

LA INTEGRAL DEFINIDA EN BACHILLERATO. RESTRICCIONES INSTITUCIONALES DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

THE DEFINITE INTEGRAL, INSTITUTIONAL RESTRICTIONS OF THE UNIVERSITY ACCESS TESTING

Ordóñez Cañada, L., Contreras de la Fuente, A.

Universidad de Jaén

Resumen. *En este trabajo se aportan los resultados de una investigación, realizada con cuatro grupos de estudiantes de 2º de bachillerato de la Comunidad Autónoma Andaluza, sobre la incidencia de las pruebas de acceso a la universidad (PAU) en los significados de la integral definida, en cuanto a los posibles sesgos producidos. En primer lugar se detectan los significados de referencia que se comparan posteriormente con los obtenidos en las PAU, después se analiza el significado implementado en el aula. Por último, se dan algunas implicaciones para la enseñanza de la integral definida.*

Palabras clave: integral definida, enseñanza, enfoque ontosemiótico, restricciones institucionales, pruebas de acceso a la universidad.

Abstract. *On this paper results are provided from a research conducted with four groups of students from the 2nd year of baccalaureate (precollege students) from Andalusia Autonomous Community. We evaluate the incidence the university entrance exams (Pruebas de Acceso a la Universidad - PAU) have on the meanings of definite integral in relation to the produced biases. On a first stage, meanings of reference are pinpointed; on a second stage they are compared to the ones produced in PAU exams; later on the classroom implemented meaning is analyzed. Finally, some implications are offered in order to teach the definite integral.*

Key words: Definite integral, teaching, ontosemiotic focus, institutional restrictions, university entrance exams.

1. INTRODUCCIÓN

La integral definida es una de las nociones que se tratan en el currículum de segundo de Bachillerato y por ello es objeto de una evaluación externa por medio de las Pruebas de Acceso a la Universidad⁶⁷. Diversos investigadores han puesto de manifiesto que la tendencia que se observa en la enseñanza del concepto es la de seguir un desarrollo casi exclusivamente algebraico, ligado a la operación inversa de la derivación y a un cálculo de áreas puramente geométrico basándose en métodos algorítmicos y donde la representación gráfica tiene un papel secundario. Se trata de un problema didáctico de gran importancia en los currículos de diferentes países y, por tanto, generador de

⁶⁷ PAU en lo sucesivo

diversos trabajos de investigación (Berry y Nyman, 2003; Camacho, Depool y Garbín, 2008; Carlson, Persson y Smith, 2003; Autores, 2005; Autores, 2010; Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Labraña, 2001; Autores, 2007; Thompson y Silverman, 2007; Turégano, 1994; Wenzelburger, 1993).

Consideramos que las PAU tienen una gran influencia en la enseñanza y aprendizaje en 2º de bachillerato y, en concreto en la integral definida, puesto que los profesores tienen que preparar a sus alumnos con el objetivo de superar estas pruebas de evaluación tras la instrucción recibida, conociendo que la nota puede tener una gran trascendencia para el alumno. Por todo lo anterior, las PAU pueden llegar a ser verdaderas restricciones institucionales. Estas consideraciones nos han llevado a proponer como problema de investigación la influencia de las PAU en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, lo que podemos concretar en las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las restricciones institucionales planteadas por las PAU en cuanto al objeto integral definida en 2º de bachillerato para la comunidad autónoma andaluza?, ¿Cómo influyen dichas restricciones en los significados realmente implementados en el aula y en los significados personales de los alumnos?

Este trabajo, que desarrolla un problema de investigación original, tiene como primer apartado los objetivos a tratar y la metodología. Posteriormente, se abordan los significados institucionales de referencia, el significado en las PAU, en los manuales, en los apuntes de clase y los significados personales. Por último, se extraen conclusiones de cara a la enseñanza de la integral definida en 2º de Bachillerato.

2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Desarrollamos los objetivos complementados con la metodología pertinente. La comunicación tiene como objetivo general identificar, describir y explicar la influencia que las restricciones institucionales relacionadas con las Pruebas de Acceso a la Universidad puedan tener en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida en 2º de Bachillerato, todo ello según el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006), ya que se trata de un enfoque conceptual de tipo holístico capaz de abordar la complejidad ontosemiótica de la enseñanza de la integral definida. Se supone que dicho enfoque es suficientemente conocido por la comunidad de investigadores, por lo que no se desarrolla en detalle.

El objetivo general planteado lo hemos desarrollado según los siguientes objetivos específicos y las metodologías para su consecución que se exponen según las diferentes características de cada uno de ellos.

O1: Establecer el significado de referencia de la integral definida determinando las configuraciones epistémicas que lo forman.

Tras un estudio histórico-epistemológico del concepto de integral definida y con la oportuna adaptación de la historia de las matemáticas, se ha elaborado el significado institucional de referencia para nuestra noción objeto de estudio. Dicho significado está descompuesto en diferentes configuraciones epistémicas, cada una de las cuales puede considerarse como un “sentido” distinto de la integral definida.

La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la Universidad

O2: Estudio del significado que puede extraerse de las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Comunidad Autónoma de Andalucía, determinando sesgos, ausencias, etc., respecto del significado de referencia.

Utilizando la terminología de Azorín y Sánchez Crespo (1986) el universo de nuestro estudio se centra, por un lado, en los ejercicios sobre integral definida propuestos en las PAU de la Comunidad Autónoma de Andalucía en los últimos 10 años; por otro lado, en los libros de texto de las editoriales de mayor difusión en la Comunidad Autónoma de Andalucía.; y, por último, la población de estudiantes, que está constituida por los estudiantes de 2º de bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía, ya que la enseñanza del concepto de integral definida pertenece a este nivel educativo. La población objetivo son los estudiantes de Jaén, de donde se han escogido cuatro grupos que consideramos estándar. *O3: Análisis de la enseñanza de la noción de integral definida a través del estudio de los libros de texto y en un contexto institucional determinado por medio del análisis de los apuntes de clase de cuatro grupos seleccionados.*

Para el estudio de las PAU, de los libros de texto y de los apuntes de clase, se ha realizado un análisis de contenido. Fox (1981) indica que dicho análisis comienza por elegir la unidad de contenido a analizar y que en nuestro caso serán las configuraciones epistémicas.

O4: Caracterización de los significados personales logrados por los alumnos tras la implementación de la enseñanza, mediante la elaboración y aplicación de un cuestionario.

Para ello realizamos un cuestionario a los estudiantes de los cuatro grupos seleccionados, el cual vino precedido de un cuestionario piloto cuyo objetivo era mejorar el cuestionario definitivo, y, seguido de unas entrevistas semi-estructuradas que pretendían clarificar ciertas respuestas de los estudiantes.

3. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN. DISCUSIÓN

3.1 Significado institucional de referencia

Describimos a continuación cada una de las configuraciones epistémicas (CE) que conformarán el significado de referencia de la integral definida atendiendo a las entidades primarias que se ponen en juego principalmente y que las caracterizan. Para determinar una configuración epistémica nos parece fundamental el tipo de situación problema que resuelve ya que estimamos que movilizará unos determinados elementos de significados distintivos y por tanto un significado parcial. Además, no diferenciar entre ellos o no movilizarlos en los diferentes momentos que se suceden en la resolución de situaciones-problema complejas lleva a conflictos semióticos. Utilizamos la integral definida en situaciones de cálculo de áreas, volúmenes, etc. (configuración geométrica); en procesos donde se estudia el cambio y el resultado de la acumulación del cambio (configuración resultado de un proceso de cambio); hay situaciones en que se interpreta como inversa de la derivada (configuración inversa de la derivada); pero en otras es necesario considerarla como el límite de una suma (configuración de aproximación al límite); por último, en ocasiones solamente aparece como un proceso

de cálculo, únicamente se pide su cálculo, son situaciones escolares donde se pretende evaluar la destreza de los estudiantes.

Es claro que en cada una de ellas se podrán utilizar diferentes métodos de cálculo integral que han surgido a lo largo del desarrollo de la noción y que sólo nos han parecido determinantes de otra configuración epistémica si sobrepasan su función de elementos necesarios para el cálculo.

Más explícitamente las configuraciones epistémicas que constituyen el significado de la integral definida son:

1. *Geométrica* (CEgeo). Asociada al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, es decir, situaciones que hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento.
2. *Resultado de un proceso de cambio* (CErpc). Asociada a procesos no estáticos, de una realidad cambiante, siendo el flujo de tiempo un de los aspectos cruciales. Estamos considerando la idea de acumulación que subyace en la integral.
3. *Inversa de la derivada* (CEinvderiv). La relación original entre derivada e integral se puede asociar a los trabajos de Newton y Leibnitz. El conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso (condiciones cada vez menos restrictivas).
4. *Aproximación al límite* (CEaproxlim). Está directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dará lugar a la nueva definición de integral definida que éste realiza. Calculo de áreas por procedimientos de paso al límite.
5. *Algebraica* (CEalg) En la educación secundaria se emplea gran parte del tiempo a practicar las reglas de integración.

3.2 El significado en las PAU

Se ha realizado un estudio de las PAU de Matemáticas II en la Comunidad Autónoma de Andalucía desde los años 1999 hasta 2010 según las configuraciones epistémicas del significado de referencia (tabla 1). Hemos analizado 144 pruebas (cada año se elaboran 6 pruebas con dos opciones, A y B, para que el estudiante elija una de ellas), detectando si se plantea alguna cuestión sobre la integral definida y, en este caso, la configuración epistémica que es necesario conocer y utilizar para resolver la cuestión planteada.

No hay Integral Definida		31	
Integral Definida	CEalg	Directa	28 23'33%
		Aplicación	5 4'17%
	CEgeo	Directa	73 60'83%
		Aplicación	11 9'17%
	CEinvderiv	3	2'5%
		120	100%

Tabla 16. Configuraciones epistémicas en las PAU 1999-2010

En este análisis de las configuraciones epistémicas en las PAU hemos observado fuertes regularidades, en el tipo de situaciones en que aparecen las dos configuraciones epistémicas más utilizadas: la algebraica y la geométrica. En lo que respecta a CEalg

La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la Universidad

hay dos tipos de situaciones propuestas, aquella en la que se pide el cálculo de una integral definida directamente (la hemos llamado “directa”), y otro tipo de situaciones en las que utiliza dicha configuración en la resolución de una cuestión (la hemos llamado de “aplicación” figura 2) lo que se ejemplifica en las figuras 1 y 2 respectivamente.

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^0 \text{Ln}(2+x) dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Figura 1: CEalg Directa (Pruebas de acceso 2005)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}$. Calcula a , b , c y d .

Figura 2: CEalg Aplicación (Pruebas de acceso 2008)

De igual forma para la CEgeo, hay situaciones en las que se pide directamente calcular un área mientras que en otras se aplica para resolver la situación y que se ejemplifica en las figuras 2 y 3.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Dadas las funciones $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Figura 3: CEgeo Directa (Pruebas de acceso 2008)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos]

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

Figura 4: CEgeo Aplicación (Pruebas de acceso 2007)

Observamos que sólo aparecen 3 configuraciones epistémicas olvidándolas restantes. Destaca notablemente la CEgeo pues de las 120 configuraciones utilizadas, 84 corresponden a dicha configuración, esto es un 70%, generalmente utilizada en el cálculo directo de un área (el 60'83% de las configuraciones totales), lo que puede convertirlo en un método para resolver un tipo de situaciones que aparecen frecuentemente en las PAU. Sin embargo, CE-invderiv solamente aparece en tres casos (2'5%). Nos parece muy significativo el 27'5% (33 de 120) de la configuración epistémica algebraica, un porcentaje muy alto para una configuración que se basa en métodos de cálculo algóritmico.

3.3 El significado en los libros de texto

Para observar la influencia de este significado que emana de las PAU en la enseñanza nos hemos planteado en primer lugar, analizar los libros de texto, ya que es una herramienta fundamental para obtener información sobre los significados institucionales de los objetos matemáticos como han mostrado diferentes trabajos de investigación sobre este aspecto (Ortega e Ibañes, 2004; González y Sierra, 2004; Autores, 2003). Así, hemos seleccionado las cinco editoriales de mayor difusión en la Comunidad Autónoma de Andalucía, en sus ediciones desde el 1997 al 2003 y que no han sufrido modificación en el momento de aplicación del cuestionario (2004). De cada una de ellas se ha elegido un libro de 2º de Bachillerato de Ciencias. En cada uno hemos ordenado los ejercicios propuestos al final de cada tema utilizando la misma clasificación realizada para las PAU con el fin de poder comparar ambos significados y cuyos resultados se recogen en la tabla 2.

		PAU	Oxford	Mc Graw-Hill	Edelvives	Santillana	Anaya
CEalg	Directa	23'33%	3,45%		10,29%	10,00%	6,15%
	Aplicación	4'17%	3,45%		1,47%	10,00%	3,08%
	Otras						
CEgeo	Directa	60'83%	72,41%	75,00%	52,94%	75,00%	44,62%
	Aplicación	9'17%	13,79%		11,76%		21,54%
	Otras				10,29%		6,15%
CEinvderiv		2'5%		25,00%	10,29%	5,00%	15,38%
CEaproxlim					2,94%		
CErpc			6,90%				3,08%
		100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 17. Distribución de CE en los ejercicios propuestos en los libros de texto

Como puede observarse, la CEgeo es la más utilizada en los ejercicios, siendo los más numerosos los casos de aplicación directa. Aunque hay pocos casos de CEalg hemos de señalar que en todos los libros se estudia primero la integral indefinida y los métodos de integración con lo que ahora sólo se ampliaría el estudio a la aplicación de la regla de Barrow. Observamos también la ausencia casi total de las configuraciones CEaproxlim y CERpc. Todo lo anterior nos indica una gran similitud con lo que sucede en las PAU.

3.4 El significado en los apuntes de clase

Para estudiar el significado implementado y los significados personales seleccionamos cuatro grupos de tres institutos de Jaén en los que impartían clase cuatro profesores diferentes. Se pasó un cuestionario a los alumnos de estos grupos, en total 48 estudiantes (5 del primer grupo, 13 del segundo, 25 del tercero y 5 del cuarto)

En cada grupo recogimos los apuntes de un alumno/a que el profesor escogió pues consideraba que recogía más fielmente lo realizado en clase. Por ello estimamos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo en cuanto a las configuraciones epistémicas que trabaja y los modos en que lo hace. En la tabla 3 se recoge la clasificación de las situaciones trabajadas en cada grupo, nuevamente según la clasificación hecha para las PAU, lo que nos permitirá su comparación.

La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la Universidad

		PAU	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
CEalg	Directa	23'33%	21'43%	14'82%	15'91%	18'18%
	Aplicación	4'17%	7'14%	3'7%	0	0
	Otras		0	3'7%	0	0
CEgeo	Directa	60'83%	42'86%	51'85%	77'27%	72'73%
	Aplicación	9'17%	7'14%	0	2'27%	0
	Otras		0	11'11%	0	0
CEinvderiv		2'5%	21'43%	14'82%	4'55%	9'09%
		100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 18. Clasificación de los ejercicios según las CE de las PAU y de los grupos

Observamos que se identifica integral con área (CEgeo es la más trabajada), con un desarrollo centrado en los procedimientos de cálculo de forma casi exclusiva, concretamente en el cálculo de la primitiva y la aplicación de la regla de Barrow. Probablemente los estudiantes de estos grupos asociarán la integral definida con un método de cálculo sin más. Se ignoran cuestiones de acumulación (no aparece CERpc) con lo que carecerán de sentido las aplicaciones donde sea necesario este significado. Así, la mayoría de los estudiantes sólo reconocen como aplicación de la integral definida el área bajo la curva (Berry y Nyman, 2003; Camacho, Depool y Garbín, 2008).

3.5 Significados personales

Como instrumento para caracterizar el significado personal nos propusimos realizar un cuestionario dirigido a los alumnos de 2º de Bachillerato que habían recibido la instrucción correspondiente a la integral definida tal y como hemos comentado en el apartado anterior. Previamente realizamos un cuestionario piloto cuyo objetivo era analizar la eficacia de la herramienta para el análisis de los significados personales. El cuestionario definitivo se completó con entrevistas semiestructuradas, que buscaban clarificar determinadas cuestiones detectadas en la corrección que nos resultaban ambiguas y que nos parecía debíamos concretar ya que podían mostrar conflictos semióticos.

Tras la corrección y codificación hemos obtenido como conclusión que los estudiantes identifican integral-área y que en muchos casos no llegan a diferenciarlas lo que les impide la correcta resolución de las situaciones donde esta diferencia es esencial. Sin embargo, consideran la integral definida como un método: cálculo de una primitiva y aplicación de la regla de Barrow, sin que haya una verdadera conexión con la noción de área estudiada en la geometría elemental. Es por tanto un área muy descontextualizada y estática que no les favorece la conexión a otros contextos. Dado que el lenguaje que más se utiliza en clase es el algebraico, ya que es el requerido en las PAU de forma casi exclusiva, los estudiantes tienen un pobre dominio del registro gráfico. Sus respuestas se basan en cálculos algebraicos que prevalecen sobre cualquier otro a la hora de decidir una solución si encuentran contradicción entre lo obtenido en dos registros distintos, algebraico y gráfico, por ejemplo.

La falta del significado de acumulación, propio de la integral definida que dota de significado, además, a la relación derivada-integral, también se ha puesto de manifiesto.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado la determinación del significado de referencia de la integral definida en el momento del primer encuentro con este concepto y en estudiantes no universitarios, el cual está constituido por las diferentes configuraciones epistémicas que se han establecido en el apartado 3.1. Concluimos que la configuración geométrica es la más utilizada y que, además, la mayoría de las situaciones que se proponen son aquellas en las que se solicita explícitamente el área entre dos curvas y cuya resolución se realiza algebraicamente. En segundo lugar está la CEalg, centrada sobre todo en el cálculo algorítmico directo. Además, no se trabaja apenas la coordinación entre las configuraciones y hay pocos cambios de registro.

Así mismo, hemos caracterizado el significado institucional que se desprende de las PAU y, su comparación con el significado de referencia, nos ha permitido poner de manifiesto que dichas PAU son una gran restricción para la enseñanza de la integral definida a través de un significado aún más sesgado que el anterior. Pero además, la determinación del significado de las PAU ha hecho posible determinar sus efectos sobre la enseñanza en 2º de Bachillerato de Ciencias en la Comunidad Autónoma de Andalucía (los apuntes de clase) y el aprendizaje (el cuestionario y las entrevistas a los estudiantes)

Los resultados de los análisis de los manuales y de los apuntes de clase muestran que hay una gran coincidencia con el desarrollo de las PAU. Se centran en CEgeo y en CEalg, proponiendo, sobre todo, situaciones en las que se pide explícitamente el cálculo del área entre dos curvas o el cálculo de una integral definida respectivamente; usan métodos algebraicos casi exclusivamente, el lenguaje geométrico tiene un papel totalmente secundario y apenas hay situaciones que se resuelvan por dos métodos o sea necesario utilizar dos configuraciones epistémicas en la resolución. Fruto de este tipo de enseñanza, encontramos que el significado personal de los estudiantes de estos grupos es muy incompleto. No podemos esperar que los estudiantes formen por sí mismos un significado de la integral completo. Creemos que es difícil que la Universidad, con una enseñanza muy formal, dote de significado a esta noción.

Referencias

- Azorín, F. y Sánchez-Crespo, J.L. (1986). *Métodos y Aplicaciones del Muestreo*. Madrid: Alianza Editorial.
- Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22, 481-497.
- Camacho, M., Depool, R. & Garbín, S. (2008) Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20 (3), 33-57
- Carlson, M. P., Persson, J. & Smith, N., (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the fundamental theorem of calculus. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, J. Zilliox (Eds) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 165-172. Joint Meeting of PME and PMENA, Hawaii, USA.

La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la Universidad

- Autores (2005). Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Coordinadores) *Investigación en Educación Matemática*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, Córdoba. España.
- Autores (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367–384.
- Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En M. van den Heuvel-Panhuizen, (Eds), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 297-304. Utrecht, The Netherlands.
- Fox, D. (1981). El proceso de investigación en educación. Pamplona: EUNSA.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237–284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325–355.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1), 39–88.
- González, M.T.; Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza de secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389–408.
- Labraña, P.A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. España.
- Autores (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (eds) *Investigación en Educación Matemática*. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada, España.
- Autores, (2007) *Significados históricos-epistemológicos y escolares de la Integral Definida. Restricciones planteadas por las Pruebas de Acceso a la Universidad*. Trabajo presentado en el grupo de trabajo Didáctica del Análisis en el XI Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Universidad de La Laguna, La Laguna, España.
- Ortega, T. y Ibañes, M. J. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números*, 57, 19–32.
- Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ordóñez Cañada, L., Contreras de la Fuente, A.

- Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis doctoral. Universitat de València, Valencia. España.
- Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral definida. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5, 93-123.