ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL MEDIANTE GRAFOS. UN EJEMPLO

ANALYSIS OF STUDENTS' RESOLUTIONS OF CONDITIONAL PROBABILITY PROBLEMS BY MEANS OF GRAPHS. AN EXAMPLE

Edo, P.[1], Huerta, M. P.[2], Cerdán, F.[2]

[1] IES Cueva Santa (Segorbe, Castelló)

[2] Universitat de València.

Resumen. *En este trabajo mostramos el potencial de los grafos trinomiales como herramienta para el análisis de las resoluciones de problemas ternarios de probabilidad condicional. Mostramos el análisis de dos resoluciones correspondientes a sendos estudiantes de 4º de ESO resolviendo un problema de probabilidad condicional de nivel N_0.*

Palabras clave: Problemas ternarios, probabilidad condicional, Resolución de problemas, grafos trinomiales, Educación Secundaria.

Abstract. *In this paper we show to what extend trinomial graphs is a useful tool for analysing students' resolutions of ternary problems of conditional probability. We also show the results of the analysis of two 15-year old students' resolutions of one L_0-level ternary problem of conditional probability.*

Key words: Ternary problems, Conditional probability, Problem solving, Trinomial graphs, Secondary School.

INTRODUCCIÓN

La investigación en resolución de problemas puede abordarse en más de un escenario, en función de los protagonistas que en ella intervienen, ya sea de una manera independiente o en la relación de unos con otros. En el escenario 1, el objeto de estudio son los propios problemas; en el escenario 2 el objeto de estudio son los problemas y los resolutores; mientras que en el escenario 3 son los problemas, los resolutores y los profesores que enseñan a resolver dichos problemas.

Hemos desarrollado distintas investigaciones[60] en el escenario 1, centrando el objeto de estudio, los problemas ternarios de probabilidad condicional, clasificándolos en familias y subfamilias para un estudio más detallado, identificando y midiendo sus dificultades (Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo, 2009; Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009; Edo y Huerta, 2010).

Gran parte de este trabajo se ha realizado con la ayuda de una herramienta que trata de modelizar este mundo de problemas, los grafos trinomiales (Cerdán y Huerta, 2007;

[60] En el marco del proyecto de EDU2008-03140 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación del gobierno de España.

Huerta, 2009). Esta herramienta se ha mostrado útil en el escenario 1, permitiendo un estudio más detallado de las estructuras de las diferentes clases de problemas, identificando los problemas que son representantes de dichas clases, complejidades, clases de isomorfía, etc. Además, este estudio nos ha permitido construir cuestionarios de problemas para su posterior administración y análisis.

De los problemas que hablaremos en este trabajo son problemas que llamamos de nivel N_0, problemas que, en términos generales, siendo ternarios, se caracterizan porque se enuncian, en algún contexto, conociendo tres cantidades, ninguna de ellas refiriéndose a probabilidades condicionales, y preguntando, en cambio, por una cantidad que se refiere a una probabilidad condicional. Dichas cantidades se escogen convenientemente entre probabilidades absolutas e intersecciones, de modo que lo enunciado es realmente un problema.

El escenario en el que nos situaremos será el escenario 2 y, por tanto, tomaremos en cuenta a los problemas y a estudiantes de secundaria resolviéndolos. Mostraremos cómo analizamos la resolución de estos problemas mediante los grafos trinomiales, mostrando, con un ejemplo, el potencial de esta herramienta. Es continuación de otros trabajos de los mismos autores presentado con anterioridad en un simposio anterior (Edo y Huerta, 2010) y que está en curso.

OBJETIVOS

En concreto, en este trabajo, perseguimos dos objetivos:

1. Mostrar el uso de los grafos trinomiales para el análisis de las resoluciones de los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0.
2. Identificar en el grafo actuaciones competentes y errores de los estudiantes en la resolución de un problema.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que se sitúa nuestra investigación está en construcción. No obstante, aspectos de él pueden consultarse en Huerta (2009). Comparte elementos del marco teórico en el que tradicionalmente se ha investigado en resolución de problemas y en concreto la consideración de las variables que afectan a la resolución de un problema de matemáticas (Golding y McClintock, 1979; Kulm, 1979), junto con la consideración de los problemas ternarios y grafos trinomiales que Cerdán (2007) introdujo para el estudio de los problemas de la familia de problemas aritméticos-algebraicos y que hemos adaptado para el estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional (Lonjedo, 2007; Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009). Comparte la posición de Watson y Kelly (2007) y de Jones, Langrall y Mooney (2007) de que los estudiantes razonan mejor con frecuencias condicionales que con probabilidades, lo que condiciona el formato de los datos con el que formulamos los problemas, y la consideración de situaciones que son susceptibles de ser modelizadas mediante probabilidades condicionales, en la perspectiva de lo que Henry (2005) llama situaciones cronológicas, causalistas y conjuntistas. Un ejemplo de análisis de una de estas situaciones mediante el empleo de grafos puede verse en Carles y Huerta (2007).

En tanto que probabilidades condicionales formuladas en contexto, nuestra investigación se sitúa en el marco de las matemáticas realistas, donde el papel de los contextos y de los fenómenos que están presentes en ellos se considera crucial para la comprensión de la probabilidad condicional como medio de organización de dichos fenómenos. Podemos situarnos pues en la corriente fenomenológica propuesta por Freudenthal (1983).

Como metalenguaje en el que se traducen los problemas para un mejor análisis teórico de sus estructuras, mediante lo que llamamos lecturas analíticas de los problemas, es decir, lecturas en las que a lo único que se presta atención es a los datos y a las relaciones entre los datos, Cerdán y Huerta (2007) consideran los grafos trinomiales y traducen el mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional al grafo que puede verse en la Figura 1. Cada vértice representa una cantidad, es decir, representa tanto a un número como al suceso cuya probabilidad está midiendo dicho número. Este número, además, admite más de un formato de expresión: frecuencias, absolutas y relativas, porcentajes o probabilidades. Una arista a trazos discontinuos representa una relación ternaria aditiva entre cantidades y una arista sólida una relación ternaria multiplicativa. Un vértice obscuro representa una cantidad conocida y un vértice claro una cantidad desconocida, preguntada o no.

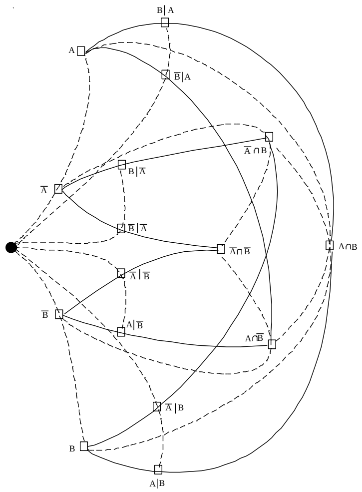


Figura 1. Grafo trinomial del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional.

Metodología

Los aspectos relacionados con la elaboración de los cuestionarios que resolvieron los estudiantes pueden verse en Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009), y el cuestionario y la muestra de estudiantes de la que hablamos en este trabajo en (Edo y Huerta, 2010). Del problema que nos sirve de ejemplo y de su análisis, en el anexo. Nos centraremos, pues, en exponer la forma en que hacemos uso del grafo trinomial descrito para el análisis de las resoluciones de los estudiantes.

Un problema de probabilidad condicional queda determinado en el grafo (independientemente del contexto) cuando se colorean tres vértices convenientemente escogidos y la pregunta del problema. Partiendo de ellos, mediante un algoritmo, que llamamos de destrucción del grafo, podemos identificar rutas o caminos de resolución, es decir, conjuntos ordenados de aristas encadenadas, con sus respectivos vértices, que representan las relaciones que se usan y las cantidades intermedias obtenidas para resolver el problema. Denominamos grafo de una resolución al grafo que contiene toda esta información acerca de dicha resolución, y resulta útil, por ejemplo, para el estudio de competencias, errores y dificultades.

Llamamos competencia formal en la resolución de un problema a la del resolutor ideal, cuya actuación ante un problema de N_0 se caracteriza por: 1) Organizar la información contenida en el enunciado del problema, 2) aplicar el método de análisis-síntesis. Como consecuencia, usar el menor número posible de relaciones y de cantidades intermedias, 3) describir cada nuevo resultado numérico obtenido y 4) dar una respuesta completa a la pregunta del problema, informando no sólo del número (porcentaje) pedido sino también de su significado como medida de un suceso.

Una resolución de estas características dará lugar a un grafo mínimo (el grafo que representa la ruta más corta posible) y será considerada como una resolución eficiente. No obstante, dado un problema, también declararemos como actuaciones competentes en dicho problema a otras actuaciones que compartan gran parte de los rasgos de la competencia formal considerada para ese problema y que conducen a la resolución del problema con éxito. Las actuaciones que declararemos no competentes para resolver ese problema no comparten esos rasgos y se caracterizarán por contener lo que llamaremos errores en la resolución del problema. En nuestro catálogo de errores (todavía en desarrollo) distinguimos varios tipos de errores: Interpretación equivocada de un dato o de la cantidad por la que se pregunta, uso de una relación falsa entre cantidades, uso de un mismo número para dos sucesos distintos, uso de dos números diferentes para un mismo suceso, proporcionar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta y discordancia entre el valor numérico y la descripción de una cantidad.

Generalmente, los errores vienen motivados por las dificultades que presentan los estudiantes en relación con la resolución de este tipo de problemas. Ejemplos de dificultades identificadas hasta el momento son dificultades en la interpretación correcta de la información dada en el enunciado, dificultad para encontrar relaciones entre las cantidades conocidas para llegar a las desconocidas, dificultades de expresión, escaso dominio de la proporcionalidad numérica, etc.

Cualquier resolución, tanto si es declarada competente como si no, puede ser traducida a un grafo que informará, de manera sintética, de las principales características de la actuación del estudiante. El primer paso de la traducción consistirá en obscurecer los vértices correspondientes a las cantidades dadas en el enunciado y la cantidad por la que se pregunta: las primeras en negro y la segunda, en verde[61]. Si el estudiante organiza la información del enunciado de alguna manera, escribiremos junto a cada uno de estos vértices los números correspondientes, las descripciones que hace de ellos y el formato de datos (*f* para frecuencias, *%* para porcentajes y *p* para probabilidades). A partir de ahí, por cada nueva cantidad intermedia obtenida se obscurecerá en azul un nuevo vértice y junto a él se escribirán también el valor numérico de la cantidad, su descripción y el formato de datos. A la hora de asignar un vértice a una cantidad

[61] La paleta de colores que aquí se presenta es opcional, no así los significados.

intermedia se tendrán en cuenta la forma en que se ha obtenido, la descripción que hace el estudiante del número y, si hay discordancia entre éstos, el uso posterior que hace de esa cantidad. Cuando hay una discordancia entre el número y la descripción (es decir, cuando la descripción que el estudiante hace del número no es la del referente de dicho número), el vértice se obscurecerá en rojo y se escribirá en rojo el elemento de la cantidad (número o descripción) que se identifica como erróneo, es decir, el que no se corresponda con el vértice obscurecido. Cuando la cantidad intermedia obtenida no se corresponda con ningún vértice del grafo, se añadirá uno nuevo, que generalmente será producto de un error y deberá obscurecerse en rojo. Pero también puede ser que el nuevo vértice se asocie a una cantidad con sentido en el contexto del problema y pueda incorporarse al grafo, dando lugar a una ampliación correcta del mismo.

Por otra parte, cada vez que el estudiante obtiene una nueva cantidad, a partir de las ya conocidas, hace uso de una relación entre éstas. Si la relación es correcta se resaltará en negro la arista correspondiente en el grafo. Puede que el estudiante use una relación correcta que no se corresponda con ninguna arista del grafo antes mostrado. Entonces, se incorporará una nueva arista, también resaltada en negro.

Si la relación que usa es falsa, es seguro que la relación no estará representada en el grafo. En este caso también se añadirá una arista pasando por los vértices correspondientes a las cantidades que se relacionan, pero resaltada en color rojo para indicar que el estudiante ha cometido un error de relación.

En los problemas objeto de estudio, la pregunta del problema es un porcentaje, que se corresponde con una condicional, para cuyo cálculo es necesario poner en razón una intersección y una marginal. Asociaremos a esta operación la arista multiplicativa correspondiente y la resaltaremos en negro o en rojo, según el estudiante cometa o no un error de relación. En el caso de que el resolutor responda a la pregunta del problema con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta, el vértice que represente a dicha cantidad será rodeado de verde. Con ello, se completa el proceso de traducción de una resolución al grafo.

Resultados y análisis de los resultados. Un ejemplo

En las figuras 2 y 3 mostramos los resultados de traducir las resoluciones (Anexo II) de dos estudiantes, Víctor y Ramón, a un grafo trinomial. A la derecha de ambos, el grafo mínimo, es decir el grafo que contiene un número mínimo de aristas necesarias para resolver el problema, que puede verse en el Anexo I. Ambos grafos van a ser comparados con el grafo mínimo.

La actuación de Víctor en la resolución del problema, observada a través de lo representado en el gafo, la declaramos competente para el problema en cuestión. Esta actuación competente puede describirse, básicamente, por: obscurecerse los vértices apropiados y establecerse las relaciones pertinentes entre las cantidades consideradas. Comparada con la actuación representada por el grafo mínimo, la de Víctor proporciona una relación aditiva más, la señalada con 1 en su grafo, innecesaria desde el punto de vista del grafo mínimo. Es decir, su grafo contiene al grafo mínimo. Lo señalado en rojo para los números de las cantidades que representan esos vértices indica un error de cálculo, dado que tanto el referente como el formato de expresión de dicho número son los pertinentes y no es un error demasiado destacable. Es destacable también el hecho de que realice una lectura del problema describiendo los números de las cantidades conocidas en el enunciado por las iniciales de los referentes: C. (por curados), A. C. (por antibiótico y curados) y N. C. (por no antibiótico y no curado), como puede verse en el grafo de la Figura 2.

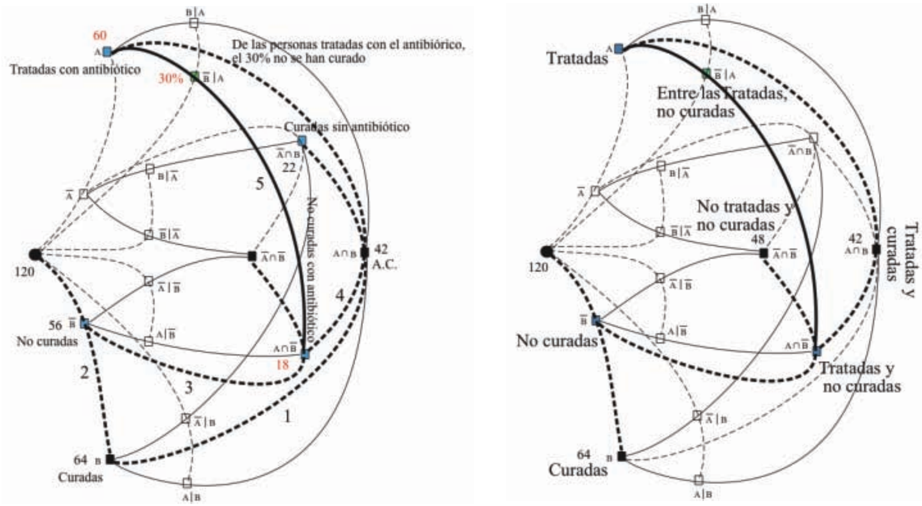


Figura 2. Grafo de la resolución de Víctor comparada con una resolución del mismo problema representada por el grafo mínimo

La tabla siguiente (Tabla 1) resume la actuación de Víctor en términos de cantidades y relaciones entre cantidades usadas a lo largo de la resolución, determinando una ruta de resolución en el grafo.

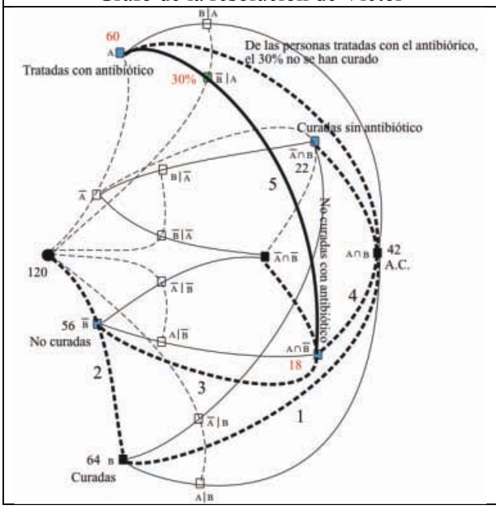
Grafo de la resolución de Víctor	Análisis de las cantidades y relaciones.
	**Cantidades conocidas**: (42, A.C., f) (48, N.C.,f) (64, C, f) **Cantidad desconocida**: (30%, De las personas tratadas con el antibiótico el (porcentaje) no se ha curado; %) **Cantidades intermedias**: (22, curadas sin Antibiótico, f) (18, No curadas con antibiótico, f) (60, Tratadas con antibiótico) **Relaciones ternarias**: Cuatro relaciones aditivas (una de complementariedad) y una relación multiplicativa (de la definición de probabilidad condicional).

Tabla 1: Cantidades y relaciones entre cantidades en la resolución de Víctor.

En cambio, la actuación de Ramón en el problema la declaramos no competente (ver Figura 3). Su grafo no contiene al grafo mínimo. Existen, por tanto, lo que definimos como errores en la resolución del problema que conducen a la no obtención de una respuesta correcta a la pregunta del problema. Ramón interpreta correctamente las cantidades conocidas en el problema, vértices obscuros en los que las tres componentes de las cantidades son consideradas correctas, incluso los referentes de los números: *sí cura sí ant.*, *no cura no ant.*, para las intersecciones y a pesar de que no introduzca ningún referente para el número 64.

En la obtención de cantidades intermedias comete dos errores que llamamos de relación, es decir, usa dos relaciones falsas entre cantidades:

1) “Total de personas” – “nº de no tratadas y no curadas” = “nº de tratadas”.

Este error podría deberse a una creencia equivocada ligada al contexto: “Las (personas) no tratadas y no curadas son el total de (personas) no tratadas porque si una persona no ha sido tratada no ha podido curarse”. Esto equivale a identificar la intersección “no tratadas y no curadas” con la marginal “no tratadas”.

2) “Tratadas” – “Curadas” = “Tratadas y no curadas”

Al igual que antes, este error también proviene de una creencia falsa que se deduce de la anterior: “Todas las personas curadas han sido tratadas”. En efecto, si de las no tratadas, no se ha curado ninguna, todas las curadas han sido tratadas. Equivale a identificar la marginal “curadas” con la intersección “tratadas y curadas”.

Por otra parte, la respuesta a la pregunta del problema tampoco es correcta, ya que hay una discordancia entre el número obtenido y su descripción. El número dado como respuesta está equivocado por errores arrastrados, si bien la relación multiplicativa mediante la cual se ha obtenido es la correcta. En cuanto a la descripción de dicho número es incorrecta (e incoherente con el número dado) porque es la descripción de la intersección directamente relacionada con la condicional buscada. Este error viene motivado por una dificultad de tipo semántico estudiada con detalle en Lonjedo (2007): la dificultad de distinguir (tanto en la lectura como en el uso) entre las expresiones que se refieren a una intersección y las que se refieren a una condicional. Y ésta, a su vez, ligada con el contexto en el que se formula el problema.

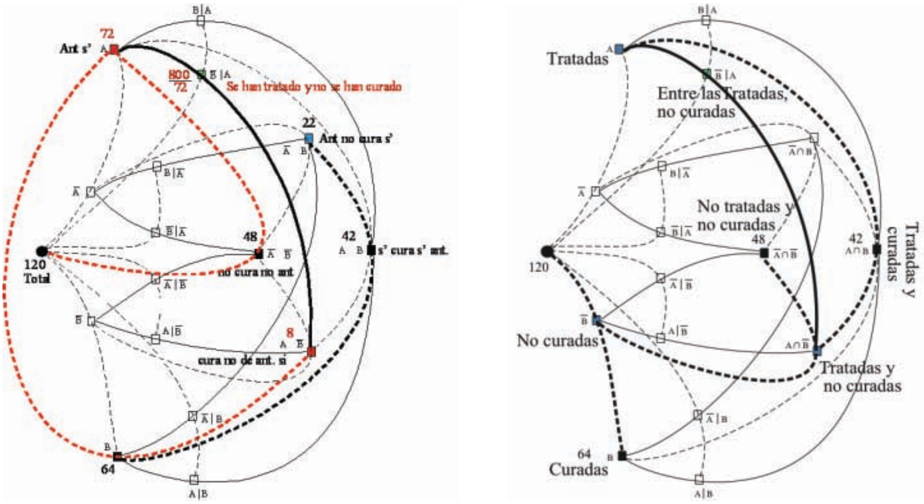


Figura 3. Grafo de la resolución de Ramón (izquierda) comparada con una resolución del mismo problema representada por el grafo mínimo (derecha).

La tabla siguiente resume la actuación de Ramón en términos de cantidades y relaciones entre cantidades usadas a lo largo de la resolución, determinando una ruta de resolución en el grafo.

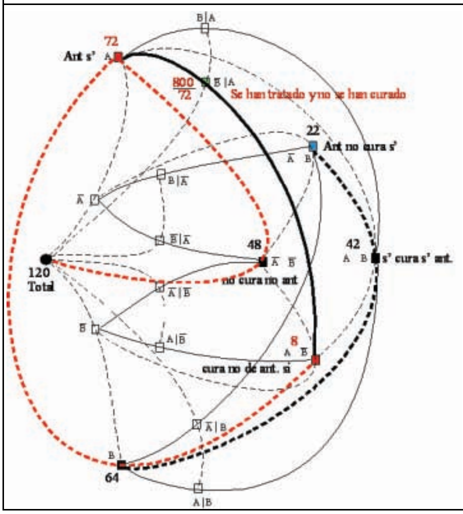
Grafo de la resolución de Ramón	Análisis de las cantidades y relaciones
	**Cantidades conocidas**: (120, total, f) (42, tratadas y curadas, f) (48, no tratadas y no curadas) (64, - , f) **Cantidad desconocida**: (800/72, se han tratado y no se han curado; %) **Cantidades intermedias**: (22, Ant. No cura sí, f) (72, Ant si, f) (8, cura no de ant. si, f) **Relaciones ternarias** Una relación aditiva correcta. Dos relaciones aditivas incorrectas. Una relación multiplicativa (de la definición de probabilidad condicional)

Tabla 2: Cantidades y relaciones entre cantidades en la resolución de Ramón.

CONCLUSIONES

El grafo trinomial del mundo de los problemas de probabilidad condicional diseñado por Cerdán y Huerta (2007) no sólo se ha revelado como una herramienta de gran utilidad en el estudio teórico de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el escenario 1, sino que también en el escenario 2. Lo que llamamos resolución escrita de un problema se muestra en un grafo tras un proceso de traducción y se encuentra a la disposición del investigador o del profesor para posteriores análisis. La traducción de una resolución al grafo permite sintetizar la información más relevante de la actuación del resolutor: el camino seguido, las cantidades intermedias obtenidas (no sólo en su dimensión numérica, sino también en cuanto a la descripción de sucesos se refiere), competencias mostradas y errores cometidos. Así, el uso de los grafos para investigar la resolución de estos problemas proporciona información de dos tipos: global, si lo que se pretende es comparar actuaciones de estudiantes por los grafos de las resoluciones o la de un estudiante en un conjunto de problemas; y local, si el análisis que se pretende corresponde a la actuación de un estudiante en un problema y para el que los elementos del grafo (vértices y aristas) se convierten en elementos básicos para dicho análisis.

Referencias

Carles, M.; Cerdán, F., Huerta, M. P.; Lonjedo, Mª A.; y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, 173-185. Santander: SEIEM.

Carles, M.; Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5,* 702-710.

Carles, M.; Huerta, M. P. (2007). El mundo de los problemas de probabilidad condicional en el contexto del test de diagnóstico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 249-260. Tenerife: SEIEM.

Cerdán, F.; Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.

Edo, P; Huerta, M. P: (2010). Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0. Comunicación presentada en el grupo de Probabilidad y Estadistica. Lleida: SEIEM. Edición en CD.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: Reidel.

Henry, M. (2005). Modélitation en Probabilités conditionnelles. In M. Henry (Ed.) *Autour de la modelisation en probabilités*. IREM de Franche-Comté, (6) 173 - 185.

Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research —Structures and Context, en M. Borovcnik & R. Kapadia (2009), Special issue on "Research and Developments in Probability Education". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), 163-194.

Jones, G. A.; Langrall, C. W.; Mooney, E. S. (2007). Research in Probability (Responding to Classroom Realities). En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on mathematic teaching and learning*, 909-956. NCTM.

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. En G. A. Golding & C. E. McClintock (Ed.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, 1-22. ERIC

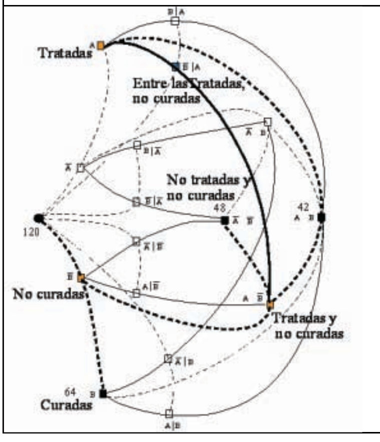
Lonjedo, M. A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis Doctoral. Universitat de València.

Watson, J. M.; Kelly, B. A. (2007). The development of conditional probability reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38:2, 213-235.

ANEXO I: GRAFO MÍNIMO DEL PROBLEMA.

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Se han curado un total de 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Familia: N_0 C_1 T_1, descrito por los datos conocidos: $p(B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(A \cap B)$ y la probabilidad preguntada $p(\overline{B} | A)$. El contexto en el que se formula el problema: estadístico salud (situación causalista).

Grafo mínimo	Análisis de las cantidades y relaciones
	**Cantidades conocidas**: (64, curadas, f) (42, tratadas y curadas, f) (48, no tratadas y no curadas) **Cantidad desconocida**: (x, entre las Tratadas no curadas; %) **Cantidades intermedias**: (y, Tratadas, f) (z, No curadas, f) (t, Tratadas y no curadas) **Relaciones ternarias**: Tres relaciones aditivas (una de complementariedad) y una relación multiplicativa (de la definición de probabilidad condicional).

ANEXO II: RESOLUCIONES ESCRITAS DE RAMÓN Y VÍCTOR DEL MISMO PROBLEMA.