NIVEL DE ÉXITO Y FLEXIBILIDAD EN EL USO DE ESTRATEGIAS RESOLVIENDO PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PAUTAS LINEALES

LEVEL OF SUCCES AND FLEXIBILITY IN THE USE OF STRATEGIES SOLVING PROBLEMS OF GENERALIZATION OF LINEAR PATTERNS

Zapatera Llinares, A., Callejo, M. L.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Universidad de Alicante

Resumen. *En esta comunicación se analizan, se clasifican y se comparan las estrategias que han utilizado 96 alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) en el proceso de generalización de una situación en la que debían identificar un patrón y continuar el proceso. Se ha analizado el nivel de éxito y la flexibilidad en el uso de estrategias para responder a los distintos apartados. Los resultados muestran que las estrategias más utilizadas han sido las aditivas y las más eficaces las funcionales, y que la dificultad mayor de los estudiantes fue encontrar una regla general. Por otra parte los alumnos con mayor nivel de éxito presentaron una mayor flexibilidad en la utilización de las estrategias.*

Palabras clave: estrategia, generalización, pauta lineal, flexibilidad, resolución de problemas

Abstract. *This communication describes, classifies and compares the strategies used by 96 students of secondary school (12-16 years) in the process of generalization of a situation in which the students have to identify a pattern and continue the process. We analyzed the level of success and the flexibility in the use of the strategies to respond to different sections. The results show that the strategies most used have been the additives and the most effectives the functional, and that the greatest difficulty for students was to find a general rule. Moreover the students with greater level of success showed greater flexibility in the use of strategies.*

Key words: strategy, generalization, lineal patterns, flexibility, problem solving

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas se considera una parte importante de la actividad matemática (Polya, 1965) y Santaló (1985) equiparaba enseñar matemáticas a enseñar a resolver problemas. La generalización, es decir la observación de pautas y la obtención de una regla general, es una de las estrategias más interesantes para resolver problemas. Generalizar consiste en universalizar una propiedad observada en un número limitado de casos al caso general, lo que exige identificar pautas y regularidades en casos particulares, expresar una regla general en lenguaje verbal o algebraico y justificar por qué funciona la regla. Un tipo particular de generalización es la generalización lineal, que consiste en identificar en una sucesión numérica, o en figuras, un patrón que equivale a una función lineal o afín.

La identificación de patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre diferentes lenguajes son fundamentales desde los primeros cursos de la Educación Secundaria (BOE número 5 de 5/1/2007). Esta comunicación trata del proceso de generalización en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) al enfrentarse con un problema de generalización lineal; en concreto, se estudian los niveles de éxito, las estrategias que utilizan y la flexibilidad en su uso.

2. MARCO TEÓRICO

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática. Para Mason, Burton y Stacey (1992), "las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática" (p. 21) y para Polya (1965) "la generalización consiste en pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado" (p. 97).

Dörfler (1991) ha acuñado el concepto de *generalización operativa* a partir del concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget (1987), por medio del cual se explica el desarrollo y la construcción de la generalización. Ellis (2007) ha elaborado una taxonomía de la generalización en la que establece dos categorías: las acciones de generalización, que describen los procesos mentales de los estudiantes (relacionar, buscar y extender) y las generalizaciones de reflexión, con las que los estudiantes explican propiedades, patrones o relaciones de similitud y las aplican a nuevas situaciones (identificación, definición y transferencia).

Denominamos "problemas de generalización lineal" a aquellos que describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, … de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular $f(n)$ para n "pequeño" y para n "grande" y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín.

En este tipo de problemas, Stacey (1989) distingue entre tareas de "generalización cercana" que piden buscar el siguiente término u otro término que puede ser obtenido mediante recuento, o haciendo un dibujo o una tabla, y las tareas de "generalización lejana", que requieren la identificación de un patrón o pauta general. Esta autora ha identificado tres tipos de estrategias de generalización: (1) aproximación recursiva, (2) expresión matemática de una relación funcional y (3) utilización de un razonamiento proporcional incorrecto.

García-Cruz (1998), utilizando la descomposición genética (Dubinsky, 1991) ha identificando tres niveles de generalización: (1) actividad procedimental: reconocimiento del carácter iterativo o recursivo del modelo lineal que se traduce en hacer un recuento o añadir la diferencia constante; (2) "generalización local": uso de una regla para un cálculo específico y (3) "generalización global": transformación de la regla usada en tareas anteriores en un objeto que se aplica en nuevas situaciones. El paso de un nivel a otro exige cambiar de estrategia, por lo que un aspecto importante en la resolución de problemas de generalización lineal es la flexibilidad en el uso de estrategias.

Gran parte de las investigaciones sobre la generalización han estudiado las estrategias empleadas por los alumnos, los niveles de generalización, los obstáculos, el papel de los ámbitos numérico y visual-geométrico en el desarrollo de la generalización y la introducción del lenguaje algebraico (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García Cruz, 1998; García Cruz y Martinón, 1999; Orton y Orton, 1994; Rivera y Becker, 2008; Roig y Llinares, 2008; Stacey, 1989). En la resolución de problemas de generalización lineal se han identificado diferentes estrategias; algunas de estas estrategias son válidas para tareas de generalización cercana, pero no son competentes en tareas de generalización lejana y en la obtención de la regla general. Por ello es importante investigar la flexibilidad de los alumnos para cambiar de estrategia y su conocimiento para usar el lenguaje algebraico y funcional en determinadas estrategias.

El objetivo de esta investigación es identificar las estrategias que utilizan alumnos de 1º a 4º de la ESO (12-16 años) para responder a un problema de generalización lineal donde se propone un cuestionario con creciente grado de dificultad y analizar el éxito de cada una de ellas y la flexibilidad de los alumnos para cambiar de estrategia.

3. MÉTODO

3.1 Participantes

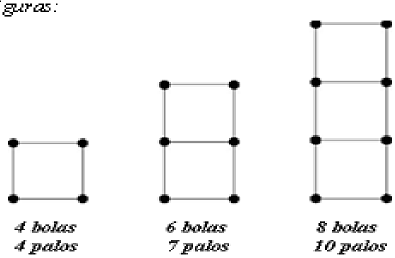
La investigación se ha realizado con 96 alumnos de 1º a 4º de la E.S.O. del IES "Malladeta" de la Vila Joiosa (Alicante). Las cuatro clases analizadas pertenecen a la opción PEV (Programa de Enseñanza en Valenciano) y el área de matemáticas está impartida por el mismo profesor.

Cuando se aplicó el cuestionario, los alumnos de 1º no habían trabajado aún el lenguaje algebraico y a los de 2º se les había hecho una introducción a las funciones y los distintos lenguajes con los que se pueden representar.

3.2 Instrumento de recogida de datos

Los datos son las respuestas de los estudiantes a un problema de generalización lineal similar a los propuestos en otras investigaciones (Stacey, 1989; García Cruz, 1998) (Figura 1).

Observa las siguientes figuras:



Como puedes ver en la imagen, la figura de un cuadrado necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadrados necesita 6 bolas y 7 palos y la figura de tres cuadrados necesita 8 bolas y 10 palos.

1. *¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados?*
2. *¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadrados?*
3. *¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadrados?*
4. *Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el número de bolas*
5. *Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el número de palos*

Figura 1. Problema propuesto

Las tareas 1 y 2 piden una “generalización cercana”, se pueden resolver de forma sencilla mediante recuento, apoyándose en un dibujo o haciendo una tabla, y ayudan a observar el patrón. La tarea 3, de “generalización lejana”, se puede resolver con las mismas estrategias, pero son poco eficientes por lo que es más conveniente buscar una relación entre el número de cuadrados y el de bolas o de palos. Las tareas 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica.

Elegimos este problema porque está expresado en forma verbal y gráfica y pueden resolverlo con éxito todos los alumnos de secundaria, desde 1º a 4º. La forma gráfica puede servir de apoyo en las estrategias aditivas y los alumnos de 1º y 2º, que no conocen o no dominan suficientemente el lenguaje algebraico, pueden expresar la regla general en lenguaje verbal.

3.3 Análisis de datos

Las respuestas se analizaron con base a dos criterios: corrección de las respuestas y estrategias de solución. Las respuestas se consideraron correctas si tanto el procedimiento como la solución eran correctos, aunque el procedimiento no fuese el más eficiente; en cualquier otro caso se han considerado incorrectas. Las estrategias empleadas se han clasificado en cuatro categorías (García Cruz, 1998).

- I. Estrategias aditivas [EA]
  - 1. Recuento [R]
  - 2. Proceso iterativo [PI]
    - a. Con f(1) [C1]
    - b. Sin f(1) [S1]
  - 3. Proceso recursivo [PR]
- II. Estrategias funcionales [EF]
  - 1. Generalización local [GL]
  - 2. Generalización global [GG]
- III. Razonamiento proporcional [RP]
- IV. Otros (O)

Figura 2. Estrategias de resolución

I. En la **estrategia aditiva** el estudiante observa que en cada paso aumenta una diferencia constante. Se distinguen tres tipos:

I.1. Recuento: se cuentan directamente los elementos de uno en uno sobre un dibujo o se construye la sucesión hasta el término requerido

I.2. Proceso iterativo: se reconoce y se utiliza el carácter iterativo de la pauta lineal

I.2.a. Con f(1): a partir de los elementos del primer cuadrado, se suma la diferencia, es decir, el estudiante suma 2 bolas o 3 palos por cada cuadrado que añade

I.2.b. Sin f(1): no se observa la particularidad del primer cuadrado y el estudiante se limita a sumar 2 bolas, o 3 palos, por cada cuadrado que añade

I.3. Proceso recursivo: se reconoce y utiliza el carácter recursivo de la pauta lineal y se halla el número de elementos sumando 2 bolas o 3 palos a los elementos del término anterior o de un término conocido

II. En la **estrategia funcional** el estudiante utiliza una expresión para hallar el número de elementos de cada caso. Puede ser:

II.1. Generalización local: se utiliza la expresión para hallar los elementos de un determinado número de cuadrados

II. 2. Generalización global: se utiliza la expresión para hallar los elementos de cualquier número de cuadrados

III. En el **razonamiento proporcional** el alumno halla, erróneamente, el número de elementos mediante razonamientos proporcionales con multiplicaciones o reglas de tres.

4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos en los apartados referidos al recuento de bolas y palos en las distintas tareas son muy semejantes por lo que se presentarán los resultados obtenidos en los apartados de recuento de bolas.

4.1 Niveles de éxito por tareas y curso

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	Media
Tarea 1	96	89	95	97	95
Tarea 2	74	68	81	83	77
Tarea 3	41	42	43	45	43
Tarea 4	11	16	19	38	22

Tabla 1.- Niveles de éxito por tareas y curso en porcentajes

Se puede observar en la Tabla 1 que el éxito obtenido desciende al aumentar la dificultad de las tareas, siendo este descenso muy pronunciado al llegar a la tarea 4 (hallar la regla general). Prácticamente la totalidad de los alumnos, 95%, responde correctamente a la primera tarea, mientras que sólo el 22% responde correctamente la tarea 4. Por otra parte el éxito aumenta a medida que aumentan los cursos, siendo la diferencia más significativa el salto que se produce en la tarea 4 al pasar de 3º a 4º curso

4.2 Utilización y éxito de las estrategias

La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos por los alumnos de los cuatro cursos en todas las tareas planteadas en el problema y clasificadas según las estrategias utilizadas. Estas estrategias están representadas por las abreviaturas del apartado 3.3 y en la columna 'B' se recogen las respuestas en blanco. El primer número de cada celda corresponde a los alumnos que han realizado cada tarea usando la estrategia correspondiente, y el número que aparece entre paréntesis al número de alumnos que han realizado correctamente la tarea.

Tarea	Curso	B	EA				EF		RP	O	Total
			R	PI		PR	GL	GG			
				C1	S1						
1	1º		21(20)	3(3)		3(3)					27(26)
	2º		18(16)			1(1)					19(17)
	3º		16(16)			4(4)			1(0)		21(19)
	4º		20(19)	1(1)		7(7)	1(1)				29(28)
	Total		**75(71)**	**4(4)**		**15(15)**	**1(1)**		**1(0)**		**96(90)**
2	1º		21(15)	3(3)	1(0)	2(2)					27(20)
	2º		15(12)			1(1)			3(0)		19(13)
	3º		15(14)			3(3)			3(0)		21(17)
	4º		19(16)	1(1)		4(4)	3(3)		2(0)		29(24)
	Total		**70(57)**	**4(4)**	**1(0)**	**10(10)**	**3(3)**		**8(0)**		**96(74)**
3	1º		20(7)	3(3)	1(0)	1(1)			2(0)		27(11)
	2º		12(6)	2(2)					5(0)		19(8)
	3º		12(7)	1(1)		1(0)	1(1)		6(0)		21(9)
	4º		14(6)	3(1)		3(3)	3(3)		6(0)		29(13)
	Total		**58(26)**	**9(7)**	**1(0)**	**5(4)**	**4(4)**		**19(0)**		**96(41)**
4	1º	10(0)		4(3)	11(0)				2(0)		27(3)
	2º	5(0)		3(3)	11(0)						19(3)
	3º	3(0)		1(1)	6(0)			3(3)	2(0)	6(1)	21(4)
	4º	1(0)		6(5)	8(0)			5(5)	2(0)	7(1)	29(11)
	Total	**19(0)**		**14(12)**	**36(0)**			**8(8)**	**6(0)**	**13(2)**	**96(21)**

Tabla 2.- Frecuencias absolutas de las estrategias utilizadas por tareas y cursos

Destacamos de la Tabla 2 que la estrategia más utilizada en todas las tareas y en todos los cursos ha sido la estrategia aditiva (EA), cuyo uso desciende al aumentar la dificultad de la tarea y el curso. Por el contrario, la utilización de la estrategia funcional (EF) aumenta a medida que aumenta la dificultad de la tarea y el curso.

La estrategia más eficaz ha sido la estrategia funcional, aunque muy pocos alumnos y sólo los de 3º y 4º, han sido capaces de utilizarla. La eficacia de la estrategia aditiva ha sido muy similar en los cuatro cursos, aunque resulta laboriosa para aplicarla en la generalización lejana y no ayuda a obtener la regla general. El éxito del razonamiento proporcional ha sido nulo, al tratarse de una función afín.

Dentro de la estrategia aditiva, el recuento es el procedimiento más usado en las tres primeras tareas, descendiendo su utilización al aumentar la complejidad de éstas y siendo nula su utilización en la obtención y expresión de la regla general.

En las tres primeras tareas ningún alumno responde en blanco (B), en cambio el 20% de los alumnos deja en blanco la tarea 4. El razonamiento proporcional (RP) se utiliza sobre todo en la tarea 3 a partir de 2º. Estrategias distintas a las esperadas se utilizan exclusivamente para obtener y expresar la regla general en 3º y 4º de la ESO.

4.3 Uso de estrategias en la secuencia de tareas

La Tabla 3 muestra las estrategias utilizadas por los alumnos en las diferentes tareas. Entre paréntesis figuran los alumnos que han conseguido realizar bien todas las tareas del problema propuesto. Se han identificado 18 itinerarios diferentes de los cuales sólo 6 tienen frecuencia igual o superior a 4.

<table>
<tr><th rowspan="2">Itinerarios</th><th colspan="4">Tarea</th><th colspan="4">Curso</th><th rowspan="2">Total</th></tr>
<tr><th>1ª</th><th>2ª</th><th>3ª</th><th>4ª</th><th>1º</th><th>2º</th><th>3º</th><th>4º</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="16">EA</td><td rowspan="9">EA</td><td rowspan="5">EA</td><td>EA</td><td>13 (3)</td><td>10 (3)</td><td>4(1)</td><td>12(5)</td><td>39 (12)</td></tr>
<tr><td>II</td><td>EF</td><td></td><td></td><td>2(2)</td><td>2 (2)</td><td>4 (4)</td></tr>
<tr><td>III</td><td>RP</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>O</td><td></td><td></td><td>3(1)</td><td>4 (1)</td><td>7 (2)</td></tr>
<tr><td>V</td><td>B</td><td>10</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>17</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>EF</td><td>O</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>VII</td><td rowspan="3">RP</td><td>EA</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>VIII</td><td>O</td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>B</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>X</td><td rowspan="6">RP</td><td>EA</td><td>EA</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>XI</td><td rowspan="5">RP</td><td>EA</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>XII</td><td>EF</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>XIII</td><td>RP</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>XIV</td><td>O</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>XV</td><td>B</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>XVI</td><td>EF</td><td>EF</td><td>EF</td><td></td><td></td><td></td><td>2 (2)</td><td>2 (2)</td></tr>
<tr><td>XVII</td><td>EF</td><td>EF</td><td>EF</td><td>EF</td><td></td><td></td><td></td><td>1 (1)</td><td>1 (1)</td></tr>
<tr><td>XVIII</td><td>RP</td><td>RP</td><td>RP</td><td>O</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Total</td><td>27(3)</td><td>19(3)</td><td>21(4)</td><td>29(11)</td><td>96(21)</td></tr>
</table>

Tabla 3.- Estrategias utilizadas por los alumnos por tareas y cursos

El número de itinerarios utilizado por los estudiantes se incrementa en cursos superiores: se han identificado 4 itinerarios en 1º, 7 en 2º y 11 en 3º y 4º; de ellos condujeron al éxito 1 en 1º y 2º, 3 en 3º y 5 en 4º. Esto muestra una cierta relación entre flexibilidad en el uso de estrategias y el éxito alcanzado.

El itinerario con mayor número de frecuencias es el itinerario I que corresponde al uso de la estrategia aditiva en las cuatro tareas (39 estudiantes, 41%). Le sigue el itinerario V, que corresponde a la utilización de la estrategia aditiva en las tres primeras tareas y dejar en blanco la cuarta (17 estudiantes); su frecuencia disminuye en los cursos superiores. La estrategia que más se combina con la aditiva es el razonamiento proporcional, pues el 25% de los alumnos mezcla estas dos estrategias (itinerarios III, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV y XV).

Algunos itinerarios son utilizados exclusivamente por los alumnos de 3º y/o 4º curso y se caracterizan por combinar la estrategia aditiva con la funcional y/o con el razonamiento proporcional (II, IV, VI, VIII, XII, XIII, XIV, XVI, XVII y XVIII). Estos alumnos, a diferencia de los de 1º y 2º, habían estudiado las funciones y su expresión algebraica.

Un total de 57 alumnos, el 59%, utilizan la misma estrategia en todas las tareas o dejan en blanco la última tarea. De estos alumnos, 39 han utilizado el itinerario I (estrategias aditivas), 17 el V (aditivas y en blanco) y 1 el XVII (funcional), por tanto la rigidez se pone más de manifiesto en el uso de la estrategia aditiva. Los cursos inferiores son menos flexibles para cambiar de estrategia, ya que el 78% de los alumnos de 1º y 2º utiliza una única estrategia en las cuatro tareas, o deja en blanco el 4º apartado. Este porcentaje desciende al 42% en los alumnos de 3º y 4º.

De los 21 alumnos que han conseguido completar correctamente todo el problema, 12 han utilizado exclusivamente la estrategia aditiva expresando la regla general en lenguaje verbal, 6 han combinado las estrategias aditivas y funcionales, 2 han combinado la estrategia aditiva con “otra” estrategia y 1 alumno ha utilizado exclusivamente la estrategia funcional.

Sólo el 21% de los alumnos que han utilizado la estrategia aditiva, en exclusiva o combinada, ha resuelto correctamente el problema. Sin embargo este porcentaje asciende al 88%, 7 de 8, en los alumnos que han utilizado la estrategia funcional. El único alumno que ha realizado todas las tareas con la estrategia funcional, ha resuelto correctamente el problema.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestros resultados confirman que existe una relación clara entre la “distancia” de la generalización y el éxito conseguido: el 94% de los alumnos resolvieron la primera tarea de generalización cercana, el 43% resolvieron la tercera tarea de generalización lejana y el 22% encontró la regla general (Tabla 1).

El éxito obtenido en las tareas de generalización cercana y lejana (tareas 1, 2 y 3) es similar en los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, sin embargo hay un crecimiento del éxito en la obtención y expresión de la regla general (tarea 4) que se acentúa en 4º curso, pasando del 19% en 3º al 38% en 4º (Tabla 1). Esto se puede explicar, en parte, por la utilización de la estrategia funcional en la generalización lejana, ya que la expresión numérica que relaciona el número de cuadrados y de bolas es más fácil de traducir a una regla general, que cualquiera de las expresiones relacionadas con las estrategias aditivas. En nuestra investigación ningún alumno de 1º y 2º utiliza la estrategia funcional en la generalización lejana y la utilizan 1 de 3º y 3 de 4º (Tabla 2).

Los alumnos de 4º curso siguieron 11 itinerarios diferentes en los que combinaron diversas estrategias para obtener la regla general, siendo los más flexibles; de estos, 5 itinerarios condujeron al éxito, que fue del 100% cuando usaron la estrategia funcional. Dicho resultado nos permite afirmar que los alumnos con mayor nivel de éxito muestran una mayor flexibilidad.

Algunos alumnos intentaron responder utilizando erróneamente el razonamiento proporcional, especialmente en la tarea 3 de generalización lejana; esta tendencia se acentúa en cursos superiores. Se confirma así los resultados de García Cruz y Martinón (1999) que afirman que los alumnos a veces usan métodos inapropiados, especialmente la proporcionalidad. El abuso de este método en tareas de no proporcionalidad por parte de alumnos de secundaria ha sido puesto de manifiesto en diversas investigaciones (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2002), por lo que se hace necesario proponer a los estudiantes de esta etapa tareas variadas para que distingan situaciones de proporcionalidad de las que no lo son.

De los 94 alumnos (sobre 96) que comenzaron con estrategias aditivas utilizando especialmente el recuento, 38 cambiaron a otras estrategias mostrando así su flexibilidad. La mayoría de ellos basaron su estrategia aditiva en el carácter iterativo del patrón lineal y observaron cómo aumenta el número de bolas al añadir cuadrados, y aunque en las tres primeras tareas también observaron la particularidad del primer cuadrado, sólo una minoría (12 de 39) fue capaz de tener en cuenta esta particularidad al expresar la regla general. Como afirman Orton y Orton (1994) “la fijación en enfoques recursivos puede obstaculizar seriamente el progreso hacia una regla universal”.

Sólo un alumno, de 4º de la ESO, ha utilizado el método deconstructivo, en el que interviene la sustracción, para resolver las tareas planteadas en el problema. A los alumnos de esta investigación les resulta más fácil sumar elementos en cada término que restar los elementos comunes coincidiendo con Rivera y Becker (2008) que afirman que “el método deconstructivo es el más difícil de alcanzar” (p. 81)

Nuestro trabajo muestra la importancia de que los profesores de matemáticas reconozcan y valoren la importancia de la generalización en la construcción del conocimiento matemático, planteen en clase ‘problemas de generalización’ para trabajar distintas estrategias, discutan las ventajas e inconvenientes que presenta cada una de ellas y estimulen la flexibilidad en el uso de las mismas. La identificación de patrones en este tipo de tareas puede facilitar el paso de la aritmética al álgebra de manera natural usando diferentes lenguajes. En este sentido es importante, como señala el Currículo de Educación Secundaria, el trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre los lenguajes aritmético, verbal y algebraico a lo largo de esta etapa educativa, así como desarrollar la capacidad de ver ‘lo particular en lo general’ (Mason y Pimm, 1984).

Referencias

Cañadas, M.C., Castro, E. y Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de de la SEIEM* (pp. 283-294). Tenerife: SEIEM.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors, *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311-314.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop et al. (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*, (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16* (2), 221-262.

García Cruz, J.A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal.* Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de la Laguna.

García Cruz, J. A. y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias, 17* (1), 31-43.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Editorial Labor (Or. 1982).

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289.

Orton, A. y Orton, J. (1994). Students' perception and use pattern and generalization. J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3*, (pp. 407-414). Lisboa: University of Lisbon.

Piaget, J. (1987). *Introducción a la epistemología* genética*: el pensamiento matemático*. México D.F. : Paidós (Or. 1950).

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (*How to solve it.* Princenton University Press,1945*)*

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*, 65-82.

Roig, A.I. y Llinares, S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de de la SEIEM* (pp. 195-204). Badajoz: SEIEM.

Santaló, L.A. (1985). *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires:

Editorial Docencia.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20* (2), 147-164.