3y)^6$

9. En un monte hay x casas. Cada casa se comunica con cada una de las restantes por un camino. Si hay 28 caminos, halla x.

10. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de x lados?

11. Comprueba que

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

¿Cómo generalizarías esta propiedad de los números combinatorios?

12. En el banquete que sigue a una boda se sientan en la mesa presidencial ocho personas, incluidos los novios. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar de manera que los novios no se separen?

13. Halla el número de capicúas de ocho cifras. ¿Cuántos capicúas hay de nueve cifras?

14. ¿Cuántos números de cinco cifras tienen la cifra 1 en las decenas? ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

15. En un centro hay 40 alumnos de 1º, 37 de 2º, 30 de 3º, y 25 de 4º. Para hablar con la dirección se quiere formar una comisión que esté integrada por un alumno de cada curso. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

16. Con nueve alumnos de una clase se desea formar tres equipos de tres alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

17. Para hacer una apuesta a la Lotería Primitiva hay que marcar con cruces seis números comprendidos entre el 1 y el 49. ¿De cuántas formas diferentes una persona puede marcar seis números?

18. Halla:

a) Vn, 2

b) Vn + 1,3

c) Vn – 3,3

19. Resuelve estas ecuaciones:

a) $Vn,2 + \dfrac{n+3}{4} = 22$

b) $\dfrac{Vn,3}{n-1} = 48$

c) Vn,2 + Vn-2, 2 + Vn-4,2 = 98

20. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas, sin empezar por cero, se pueden escribir con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Cuántos son múltiplos de 25?

21. Halla la suma de todos los números de 3 cifras diferentes que pueden formarse con 1, 2, 3, 4 y 5.

22. Un byte es una secuencia de 8 dígitos binarios (solo ceros y uno), como por ejemplo: 01011101. ¿Cuántos bytes distintos hay?

23. En una clase hay 15 chicos y 20 chicas. ¿Cuántas comisiones formadas por 2 chicos y 3 chicas pueden formarse? ¿En cuántas de éstas aparece María? ¿En cuántas no hay ninguno de dos chicos determinados?

24. Calcula el valor de:

a) $\binom{5}{3}$ b) $\binom{10}{4}$

c) $\binom{98}{98}$ d) $\binom{5000}{4998}$

25. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de PANAMA si las consonantes deben estar separadas?

NIVEL III

1. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden escribirse con los números 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de estos son pares?

2. Si ordenases de menor a mayor todos los números del problema anterior, ¿cuál ocuparía el lugar 48?

3. ¿Cuánto vale la suma de todos los números de 4 cifras distintas?

4. Halla n sabiendo que V10,n = 30.240

5. Halla n sabiendo que Vn,5 = 15440 y Vn,3 = 1716

6. Resuelve la ecuación:

$$\frac{(n + 3)!\ .\ (n - 1)!}{n!\ .\ (n + 1)!} = \frac{90}{7}$$

7. Si se ordenan en orden creciente todas las permutaciones posibles de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿qué lugar ocupa en la sucesión el número 34125?

8. Una persona tiene doce libros distintos de tres tamaños diferentes: 3 grandes, 5 medianos y 4 pequeños. ¿De cuántas formas puede alinearlos en un estante si desea colocar juntos los del mismo tamaño?

9. Si ordenamos de menor a mayor todos los números de seis cifras que podemos formar con tres unos, dos doses y un tres, ¿qué número ocupa el lugar 50?

10. ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse con seis unos, cinco equis y cuatro doses?

11. Demuestra que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n - p}$$

12. Resuelve estas ecuaciones

a) $\binom{10}{8} = \binom{10}{n}$

b) $\binom{20}{n} = \binom{20}{3n}$

c) $\binom{28}{n} = \binom{28}{2n - 5}$

13. Comprueba, aplicando las propiedades de los números combinatorios, que:

$$\binom{8}{4} = \binom{5}{4} + 3\binom{5}{3} + 3\binom{5}{2} + \binom{5}{1}$$

14. Demuestra que

$$\binom{n - 1}{p} + \binom{n - 1}{p - 1} = \binom{n}{p}$$

15. Comprueba la igualdad

$$\binom{n}{p + 1} = \frac{n - p}{p + 1}\binom{n}{p}$$

16. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \binom{n}{p - 1} = \binom{n}{p + 1} \\ \binom{n}{p} = \frac{21}{10}\binom{n}{p - 2} \end{array}\right\}$$

17. ¿En cuántos puntos, como máximo, pueden cortarse en el plano 8 rectas si ninguna recta es paralela a ninguna otra? ¿Y si tres de las rectas fueran paralelas entre sí?

18. En un sorteo hay 10000 papeletas numeradas del 0000 al 9999. ¿Cuántas de ellas están formadas por tres cifras distintas (por ejemplo 2472)?

19. Un quinielista juega cada semana tres triples y cinco dobles. ¿Cuántas apuestas realiza?

20. ¿Cuánto vale la suma de todos los capicúas de cinco cifras?

21. Halla el término duodécimos en el desarrollo de

$$\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^{15}$$

22. Calcula el término central del desarrollo de

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^{10}$$

23. Averigua el coeficiente de x en el desarrollo de

$$\left(2x + \frac{3}{x}\right)^{9}$$

24. ¿Cuál es el término independiente en el desarrollo de

$$\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{1}{3x}\right)^{9}?$$

25. El coeficiente de x en el quinto término del desarrollo de $(1+2x)^n$ es 1120. Halla n.

Unidad n.º 12

Probabilidad

Objetivos

- Utilizar correctamente el lenguaje básico del azar .... (I-II-III)
- Realizar las operaciones unión e intersección entre sucesos .... (I-II-III)
- Aplicar la regla de Laplace para la obtención de la probabilidad de sucesos sencillos ... (I-II-III)
- Utilizar los diagramas de árbol y las tablas de contingencia para la resolución de problemas (I-II-III)
- Calcular la probabilidad de un suceso, sabiendo que se ha realizado otro (probabilidad condicionada) .... (II-III)
- Hallar la probabilidad de la intersección de dos sucesos dependientes y de dos independientes .... (II-III)

Contenidos

Conceptos

1. Fenómenos aleatorios. Terminología:
   - 1.1. Experimentos aleatorios .... (I-II-III)
   - 1.2. Definición de espacio muestral. Definición de sucesos .... (I-II-III)
2. Operaciones con sucesos:
   - 2.1. Unión e intersección de sucesos. Definición y ejemplos .... (I-II-III)
   - 2.2. Propiedades de la unión e intersección .... (I-II-III)
   - 2.3. Suceso contrario. Sucesos compatibles e incompatibles .... (I-II-III)
3. Definición de probabilidad. Regla de LAPLACE:
   - 3.1. La frecuencia como probabilidad. Propiedades de la frecuencia .... (I-II-III)
   - 3.2. Asignación de probabilidades. Regla de LAPLACE .... (I-II-III)
   - 3.3. Propiedades de la probabilidad .... (II-III)
4. Probabilidad compuesta:
   - 4.1. Experimentos compuestos .... (II-III)
   - 4.2. Probabilidad condicionada .... (II-III)
   - 4.3. Sucesos dependientes e independientes .... (II-III)

Procedimientos

- Realización de experimentos aleatorios para comprobar el carácter imprevisible del azar . (I-II-III)
- Representación gráfica de la frecuencia relativa de un suceso. Comprobación de la estabilidad de las frecuencias relativas .... (I-II-III)
- Aproximación de la idea de probabilidad a partir de la de frecuencia relativa .... (I-II-III)
- Construcción del espacio muestral asociado a un experimento .... (I-II-III)
- Diagramas de árbol. Recuento de resultados .... (I-II-III)
- Aplicación de la regla de Laplace .... (I-II-III)
- Utilización de las técnicas de recuento y combinatorio en los problemas de probabilidad . (II-III)
- Distinción entre sucesos dependientes e independientes .... (II-III)
- Cálculo de probabilidades condicionadas .... (II-III)

Orientaciones metodológicas

– Tiene que ser un tema eminentemente práctico. Las propiedades de la unión e intersección se verán con ejemplos y con diagramas de VENN. Hay que huir de demasiada formalización sobre todo con los de menos nivel. Insistiremos en los diagrama de árbol como instrumento interesante para descubrir y numerar los sucesos elementales.
– A los de Nivel III se les puede explicar la probabilidad condicionada con más detalle y rigor

Criterios de evaluación

– Formar el espacio muestral de un experimento, utilizando, si es necesario, diagramas en árbol .... (I-II-III)
– Asignar probabilidades en experimentos sencillos .... (I-II-III)
– Calcular la probabilidad de un suceso, aplicando regla de LAPLACE .... (I-II-III)
– Hallar las probabilidades de la unión e intersección de sucesos aplicando las propiedades de la probabilidad .... (II-III)
– Calcular probabilidades condicionadas .... (II-III)

Actividades

NIVEL I

1. Sea el experimento aleatorio "lanzar un dado". Escribe el espacio muestral e indica dos sucesos aleatorios que consten de tres sucesos elementales cada uno.

2. Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Escribe los sucesos contrarios de los siguientes:
   a) A = "sacar un as"
   b) B = "sacar puntuación inferior a siete"
   c) C = "sacar espadas, bastos o copas"

3. Se lanza un dado. Escribe los siguientes sucesos y halla sus probabilidades:
   a) A = "obtener un número mayor que 3"
   b) B = "obtener un número primo"
   c) C = "obtener puntuación impar"
   d) D = "obtener puntuación positiva"

4. Con los datos del problema anterior, indica qué sucesos son los siguientes y halla la probabilidad de cada uno.
   a) $\bar{A}$
   b) $A \cap B$
   c) $A \cup C$
   d) $B \cap \bar{B}$
   e) $\overline{A \cap B}$
   f) $\bar{A} \cap \bar{B}$
   g) $\overline{A \cup B}$
   h) $\bar{A} \cap \bar{B}$
   i) $(A \cap B) \cap C$
   j) $\overline{(A \cap B) \cap C}$
   k) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}$

5. El espacio muestral de un experimento aleatorio es {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Sean los sucesos:

   A = {3,5,6,8} B ={1,2,3,4,8,9} C = {1,4,5,7,9}

   Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes, si los sucesos elementales son equiprobables:
   a) $\bar{C}$
   b) $A \cup C$
   c) $A \cup \bar{C} \cup B$
   d) $A \cap \bar{B}$
   e) $\overline{A \cap \bar{B}}$
   f) $\bar{A} \cap B$

6. Con los datos anteriores, halla los siguientes sucesos y sus probabilidades.

a) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$

b) $\overline{(A \cap B) \cap C}$

c) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}$

d) $B \cup (A \cap C)$

e) $(B \cup A) \cap (B \cup C)$

f) $B \cap (A \cup C)$

g) $(B \cap A) \cup (B \cap C)$

7. Se considera el experimento aleatorio "lanzar tres monedas". Construye el espacio muestral.

8. Sea el experimento del problema anterior. Se consideran los sucesos:

A = "sacar solo una cara"

B = "sacar al menos una cruz"

C = "sacar tres caras o tres cruces"

Halla las probabilidades de:

a) $A \cap B$

b) $A \cup C$

c) $C \cap \bar{B}$

d) $\overline{A \cap \bar{B}}$

e) $\bar{A} \cup B$

f) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$

g) $\overline{(A \cap B) \cap C}$

9. En un determinado experimento aleatorio el espacio muestral consta de sólo tres sucesos elementales siendo la probabilidad de los dos primeros son 0,2 y 0,5. ¿Cuál es la probabilidad del tercero?

10. En un experimento aleatorio el espacio muestral es E = {a, b, c, d} sabiendo que:

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{8} \quad \text{y } P(\{c\}) = \frac{1}{5} \quad \text{Halla } P(\{d\})$$

11. Sea el experimento aleatorio "lanzar un dado". Halla la probabilidad de los sucesos:

A_1 = "sacar un número par"

A_2 = "sacar un número primo"

A_3 = "sacar un número menor que 3"

A_4 = "sacar un número par mayor que 4"

A_5 = "sacar un número par o mayor que 4"

12. Halla la probabilidad de que al lanzar dos dados aparezca:

a) en el primero un número impar y en el segundo un múltiplo de 3

b) en el primero par y en el segundo mayor que 2

13. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de sus puntos sea:

a) 5
b) mayor o igual que 10
c) múltiplo de 3

14. Durante el curso 1986/87 el número de estudiantes de los antiguos BUP y COU, en Aragón, fue:

	Huesca	*Teruel*	*Zaragoza*
Centro Publico	5091	2277	17805
Centro Privado	1284	896	12775

Si hubiese elegido una de esas personas al azar, calcula la probabilidad de que estudiase en:

a) Zaragoza
b) Un centro privado de Teruel
c) Un Centro Público

15. Calcula la probabilidad de que al levantar una ficha del dominó:

a) sea una ficha doble
b) la suma de sus puntos sea 6

16. Tengo en la mano seis cartas con los números 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mi amigo toma una al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número menor que 4?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número que obtenga sea divisible por 2?

17. Si extraes una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de:

a) Que sea un caballo
b) Que sea una copa
c) Que sea el caballo de copas
d) Que sea un caballo o una copa

18. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea roja o verde
b) No sea roja
c) Sea roja o amarilla

19. Una bolsa contiene 100 papeletas de una rifa numeradas del 1 al 100. Se extrae una papeleta al azar. ¿Cuál el la probabilidad de que...

a) el número extraído tenga una sola cifra;
b) el número extraído tenga dos cifras;
c) el número extraído tenga tres cifras;
d) el número extraído tenga cuatro cifras?

20. Tres amigos de edades 14, 15 y 16 años están esquiando juntos. Teniendo en cuenta que llegan al arrastre de uno en uno, ¿cuál es la probabilidad de que lleguen por orden de edades?

21. Se lanza una moneda cuatro veces. ¿Cuál el la probabilidad de que todas sean caras? ¿Y de que todas sean cruces? ¿Y de que todas sean o bien caras o bien cruces?

22. En un instituto hay 1.000 alumnos repartidos por cursos de esta forma:

	Primero	*Segundo*	*Tercero*	*Cuarto*
Chicos	120	100	95	85
Chicas	200	150	130	120

Elegido un alumno al azar, calcula las siguientes probabilidades:

a) Ser chico
b) Ser chica
c) Ser alumno de primero
d) Ser alumno de segundo
e) Ser alumno de tercero
f) Ser alumno de cuarto
g) Ser chica y alumno de cuarto
h) Ser chico y alumno de segundo

23. En una urna hay 50 bolas entre blancas, rojas y negras. ¿Cuántas bolas hay de cada color en los siguientes casos?

a) Si $P(B) = \dfrac{2}{5}$ y $P(N) = \dfrac{1}{10}$

b) Si $P(B) = \dfrac{2}{5}$ y $P(N) = P(R)$

24. Se lanzan dos dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener los siguientes sucesos?

a) Un 4 y un 5
b) Primero 4 y después 5
c) Suma 9
d) Ni 4 ni 5

NIVEL II

1. En una clase hay 12 chicos y 16 chicas. Además, la mitad de las chicas y la cuarta parte de los chicos son morenos. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico y sea moreno?

2. Se elige al azar un número comprendido entre 1 y 99, ¿cuál es la probabilidad de que la cifra de las unidades sea mayor que la de las decenas? ¿Y de que su producto sea 15?

3. Una bolsa tiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 6 verdes. Se extraen sucesivamente dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean:

a) Del mismo color

b) De distinto color

c) Responde a las preguntas anteriores si la extracción se hace con reemplazamiento

4. Lanzamos un dado tres veces. Halla la probabilidad de obtener:

a) Un 3 en la primera tirada, un 4 en la segunda y un 5 en la tercera

b) Un 3, un 4 y un 5

5. En una cadena de producción el producto fabricado pasa por tres procesos independientes. En el primero hay un 5% de fallos, en el segundo un 10% y en el tercero un 15%. Calcula la probabilidad de que un producto tenga:

a) 0 defectos

b) 1 defecto

c) 2 defectos

6. De cada 8 partidos que juegan los equipos de Cabanillas y Fustiñana, Cabanillas gana 5, empata 2 y pierde 1. Si ambos juegan un torneo a tres partidos, calcula la probabilidad de que:

a) Cabanillas gane los tres partidos

b) Dos partidos terminen en empate

7. El coche de Quique no funciona muy bien, pues el 15% de las veces no arranca a la primera. Cuando arranca, llega tarde al trabajo con una probabilidad de 0,3, pero si no arranca, la probabilidad de que llegue tarde es de 0,8.

a) Calcula la probabilidad de que llegue tarde y haya arrancado el coche a la primera

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue pronto al trabajo?

8. En un país hay elecciones para la presidencia del Gobierno y se presentan dos candidatos. El 35% de los votantes vota al candidato A, el 32% al candidato B y el resto se abstiene. Se sabe, además, que el 12% de los votantes de A, el 20% de los de B y el 10% de los que se abstienen pertenecen a la clase media. Si elegimos un votante, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la clase media?

9. Una caja de galletas contiene siete galletas de chocolate y cuatro de coco, otra caja tiene cinco de chocolate y tres de coco. Si elegimos una caja al azar y de ella se extraen dos galletas sin reemplazamiento, calcula:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de chocolate?

b) ¿Y de que las dos sean de coco?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de chocolate y una de coco?

10. La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es de 0,5 y la probabilidad de aprobar ciencias, habiendo aprobado matemáticas, es de 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar matemáticas y ciencias?

11. Se sacan dos cartas sucesivamente y sin devolución de una baraja española. Hallar las siguientes probabilidades:

a) Que la segunda carta extraída sea espada, sabiendo que la primera carta fue espada.

b) Que la segunda carta extraída sea espada, sabiendo que la primera carta fue copa.

12. De una urna que contiene nueve bolas negras y cinco rojas se extraen sucesivamente dos bolas. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos bolas sean negras.

b) Que las dos bolas sean rojas.

c) Que la primera sea roja y la segunda negra.

d) Que una sea roja y la otra negra.

13. Se lanza un dado diez veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo números pares?

14. Un producto está formado por tres partes: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,03, de un defecto en B es 0,04 y de un defecto en C es 0,08. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?

15. En una clase hay 24 chicas y 16 chicos. Se quiere formar, al azar, una comisión compuesta por dos alumnos. Halla la probabilidad de que:

a) Sean dos chicas

b) Sean dos chicos

c) Sean una chica y un chico

16. La probabilidad de que una jugadora de baloncesto enceste al lanzar un tiro libre es *2/3*. Halla la probabilidad de que enceste alguna vez si lanza tres tiros libres.

17. Se consideran 10 números, de los cuales cinco son positivos y cinco negativos. Se eligen, al azar, dos y se multiplican. ¿Qué es más fácil, el resultado positivo o el negativo?

18. En un cajón hay 12 calcetines negros y 8 grises. Se eligen dos calcetines al azar. Halla la probabilidad de que sean del mismo color.

19. Un matrimonio piensa tener dos hijos. ¿Qué es más probable, que sean de distinto sexo o que sean del mismo sexo? ¿Y si piensa tener tres hijos?

20. Nicolás lanza siete monedas al aire. Halla la probabilidad de que al menos le salga una cara.

21. En una caja hay diez botellas de naranjada y cinco de limonada. Si una persona coge al azar tres botellas, encuentra la probabilidad de que:

a) las tres sean de naranjada

b) al menos una sea de limonada

22. Si uno de cada cinco estadounidenses está calificado médicamente como "obeso", halla la probabilidad de que al seleccionar tres de ellos al azar:

a) ninguno sea obeso

b) al menos uno sea obeso

23. De una baraja española de 40 cartas se extraen cuatro. Halla la probabilidad de que:

a) salgan cuatro oros

b) salgan cuatro figuras

c) no haya ninguna figura

24. En un determinado tipo de operación se estima que la probabilidad de que surja alguna complicación es del 2% con la anestesia, del 8% durante la operación y del 3% en el postoperatorio. ¿Qué probabilidad tiene Carlos de no sufrir ninguna complicación en todo el proceso?

25. Aproximadamente, el 52% de estudiantes de 4º de ESO son chicas. ¿Cuál es la probabilidad de que si se eligen al azar dos estudiantes sean de distinto sexo?

NIVEL III

1. En una bolsa hay tres bolas numeradas del 1 al 3. Se saca una bola, se vuelve a meter en la bolsa y se saca de nuevo una bola. ¿Qué probabilidad hay de que el mayor número aparecido sea el dos?

2. En una bolsa hay 4 bolas rojas y 3 blancas, ¿qué probabilidad hay de que, al extraer las siete bolas una a una, salgan las tres blancas al final?

3. Se forman todos los números de tres cifras distintas con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. Si se elige uno al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea múltiplo de 3? ¿Y múltiplo de 9?

4. Tres chicas y tres chicos se sientan en un banco. Halla la probabilidad de que se sienten alternados.

5. ¿Qué probabilidad hay de acertar el pleno de la Lotería Primitiva si se juegan 12 números?

6. Calcula la probabilidad de obtener al menos un rey si se sacan dos cartas, cada una de una baraja de 40 cartas. ¿Y si las dos barajas se mezclan y se sacan dos cartas?

7. Se forman todas las permutaciones sin repetición de las cifras 1, 3, 6 y 9, eligiéndose una de ellas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?

8. Tres cazadores divisan una liebre en el monte y, rápidamente, disparan los tres a la vez. Si la probabilidad de que el primero acierte es de 0,2, la del segundo de 0,4 y la del tercero de 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que la liebre siga con vida?

9. En una reunión participan cinco matrimonios. Si se eligen al azar dos personas, hallar la probabilidad de que:

a) formen matrimonio

b) sean de distinto sexo

10. En un lote de cien paquetes de pipas, hay tres que llevan premio. Si una persona compra cinco paquetes, ¿qué probabilidad tiene de obtener algún premio?

11. Un cierto producto tiene dos componentes, X e Y. Se observa que un 5% de X y un 8% de Y presentan algún defecto. Halla la probabilidad de que el producto sea perfecto.

12. Hay 10 personas haciendo cola en la taquilla de un cine, entre las que se encuentran Ana y Eva. Calcula la probabilidad de que entre las dos haya exactamente 5 personas.

13. Un grupo de turistas está compuesto por 12 personas, cinco de las cuales hablan inglés, tres italiano y el resto ambos idiomas. Si se seleccionan al azar dos personas, ¿cuál es la probabilidad de que hablen el mismo idioma?

14. Formamos todas las permutaciones posibles con las cifras 1, 2, 3, ..., 9.¿Qué probabilidad hay de que al tomar una de ellas al azar aparezcan los dígitos 1 y 2 juntos y exactamente en este orden?

15. En una reunión hay n personas. Si ninguna ha nacido en año bisiesto, halla la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día. Emplea la calculadora para averiguar el número mínimo de personas necesario para que la probabilidad anterior sea superior a 0,5.

16. En el juego del póker se reparten cinco cartas a cada participante y se juega con una baraja de tipo inglés de 52 cartas. ¿Qué probabilidad hay de recibir un póker?

17. ¿Qué probabilidad hay de obtener un *full* al recibir las cinco cartas en el póker?

18. Siguiendo con el juego del póker, ¿qué probabilidad hay de obtener una escalera de color? Comprueba que esta jugada, al ser más improbable, tiene más valor que un póker.

19. Según los datos del clima en una región, si un día hace sol la probabilidad de que al día siguiente también haga sol es *3/4*; y si está nublado, la probabilidad de que siga estándolo es de *3/5*. Si el jueves amaneció nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el sábado sea un día resplandeciente?

20. Julián tiene en el bolsillo 2 monedas de 100 ptas, 3 de 25 y 2 de 5 ptas. Saca dos monedas. Calcula la probabilidad de que saque:

a) 200 ptas.

b) 125 ptas.

c) 30 ptas.

21. Sean A y B dos sucesos aleatorios. Supóngase que P (A) = 0,4 mientras que $P(A \cup B) = 0{,}7$. Sea P (B) = p

a) ¿Para qué valor de p son A y B sucesos incompatibles?

b) ¿Para qué valores de p son A y B independientes?

22. En dos urnas A y B se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca respectivamente. Se selecciona una al azar y se extrae también al azar una bola de dicha urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca?

b) Si la bola extraída resultó ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

23. En un cubo una de las caras va pintada de rojo, dos caras de azul y las tres restantes de negro. Se lanza el cubo tres veces.

a) Hallar la probabilidad de que salga una sola vez el rojo

b) Hallar la probabilidad de que salga las tres veces el mismo color

c) Si las tres veces ha salido el mismo color, hallar la probabilidad de que éste sea el negro.

Dar las soluciones en forma de fracción irreducible.

24. Sean A, B sucesos aleatorios. Se sabe que P (A) = 0,6; P (B) = 0,4; P ($A \cap B$) = 0,3

a) ¿Los sucesos A, B son compatibles? ¿Por qué?

b) ¿Los sucesos A, B son independientes? ¿Por qué?

c) Calcular la probabilidad de que ocurra A o B (o ambos)

d) Calcular la probabilidad de que no ocurra ni A ni B

e) Calcular la probabilidad de que ocurra A, pero no B

25. En un determinado curso están matriculados 80 varones y 40 mujeres. Aprueban el curso completo 60 varones y 32 mujeres.

a) Determina la probabilidad de que un alumno del curso sea varón y apruebe

b) Halla la probabilidad de que una persona matriculada suspenda

c) Una de las personas matriculadas ha aprobado. Halla la probabilidad de que sea mujer.

Anexo

1º ESO	2º ESO
Número natural: • Operaciones elementales. • Descomposición numérica. • Potenciación. Radicación. • Divisibilidad: M.C.D. y M.C.M.	
Número racional: • Fracciones con términos naturales. • Comparación y ordenación. • Operaciones.	Número racional: • Fracciones con términos enteros. Operaciones. Potencias con exponente entero (N. 2 y 3). • Raíces cuadradas exactas por descomposición factorial (N. 2 y 3). • Introducción a la notación científica (N. 2 y 3).
Número decimal: • Fracción decimal. • Comparación y ordenación. • Operaciones.	Número decimal: • Periódicos. Fracción generatriz (N. 2 y 3). Operaciones con decimales periódicos (N. 2 y 3).
Proporcionalidad numérica: • Regla de tres simple. • Repartos directamente proporcionales. • Interés simple. • Tanto por ciento (%).	Proporcionalidad numérica: • Repaso de contenidos básicos y regla de tres simple. • Regla de tres compuesta (N. 2 y 3). • Repartos inversamente proporcionales (N. 3). • Tanto por ciento (%).Interés simple.
Número entero: • Iniciación. • Suma y resta.	Número entero: • Estudio completo de operaciones y propiedades. Prioridad. • P. Distributiva y Sacar Factor Común (N. 2 y 3). • Idea básica de intervalo para ordenar (N. 3).
Medida: • Unidades de longitud, masa, capacidad y superficie. • Medidas agrarias y tradicionales.	Medida: • Repaso de Longitud, Capacidad, Masa y Superficie. • Unidades de volumen. Relación entre Volumen y Capacidad (N. 2 y 3).
Angulos y tiempo: • Operaciones en el sistema sexagesimal.	
Geometría: • Figuras planas: elementos, perímetro y áreas. • Introducción al Teorema de Pitágoras.	Geometría: • Repaso de figuras planas: elementos, perímetros y áreas. • Teorema de Pitágoras. • Cuerpos geométricos: formas, elementos, dibujo, desarrollo y construcción.
Funciones y gráficas: • Interpretación de gráficas.	Funciones y gráficas: • Generalidades. • Representación gráfica: tabla de valores. • Interpretación y reconocimiento intuitivo de las características elementales. • Introducción a la función de primer grado: pendiente y ordenada en el origen (N. 2 y 3).
	Álgebra: • Introducción al lenguaje algebraico. • Introducción a los polinomios: suma y resta. Multiplicación (N. 2 y 3). • Introducción a la ecuación de primer grado.
	Introducción a la Probabilidad.

3º ESO	4º ESO (Opción A)	4º ESO (Opción B)
• Número racional: Operaciones, potencias de exponente entero y base racional • Notación científica (N. 2 y 3)	• Número irracional. Radicales • Racionalización (N. 2 y 3) • Potencias de exponente racional • El número real. • Notación científica (N. 2 y 3) • Estimación y errores. • Error absoluto y relativo (N. 2 y 3)	• Número irracional. Radicales • Racionalización (N. 2 y 3) • Potencias de exponente racional • El número real • Notación científica (N. 2 y 3) • Estimación y errores. • Error absoluto y relativo (N. 2 y 3)
• Proporcionalidad numérica		
• Introducción a los polinomios. Suma, resta y producto • Cociente de polinomios (N. 2 y 3) • Productos notables.	• Polinomios. Cociente. Divisibilidad de polinomios • Teorema del resto (N. 2 y 3)	• Polinomios. Cociente. Divisibilidad de polinomios • Teorema del resto • Factorización de polinomios • Fracciones algebraicas (N. 2 y 3)
• Ecuación de primer grado		
• Introducción a la ecuación de 2º grado	• Ecuación de 2º grado • Ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales (N. 2 y 3) • Suma y producto de las soluciones (N. 3)	• Ecuación de 2º grado • Ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales (N. 2 y 3) • Suma y producto de las soluciones (N. 2 y 3)
• Sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2	• Sistemas de una ecuación lineal y otra de segundo grado • Sistemas de dos ecuaciones de segundo grado (N. 2 y 3)	• Sistemas de una ecuación lineal y otra de segundo grado • Sistemas de dos ecuaciones de segundo grado (N. 2 y 3)
	• Inecuaciones y sistemas de primer grado con una incógnita • Inecuaciones y sistemas de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas (N. 2 y 3)	• Inecuaciones y sistemas de primer grado con una incógnita • Inecuaciones y sistemas de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas (N. 2 y 3)
		• Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas
• Ángulos. Triángulos. Cuadriláteros. Circunferencia	• Vectores en el plano. Ángulo Orientado • Movimientos en el plano: Traslaciones, simetrías y giros • Teselación del plano (N. 2 y 3) Frisos y mosaicos.(N. 2 y 3) • Semejanza.	• Vectores en el plano. Ángulo orientado • Movimientos en el plano: Traslaciones, simetrías y giros • Homotecias (N. 2 y 3) • Semejanza
• Semejanza. Escalas y mapas		
• Teorema de Pitágoras • Teorema del cateto y de la altura (N. 2 y 3)	• Trigonometría • El radián. Razones de un ángulo agudo. • Resolución de triángulos rectángulos: Aplicaciones de la Trigonometría a problemas de la vida real	• Trigonometría • El radián. Razones de un ángulo cualquiera • Reducción al primer cuadrante (N. 2 y 3) • Resolución de triángulos rectángulos: Aplicaciones de la Trigonometría a problemas de la vida real
• Funciones. Generalidades • Interpretación de gráficas • Función lineal y afín	• Funciones. Generalidades • Interpretación de gráficas • Funciones a trozos. • Funciones cuadrática, valor absoluto, de proporcionalidad inversa, raíz cuadrada • Introducción a la función exponencial	• Funciones. Generalidades • Interpretación de gráficas • Funciones a trozos • Funciones cuadrática, valor absoluto, de proporcionalidad inversa, raíz cuadrada, x^n, raíz n-ésima • Funciones racionales • Idea intuitiva de límites y continuidad. Interpretación gráfica. Notación de límite (N. 2 y 3) • Familias de funciones (N. 2 y 3). • Función exponencial • Logaritmos. Propiedades • Función logarítmica (N. 2 y 3)
• Estadística unidimensional • Gráficos y parámetros estadísticos		
	• Técnicas de recuento. Combinatoria • Números combinatorios (N. 3)	• Técnicas de recuento. Combinatoria • Números combinatorios (N. 2 y 3) • Binomio de Newton (N. 2 y 3)
	• Probabilidad. Sucesos. Operaciones. Ley de Laplace • Frecuencia relativa de un suceso • Experimentos compuestos (N. 2 y 3) • Probabilidad condicionada (N. 2 y 3)	• Probabilidad. Sucesos. Operaciones. Ley de Laplace • Frecuencia relativa de un suceso. • Experimentos compuestos (N. 2 y 3) • Probabilidad condicionada (N. 2 y 3)

Bibliografía

Bibliografía

3º ESO

- *Materiales de apoyo 2º Ciclo de ESO*, G. ALFARO y otros, Ed. Gobierno de Navarra.
  - Se incluye comentario en la introducción del trabajo.
- *Matemáticas 3º ESO, "Miríada XXI"*, M. ÁLVAREZ y otros, Ed. MacGraw.
  - Estructurado en 12 unidades, que no coinciden con la distribución de contenidos hecha por nosotros para 3º y 4º.
  - Sencillo de entender para el alumno. Está todo muy bien explicado.
  - Le faltan ejercicios de nivel III.
  - Tiene resúmenes teóricos muy buenos ("¿Qué debes recordar?") y un apartado de curiosidades.
- *Matemáticas 3º ESO*, J. Colera y otros, Ed. Anaya.
  - Estructurado prácticamente como nosotros entre los cursos de 3º y 4º.
  - Incluye un método general de resolución de problemas.
  - Muy rico en ejercicios y problemas. Además tiene una sección de nivel III denominada "Profundiza".
  - Tiene resúmenes teóricos ("Recordemos lo fundamental") y curiosidades matemáticas en cada unidad ("Líos, Rompecabezas, Acertijos").
- *Matemáticas 3º ESO*, Asunción DOMÉNECH y otros, Ed. Edebé.
  - La estructura entre 3º y 4º en cuanto a contenidos difiere de la propuesta por nosotros.
  - Las unidades están muy bien concebidas metodológicamente, preparadas para ser seguidas por el alumno.
  - Incluye un resumen teórico ("¿Qué debes recordar?") y una buena estructura al principio de cada unidad: "Recuerda lo que sabes", "En esta unidad estudiaremos..." y "Al final serás capaz de...".
- *Matemáticas 3º ESO, "Órbita 2000"*, J.A. ALMODÓVAR y otros, Ed. Santillana.
  - La estructura de contenidos por cursos es parecida a la nuestra. Difiere en el bloque de Geometría e incluye en 3º Probabilidad.
  - Las explicaciones teóricas son casi siempre de tipo procedimental.
  - Tiene actividades de refuerzo (Nivel I) y de ampliación (III).
  - Incluye en cada unidad un resumen teórico ("Recuerda lo más importante"), curiosidades matemáticas, resolución de problemas y un apartado dedicado a los medios de comunicación.

- *Matemáticas 3º ESO, "Algoritmo 2000"*, J.R. VIZMANOS y M. ANZOLA, Ed. SM.
  - En principio parece un texto para el nivel III.
  - Demasiado amplio y formalista para 3º de ESO.
  - Al final de cada unidad incluye un "Mural de Matemáticas".
- *Matemáticas 3º ESO, "Fractal"*, Fernando ÁLVAREZ y otros, Ed. Vicens-Vives.
  - Incluye una introducción muy atractiva.
  - Los ejercicios están clasificados en tres niveles por medio de colores.
  - Las explicaciones son inductivas y pueden ser entendidas perfectamente por el alumno. El grado de profundidad parece adecuado.
- *Matemáticas 3º ESO,* Ignacio LAZCANO y J.F. SANZ, Ed. Edelvives.
  - Las unidades se distribuyen por cursos de manera distinta a la propuesta por nosotros.
  - Los ejercicios están sin clasificar.
  - Incluye curiosidades matemáticas.
- *Miriada XXI 4º ESO B*, Miguel ÁLVAREZ y otros, Editorial McGraw-Hill.
  - La unidad 5 de 3º de ESO de ecuaciones de 2º grado está muy bien explicado y los ejercicios son variados y bien graduados por dificultad.
- *Matemáticas 4º ESO B*, José R. VIZMANOS y otros, Editorial SM.
  - Tiene pocos ejercicios pero los problemas son interesantes porque muchos de ellos hacen referencia a la vida cotidiana.
  - El apartado Mundo y Matemáticas tiene referencias históricas, cuestiones matemáticas y curiosidades muy interesantes.
- *Matemáticas 3º ESO*, José Fco. GUTIÉRREZ, Editorial Donostiarra.
  - Es muy acertada la introducción de cada unidad con los objetivos, conocimientos previos y los contenidos. Están expresados de forma sencilla y clara.
  - La exposición de los contenidos es clásica en su forma y le faltan ejemplos explicativos en cada punto.
  - Los ejercicios del final del capítulo son variados y están bien secuenciados.
- *Miríada XXI 3º ESO*, Guía didáctica, Miguel ÁLVAREZ y otros, Editorial McGraw-Hill.
  - Tiene de cada unidad los objetivos, temporalización, contenidos, actitudes, criterios de evaluación y sugerencias didácticas.
  - Guía útil para programar.
- *Miríada XXI 4º ESO B,* Guía didáctica, Miguel ÁLVAREZ y otros, Editorial McGraw-Hill.
  - Tiene de cada unidad los objetivos, temporalización, contenidos, actitudes, criterios de evaluación y sugerencias didácticas.
  - Guía útil para programar.
- *Matemáticas 3º ESO*. José R. VIZMANOS y otros, *Guía didáctica y solucionario*, Editorial SM.
  - En cada unidad tiene un cuadro con los conceptos, procedimientos y actitudes. Están muy bien expresados y se corresponden adecuadamente los tres apartados.
  - Los criterios de evaluación están poco definidos. El enfoque pedagógico y didáctico del tema es una buena guía para la puesta en práctica de la unidad.
  - Le faltan los objetivos didácticos de la unidad.

- *Matemáticas 4º ESO B*, José R. Vizmanos y otros, Guía didáctica y solucionario, Editorial SM.
  - En cada unidad tiene un cuadro con los conceptos, procedimientos y actitudes. Están muy bien expresados y se corresponden adecuadamente los tres apartados.
  - Los criterios de evaluación están poco definidos. El enfoque pedagógico y didáctico del tema es una buena guía para la puesta en práctica de la unidad.
  - Le faltan los objetivos didácticos de la unidad.
- *Matemáticas 3º ESO*, Cuadernos 1, 2 y 3, J.M. Arias y otros, Editorial Casals.
  - Son ejercicios sencillos, generalmente del nivel I. Están clasificados por niveles mediante asteriscos.
  - Tiene solucionario.
- *Repasa con ejercicios*, volúmenes I, II, III y IV, David Rayner y varios, Editorial Oxford University Press España.
  - Recopilación exhaustiva de ejercicios sobre todo y de problemas de todos los temas del 2º ciclo. Están agrupados en "prácticas".
  - Tiene ejercicios de los tres niveles y ejemplos introductorios en cada práctica.
  - Tiene solucionario.
- *Plan de recuperación de matemáticas 4º ESO,* Cuadernos 1 al 5, A.M. Bellón, Editorial SM.
  - Introduce cada tema con un ejemplo o indicaciones para realizar los ejercicios que en general son del nivel I y II.
  - Tiene solucionario.
- *Santillana 3º ESO.* Cuadernos 1, 2 y 3, María Gutiérrez, Editorial Santillana.
  - Tiene pocas actividades de cada tema y en general del nivel II y III.
  - Las actividades están relacionadas con aspectos de la vida cotidiana.
  - No tienen solucionario.
- *Santillana 4º ESO B.* Cuadernos 1, 2 y 3, María Gutiérrez, Editorial Santillana.
  - Tiene pocas actividades de cada tema y en general del nivel II y III.
  - Las actividades están relacionadas con aspectos de la vida cotidiana.
  - No tienen solucionario.

4º A

- *Materiales de apoyo 2º ciclo de ESO,* G. Alfaro y otros, Gobierno de Navarra.
- *Órbita 2000. Guía y recursos 4º ESO*, Editorial Santillana.
  - Es un proyecto de 2º ciclo interesante. Útil para el profesor.
  - Incluye: Objetivos, conceptos, procedimientos, actitudes, esquemas, metodología, curiosidades, actividades de ampliación, etc.
- *Proyecto curricular 2º ciclo de Matemáticas*, Ed. Edelvives.
  - Interesante para el profesor.
- *Matemáticas 4º A,* J. Sánchez y J. Vera, Ed. Oxford Educación.
  - Incluye: Al final de cada unidad un apartado con el título "Las matemáticas son útiles"

- *Matemáticas 4º A,* J. Colera y otros, Ed. Anaya.
  - Incluye: Al principio del texto una unidad de resolución de problemas (técnicas y problemas).
  - En cada unidad problemas de ingenio.
  - Actividades de profundización en cada unidad.
- *Matemáticas 4ª A (Sigma)*, J.R. Vizmanos y M. Anzola, Ed. SM.
  - Incluye: Al final de cada unidad curiosidades matemáticas.
- *Matemáticas 4ª A (Algoritmo 2000)*, J.R. Vizmanos y M. Anzola, Ed. SM.
  - Incluye: Al final de cada unidad curiosidades matemáticas.
- *Matemáticas 4º A*, J.A. Almodóvar y otros., Ed. Santillana.
  - Incluye: Procedimientos generales al comienzo del libro.
  - Actividades de ampliación y de refuerzo en cada unidad y curiosidades matemáticas.
  - Al final de cada unidad, actividades sobre un tema aparecido en los medios de comunicación.
  - Actividades de ampliación y refuerzo al final de cada unidad.
- *Matemáticas 4º A (Fractal)*, F. Álvarez, A. Arribas y A. Ruiz, Ed. Vicens-Vives.
  - Incluye: Actividades de tres niveles en cada unidad.
  - Actividades de profundización en cada unidad.
- *Matemáticas 4º A*, V. Frías y otros, Ed. Edelvives.
  - Incluye: Actividades de ampliación en cada unidad.
  - Entretenimientos matemáticos al final de cada unidad.
- *Matemáticas 4º A,* J.M. Arias, E. Carpintero y F.J. Sanz, Ed. Casals.
  - Incluye: Al final de cada unidad, una actividad denominada "Taller de investigación" y alguna curiosidad.
  - Una pequeña reseña histórica al principio de algunas unidades.
- *Factor 1. Matemáticas 1º BUP*, F. Álvarez y otros, Ed. Vicens Vives.
- *Factor 2. Matemáticas 2º BUP*, F. Álvarez y otros, Ed. Vicens Vives.
- *El lenguaje de funciones y gráficas,* Félix Alayo (trad.), Servicio Editorial Universidad del País Vasco.
- *Matemáticas 2º ciclo (Curso 4º)*, C. González, J. Llorente y MªJ. Ruiz, Ed. Editex
  - Incluye: Objetivos y contenidos en cada unidad.
  - Curiosidades matemáticas y problemas de ingenio en cada unidad.
- *Educación secundaria de adultos,* Aurora Lafuente y otros, Ed. MAD, Colección Eduforma.
  - Actividades interesantes para el nivel I. Tiene un apartado de "Matemáticas en el mundo cotidiano" que puede ser útil.
- *Matemáticas Problemas 4º ESO*, Mira Editores.
  - Incluye gran cantidad de actividades para todos los niveles con breves resúmenes teóricos.
- *Problemas resueltos y propuestos de 1º de BUP*, Sabino Vaquero (edita el autor).
  - Incluye: Un esquema teórico al principio de cada capítulo. Algunos temas coinciden con 4º de ESO
  - Gran cantidad de problemas resueltos y las solución de los propuestos.

- *Matemáticas para adquirir una buena base*, Marta Jiménez, Papelería Técnica Egoki.
  - Consta de 8 temas y corresponden muchos de ellos con los de 4º de ESO.
  - Incluye un resumen teórico al principio de cada tema y muchas actividades para todos los niveles.
- *Curso práctico de Matemáticas 1º de BUP y 2º de BUP* (2 libros), F. González-J. Villanova, Edunsa.
  - Incluyen: Un resumen teórico y problemas tipo resueltos.
  - Problemas propuestos en dos niveles.
  - Entre los dos libros desarrollan todos los temas de 4º de ESO.

4º B (CIENCIAS)

- *Materiales de apoyo 2º ciclo de ESO,* G. Alfaro y otros, Gobierno de Navarra.
- *Matemáticas 4º B*, M. Bosch y otros, Ed. Almadraba.
  - Al final de cada unidad, dos páginas de Historia de las Matemáticas que incluyen alguna curiosidad.
- *Matemáticas 4º B,* J.M. Arias, E. Carpintero, F.J. Sanz, Ed. Casals.
  - Al final de cada unidad, una actividad de taller de matemáticas y alguna curiosidad.
  - Una pequeña reseña histórica al principio de algunas unidades.
- *Matemáticas 4ª B (Sigma)*, J.R. Vizmanos y M. Anzola, Ed. SM.
  - Al final de cada unidad curiosidades matemáticas.
- *Proyecto curricular 2º ciclo de Matemáticas*, Ed. Edelvives.
  - Interesante para el profesor.
- *Órbita 2000. Matemáticas 4º B*, J.A. Almodóvar y otros, Ed. Santillana.
  - Objetivos en cada unidad.
  - Procedimientos generales al comienzo del libro.
  - Actividades de ampliación y de refuerzo en cada unidad y curiosidades matemáticas.
  - Al final de cada bloque, actividades de síntesis y problemas de ingenio.
- *Órbita 2000. Guía y recursos 4º ESO*, Editorial Santillana.
  - Es un proyecto de 2º ciclo interesante. útil para el profesor.
  - Objetivos, conceptos, procedimientos, actitudes, esquemas, metodología, curiosidades, actividades de ampliación, etc.
- *Fractal. Matemáticas 4º B*, F. Alvarez, A. Arribas, A. Ruiz, Ed. Vicens Vives.
  - Actividades de 3 niveles en cada unidad.
  - Actividades de profundización en cada unidad.

- *Matemáticas 4º B*, J. COLERA y otros, Ed. Anaya.
  - Al principio del texto una unidad de resolución de problemas (técnicas y problemas).
  - En cada unidad, problemas de ingenio.
  - Actividades de profundización en cada unidad.
- *Factor 1. Matemáticas 1º BUP*, F. ÁLVAREZ y otros, Ed. Vicens Vives.
- *Factor 2. Matemáticas 2º BUP*, F. ÁLVAREZ y otros, Ed. Vicens Vives.
- *El lenguaje de funciones y gráficas,* traducción de Félix Alayo, Servicio Editorial Universidad del País Vasco.
  - Tiene un buen número de problemas muy interesantes sobre interpretación de gráficas.
- *Matemáticas 2º Ciclo (Curso 4º).* C. GONZÁLEZ, J. LLORENTE y MªJ. RUIZ, Ed. Editex.
  - Objetivos y contenidos en cada unidad.
  - Curiosidades matemáticas y problemas de ingenio en cada unidad.
- *Educación Secundaria de Adultos,* Aurora LAFUENTE y otros, Ed. MAD, Colección Eduforma.
  - Actividades interesantes para el nivel I. Tiene un apartado de "Matemáticas en el mundo cotidiano" que puede ser útil.
- *Matemáticas 4º Opción B*, A.J. RAMÍREZ y otros, Ed. ECIR.
  - Intenciones, metodología, secuenciación, orientaciones en la evaluación, criterios de evaluación, etc.
  - Muchas actividades y un apartado titulado "Un poco más", con actividades de más dificultad.
- *Matemáticas Problemas 4º ESO*, Mira Editores.
  - Incluye gran cantidad de actividades para todos los niveles con breves resúmenes teóricos.
- *Matemáticas 4º Opción B*, Carlos AMIGO y otros, Ed. McGraw Hill.
  - Incluye al principio de cada unidad objetivos, contenidos, procedimientos, actitudes conocimientos previos, un poco de historia, etc.
  - Inicia cada unidad proponiendo algunas cuestiones y la termina con una autoevaluación.
- *Problemas resueltos y propuestos de 1º de BUP*, Sabino VAQUERO, edita el autor.
  - Un esquema teórico al principio de cada capítulo. Algunos temas coinciden con 4º de ESO.
  - Gran cantidad de problemas resueltos y las solución de los propuestos.
- *Matemáticas para adquirir una buena base,* Marta JIMÉNEZ, Papelería Técnica Egoki.
  - Consta de 8 temas y corresponden muchos de ellos con los de 4º de ESO.
  - Incluye un resumen teórico al principio de cada tema y muchas actividades para todos los niveles.
- *Curso práctico de Matemáticas 1º de BUP y 2º de BUP* (2 libros), F. GONZÁLEZ y J. VILLANOVA, Edunsa.
  - Un resumen teórico y problemas tipo resueltos.
  - Problemas propuestos en dos niveles.
  - Entre los dos libros desarrollan todos los temas de 4º de ESO.