UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Departamento de Didáctica y Organización Escolar

DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DEL LENGUAJE ALGEBRAICO: DEL SÍMBOLO A LA FORMALIZACIÓN ALGEBRAICA: APLICACIÓN A LA PRÁCTICA DOCENTE

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Ana María Esquinas Sancho

Bajo la dirección del doctor
Félix E. González Jiménez

Madrid, 2009

- **ISBN: 978-84-692-1068-0**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA Y ORGANIZACIÓN ESCOLAR

DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DEL LENGUAJE ALGEBRAICO: DEL SÍMBOLO A LA FORMALIZACIÓN ALGEBRAICA. APLICACIÓN A LA PRÁCTICA DOCENTE.

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

Director: Félix E. González Jiménez

Ana Mª Esquinas Sancho

Junio de 2008

El presente trabajo de investigación ha sido el fruto de la labor de varios años de práctica docente y de la observación de los comportamientos de los alumnos ante ciertas situaciones educativas. Pero sobre todo es el resultado de una antigua necesidad de reflexión profunda acerca del álgebra y su didáctica. Por ello no puedo más que agradecer:

Al profesor Félix E. González, por su sabiduría y su enorme paciencia, sin cuyos consejos este trabajo no habría siquiera comenzado y mucho menos llegado a buen término.

A todos aquellos que con sus ideas y aportaciones han contribuido a la elaboración de esta tesis, especialmente a Demetrio Esquinas, Sergio Fernández, Rafael Ropero, Mª Ángeles Díez, Belén Delabat y Mercedes Fernández, su ayuda ha sido crucial tanto en los inicios de la investigación como en la corrección de la misma.

A mis compañeros y alumnos del Colegio Pureza de María, donde realizo mi labor educativa. Ellos han proporcionado la inspiración necesaria para este trabajo, así como el material para la investigación. Gracias a las religiosas, que me dieron todas las facilidades para que el trabajo de campo se llevase a cabo.

A mi familia y amigos, por sus continuos ánimos y su apoyo incondicional a lo largo del tiempo que se ha extendido este trabajo. A Sergio, que ha padecido mi ausencia en tantos momentos.

Finalmente, a todos mis profesores de matemáticas, especialmente a mi padre, que hicieron de mí una apasionada de la didáctica de esta ciencia.

A Sergio, por su paciencia y su enorme cariño.

A mis padres y a Jav, mi familia.

Índice general

I. Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico 1

1. Justificación 3

2. La comunicación en la educación matemática 5

2.1. Una aproximación al concepto de conocimiento 5

2.2. La didáctica como proceso de comunicación 9

2.3. Importancia de la matemática 14

2.3.1. Evolución del pensamiento matemático a lo largo de la historia 14

2.3.2. La matemática en la sociedad 24

2.4. La didáctica de las matemáticas 27

2.4.1. Situación general 27

2.4.2. Investigaciones recientes 35

a) Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria (2000) 35

b) Evaluación de la Educación Primaria (2003) 39

c) Estudio PISA 2003 42

2.4.3. Didáctica en educación matemática: Las dificultades del conocimiento matemático 54

2.4.4. La comunicación entre el profesor y el alumno en la educación matemática 65

3. Aprendizaje del lenguaje algebraico 79

3.1. ¿Qué es el álgebra? 79

3.1.1. Evolución histórica del álgebra 82

3.1.2. Pensamiento aritmético y algebraico 89

3.1.3. Abstracción y generalización 93

3.2. El lenguaje algebraico 98
3.2.1. Signo y símbolo 100
3.2.2. El símbolo algebraico: semántica y sintaxis en el lenguaje algebraico . 111
3.2.3. El valor de las letras 122
3.3. Aprendizaje del álgebra 130
3.3.1. El niño antes del álgebra 131
3.3.2. Proceso de la psicogénesis del álgebra: paso de la aritmética al álgebra . 137
3.3.3. La construcción del símbolo algebraico 141
3.4. Dificultades de la enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico 147
3.4.1. Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico 148
3.4.2. Algunos errores concretos en la manipulación de símbolos algebraicos . 153
3.4.3. La didáctica del álgebra 158

II. Del símbolo a la formalización algebraica: una experiencia 167

4. Situación de la investigación 169

5. Planificación del trabajo de campo 173
5.1. Objetivos del trabajo de campo 174
5.2. Elaboración del cuestionario 176
5.2.1. Validación 176
5.2.2. Evaluación de los objetivos a través del cuestionario 177
5.2.3. Análisis del cuestionario por preguntas 177

6. Metodología de trabajo y análisis de resultados 203
6.1. Análisis de los resultados obtenidos en cada pregunta 205
6.2. Análisis global 258
6.2.1. Análisis de la corrección 258
6.2.2. Análisis de la formalización 282
6.2.3. Análisis conjunto de la corrección y la formalización 304
a) Comparación de la corrección y la formalización 304
b) Estudio estadístico de la relación entre la corrección y la formalización 308

c) Pruebas de independencia y homogeneidad de la corrección y la formalización . . . 315
6.2.4. Comparación con los resultados académicos . . . 320
a) Comparación de los resultados académicos con la corrección . . . 323
b) Pruebas de independencia y homogeneidad de la calificación y la corrección . . . 331
c) Comparación de los resultados académicos con la formalización . . . 333
d) Pruebas de independencia y homogeneidad de la calificación y la formalización . . . 341
6.2.5. Comparación con el tipo de enunciado . . . 342
a) Estudio de la relación entre el tipo de enunciado y la corrección . . . 343
b) Estudio de la relación entre el tipo de enunciado y la formalización . 349

7. Conclusiones **355**
7.1. Conclusiones del análisis de los resultados obtenidos en cada pregunta . . . 355
7.1.1. Por preguntas . . . 355
7.1.2. Por objetivos . . . 359
7.2. Conclusiones del análisis global . . . 361
7.2.1. Conclusiones del análisis de la corrección y la formalización . . . 361
7.2.2. Conclusiones del análisis comparativo con los resultados académicos . 362
7.2.3. Conclusiones del análisis comparativo con el tipo de enunciado . . . 363
7.2.4. Conclusiones del análisis global por objetivos . . . 364
7.3. Conclusiones generales . . . 365

III. Aplicación a la práctica docente **371**

8. Propuestas para la aplicación al proceso de comunicación didáctica: la didáctica del lenguaje algebraico **373**

Bibliografía **381**

Anexos **401**

«La filosofía está escrita en este grandísimo libro abierto ante los ojos(...), el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática (...)». Galileo Galilei (El ensayador)

Parte I

Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico

1 Justificación

Mi preocupación por la didáctica y en concreto por la didáctica de las matemáticas surge de mi propia experiencia en la práctica docente. La necesidad de dar respuesta a los continuos obstáculos con los que mis alumnos se encuentran a lo largo del proceso de aprendizaje me ha impulsado a profundizar en los fundamentos de la didáctica y del conocimiento, en general, y, en particular, de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Más concretamente, en los niveles educativos en los que comencé mi labor docente, una de las dificultades más significativas es el aprendizaje del álgebra. El álgebra supone para los alumnos una herramienta nueva, tremendamente poderosa, que deben aprender a usar para continuar con su aprendizaje matemático, pero también un lenguaje novedoso y complejo, distinto a todos los conocidos hasta el momento, que deben llegar a dominar.

Esta doble función del álgebra, como herramienta y como lenguaje, a menudo crea un conflicto en los alumnos que, si no es oportunamente resuelto, puede degenerar en fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas. Bajo mi punto de vista, un adecuado tránsito de la aritmética al álgebra serviría para salvar este escollo o, al menos, minimizarlo.

La delimitación y aclaración de conceptos del lenguaje algebraico, como símbolo y signo, semántica y sintaxis, serán fundamentales para realizar un análisis exhaustivo de los procesos de formalización que debe realizar el estudiante de matemáticas en esta etapa.

El análisis de las dificultades específicas con las que el alumno se encuentra, así como los errores más frecuentes en las primeras experiencias con el álgebra, pueden orientarnos acerca de la problemática de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la actualidad.

Considero que el papel del profesor es crucial en todo aprendizaje y que, desde un punto de vista epistemológico, la didáctica del álgebra debe ser revisada para poder ayudar al alumno en su construcción significativa y permitirle un adecuado desarrollo posterior del aprendizaje de la matemática abstracta.

2 La comunicación en la educación matemática

En este primer capítulo, emprendo una aproximación epistemológica a conceptos básicos para esta investigación, como son el conocimiento y la didáctica, a la que seguirá una delimitación de las matemáticas, para, finalmente, establecer las bases de la didáctica de las matemáticas como proceso de comunicación educativa.

2.1. Una aproximación al concepto de conocimiento

Las múltiples acepciones que de la palabra conocimiento nos presenta el Diccionario de la Lengua Española dan una idea de la complejidad de dicho concepto. La primera de ellas nos habla del conocimiento como *acción y efecto de conocer*. También se define como *entendimiento, inteligencia o razón natural*. Otra definición lo relaciona con el estado de conciencia, como sigue, *cada una de las facultades sensoriales del hombre en la medida en que están activas*. Además, si su uso se realiza en plural, su significado es *noción, ciencia, sabiduría*.

Todas estas acepciones aluden a distintos aspectos de un mismo hecho:

La última acepción presenta el conocimiento como el conjunto de ideas, de aprendizajes, de resultados que adquirimos en el acto de conocer y que acumulamos de cierta manera como experiencia vital, es decir, el conocimiento como efecto.

Cuando hablamos de facultades sensoriales activas nos referimos a un estado mental que nos hace conscientes de lo que ocurre en nuestro entorno y, de una forma limitada, también en nuestro interior. Estamos refiriéndonos a un momento particular de la acción de conocer.

Entendimiento, inteligencia, razón... son distintos nombres que recibe la propia facultad de conocer, es decir, de nuevo el conocimiento en acción.

Por lo tanto todas las acepciones encontradas pueden resumirse en la primera: acción y efecto de conocer.

En el Diccionario Enciclopédico Larousse encontramos, además, el siguiente significado: *sentido, cada una de las aptitudes que tiene el alma de percibir, por medio de determinados órganos corporales, las impresiones de los objetos externos*. Se refiere a la capacidad de relación del ser humano con el medio, es decir, la acción de conocer.

La noción de acción sugiere la idea de que el conocimiento es un proceso dinámico esencial del ser humano, por el cuál se relaciona con el medio y es capaz de subsistir en él, tomando decisiones motivadas por su uso de la razón. Este proceso es inacabado e inacabable. Se refiere, pues, a la naturaleza evolutiva del conocimiento que luego estudiaremos con mayor detenimiento.

Por otro lado, la noción de efecto evoca el acopio de los productos de dicho proceso, es decir, el conjunto de aprendizajes que como resultado de la acción de conocer quedan, de alguna manera, registrados en nuestra mente. No se trata de un conjunto estanco y definitivo, sino en constante evolución por la propia acción de seguir conociendo.

De esta forma el conocimiento toma un carácter de revisión y acomodación continua de lo ya conocido a lo nuevo que se conoce, que además nos induce a seguir conociendo. Podríamos haber dicho, entonces, que el conocimiento es efecto y acción, pues es el conocimiento que ya poseemos el que provoca cada nueva acción de conocer. Es éste un proceso dialéctico, de equilibrios y desequilibrios, de necesidades vitales cuya satisfacción misma genera una nueva necesidad y cuyo producto es, en definitiva, el aprendizaje.

Según las palabras de A. Orton (1990)

> *«el aprendizaje es una actividad mental. Por esa razón, tendremos una mayor comprensión de éste si sabemos más sobre el funcionamiento del cerebro como procesador de información».*

La función cerebral excede a la de un mero *procesador de información* si la entendemos desde el mismo punto de vista dialéctico con el que hemos analizado el conocimiento.

Como es sabido la organización y el funcionamiento del sistema nervioso humano, constituido por el sistema nervioso central -médula espinal y cerebro- y el sistema nervioso periférico -nervios que conectan el sistema central con el resto de órganos-, se basa en ciertos procesos físicos y químicos. En ellos los estímulos recibidos, tanto del medio externo como del interno, son convertidos en impulsos nerviosos y transmitidos a través de las neuronas en este estado de corriente eléctrica, unidireccional, de las dendritas al axón.

La transmisión interneuronal de dicho impulso se realiza mediante la sinapsis, desde el axón de una neurona a las dendritas de la otra. Dicha transmisión no implica contacto físico, sino la liberación de ciertas sustancias llamadas neurotransmisores, que provocan los procesos químicos necesarios para el paso del impulso nervioso a través del espacio intersináptico.

Toda esta información llega al córtex cerebral, donde podemos afirmar que tienen lugar las funciones superiores del ser humano. Es este órgano el responsable de procesos tan complejos, y aún poco conocidos, como la conciencia y la decisión. Pero el funcionamiento del córtex cerebral no es diferente al descrito anteriormente, pues está formado por miles de millones de neuronas cuyo funcionamiento es conocido. Con esta explicación los procesos cerebrales no son algo distinto de las funciones que hemos llamado superiores, por diferenciar al ser humano del resto de los animales (Searle, 2000).

Los procesos neuronales implican un constante cambio en la estructura de la propia neurona. Podemos afirmar que esta transformación regenera la neurona de forma continua, por lo que podríamos denominar a este hecho *neurogénesis*. El conocimiento -efecto y acción- es, en estos términos, *neurogénesis,* y esta afirmación, por sí misma, trasciende la función de *procesador de información* que sugería Orton para el cerebro.

Sobre el funcionamiento cerebral quedan aún muchos interrogantes y los continuos avances que se van haciendo en el terreno neurológico son cruciales para explicar el conocimiento (Eccles, 1992). Pero esta visión general, soportada en la *neurogénesis,* resulta suficiente para explicar el conocimiento de una manera útil para el estudio de los procedimientos y procesos educativos, ya que permite definir el aprendizaje como producto y acción del conocimiento en este doble sentido definido y, por lo tanto, analizar las acciones que favorecen el mismo por parte del alumno, lo cual representa la principal motivación de este trabajo.

Este enfoque del conocimiento responde a una explicación constructivista, ya que según esta teoría el conocimiento no es algo inmutable y objetivo sino construido por cada ser humano a partir de su experiencia de la realidad, lo que requiere la interacción del individuo con el medio y la existencia de unos procesos mentales que posibiliten esta construcción continua.

Las teorías de J. Piaget acerca de la construcción del conocimiento en el niño nos muestran un método psicogenético basado en la asimilación y en la acomodación, esto es, el conocimiento se construye progresivamente mediante acciones adaptativas. El niño presenta una clara carencia en su relación con un medio que no cesa de ampliarse y ésto le impulsa a interaccionar con él para procurar su supervivencia. La búsqueda del equilibrio entre su asimilación de la realidad y su acomodación al medio externo desatan un desarrollo evolutivo continuo. De este modo, el cambio producido en cada nueva acción de conocer produce un efecto que nos lleva a otra acción, en el proceso inagotable del conocimiento.

Así entendido, el conocimiento no puede ser separado de la idea de evolución, como hemos citado más arriba. En palabras de H. Poincaré (1964)

> «(somos) *el fruto de una larga experiencia personal y de la experiencia de la razón, más larga todavía*».

Poincaré habla de experiencia en el mismo sentido evolutivo que se ha dado a la noción de conocimiento. Pero no sólo de la evolución personal del ser humano desde su nacimiento, sino también de la evolución histórica del ser humano como parte de la naturaleza. Esta idea de evolución del conocimiento excede al constructivismo, pues propone un único principio para la razón entendida desde un punto de vista global. Bajo esta perspectiva es evidente que el desarrollo de todo conocimiento está acotado por los límites de la razón, es decir que el mecanismo cerebral define las posibilidades de construcción del conocimiento.

Es nuestra propia razón, individual y particularizada por la experiencia de cada uno, la que posibilita y delimita nuestra interacción con el medio. Russell (1968) afirma que gran parte de lo que percibimos está basado en experiencias pasadas. En este punto enlaza con la teoría kantiana en la que se pone las bases de la teoría del conocimiento, englobando el racionalismo y el empirismo, aceptando la experiencia como límite dentro del cuál puede conocer la razón.

Definir la naturaleza de esta delimitación de la razón resulta muy controvertido. Los constructivistas, como Piaget, la aceptan como exclusivamente funcional y no estructural. Aunque Piaget (1987) reconoce un origen biológico para esta delimitación en la autorregulación, no admite que sea innata, sino resultado de las construcciones en una etapa prelingüística del niño. Otros expertos, como N. Chomsky (1983), apuntan a una estructura innata en el córtex cerebral para ciertas capacidades, como el lenguaje, admitiendo, sin embargo, que el escaso desarrollo de las teorías evolutivas que explican el origen de los órganos del cuerpo humano relegan la afirmación a la categoría de hipótesis.

Según lo expuesto anteriormente, no podemos convenir con Piaget que esta delimitación sea exclusivamente funcional puesto que se ha afirmado un único principio para la razón. Pero tampoco podemos aceptar que las ideas existan predeterminadas en la mente del ser humano al nacer, pues la razón es necesariamente única y distinta en cada sujeto. Aunque se haya definido la razón como el instrumento general del conocimiento no debemos olvidar que, debido al doble sentido del conocimiento- efecto y acción-, la razón se va modificando en cada ser humano dependiendo de los nuevos conocimientos aprendidos, por lo cual es subjetiva y diferente para cada uno. En palabras de C. G. Jung (citado en Rubia, 2000)

> *«lo que se hereda es la estructura que predispone a la idea, no la idea en sí».*

Se propone la existencia de una pauta evolutiva, que en adelante denominaremos *lógica*, responsable de la *recreación* singular desde la razón y a la que el conocimiento sigue y seguirá siendo fiel.

Si entendemos que lo que se educa del ser humano es su razón, esto nos obliga a hacerlo conforme a la *lógica.* La didáctica se perfila como

> *«una actitud, una forma de hacer que proyecta desde su singularidad el impulso necesario para poner en ejercicio otras formas de hacer diferentes pero armonizadas por el carácter lógico común que les es inherente»* (González, 1990).

2.2. La didáctica como proceso de comunicación

En el apartado anterior se han utilizado algunos conceptos que es necesario dilucidar con detenimiento. Comenzaremos por el término aprendizaje.

Al igual que el conocimiento, tiene una doble acepción: acción y efecto de aprender. Si entendemos por aprender la acción de adquirir conocimiento, el aprendizaje será, tanto la acción como el efecto de adquirir conocimiento. Es decir, aceptaremos como significado de aprendizaje el efecto del conocimiento y la propia acción de conocer.

Entendido de este modo el aprendizaje es un proceso dialéctico en el que se parte de lo que conocemos para conocer más. Esta afirmación enlaza con la idea hegeliana de que el conocimiento es dialéctica, que vino a concluir las aportaciones de Piaget o Russell acerca de cómo se construye o cómo funciona el conocimiento.

Pero, ¿qué diferencia existe entonces entre hablar de conocer y de aprender? Pues según la definición ofrecida de conocimiento, ninguna. Conocer es la acción de la razón para averiguar y adaptarse a las cualidades y relaciones del medio y aprender, es decir, adquirir conocimiento, no es algo pasivo, sino que implica el ejercicio la razón para lo mismo.

El énfasis que el conductismo ha imprimido al concepto de aprendizaje como respuesta pasiva y automática a ciertos estímulos externos ha quedado obsoleto por el hecho de aceptar el conocimiento como algo que el individuo construye de forma continua. Desde esta perspectiva el aprendizaje es conocimiento.

La teoría constructivista, en la que se enmarca esta afirmación, tiene dos vertientes diferenciadas y, en cierto modo, complementarias. La corriente social, defendida por Vigotsky, antepone la influencia del medio social al desarrollo cognitivo, mientras que la psicogenética de Piaget se centra en la psicología del aprendizaje, dando una importancia física al medio, más que social. La primera afirma que el conocimiento es construido en dos pasos: primero en el plano social y, después, interiorizado por cada uno. La segunda afirma que es el propio individuo quien construye su conocimiento, en interacción continua con el medio, desde su propia singularidad cognitiva.

Dentro de la corriente antropológica encontramos la siguiente definición de aprendizaje cultural de Bishop, citada por Llinares y Sánchez (1994):

> *« (es) un proceso creativo e interactivo que enlaza a aquellos que viven en la cultura con los que nacen en ella, lo que implica ideas, normas y valores que son similares de generación en generación, pero que inevitablemente deben ser distintas en algún modo debido al papel de recreación de cada generación».*

Queda patente la importancia social de la que habla Vigotsky en el proceso creativo del aprendizaje, ya que está enmarcado en la cultura y en la perpetuación de la misma. Pero, en cierto modo, la definición deja abierta también la puerta a la singularidad de dicha creación del individuo en interacción con el medio pues, si sustituimos *generación* por *individuo*, *inevitablemente deben ser distintas debido al papel de recreación de cada individuo*.

De esta manera destacamos ambos aspectos para unirlos en una sola afirmación: todo aprendizaje es producto de una enseñanza. Ya sea del medio social o del medio físico, en uno o varios pasos. En efecto, podemos asegurar que todo aprendizaje proviene de una enseñanza si entendemos esta última en un sentido más amplio que el tradicional, es decir, no siempre debe provenir de una persona que actúe con intención, sino del mismo medio con el que el hombre interactúa de forma continua.

Cuando esta enseñanza se torna un arte -no es algo que surge involuntariamente del medio, sino que va acompañado de una disposición personal consciente de comunicación- se denomina didáctica.

Según Brousseau (1983), citado en Bujanda et al. (1991):

> *«La didáctica es el estudio de los fenómenos de la enseñanza que son específicos del conocimiento enseñado sin ser reductibles al dominio del saber al que pertenecen».*

Comparto esta definición, entendiendo la enseñanza como comunicación consciente. Pues se ha afirmado, con anterioridad, que la enseñanza puede provenir del propio medio físico o social y no llevar asociada una didáctica. Por otra parte, se destaca en esta definición la trascendencia que la enseñanza de una materia tiene sobre la propia materia en cuestión, sin embargo, cualquier proceso de comunicación en una materia debería ser admitido como parte de dicha materia. La didáctica no es sino la manera en que comunicamos el conocimiento para que otro lo haga suyo. La separación del estudio de lo que se supone esencial a una materia y la forma de comunicarla puede hacer mucho daño al desarrollo de la investigación educativa, como veremos que ha ocurrido en el caso de las matemáticas.

Urge una especificación de los elementos de la comunicación educativa para realizar una aproximación a la didáctica. Por una parte se encuentran el profesor y el alumno, pero no son los únicos elementos de esta comunicación. El conocimiento que se desea comunicar en dicho proceso es también un elemento de dicha comunicación, como muchas otras circunstancias externas de las que no nos ocuparemos por ahora, como el lugar, los recursos materiales, etc...

Desde Rousseau, la educación ha tomado un carisma claramente paidocéntrico, concediendo una creciente importancia a la psicología infantil y a las emociones del niño. En este sentido, afirma que la educación debe buscar el interés natural del niño, consignando que cada nuevo conocimiento adquirido sea un acto creador para que la educación provenga del propio interior del educando. El punto débil de esta teoría es que minimiza la labor del educador, sobrestimando el papel de la naturaleza como suficiente para la educación de todos los aspectos necesarios.

La definición de didáctica de González (1990), citada anteriormente, es más abierta. Comienza enunciándola como una actitud del educador, lo que implica la anteposición de la relación personal sobre el propio hecho del conocimiento y devuelve su importancia al profesor, destacando su disposición para la comunicación y su compromiso con el alumno. A través de su propia forma de hacer, de sus hechos compartidos con el alumno, es capaz de impulsar la acción del propio alumno para construir su conocimiento.

De esta forma la didáctica se convierte en una acción conjunta del profesor con el alumno, que ofrecen en la relación educativa lo que cada uno de ellos es, dejando que el otro sea. Significa esto que tanto el profesor como el alumno, comparten su propia manera de hacer, de ver las cosas, su forma de ser, respetando la diferencia del otro, su libertad y su singularidad. La posición del profesor no es de poder, sino que está soportada por la autoridad que le confiere el conocimiento de forma natural y que el alumno debe valorar por sí mismo, sin verse obligado, ni forzado a ello.

Respecto al papel del profesor, la teoría de situaciones concentra su importancia en dos únicos momentos: la *devolución* y la *institucionalización*. Esto ha sido definido por el propio Brousseau de la siguiente manera:

> *«(...) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a-didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status».*

La situación llamada a-didáctica por Brousseau, cuya creación es responsabilidad exclusiva del profesor, es definida como aquella en la que el conocimiento que quiere aprenderse se apunta como necesario para la resolución, de manera que el alumno pueda ensayar una solución, juzgando por sí mismo los resultados de su acción y rectificando, si es necesario. De esta manera, destacando la importancia de la "no intervención" del docente, se asegura que el alumno establece por sí mismo relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene y pueda construir su propio conocimiento. Sin embargo, en la institucionalización el profesor señala lo que los alumnos deben retener al final del proceso, relacionando los procedimientos propios del alumno con el conocimiento institucionalizado, añadiendo las relaciones e implicaciones que el alumno no ha podido encontrar por sí mismo.

Esta posición está lejos de la definida por Kamii y De Vries (1983) que señalan que el educador debe ser investigador permanente junto al niño, no sólo proporcionando las situaciones necesarias para suscitar sus acciones sino acompañándole en los caminos del descubrimiento, ofreciendo las preguntas y respuestas necesarias en cada momento.

La excesiva delimitación de los momentos de intervención puede sesgar la naturalidad del aprendizaje o, al menos, retardarlo pues sólo el profesor, que acompaña al alumno en este proceso, puede juzgar su necesidad y decidir el instante preciso de cada acción.

Mialaret (1984) lo expresa con estas palabras, siguiendo los consejos de Montaigne,

> *«según su estado de ánimo, comienza por orientarle, hacerle tomar el gusto de las cosas, elegirlas y discernir; a veces abriéndole camino; otras, dejándole*

> *abrirlo. No quiero que él invente y hable solo; quiero que escuche a su discípulo hablar a su lado... Es conveniente que le haga caminar ante él para juzgar su marcha y juzgar hasta que punto él se debe contener para adaptarse a su ritmo».*

La importancia de la actitud del propio educador, sus acciones y su responsabilidad, corren el riesgo de ser relegadas por la *urgencia de transferir parte de la responsabilidad del proceso didáctico hacia el alumno* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Es evidente que la responsabilidad en la didáctica debe ser compartida, como ya se ha señalado, pero esta implicación del alumno no puede hacerse sino desde el propio compromiso del educador, que aprovecha el impulso natural al conocimiento del alumno, generado por sus propias necesidades.

Sólo desde este compromiso afectivo puede el maestro acompañar al alumno en su construcción -provocando en él la sed de conocimientos y ayudándole a satisfacerla- y favorecer así su crecimiento personal de acuerdo a unas formas de vida que están en sintonía con el carácter *lógico* de la evolución, verdadero objetivo de la actividad educativa.

Podemos afirmar que la didáctica es un proceso de comunicación educativa que debe ir dirigido a educar *la raíz desde la que la conducta se forja* (González, 2001), es decir, la razón, y debe hacerlo conforme a la *lógica* de la evolución.

Únicamente como continuación del proceso de conocimiento que se inició con el nacimiento del niño y su evolución en el ambiente familiar debe la escuela asumir la misión educativa que la sociedad le encomienda. Y esta continuación debe ser uniforme, sin saltos cualitativos que rompan el desarrollo iniciado naturalmente. Por ello el afecto será fundamental en la comunicación educativa, como lo es en los primeros momentos de la vida familiar del niño.

Según la definición de conocimiento dada, el conocimiento es la razón en ejercicio provocado por la interacción con el medio y esta interacción en el recién nacido se limita a la afectividad, pues no posee otros conocimientos que favorezcan otro tipo de acciones. Por ello podemos afirmar que la primera forma de conocimiento del niño es el afecto.

Será desde la relación afectiva entre el profesor y el alumno, generada por las necesidades de uno y otro en la comunicación del conocimiento, que luego analizaremos, como se hará posible el aprendizaje.

2.3. Importancia de la matemática

Hemos analizado el papel del profesor y del alumno, elementos ambos de la comunicación educativa, pero es necesario, además, analizar el conocimiento particular que se desea comunicar, en este caso, las matemáticas. Comenzaremos realizando un repaso histórico de las peculiaridades del pensamiento matemático para terminar con un análisis de la situación actual de esta ciencia y su importante papel en la sociedad.

2.3.1. Evolución del pensamiento matemático a lo largo de la historia

Desde que el hombre desarrolló la inteligencia, capacidad que le distingue del resto de animales, la comprensión de la realidad ha sido la primera preocupación de los sabios de todos los tiempos. Como ya se ha dicho, la propia existencia del hombre en el medio es la que provoca la necesidad de adaptación al mismo para lo cuál se hace necesaria la asimilación de la realidad exterior. A este respecto, afirma Poincaré (1964) que

> «*no solamente la ciencia no nos puede hacer conocer la naturaleza de las cosas, sino que nada es capaz de hacérnosla conocer*».

Entendamos estas palabras no en un sentido completamente escéptico sino en cuanto a que es la razón el instrumento de que el hombre dispone para el ejercicio del conocimiento y por ello toda comprensión de la realidad debe realizarse a través de ésta, con sus limitaciones. Así pues, debemos aceptar los límites de la razón como propios de nuestro conocimiento y, por descontado, de la ciencia. Estos límites nos impiden saber cómo son las cosas realmente y restringen nuestro conocimiento de ellas a un punto de vista subjetivo, desde la razón singular de cada uno.

De esta inseguridad en su relación con la naturaleza surge en el hombre el deseo de objetivación de los pequeños conocimientos que va construyendo por su interacción con ella. Se precisa de un instrumento potente, claro y riguroso que nos permita el estudio y la interpretación de los hechos naturales, sin ambigüedades. El nacimiento de la matemática tiene mucho que ver con esta necesidad. La matemática es el lenguaje que nos ayuda a describir los procesos naturales, ya que el lenguaje común es insuficiente para una comunicación objetiva de las características del medio. Russell (1988) lo afirma de la siguiente manera:

> *«el lenguaje corriente no dispone de palabras capaces de expresar de un modo natural exactamente lo que deseamos expresar (...) la gramática y la sintaxis corrientes son extraordinariamente engañosas».*

El lenguaje matemático nos permite, no sólo comunicar, sino también analizar e incluso predecir fenómenos basándonos en las leyes naturales. Pero la matemática no es sólo un lenguaje, su carácter ha ido evolucionando a lo largo de la historia desde una concepción exclusivamente utilitarista, al servicio de otras disciplinas, hasta una condición filosófica, en la que se sistematiza como objeto de estudio en sí misma. Efectivamente, en sus comienzos la matemática surge como necesidad para el progreso de la técnica y, como consecuencia, de la sociedad. Veremos, a continuación, cuál ha sido su desarrollo y su implicación en la sociedad desde un punto de vista histórico. Con ello no se pretende hacer una sistematización de la historia de la matemática, ni siquiera un recorrido general por toda ella. El objetivo de este apartado es el de presentar los momentos más representativos de la evolución del pensamiento matemático y el análisis de los saltos más destacables que encontramos, todo ello desde una perspectiva epistemológica para comprender el valor de esta ciencia y su importancia en la educación.

Comenzaremos definiendo la prehistoria matemática como el amplio periodo anterior a la matemática griega. Aunque la tradición eurocéntrica nos habla de que las matemáticas prehelénicas son indignas de comparación con las obras maestras griegas (Kline, 1974) se han descubierto documentos que nos ilustran los largos periodos egipcio y mesopotámico mostrándonos unas matemáticas bastante desarrolladas, aunque exclusivamente prácticas, al servicio de la técnica. La razón de esta desconsideración histórica ha sido, precisamente, la falta de resultados generales y la ausencia de demostración en sus enunciados, lo cuál es innegable, pero no es menos cierto que esta evaluación se realiza desde un prisma deformado por la matemática moderna occidental que nos impide valorar la tradición de las corrientes orientales, mucho más intuitivas en sus resultados y pruebas. Podemos afirmar que la habilidad para el cálculo, la aplicación de los resultados obtenidos en multitud de problemas diferentes y la comprobación de la corrección de las soluciones mediante procedimientos operativos que encontramos en papiros egipcios y tablillas de arcilla babilónicas, como los papiros de Ahmes y Moscú o las tablillas de Plimptom y Susa, proporcionan una muestra de unas matemáticas fecundas (Joseph, 1991), aunque pertenecientes a una prehistoria matemática pues su desarrollo se haya íntimamente ligado a las necesidades técnicas de la sociedad.

La matemática griega hunde sus raíces en los conocimientos desarrollados en estos dos periodos, que se pueden reconocer en muchos de sus métodos de resolución de problemas. Pero la gran novedad que aportan los griegos es la preocupación por las propiedades intrínsecas de los objetos, en sí mismas, y no de forma instrumental, como había ocurrido hasta ese momento. Esto se debe al cambio, del mito al *logos*, que experimentan las creencias tras la gran crisis social de los siglos IX al VII a.C. La colonización griega de las costas mediterráneas supuso una serie de cambios de orden social y económico que generaron una sociedad alejada de la realidad concreta por considerarla más propia de esclavos que de sabios y propiciaron la aparición de una corriente de pensamiento que rompió los esquemas y creencias establecidos en favor de una inexorable búsqueda de la verdad. El paso del mito al *logos* significó el abandono de las explicaciones mitológicas.

Aunque esto no ocurrió de una vez por todas, a pesar del triunfo de la razón, la debilidad se siguió manifestando -aún lo hace- a través del dogmatismo. Aunque *logos* significa lenguaje, la traducción más acertada para el significado que toma en este ámbito es el de *razón*, haciendo honor a la dialéctica socrática: el razonamiento mediante el lenguaje. Este hecho da lugar al nacimiento de la filosofía y con ella a la búsqueda de explicaciones racionales.

En cuanto a la matemática, tanto la corriente de Tales -fundamentalmente geométrica- como la posterior de la escuela pitagórica *-todo es número-* experimentan la necesidad de demostrar, aún de modo exclusivamente visual, las propiedades encontradas. Estas propiedades resultan excesivamente simples si se comparan con los conocimientos de los egipcios o los mesopotámicos, lo que constituyó un pequeño retroceso práctico. El desprecio por la funcionalidad de las matemáticas en favor de la ontología de los objetos obstaculizó el impulso de la aritmética, el buen manejo de las ecuaciones y las colecciones de problemas.

El gran salto va a producirse, en el siglo V, con el descubrimiento de los inconmensurables. La existencia de ciertos segmentos, como la diagonal de un cuadrado y su lado, para los cuales se hacía imposible encontrar una medida común por el método de la *antiphairesis* -hallando la mayor medida común de ambos segmentos, lo que hoy llamaríamos máximo común divisor- desestabilizó los principios más elementales de la matemática griega. La aritmética pitagórica, cuya teoría de la extensión geométrica afirmaba que todo segmento es *aritmetizable*, se sumió en una grave crisis.

Este hecho puso en entredicho la veracidad de las propiedades visualmente comprobadas y favoreció el desarrollo de un nuevo método de demostración, el axiomático-deductivo, independiente de los objetos mismos, que basa su certeza en sucesiones de razonamientos lógicamente válidos desarrollados a partir de axiomas, de los que asumimos su evidencia (Martínez, 1991).

Se sitúa el comienzo de la historia matemática a partir de que ésta se constituye en objeto de estudio como una empresa intelectual y no sólo como una herramienta práctica. Es decir, consideramos la aparición de la matemática de la mano de la filosofía.

Ya se ha dicho que la necesidad de encontrar verdades inmutables llevó a los griegos al estudio de los entes matemáticos. Para ellos las nociones matemáticas, números y figuras, son puramente abstractas, en el sentido de las ideas platónicas. A partir de este momento la matemática se presenta como la verdad absoluta, y sus objetos de estudio están claramente diferenciados de los hechos naturales debido a la dualidad mundo sensible-mundo inteligible que encontramos en esta etapa del saber. El proceder de la razón cobra, con los griegos, una predominancia desconocida hasta entonces: la abstracción, la generalización, el análisis y la síntesis comienzan a ser conceptos necesarios en lo que al conocimiento se refiere. Piaget encontrará cierto paralelismo entre este salto en la evolución histórica del conocimiento y la psicogénesis del conocimiento en el individuo, como analizaremos en su momento.

Tras el fin de la etapa griega clásica, donde Atenas había sido el centro cultural por excelencia -véanse la Academia de Platón y el Liceo de Aristóteles-, comienza una nueva, llamada helenística o alejandrina debido a que la muerte de Alejandro Magno y la disgregación de su imperio marcan la separación entre ambos periodos. Como su propio nombre indica la nueva época estará marcada por el esplendor de la ciudad de Alejandría, que se convierte en centro neurálgico del saber.

Euclides representa, en este periodo, el más claro ejemplo de la llamada edad de oro de la matemática griega. Sus *Elementos* muestran un bello recorrido por la geometría aderezado con las cualidades, tan cultivadas en esta época, de rigor, armonía, simplicidad y belleza. La matemática ha trascendido su etapa técnica y se presenta como una expresión del pensamiento. Pero va a ser este mismo hecho el que lleve implícita la infecundidad de la matemática griega como ciencia. La falta de utilidad práctica, que promueve el mismo ideal de perfección de las ideas platónicas, obliga al griego a limitarse al estudio de los entes matemáticos más simples y de relaciones ideales entre ellos, sin entrar en la dinámica de una ciencia en desarrollo que, como apunta P. Germain (1976),

> *«está sometida a las mismas leyes de la vida. Y la vida (...) tantea, busca, avanza y retrocede antes de encontrar su camino y de dar un nuevo paso adelante».*

La matemática necesita de este dinamismo para convertirse en una ciencia prolífica. Como ciencia del pensamiento que es, tan sólo la continua actividad mental puede engendrar nuevos razonamientos y esta actividad no es unidireccional, si no estaríamos restringiendo la matemática a un simple mecanismo lógico en el que la intuición no tendría nada que aportar.

Como única excepción a esta falta de agilidad y eficacia científica se encuentran ciertas aportaciones de Arquímedes acerca del área y el volumen, las cuales manifiestan una modernidad impropia de la época aproximándose incluso al cálculo infinitesimal. A pesar de que él mismo considera sus métodos imperfectos por no responder a los ideales de demostración griegos, presenta un carácter más cercano al mundo real, aunque habrá que esperar al Renacimiento para que la matemática tome contacto definitivo con la realidad y sea aplicada al estudio de la misma, con el consiguiente avance que supondrá en la ciencia moderna.

El salto cronológico que se va a realizar a continuación tiene una explicación sencilla: la decadencia de la cultura griega, aún con algunos exponentes importantes como Diofanto, cuyas matemáticas son consideradas poco ortodoxas por sus contemporáneos por limitarse al cálculo y a la resolución de problemas; el largo periodo oscuro de la matemática occidental, que abarcó el imperio romano y la alta edad media, en los cuales el interés por las ciencias era más bien escaso; y el carácter excesivamente práctico de las matemáticas alternativas a la europea, de la que destacamos la hindú y la árabe, en la que se hicieron logros importantes, como el sistema de numeración decimal posicional y un incipiente método algebraico, pero siempre con el objetivo puesto en la resolución de problemas concretos y con una incapacidad manifiesta para enfrentarse con los conceptos fundamentales (Boyer, 1992).

El conservadurismo impuesto por el escolasticismo europeo limitó el desarrollo científico. La libertad de pensamiento estaba mermada en favor de la fidelidad a los autores clásicos, recientemente conocidos a través de las traducciones de los textos árabes, que los recogieron, al latín. Se estudiaron sus obras concienzudamente y se sometieron a minuciosa prueba todas las interpretaciones que de ellas obtenían, para asegurar su conformidad con los que consideraban únicos criterios de verdad: la fe católica y la doctrina aristotélica.

A partir de los siglos XIII y XIV la matemática toma un aspecto más filosófico y especulativo, pero la falta de habilidad algebraica y geométrica, inferior incluso a la de otras culturas anteriores o contemporáneas, impidió que los nuevos puntos de vista, que apuntaban ya en la matemática, tuviesen frutos inmediatos. Progresivamente, al amor por el saber clásico se fue añadiendo un creciente interés por las ciencias experimentales, lo que desembocó en el ideal de ciencia renacentista.

En cuanto a la matemática, el hecho más característico del Renacimiento es el creciente uso de un álgebra sincopada que venía gestándose desde el medievo, con una marcada influencia islámica y todavía recurrente a las consideraciones de la geometría clásica. Pero lo más destacable de este uso es el carácter distanciador de los planteamientos prácticos concretos que adquiere con la publicación de las soluciones de las ecuaciones cúbica y cuártica, por Cardano. La importancia de éstas fórmulas fue más lógica que práctica lo que representa una novedad en la matemática, desde las aportaciones griegas. Fue Vieta quien puso más énfasis en la generalización de su álgebra, utilizándolo tanto en problemas concretos como para reglas generales y distinguiendo por vez primera los conceptos de parámetro e incógnita en su notación algebraica, denominada *logistica speciosa* en contraposición a la *logistica numerosa* de sus predecesores. Aunque su pensamiento continúa estando más cerca de los planteamientos geométricos antiguos que del álgebra moderna, su interés por la matemática tiene un carácter definitivamente distinto al de sus contemporáneos, movidos principalmente por los aspectos prácticos de la misma.

Galileo Galilei dio un giro al carácter de la matemática aplicada. Fue el primero en emplearla, de modo riguroso, en el análisis de la nueva dinámica que venía gestándose a lo largo de todo el Renacimiento. A su creencia acerca de que el universo entero puede explicarse a través de las matemáticas hay que añadir la idea de que se han de comprobar los resultados teóricos, obtenidos mediante el método deductivo, contrastándolos con la realidad. Esto le separa de la concepción platónica de la ciencia y le sitúa a medio camino entre ésta y el método experimental, pues abraza la idea de la necesidad de verificación racional de los hechos observables y, al tiempo, la importancia de los datos experimentales como punto de partida para el ejercicio de la razón. Con Galileo la matemática extiende su alcance, ya que mantiene el carácter postclásico tradicional de aplicada, pero sin desatender los aspectos filosóficos.

Paul Germain (1976) denomina al siglo XVII la *época cartesiana*, nombre que toma del gran filósofo y matemático René Descartes. Según este autor, es Descartes quien rompe clara y abiertamente con el ideal griego, que seguía respaldando los fundamentos geométricos a pesar de los nuevos métodos apuntados. Por fin la matemática comienza a desarrollarse movida más por su lógica interna que por motivos económicos, sociales o tecnológicos. El álgebra cobra la categoría de método de la ciencia universal y se utiliza con todo su poder de generalización y variabilidad. Descartes restringió el contenido de la ciencia a las cualidades que pueden expresarse matemáticamente y afirmó que la forma de aproximarse a la realidad a través de ella es por deducción a partir de las leyes y principios generales, lo que demuestra que para él la matemática es *a priori*.

Debido al interés por las aplicaciones prácticas de las matemáticas y a la madurez que habían alcanzado sus métodos, se venía apuntando en los últimos tiempos el germen del análisis infinitesimal, que tiene sus orígenes en el método de exahusción griego y culmina con Newton y Leibniz, en el siglo XVII. En este campo, las aportaciones de Newton fueron más metodológicas que revolucionarias, en lo que al pensamiento matemático de la época se refiere. Es curioso como un hecho que a través del tiempo llega a convertirse en el punto de partida de una nueva matemática basada en el análisis fue concebido de una forma tan progresiva y sin las pretensiones de ruptura que supuso, como afirma Brunet (1976). En este sentido de continuidad, añade este autor que la visión pragmática de Newton pudo impedirle la publicación de sus obras hasta después de encontrarle una aplicación práctica en la mecánica universal. Asimismo, su nuevo método analítico no desembocó en un abandono total de la geometría clásica, como era de suponer. Leibniz, sin embargo, abrazó una concepción más cartesiana de la matemática, respetando los supuestos de la existencia de principios *a priori*. A éste último, además, le debemos la notación algebraica actual, mucho más clara y rigurosa que la utilizada hasta el momento.

Estas dos grandes aportaciones, la de Descartes al álgebra y la de Leibniz al análisis, no distan demasiado en su intención de realizar una gran sistematización desde un espíritu de síntesis de los conocimientos anteriores sobre el álgebra o el análisis infinitesimal, respectivamente. Se vislumbran así los fundamentos de la matemática moderna como una ciencia sistematizada, de métodos racionales y con aplicaciones a distintos y muy diversos campos. Descartes y Leibniz son un claro ejemplo de la filosofía matemática reinante, donde la matemática constituye una

> *«prueba pertinente de una doctrina del espíritu en la que la verdad de la ciencia y la verdad de la religión se prestan mutuo apoyo»* (Brunschvicg, 1976).

El siglo XVIII viene a ser una transición al XIX, que se denominará la Edad de Oro de la matemática, no sin razón. Tanto a finales del siglo XVIII como durante todo el XIX predomina el desarrollo de una matemática pura, que analiza conceptos que se habían considerado tradicionalmente como intuitivos. Este método resulta tremendamente prolífico y es así como nos encontramos en muy breve tiempo con

> *«una vasta extensión (...) llena de hermosos detalles, no una extensión uniforme, como una llanura desnuda, sino una región de un hermoso país, vista primero a distancia, pero que merece ser recorrida de un extremo a otro y estudiada hasta en sus menores detalles, en sus valles, sus cursos de agua, sus peñascos, sus bosques y sus flores».*

Poética metáfora de A. Cayley, citada en Le Lionnais et al. (1976), acerca de la abrumadora diversidad de la matemática moderna. La imposibilidad de abarcarlo todo, al estilo de los antiguos sabios, y la necesidad de ese estudio detallado, del que habla Cayley, favorecen una inevitable especialización que afecta no sólo a la matemática, sino a las demás ciencias y disciplinas del conocimiento. En este sentido podemos citar las palabras de Dugas (1976),

> *«la matemática, como todas las otras ramas de la técnica actual, obliga al investigador a especializarse. Por esta especialización hay que pagar un rescate, que es la desaparición del matemático universal (...) del que Poincaré parece haber sido uno de los últimos representantes».*

El tremendo desarrollo que esta especialización ha producido en cada una de la ramas en que la matemática se ha dividido conlleva el peligro de divergencia y aislamiento que la ausencia de sintetizadores, como Poincaré, puede provocar.

En esta época, la apología del razonamiento puro y el abandono de las percepciones sensibles van a tener consecuencias tales como el descubrimiento de las geometrías no euclídeas, la definición -tan revolucionaria para el análisis- de número real y el desarrollo de las álgebras múltiples. Otras disciplinas aparecen como consecuencia del estudio de las transformaciones -más adelante relacionadas por Piaget con las etapas de la construcción algebraica-, como la geometría proyectiva o la teoría de grupos. La necesidad en todas ellas del uso de los conjuntos infinitos para desarrollar el nuevo sistema propició la aparición de nuevos problemas epistemológicos.

El problema del continuo, en la aritmetización del análisis, se zanjó con grandes contribuciones como las de Cantor, Dedekind y Weierstrass, a finales del siglo XIX. Sin embargo, el intento de Cantor de fundamentar la matemática en la noción de conjunto llevó a contradicciones con la intuición, como las paradojas de Russell y otras del mismo tipo, halladas a principios del siglo XX, que provocaron una verdadera crisis de fundamentos en la matemática. Por ello comienza, a partir de este momento, un intento de axiomatizar la teoría de conjuntos con el fin de demostrar que la matemática podía derivarse de un sistema lógico, eliminando todas las paradojas. El propio Russell y Whitehead se pusieron manos a la obra de fundamentar la matemática en la lógica.

La escuela logicista de Russell, Whitehead y Frege convivió con el intuicionismo de Brouwer, al que Hilbert se opuso con fuerza alarmado por el abandono de parte del conocimiento matemático que propiciaba la aceptación de la idea de que sólo lo que se puede construir a partir de los naturales y con un número finito de pasos es aceptable en la matemática. (Davis y Hersh, 1988)

El intento de formalización de la aritmética de Hilbert, como perfeccionamiento del método axiomático, acabó con el Teorema de incompletitud de Gödel, en 1931, en el que se demuestra que ningún sistema formal que pretenda producir todas las verdades aritméticas puede ser consistente en sí mismo, ya que siempre habrá verdades que no pueden ser demostradas dentro de dicho sistema. Se pone de manifiesto de esta manera la limitación de los formalismos, aunque esto no da al traste con la formalización misma, sino con las pretensiones demasiado ambiciosas que se le han asociado (Gómez y Gómez, 1995).

El formalismo se adaptó, de esta manera, aceptando que la matemática no es más que un juego de deducciones lógicas e ignorando el tema de la existencia, y se extendió en el tiempo y el espacio. El grupo Nicolas Bourbaki -con representantes como A. Weil y J. Dieudonné-constituye el ejemplo más influyente de matemática formalista y llegó incluso a las escuelas bajo el nombre de matemática moderna.

Este grupo, a pesar de la gran variedad de materias en que se divide la matemática del siglo XX y del peligro al que hacíamos referencia más arriba, considera la matemática como más unificada que nunca, en sus métodos y en su esencia:

> *«la evolución interna de la ciencia matemática a pesar de las apariencias, ha estrechado más que nunca la unidad de sus partes diversas y ha creado una especie de núcleo central más coherente de lo que ha sido nunca».*

Vemos que, durante este siglo, la vuelta a los fundamentos de la matemática ha centrado la atención en las explicaciones de la naturaleza matemática. Hoy en día hay casi tantas concepciones de la naturaleza matemática como matemáticos en el mundo y la polémica entre las posiciones platónicas -los objetos matemáticos existen independientemente de nuestro conocimiento- y formalistas -los objetos matemáticos no existen, sólo las relaciones que adquieren un significado cuando se aplican a la realidad física- se ha ido diluyendo. El interés por *la cosa en sí*, más propio de la metafísica kantiana, ha dejado paso a la inclinación por las relaciones entre objetos matemáticos y la lógica que rige dichas relaciones. Además, a la excesiva axiomatización, que ponía en peligro la creación en la matemática, ha seguido la convicción de la necesidad de una estrecha colaboración entre esta metodología y la intuición, imprescindible iniciadora de todo descubrimiento. Como afirma Boyer (1992), recordando el punto de vista de D'Alembert,

> *«lo que hay que hacer es avanzar en el desarrollo de la matemática, tanto en la dirección de sus fundamentos como en la superestructura de las distintas teorías, sin preocuparse excesivamente por ningún credo particular».*

La matemática es una ciencia ideal y objetiva a la vez, cuya conformidad de resultados con la realidad no depende de los métodos utilizados en la investigación sino de la propia esencia de la matemática y, como ciencia exacta que es, *la manera en que se investiga no debe tener repercusiones en el valor de lo que se encuentra* (Brunschvicg, 1976).

Para terminar querría retomar la primera idea de este apartado. Se planteaba la necesidad de un lenguaje potente, claro y riguroso que nos permita expresar nuestro conocimiento de la naturaleza buscando la objetividad de la que la razón de cada uno carece. Desde antiguo se encontró en la matemática esa objetividad como lenguaje de la ciencia. Mucho ha evolucionado la matemática desde entonces, como hemos podido comprobar a lo largo de estas líneas, pero incluso en nuestros días de pensamiento superabstracto, la matemática continúa siendo el lenguaje de la ciencia (Boyer, 1992), aunque destacar tan sólo el carácter comunicador de la matemática, como lenguaje, es dejar inacabada esta disertación. En palabras de Courant y Robbins (1967):

> *«La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética».*

Efectivamente, la matemática es una expresión de la mente humana, es una creación intelectual del hombre que cumple dicha función instrumental, pero compartida con un fin filosófico y estético (Poincaré, 1964). La voluntad activa sirve como motor de desarrollo para la ciencia y comprende la parte práctica en la que el investigador progresa en sus trabajos, inspirado por la intuición y conforme a las reglas de la lógica. La razón contemplativa subraya la parte filosófica en la que se debate acerca de los fundamentos de la matemática y cuya independencia de la aplicación favorece la apertura de nuevos caminos de investigación que, a la postre, pueden ofrecer marcos teóricos de excepción para desarrollos científicos insospechados. En cuanto al deseo de perfección estética, es el marco esencial que rige toda la investigación matemática. La búsqueda de la belleza y la simplicidad, acorde a los principios de la lógica, garantiza la fecundidad de esta ciencia y sirve de guía tanto a la voluntad como a la razón en su progreso. La matemática se constituye así en ciencia, filosofía y arte, y estas tres dimensiones configuran un mapa de utilidades para el hombre, que trataremos de exponer a continuación.

2.3.2. La matemática en la sociedad

La dimensión social del hombre ha cobrado mucha importancia en los últimos tiempos, desde que la antropología se ha constituido como ciencia independiente de la filosofía. El hombre es un *ser social*, y es la débil naturaleza de la razón la que le impulsa de manera irremediable a la sociedad, donde encuentra su fortaleza. Así entendido el estudio del hombre y su cultura no pueden ser escindidos de la sociedad en la que éste está inmerso. Según las palabras de Piaget y García (1982)

> *«en cada momento histórico y en cada sociedad predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos (...) que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado».*

Es decir, la propia sociedad limita las posibilidades del pensamiento. Este hecho ha sido comprobado en varias ocasiones durante el apartado anterior, en momentos en lo que la propia filosofía de la época hacía imposible descubrimientos que con otros marcos epistémicos habrían sido evidentes dado el grado de desarrollo de la matemática.

Por la razón anterior, no podremos separar el estudio de la matemática, como parte de la cultura que es, de la sociedad en la que se integra. En el apartado anterior hemos podido ver como, a lo largo de la historia, el desarrollo de la matemática ha dependido en gran medida de la sociedad en la que se enmarcaba, así en una sociedad tecnicista la matemática buscaba mejorar los medios técnicos y en una sociedad más especulativa, la matemática tomaba un carácter teórico. De la misma manera la evolución de la matemática ha influido históricamente en la sociedad, pues ha supuesto la base del desarrollo científico y de los avances tecnológicos y, a consecuencia de ello, del progreso social.

La interacción y mutua influencia entre la matemática y la sociedad no es distinta que la que se puede encontrar entre la sociedad y la ciencia. La ciencia se ha puesto al servicio de la sociedad, respondiendo a preguntas y necesidades del hombre en cada momento histórico y social, y al mismo tiempo la ha dirigido, orientando el futuro a través del progreso científico. Es necesario recordar la importancia que tiene la matemática como lenguaje de la ciencia que, como ha sido señalado, nos permite explicar hechos ya acaecidos además de predecir otros que aún no han tenido lugar. En este sentido, la conformidad de los hechos naturales *a posteriori* con los desarrollos de la matemática pura sólo puede explicarse en cuanto a que es de los datos de la propia naturaleza de dónde partimos para obtener nuestro conocimiento y, por lo tanto, el producto de nuestro ejercicio racional, dado que la razón también es natural, no puede ser contrario a la realidad. Este hecho convierte a la matemática en elemento imprescindible del desarrollo y la evolución social.

Todas estas ideas restringen la utilidad de la matemática al investigador que a través de sus estudios avanzados, y sin olvidar el triple fin de la matemática expuesto en el apartado anterior, contribuirá al progreso de una manera innegable. Pero no podemos olvidar que el investigador representa una parte ínfima de la sociedad misma. ¿Cómo se relaciona el hombre corriente con la matemática?

Como lenguaje que es, la matemática representa un medio de comunicación potente, riguroso y conciso que está presente, en numerosas ocasiones, en la sociedad. Así distintas circunstancias como ventas, horarios, pesos y medidas, etc., se convierten en situaciones matemáticas de la vida cotidiana. Otras ciencias recurren constantemente al lenguaje matemático para expresar sus informaciones, como la medicina, la economía, la física, etc. Pero la función informativa no es la única útil para el hombre corriente, el uso de operaciones sencillas y algunos algoritmos se hace necesario a menudo en situaciones laborales, comerciales, y otras.

Para Feynman la matemática no es sólo un lenguaje que pueda ser traducido, la matemática es lenguaje más razonamiento. Parte esencial de la matemática son una serie de conceptos lógicos presentes hasta en los razonamientos más simples. Seriar, ordenar, clasificar, agrupar, etc., se convierten en la matemática más utilizada, y de forma menos consciente, en la vida diaria. El resultado es una sociedad en la que se requiere el uso de la matemática en muy diversas ocasiones para conseguir desenvolverse en el entorno de una manera digna. Esto nos obliga a vincular la educación matemática a la escuela como respuesta a las necesidades sociales expuestas, cuestión de la que nos ocuparemos más adelante.

A pesar de los grandes avances que se experimentan constantemente en investigación matemática en España -la producción de documentos matemáticos en España ha aumentado en un 300 % en la última década (Andradas y Zuazua, ?)- la matemática sigue gozando de muy poca popularidad. Esto es debido, en gran medida, a la dificultad de su estudio por ostentar una notación simbólica no natural (Cockcroft,1985) o, al menos, a la muy extendida creencia social en dicha insalvable dificultad. A menudo aparece el matemático como una persona aislada socialmente en su torre de marfil de conocimientos elevados, inalcanzables para el resto de los hombres. Evidentemente, no se espera que todos los individuos lleguen al nivel matemático del profesional, lo cual sería imposible, pero sí que la matemática se desmitifique y se entienda como una herramienta útil para la vida. Con las actitudes que se derivan de la inseguridad que infunde el miedo a la matemática no es posible un uso práctico, resuelto y decidido de la misma. Este mismo hecho contribuye a aumentar el temor a la matemática configurándose una rutina de incompetencia matemática de la que es difícil salir. De nuevo la escuela deberá perfilarse como solución futura a estas dificultades.

Finalmente se expondrá el valor del fin estético de la matemática para la vida cotidiana, completando el activo y el especulativo. La evolución ha llevado a la sociedad a una situación crítica debida a la excesiva tecnificación, el individualismo y el pensamiento único. Como consecuencia el hombre se ha visto abocado a una pérdida de valores y a un abandono de la búsqueda del conocimiento que le desliga del proceso evolutivo en el que naturalmente encuentra su plena realización, como ya hemos dicho anteriormente. En esta situación es necesario un cambio social profundo, para lo cual la matemática resulta una poderosa herramienta.

> *« (La matemática) es una disciplina del espíritu, la más rigurosa de todas. (...) fuerza la atención hasta un punto tal que impide toda divagación perezosa del espíritu, tan común entre los adolescentes. (...) La matemática enseña también a escribir, si se quiere que la concisión, la claridad y la precisión sean cualidades del estilo. (...) el lenguaje matemático obliga a una gimnasia intelectual sumamente intensa: el hombre (...) de un solo simbolismo no puede ser matemático. La matemática desarrolla también la imaginación, pero le impide vagar más allá de los límites de una lógica rigurosa. (...) es indudable que la cultura matemática tiene un valor estético; nadie puede permanecer insensible a la armonía de la geometría. (...) las matemáticas educan la capacidad de razonamiento»* (Dugas, 1976).

Poincaré también nos habla de este sentido de la belleza de la matemática que devuelve la esperanza en el futuro de la educación. Además E. Castelnuovo (2004) destaca los valores del respeto mutuo, el altruismo y la solidaridad, propiciados por la matemática a través de su actividad compartida en un proceso de creación y recreación común:

> *«esta ciencia no distancia culturas sino que las acerca a través de un mismo lenguaje, no favorece el individualismo sino la colaboración en el trabajo».*

Todos estos valores tan necesarios para la sociedad y, por lo mismo, tan preciados en la educación son favorecidos por la matemática, por lo que hacen a ésta última un medio poderoso de transformación social, como ya se ha dicho.

2.4. La didáctica de las matemáticas

En esta sección se pretende una aproximación a la didáctica de las matemáticas desde la perspectiva de la comunicación educativa manifestada en 2.2. Se tratará de concretar la situación actual de la enseñanza de las matemáticas para poder delimitar las deficiencias y dificultades existentes.

Antes de continuar es necesario realizar una aclaración de carácter terminológico. En castellano se habla de matemáticas y de matemática, con muy poco rigor en la utilización de dichos términos. Hasta este momento, en este trabajo, se ha hablado de matemáticas como técnica manipulativa que sirve para el estudio de la realidad y de matemática como disciplina que contiene dicha técnica activa desde el punto de vista de las puras facultades del conocimiento -especulativo y estético-. Sin embargo, a partir de aquí se utilizará el término de matemáticas con un carácter más amplio, recogiendo a través del plural toda la riqueza y diversidad que esta disciplina contiene, ya que es la generalidad en la didáctica específica de esta ciencia.

2.4.1. Situación general

Como ya se ha citado, las dos principales teorías del conocimiento han centrado su discurso en la absorción (conductismo) o en la construcción del conocimiento (constructivismo). La primera afirma que el conocimiento es extraído del medio, mediante asociaciones que nos permiten memorizar una colección de datos. Se refuerza mediante premio-castigo a falta de motivación propia, pues este método de aprendizaje resulta tedioso para el niño. Esta teoría dominó la mayor parte del siglo XX pero en los últimos tiempos, debido a aportaciones fundamentales en el campo de la psicología del aprendizaje, como es el caso de los estudios de Piaget, Vigotsky, etc., ha cobrado más fuerza la segunda. Visto de esta manera el aprendizaje resulta una tarea necesaria y gratificante para el individuo, que explora el medio para adaptarse a él, y no necesita de formas de motivación extrínsecas sino, más bien, de orientaciones pedagógicas que provoquen la necesidad del conocimiento.

Esta última teoría se adapta más a los estándares que hoy en día se consideran para el aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del conductismo, que lleva a una enseñanza dogmática en la que los medios ocultan el verdadero fin de la enseñanza matemática y a menudo manifiesta un desfase entre el rigor exigido y la madurez de desarrollo de los esquemas lógicos del niño, el constructivismo respeta el desarrollo progresivo de dichos esquemas. Se adapta, de esta manera, al ritmo del aprendiz favoreciendo la intuición, el razonamiento deductivo-inductivo y una necesidad de axiomatización creciente. Este carácter flexible y abierto fomenta el desarrollo de la imaginación y la fecundidad psicológica.

Particularmente, en la didáctica de las matemáticas se han sucedido, e incluso coexisten, distintas corrientes basadas en una u otra teoría cognitiva. Como ejemplos citaremos el estructuralismo, el mecanicismo, el empirismo y el realismo.

El estructuralismo nació con la pretensión de hacer un paralelismo entre la estructura del sistema de conocimientos de las matemáticas y las estructuras cognitivas de los sujetos. Esta corriente propone para el aprendizaje la misma organización que existe en el sistema de conocimientos de las matemáticas, es decir, una axiomática cerrada y bien estructurada. En su momento esta corriente fue conocida como las matemáticas modernas.

De ella Piaget (1978) afirmaba

> *«si se consigue poner de acuerdo las matemáticas modernas y los datos psicológicos, la pedagogía tiene ante sí un porvenir luminoso».*

Sin embargo, en el mismo libro se recoge la siguiente opinión de P. Samuel

> *«Las matemáticas modernas (...) constituyen un excelente instrumento de despersonalización».*

La excesiva axiomatización que propuso esta corriente dificultó el aprendizaje desde un punto de vista paidocéntrico, pues ofrece unas matemáticas acabadas en vez de favorecer la construcción de los conocimientos que se defiende en las líneas anteriores. Si bien es innegable la importancia de la formalización, como veremos más adelante, esta no puede sino fundamentarse en una componente intuitiva previa que exija dicha formalización. La cita de Piaget debe entenderse en este sentido de incorporar los métodos cognitivos a la construcción axiomática de los conocimientos matemáticos y no al revés, facilitando el aprendizaje a través de un acercamiento paulatino a la formalización.

El mecanicismo concibe las matemáticas como un conjunto de reglas que los alumnos deben aprender y luego aplicar en la resolución de ejercicios y problemas. Esta corriente se fundamenta en el conductismo expresado en el condicionamiento operante.

Para los alumnos educados con esta orientación mecanicista, los problemas y cuestiones planteados en el aula son aplicaciones directas de los ejemplos que el profesor resuelve. El estudiante debe memorizar las reglas y fórmulas utilizadas, que le permitirán ejercitarse, utilizando problemas afines a los ejemplos ya resueltos. Lampert (citado en Llinares y Sánchez, 1994) afirma que se han creado unas matemáticas *ad hoc* para enseñarlas, totalmente desligadas de las realidades social, de los alumnos, e histórica, de la propia disciplina científica. Añade

> *«hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor, conocer matemáticas significa aplicar las reglas correctas cuando el profesor pregunta y la verdad matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor».*

El carácter extrínseco de este conocimiento matemático respecto del alumno condiciona su significación para éste e impide el desarrollo de su razonamiento, fomentando la creencia de que las matemáticas son algo distinto de la lógica que pretende una cierta ordenación de la realidad.

Es frecuente que, a falta de un conocimiento profundo de las corrientes metodológicas y sus implicaciones en los distintos tipos de aprendizaje, los profesores de matemáticas terminen aplicando el mecanicismo, ya que es mas fácil exigir la memorización de las fórmulas que desarrollar los procedimientos matemáticos a partir de un razonamiento lógico. De este modo no se aprovecha el carácter instrumental de las matemáticas para desarrollar la imaginación y las estructuras del conocimiento, que se han señalado en 2.3.2.

Como nos dice Kamii (1988) en estas líneas

> *«La mayoría de los educadores de matemáticas consideran los problemas verbalizados como aplicaciones de las técnicas de cálculo, en vez de verlos como un punto de partida que conduce en su momento al cálculo generalizado sin contenido, contexto o fin práctico».*

Según la autora, las actividades de aplicación habituales en la didáctica de las matemáticas muestran que la verdad proviene del maestro y que las matemáticas son un misterioso conjunto de normas que proceden de fuentes externas a su propio pensamiento, con lo cual el niño pierde confianza en sus propias capacidades para *hacer matemáticas*.

Sin embargo, para el empirismo las matemáticas tienen el carácter de herramienta para resolver problemas concretos del contexto cercano al estudiante. Es decir, la utilidad para situaciones conflictivas creadas en el entorno del alumno debe ser el factor motivador en el proceso de aprendizaje. La práctica del uso de algoritmos y fórmulas deja paso al razonamiento y la creatividad para la resolución de problemas. De esta manera el alumno desarrolla la intuición y la imaginación y se responsabiliza de la construcción de su propio conocimiento matemático. Pero esta metodología carece de suficiente profundidad para formar conceptos y abstracciones, sin una intervención precisa del profesor.

Llinares (Llinares y Sánchez, 1994) afirma que la enseñanza basada en la resolución de problemas debe fundarse sobre una diversidad suficiente de tareas que alcance a los intereses y necesidades de todos los alumnos y para los que el profesor cumpla la función de *orientador y consultor*, poniendo de manifiesto los nuevos conocimientos y métodos.

Sin esta intervención del profesor, es decir, tomando dicho método con excesiva pureza, se puede ralentizar el proceso de aprendizaje. Brousseau (1986) advierte de ello y propone que el profesor no deje al alumno sólo, como en la enseñanza por descubrimiento, sino que *rehaga* las matemáticas con él, sin minusvalorar el saber cultural que tanto ha tardado en ser adquirido.

Este es el sentido de la última de estas corrientes metodológicas, el realismo, a diferencia del empirismo, enfatiza en los procesos de aprendizaje y su sistematización. Esta corriente se fundamenta en las ideas de Freudenthal siguiendo el método inductivo, es decir, partir de los hechos concretos para construir modelos generales. Básicamente plantea la reinvención de las matemáticas por el alumno desde su realidad circundante.

El realismo defiende que el alumno es capaz de construir su propio conocimiento matemático a partir de la interacción con la realidad y ayudado con el profesor que le orienta y fomenta las actividades propicias para ello. Este aprendizaje puede ser más lento, pero también es más significativo ya que proporciona estrategias de pensamiento lógico-matemático útiles para otras situaciones con lo cuál, a la larga, el proceso de conocimiento se ve beneficiado.

Los límites del realismo matemático son epistemológicos, pues el conocimiento matemático trata de entes abstractos carentes de localización espacio-temporal e incapaces de interacción causal. Sin embargo, salvando esta dificultad teórica, metodológicamente ofrece un marco incomparable para el desarrollo constructivo de las matemáticas.

Las últimas teorías de la didáctica de las matemáticas, como la antropológica o la teoría de las situaciones, parten de supuestos similares para fomentar que el alumno construya su propio conocimiento.

En las matemáticas antropológicas (Bishop, 1988), también llamadas etnomatemáticas, se estudian los problemas que se plantea la educación matemática relativamente a las sociedades. Esta visión de las matemáticas, como algo profundamente arraigado en la cultura y con las características propias que ésta les confiere, ofrece una alternativa a la didáctica tradicional que se adapta a la diversidad sociocultural existente. Las investigaciones sobre este tema se desarrollan fundamentalmente en el International Study Group on Ethnomatematics (ISGEM).

D'Ambrosio, citado por Sánchez (Llinares y Sánchez, 1994), hace hincapié en esta enculturación antes citada, pero también en la necesidad de la apertura de las matemáticas, relacionándolas con otras ciencias y globalizando la *matemática pura* y sus aplicaciones. También destaca los efectos perturbadores que las matemáticas pueden tener en el terreno social, sobre todo en la primaria, donde la introducción de los formalismos puede abrir una brecha insalvable en un futuro entre el entorno social y las prácticas escolares.

Estudios como los de Bishop y D'Ambrosio han puesto de manifiesto que las matemáticas son un proceso social, en el que las opciones sobre qué matemáticas se deben incluir en el currículo escolar están determinadas culturalmente. Chevallard, citado por Sánchez (Llinares y Sánchez, 1994), previene sobre el peligro de una enculturización excesiva que afecte a elementos fundamentales del currículo pues

> *« el sentimiento cultural puede a veces bordear la hipocresía política y conducir a una falacia científica».*

La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau afirma que el análisis de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas posibilitará el desarrollo de una *ingeniería didáctica* de situaciones para el conocimiento que debe aprenderse. El aspecto social es destacado en esta concepción, pero se relega al profesor a plantear las situaciones adecuadamente (devolución) y a señalar lo que los alumnos deben retener al final del proceso (institucionalización). La deshumanización que se deduce del término *ingeniería didáctica* resume los riesgos de esta teoría, que simplifica el complejo proceso de comunicación educativa a un *hacer matemáticas* del alumno, ignorando rasgos importantes de la relación profesor-alumno.

El papel del profesor no puede minusvalorarse, pues es el responsable de orientar al alumno en su construcción del conocimiento matemático. De él dependen las cuestiones planteadas para favorecer dicha construcción, la oportunidad de las intervenciones que orienten al alumno, respetando su creatividad, y la formalización última de los conceptos y procedimientos aprendidos, que posibilite la continuación del proceso de aprendizaje de las matemáticas. Pero también depende la esencia misma de esta comunicación, pues en ella el profesor se ofrece como es, enriqueciendo infinito la relación y permitiendo al alumno ser, como se analizará más adelante.

Este cambio en el enfoque de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas hacia una realidad más cercana al alumno, que favorezca el desarrollo del pensamiento matemático y la acción matemática ha fomentado una necesaria transformación en la realidad escolar.

Los contenidos curriculares han perdido importancia en favor del desarrollo de la propia construcción del conocimiento matemático. La definición de esta nueva meta curricular la encontramos en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos, PISA, que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, OCDE, (INCE, 2000) ha desarrollado como marco de referencia para la evaluación del rendimiento matemático en alumnos de 15 años de varios países, y se ha venido a denominar *competencia matemática (mathematical literacy)*.

> *«La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo».*

Esta definición enfatiza el papel de los conocimientos matemáticos que nos permiten realizar correctamente ciertas actividades de la vida, con el único fin general de la educación para la sociedad y no como medio técnico específico para la investigación pura o la aplicación a otras ciencias. Por ello puede servir como resumen de las necesidades matemáticas que demanda la sociedad actual, a las que se ha intentado una aproximación en 2.3.2, a falta de un estudio en nuestro país como el Informe Cockcroft en el Reino Unido (Luelmo, 2000).

La razón de esta generalización puede hallarse en el gran crecimiento que la alfabetización ha experimentado en los últimos tiempos. Como consecuencia la enseñanza ya no es un privilegio de los más afortunados de la sociedad, sino que representa una herramienta social muy poderosa, con capacidad para actuar, a largo plazo, sobre ésta. Este hecho obliga a orientar la enseñanza matemática, en los niveles obligatorios, hacia una mayoría, para su utilización en la vida diaria, y no hacia una élite de futuros matemáticos. Según Mialaret (1986)

> *«las matemáticas no debieran constituir un medio de selección particular contrario al espíritu de una verdadera democratización de la enseñanza».*

Las capacidades enunciadas en la definición de más arriba son lo suficientemente generales como para subrayar este espíritu democrático que la enseñanza de las matemáticas, como la sociedad, ha adquirido.

¿Cuáles pueden ser las utilidades de cada una de estas capacidades -identificar, comprender, razonar y utilizar y participar en las matemáticas- para la sociedad?

En cuanto a la identificación de las matemáticas en la realidad, esta afirmación no sólo se refiere a las acciones matemáticas concretas que abarca la enseñanza tradicional sino a todas aquellas cuestiones que se relacionan con la búsqueda, la especificación y la aplicación de relaciones apreciadas en las matemáticas (Baroody, 1988), incluyendo la dimensión estética de la misma. La utilidad está clara desde este punto de vista ya que no se circunscribe el conocimiento matemático a los contenidos específicos de las matemáticas, sino que este abarca todas las capacidades lógicas que han sido especificadas en la sección anterior, 2.3.2.

Para la siguiente tomaremos la definición de Skemp (1993):

> *« comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado»,*

que hace referencia a una asimilación significativa necesaria en la competencia matemática. Desde la perspectiva de conocimiento que se está defendiendo, conocer no sólo se limita a la adquisición de conceptos, sino que implica la acomodación entre éstos y nuestros esquemas de pensamiento anteriores para formar un nuevo marco para el conocimiento futuro. Dado que el conocimiento consiste en la construcción cognitiva por parte del alumno, esta comprensión implicará la reconstrucción de los conceptos y procedimientos matemáticos por parte del alumno, con ayuda del profesor. Por ello la didáctica es algo más que la actividad matemática, en el sentido de la teoría de situaciones, pues es una *re-construcción-con*, esto es, el alumno *construye* su propio conocimiento matemático, *con* ayuda del profesor. Pero no es una construcción nueva, sino una *re*-construcción del mismo pues ya ha sido construido con anterioridad por la razón en la evolución histórica del conocimiento. Es, por tanto, un compartir de ambos, profesor y alumno, en la tarea común de la didáctica, como se detallará posteriormente.

En esta misma línea, Llinares (Llinares y Sánchez, 1994) destaca que la comprensión pasa por realizar traslaciones entre diferentes modos de representación -simbólico, activo e icónico- y dentro del mismo modo de representación, ya que exige la reconceptualización de los conceptos y los procedimientos por parte del alumno.

Esta cualidad dinámica del conocimiento resulta tremendamente necesaria en una sociedad en continuo cambio en la que vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó *ideas inertes: ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente* (de Guzmán, 2001).

El razonamiento excede al establecimiento de juicios matemáticos, pues comporta un cariz de demostración. Así alcanzar razonamientos bien fundados implica un rigor lógico en la argumentación que impide su refutación, mientras que los juicios emitidos pueden ser contradichos conforme a las leyes del razonamiento. La rigurosidad de pensamiento y la crítica constructiva se presentan como necesidades urgentes en esta sociedad repleta de veleidades y falta de compromiso moral que fomenta la unicidad de pensamiento como seguro de continuidad del poder establecido.

En cuanto a la utilización y la participación activa en las matemáticas, aluden al carácter práctico que éstas tienen en la vida cotidiana, en la medida de las necesidades de cada uno y bajo una amplia concepción de lo que las matemáticas son. De este modo la definición hace referencia a todos los aspectos de las matemáticas -activo, especulativo y estético- que ya se han señalado con anterioridad (en la página 24).

El objetivo último de la competencia matemática no es exclusivo de esta ciencia, sino que ella contribuye, junto con el resto de la educación, a la formación de *ciudadanos constructivos, comprometidos y capaces de razonar*. Estos tres aspectos se resumen en el objetivo de autonomía, que se persigue en la educación integral. La persona debe ser constructiva para desarrollar una función activa en la sociedad y de esta manera contribuir a su mejora con compromiso y entrega, por responsabilidad como ciudadano perteneciente a dicha sociedad y en aras del bien común, como deber ético. Finalmente, estas cualidades se complementan con la capacidad de razonar, es decir, de utilizar el instrumento racional para el ejercicio del conocimiento conforme a la lógica. Sin esta última herramienta las otras dos no alcanzarían el objetivo de autonomía, pues éste exige de la práctica racional, ya que un ser autónomo es aquel capaz de hacer cosas por sí mismo, discerniendo entre varias posibilidades con capacidad crítica, conforme a un sentido moral desarrollado por él mismo en el marco de la sociedad en la que se desenvuelve.

Por su parte, Tobias (citado en Arcavi, 2007) investigó por qué reconocidos eruditos en el campo de las humanidades no eligieron el campo de las ciencias. Entre otras cosas, descubrió que parte de la respuesta puede estar relacionada con la capacidad, o su ausencia, de convivir con comprensión parcial por largos períodos de tiempo, hasta que los significados se conectan haciendo posible el surgimiento de una visión global. Parece que este es un ingrediente esencial del aprendizaje exitoso de las ciencias. Esto nos lleva a incluir dentro de la competencia matemática la *paciencia intelectual* para con la comprensión parcial y la confianza en que las acciones futuras -no necesariamente sabiendo de antemano cuáles y cuándo ocurrirá- harán avanzar nuestro conocimiento.

2.4.2. Investigaciones recientes

Para examinar la situación actual de la formación matemática en la educación de nuestro país y detectar si se está dando respuesta a estas exigencias de la sociedad analizaremos los resultados de varias investigaciones.

a) Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria (2000)

Dicho estudio se llevó a cabo por las administraciones educativas y el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, INCE, (actualmente, Instituto de Evaluación, IE) y tuvo como objetivo principal conocer y valorar los resultados educativos alcanzados por los alumnos que, en el curso 1999-2000, estaban en 4º de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante ESO). La muestra estuvo constituida por todos los alumnos de un grupo, elegido al azar, de cada uno de los centros seleccionados, en total 7486 alumnos de 328 centros de todas las Comunidades Autónomas, excepto Andalucía (INCE, 2001; INECSE, 2003).

En la prueba de Matemáticas el objetivo se definió de la siguiente manera:

> *«conocer lo que saben los alumnos sobre los contenidos básicos del currículo, tanto de conceptos como de procedimientos referidos al conocimiento y uso de los diferentes lenguajes matemáticos, a las destrezas básicas en la utilización de rutinas y algoritmos particulares, las estrategias heurísticas en procedimientos complejos y las competencias relativas a la resolución de problemas».*

Los resultados globales representaron una media de aciertos del 40 %, lo que se encuentra por debajo de lo que se podría esperar como aceptable.

Por contenidos, los resultados fueron los siguientes:

Los contenidos correspondientes a la representación de la información y el tratamiento del azar representaron un porcentaje de aciertos del 44 %, el único por encima de la media. Entre ellos se encontraban cuestiones referidas a representación, lectura, interpretación y análisis de datos de cuadros, tablas y gráficos y conocimiento y comprensión de los conceptos de azar y probabilidad.

El bloque de contenidos de números y operaciones presentó un porcentaje de aciertos idéntico a la media global. Entre sus contenidos se pueden encontrar preguntas referentes a operaciones, relaciones y problemas con números naturales, enteros, decimales y fraccionarios -incluidas

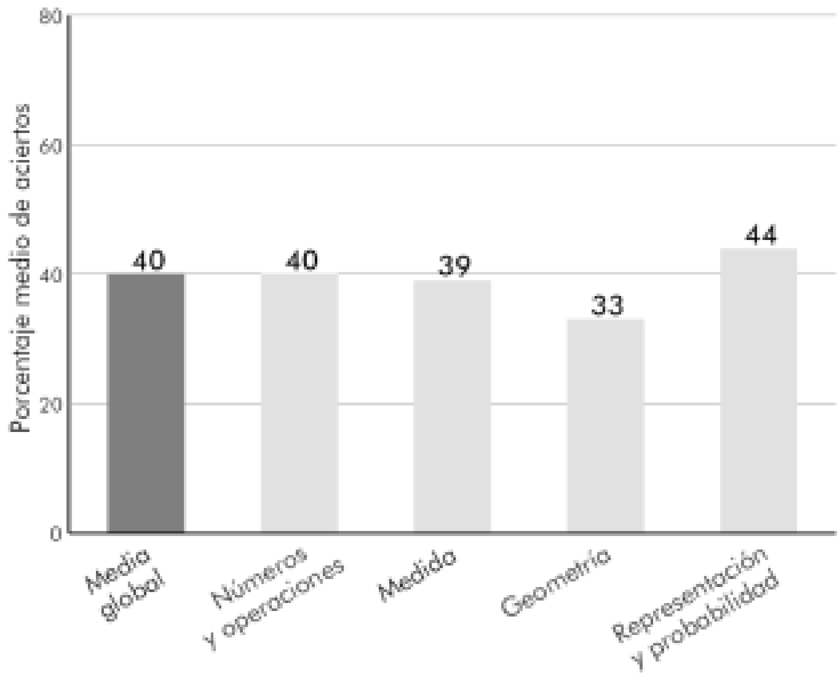


Figura 2.1: Resultados por contenidos en el área de Matemáticas (Fuente: INCE, 2003)

potencias, porcentajes y proporcionalidad-, estimación de operaciones y redondeo de números, expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones.

Los bloques de medida, estimación y cálculo de magnitudes -con preguntas acerca de operaciones y estimaciones con distintas unidades de medida y cálculo de medida de ángulos, perímetros, áreas y volúmenes- y de representación y organización del espacio -contiene preguntas sobre relaciones entre figuras y cuerpos geométricos, concepto de semejanza y transformaciones geométricas- se quedaron por debajo de la media, con un 39 % y un 33 %, respectivamente (ver figura 2.1) .

Los resultados obtenidos, por niveles de operaciones cognitivas, fueron los siguientes:

El mayor porcentaje de aciertos correspondió al uso de algoritmos y destrezas básicas, con un 45 %. A continuación, aún por encima de la media global, se halla el 41 % del conocimiento de conceptos matemáticos básicos y, muy próximo a él, con un 40 %, el uso de procedimientos más complejos. Finalmente se obtuvo un 34 % en cuanto a las preguntas de resolución de problemas (ver figura 2.2) .

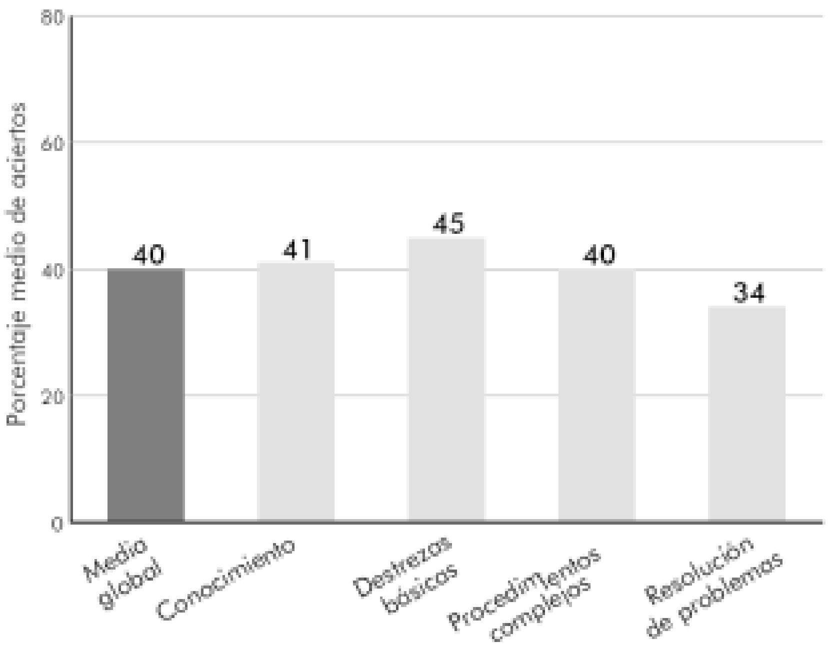


Figura 2.2: Resultados por tipo de operaciones cognitivas en el área de Matemáticas (Fuente: INCE, 2003)

Tanto en los resultados por contenidos como en los de niveles de operación cognitiva se puede constatar que los bloques con menos porcentaje de aciertos son los que requieren una comprensión completa de los conceptos y procedimientos aprendidos, en el sentido que se ha señalado anteriormente, y no una simple interiorización de mecanismos o conceptos por repetición. Así, las preguntas de geometría que requieren una elevada intuición y un razonamiento fino son las más falladas, mientras que las de representación de datos, más mecánicas, son las más acertadas. Del mismo modo las destrezas básicas operativas, altamente reiteradas y, a estas edades, bastante automatizadas, son las más dominadas, mientras que la resolución de problemas, en los que además del dominio de ciertos conceptos y procedimientos se necesita aplicarlos a nuevas situaciones, con una capacidad de abstracción y generalización que implica una asimilación significativa de lo aprendido, es la menos desarrollada.

Se puede concluir que el alumno medio de 4º ESO es capaz de resolver sin dificultad operaciones con números y expresiones algebraicas sencillas y de interpretar informaciones representadas en gráficas simples, además de relacionar mediante una expresión algebraica las dimensiones de una figura geométrica plana sencilla, utilizar correctamente la estimación y el cálculo de medidas e identificar expresiones algebraicas asociadas a una función que relaciona diferentes magnitudes. La dificultad comienza con conceptos como la notación científica, la expresión algebraica del enunciado de un problema mediante ecuaciones lineales, la resolución de problemas con enteros y fracciones, los conceptos de área y volumen, el teorema de Pitágoras, la interpretación correcta de las relaciones funcionales dadas en una expresión algebraica sencilla, las transformaciones geométricas y la semejanza. Por último, la mayor dificultad la encuentra en los cálculos con potencias de exponente negativo, en la resolución de problemas complejos de contenidos geométricos o numéricos y en los conceptos funcionales de pendiente, coordenadas, etc...

Las operaciones que requieren una estructuración más compleja son las que presentan una mayor dificultad para el alumno, además de la comprensión de otros conceptos que exigen un elevado desarrollo de la intuición y el razonamiento, que no ha sido alcanzado en esta etapa. Además la resolución de problemas plantea una dificultad importante, debido a la descontextualización que los conocimientos impartidos sufren respecto de la realidad escolar y que los hace aparecer caprichosos e irracionales.

b) Evaluación de la Educación Primaria (2003)

Este estudio (INECSE, 2004 y 2005a) se realizó durante el curso 2002-2003 a los alumnos que se encontraban en 6º de Educación Primaria (en adelante EP) con el objetivo de conocer y valorar los resultados educativos alcanzados al final de esta etapa y relacionar el rendimiento de los alumnos con los factores contextuales y los procesos educativos, de modo que se pudieran obtener conclusiones entre las relaciones de unos y otros. Anteriormente el INCE ya había llevado a cabo una evaluación de este mismo nivel, durante los cursos escolares 1998-1999 y 1994-1995, que servirían como referente para comparar las siguientes evaluaciones, como el presente estudio. La muestra se constituyó por 450 centros y un total de 9814 alumnos de todo el territorio español, con exclusión de alumnos con necesidades educativas especiales.

En la prueba de Matemáticas el objetivo propuesto fue el siguiente:

> *«conocer la capacidad de razonamiento matemático de los alumnos a través del conocimiento de conceptos, uso de procedimientos y resolución de problemas».*

Los resultados globales presentaron una media de aciertos del 58 %, distribuyéndose las preguntas en cuatro bloques de contenidos: números y operaciones, con cuestiones sobre el sistema de numeración decimal, cálculo y operaciones, expresiones numéricas, porcentajes y fracciones; medida de magnitudes, que abarca contenidos respecto del sistema métrico decimal, las medidas de tiempo y de ángulos; geometría, en el plano y el espacio, además de sistemas de representación y referencia y otros conceptos como perímetros, áreas y volúmenes; y finalmente, organización de la información, con contenidos como representación e interpretación de gráficas y cálculo de probabilidades y estadística.

Los mejores resultados se obtuvieron en organización de la información, con un porcentaje de 67 %, seguido de números y operaciones, con un 58 % y, por último, geometría y medida, con un 55 % y 52 %, respectivamente (ver figura 2.3) . En cuanto a los resultados por niveles de competencia, el mayor rendimiento se obtuvo en los aspectos relacionados con la adquisición de contenidos conceptuales, con un 62 %, seguido de procedimientos y estrategias, 59 %, mientras que el más bajo, un 53 %, corresponde a las preguntas que implicaban la resolución de problemas (ver figura 2.4) .

Se detecta claramente un defecto de seguridad en estrategias mentales que implican la comprensión y la adquisición significativa de los contenidos, como ocurre con la resolución de problemas, mientras que los procedimientos repetitivos y la memorización de conceptos ocupan un lugar más destacado en cuanto a las competencias desarrolladas durante la educación

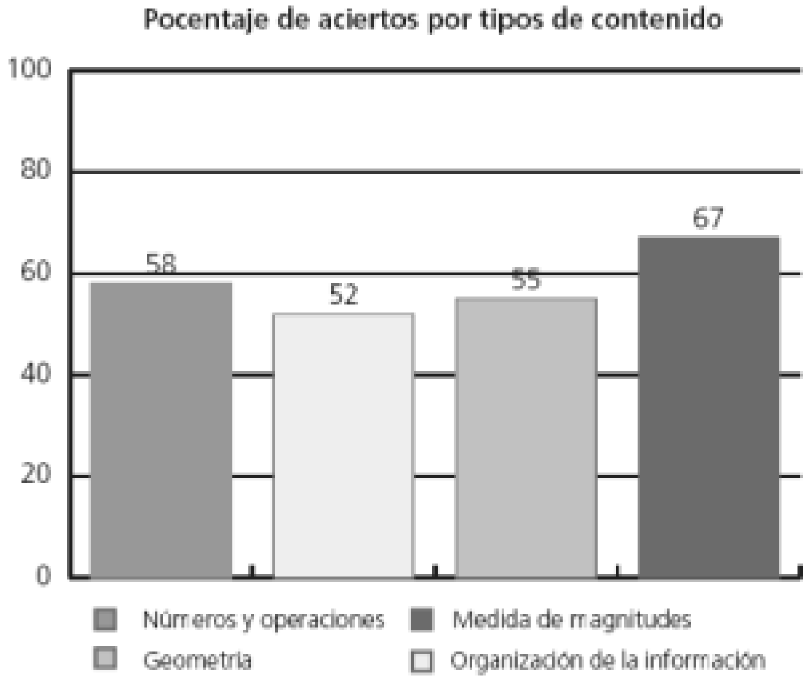


Figura 2.3: Resultados por contenidos en el área de Matemáticas (Fuente: INECSE, 2004)

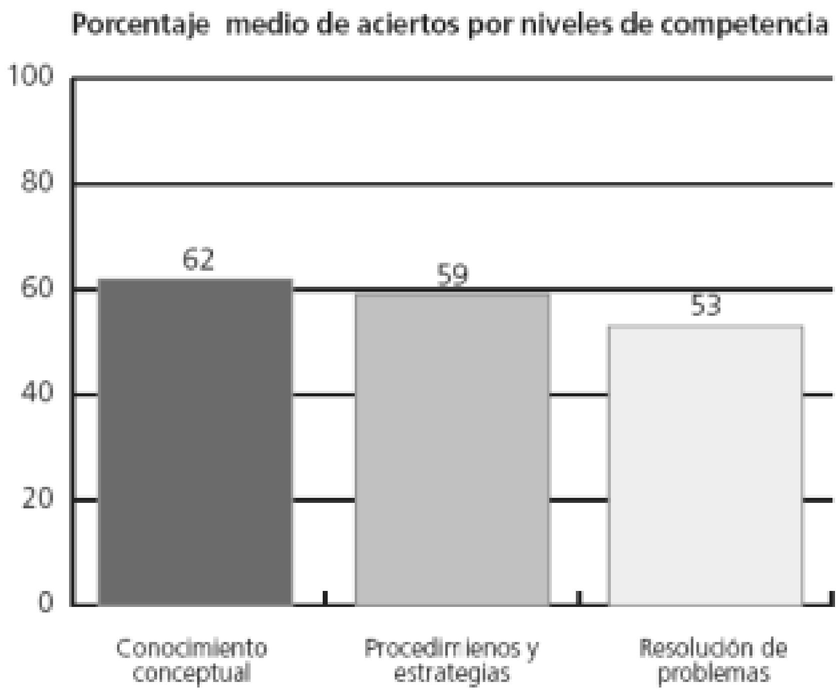


Figura 2.4: Resultados por niveles de competencia en el área de Matemáticas (Fuente: INECSE, 2004)

primaria. Esto mismo se puede concluir de los resultados por contenidos, pues los contenidos que presentan una mayor dificultad son los que representan también una mayor abstracción, es el caso del bloque de geometría o medida que requiere la formación de conceptos complejos.

Si se analiza un poco más en profundidad esta dificultad se hallará que las mayores complicaciones se encuentran en la comprensión del Sistema Métrico Decimal, es decir, de la equivalencia entre medidas y la adecuación de utilización de unas u otras en cada caso y de la geometría del espacio, que requiere un desarrollo superior del razonamiento y la intuición.

En resumen, la mayoría de los alumnos manifiesta dificultades cuando el cálculo del resultado de una cuestión o problema requiere más de una operación y es bastante frecuente encontrar respuestas erróneas procedentes de la combinación parcial de los datos para obtener una respuesta simple. Esto ocurre debido a una descontextualización de los problemas y cuestiones de la realidad, en estas circunstancias los procedimientos de resolución son métodos artificiales, casi mágicos, cuya aplicación nos conduce a los resultados, los cuáles no necesitan mantener una coherencia lógica interna con el problema. Por lo tanto nos encontramos ante "imposibles" conscientemente aceptados por los alumnos con un abandono total de la intuición y la lógica natural.

c) Estudio PISA 2003

Este estudio (INECSE, 2004c y 2005b; OCDE 2004a y 2004b) ha sido promovido por la OCDE con la principal finalidad de establecer indicadores que expresen el desarrollo de la una sociedad considerando el modo en que los sistemas educativos preparan a la población para ejercer un papel de ciudadanos activos. Por ello, cada tres años, se evalúa el rendimiento de los alumnos de 15 años, que coincide con el final de la educación obligatoria, en los países de la OCDE y en otros que quieren adscribirse a esta propuesta. En concreto, en esta última evaluación participaron 30 países de la OCDE, entre los que se encuentra España, y 11 que no pertenecen a esta organización. El total de alumnos participantes en la evaluación internacional fue de 273.566, que se corresponden con una media de entre 5.000 y 10.000 alumnos por cada uno de los países participantes de, al menos, 150 centros educativos diferentes. En España el estudio ha incluido a 10.791 estudiantes pertenecientes a 383 centros diferentes, de un total de 418.005 estudiantes de 15 años escolarizados en este curso.

En matemáticas, el estudio se enmarca en el objetivo de determinar la competencia matemática de los alumnos, que ya ha sido definida anteriormente (página 32). Para ello se prepara un conjunto de ítems que evalúen la totalidad del proceso de la actividad matemática, caracterizada en cinco fases:

1. Comenzar con un problema situado en la realidad.
2. Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
3. Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
4. Resolver el problema.
5. Proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

La estrategia escogida para construir un banco de ítems que cubra las fases señaladas tiene en cuenta tres variables: el *contenido matemático* al que se refieren las actividades propuestas, las *competencias* que deben activarse para conectar el problema real con las matemáticas para su resolución y las *situaciones y contextos* en los que se manifiesta el problema.

Los *contenidos* evaluados se agrupan en cuatro categorías: Cantidad, Espacio y forma, Cambio y relaciones e Incertidumbre. Que se corresponden con Aritmética, Geometría, Álgebra y Estadística.

Los distintos tipos de *competencias* señalados por el estudio PISA para matematizar la realidad son: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

Las *situaciones o contextos* en los que el alumno encuentra el problema permiten establecer su localización en términos de los fenómenos de los que surge la situación problemática concreta considerada, lo que puede facilitar su resolución al ayudar a organizar el dominio de la diversidad de los problemas. Estas situaciones se agrupan en los siguientes tipos: personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

En cuanto a la definición de los niveles de competencia individual de los alumnos en la prueba se consideran siete niveles según la puntuación obtenida:

- En el *nivel 6* (más de 668 puntos), los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar la información procedente de sus investigaciones y de los modelos que han creado al enfrentarse a problemas. Pueden relacionar representaciones y diversas fuentes de información y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Los alumnos de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemáticos avanzados. Dichos alumnos utilizan su entendimiento y comprensión junto con el dominio de las relaciones y las operaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias a la hora de tratar situaciones inusitadas. En este nivel los alumnos pueden formular y transmitir de manera precisa sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.

- En el *nivel 5* (más de 606 puntos), los alumnos saben de desarrollar y trabajar con modelos en situaciones complejas identificando los condicionantes y estableciendo suposiciones. Son capaces de seleccionar, comparar y valorar estrategias de resolución de problemas para tratar los problemas complejos relacionados con estos modelos. Los alumnos de este nivel saben trabajar de una manera estratégica utilizando destrezas de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, representaciones relacionadas adecuadas, descripciones gráficas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Son capaces de reflexionar sobre sus acciones y de formular y transmitir sus interpretaciones y razonamientos.

- En el *nivel 4* (más de 544 puntos), los alumnos saben trabajar de una manera efectiva con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que conllevan condicionantes y exigen que se realicen suposiciones. Son capaces de seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, y relacionarlas directamente con las características de las situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar destrezas bien desarrolladas y razonar de una manera flexible y con algo de perspicacia en estos contextos. Son capaces de elaborar y transmitir sus explicaciones y argumentaciones relativas a sus interpretaciones, argumentos y acciones.

- En el *nivel 3* (más de 482 puntos), los alumnos saben ejecutar claramente los procedimientos descritos, incluidos aquellos que precisan decisiones consecutivas. Son capaces de seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas. Los alumnos de este nivel pueden interpretar y utilizar representaciones de diferentes fuentes de información y extraer conclusiones directas de ellas. Son también capaces de desarrollar escritos breves exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

- En el *nivel 2* (más de 420 puntos), los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que no exigen más que una deducción directa. Son capaces de extraer la información necesaria de una única fuente de información y utilizar un único método de representación. Los alumnos de este nivel saben usar fórmulas, procedimientos, convenciones y algoritmos elementales. Son capaces de razonar de manera directa y de hacer una lectura literal de los resultados.

- En el *nivel 1* (más de 358 puntos), los alumnos saben responder a preguntas relativas a contextos habituales en que está presente toda la información pertinente y las preguntas están bien definidas. Son capaces de identificar la información y de realizar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias, que se deduzcan de manera inmediata del estímulo dado.

- El nivel denominado *menor que 1* (menos de 358 puntos), agrupa a aquellos alumnos con un rendimiento tan bajo que PISA no es capaz de describirlo adecuadamente.

Los resultados de la evaluación PISA sitúan a los alumnos españoles de 15 años 15 puntos por debajo del promedio de la OCDE, fijado en 500 puntos, en cuanto al rendimiento en matemáticas. Esta diferencia es estadísticamente significativa.

Los resultados de España no son significativamente diferentes de los de Eslovaquia, Noruega, Luxemburgo, Polonia, Hungría, Letonia y Estados Unidos. Aunque España figura en el puesto 26 de la lista, la falta de significatividad estadística de las diferencias con los países mencionados hace que España se sitúe en un puesto indeterminado entre las posiciones 22 y 24 entre los países de la OCDE, o entre las posiciones 25 y 28 entre los 41 países participantes. (Figura 2.5)

Por contenidos, los alumnos españoles se muestran relativamente más débiles en las áreas de Espacio y forma (476 puntos) y Cambio y relaciones (481). Se muestran más fuertes en la de Incertidumbre (489) y, sobre todo, en la de Cantidad (492). El conjunto de alumnos de los países de la OCDE se muestra más débil y más fuerte en las mismas áreas, aunque la máxima puntuación la obtienen en Incertidumbre mientras que los españoles lo hacen en Cantidad. Las posiciones ocupadas por España en las cuatro áreas son consistentes, en lugares que oscilan entre los puestos 26 y 28. (Figura 2.6, en la cuál se han señalado con (*) los países no pertenecientes a la OCDE. *ET* quiere decir *error típico* y *S situación superior (ˆ) o inferior (ˇ) respecto a España*.)

En cuanto a los niveles de competencia individual, los resultados de los alumnos españoles se caracterizan por una cierta homogeneidad. Hay menos alumnos con rendimientos muy altos o muy bajos, situándose la mayoría de los alumnos en los niveles intermedios de rendimiento.

		Ordenación			
		Países de la OCDE		Todos los países participantes	
		Posición más alta	Posición más baja	Posición más alta	Posición más baja
Rendimiento significativamente superior a la media de la OCDE	*Hong Kong-China*	-	-	1	3
	Finlandia	1	3	1	4
	Corea	1	4	1	5
	Holanda	1	5	2	7
	Liechtenstein	-	-	2	9
	Japón	2	7	3	10
	Canadá	4	7	5	9
	Bélgica	4	8	5	10
	Macao-China	-	-	6	12
	Suiza	4	9	6	12
	Australia	7	9	9	12
	Nueva Zelanda	7	10	9	13
	República Checa	9	14	12	17
	Islandia	10	13	13	16
	Dinamarca	10	14	13	17
	Francia	11	15	14	18
	Suecia	12	16	15	19
Rendimiento sin diferencia significativa respecto a la media de la OCDE	Austria	13	18	16	20
	Alemania	14	18	17	21
	Irlanda	15	18	17	21
	República Eslovaca	16	21	19	24
Rendimiento significativamente inferior a la media de la OCDE	Noruega	18	21	21	24
	Luxemburgo	19	21	22	24
	Polonia	19	23	22	26
	Hungría	19	23	22	27
	España	22	24	25	28
	Letonia	-	-	25	28
	Estados Unidos	22	24	25	28
	Federación Rusa	-	-	29	31
	Portugal	25	26	29	31
	Italia	25	26	29	31
	Grecia	27	27	32	33
	Serbia	-	-	32	34
	Turquía	28	28	33	36
	Uruguay	-	-	34	36
	Tailandia	-	-	34	36
	México	29	29	37	37
	Indonesia	-	-	38	40
	Túnez	-	-	38	40
	Brasil	-	-	38	40

Figura 2.5: Rendimiento medio de los países participantes: rango en el que se encuentra posicionado con una probabilidad del 95 % (Fuente: OCDE, 2004b)

Espacio y forma

		Media	E.T.	S.
1	Hong Kong-China*	558	(4,8)	^
2	Japón	553	(4,3)	^
3	Corea	552	(3,8)	^
4	Suiza	540	(3,5)	^
5	Finlandia	539	(2,0)	^
6	Liechtenstein*	538	(4,6)	^
7	Bélgica	530	(2,3)	^
8	Macao-China*	528	(3,3)	^
9	República Checa	527	(4,1)	^
10	Holanda	526	(2,9)	^
11	Nueva Zelanda	525	(2,3)	^
12	Australia	521	(2,3)	^
13	Canadá	518	(1,8)	^
14	Austria	515	(3,5)	^
15	Dinamarca	512	(2,8)	^
16	Francia	508	(3,0)	^
17	Eslovaquia	505	(4,0)	^
18	Islandia	504	(1,5)	^
19	Alemania	500	(3,3)	^
20	Suecia	498	(2,6)	^
	Castilla y León	498	(4,4)	^
	País Vasco	493	(2,5)	^
21	Polonia	490	(2,7)	^
22	Luxemburgo	488	(1,4)	^
23	Letonia*	486	(4,0)	-
24	Noruega	483	(2,5)	-
	Cataluña	482	(4,8)	-
25	Hungría	479	(3,3)	-
26	España	476	(2,6)	-
27	Irlanda	476	(2,4)	-
28	Rusia*	474	(4,7)	-
29	Estados Unidos	472	(2,8)	-
30	Italia	470	(3,1)	-
31	Portugal	450	(3,4)	v
32	Grecia	437	(3,8)	v
33	Serbia*	432	(3,9)	v
34	Tailandia*	424	(3,3)	v
35	Turquía	417	(6,3)	v
36	Uruguay*	412	(3,0)	v
37	México	382	(3,2)	v
38	Indonesia*	361	(3,7)	v
39	Túnez*	359	(2,6)	v
40	Brasil*	350	(4,1)	v
	Promedio OCDE	***496***	***(0,6)***	

Cambio y relaciones

		Media	E.T.	S.
1	Holanda	551	(3,1)	^
2	Corea	548	(3,5)	^
3	Finlandia	543	(2,2)	^
4	Hong Kong-China*	540	(4,7)	^
5	Liechtenstein*	540	(3,7)	^
6	Canadá	537	(1,9)	^
7	Japón	536	(4,3)	^
8	Bélgica	535	(2,4)	^
9	Nueva Zelanda	526	(2,4)	^
10	Australia	525	(2,3)	^
11	Suiza	523	(3,7)	^
12	Francia	520	(2,6)	^
13	Macao-China*	519	(3,5)	^
14	República Checa	515	(3,5)	^
15	Islandia	509	(1,4)	^
16	Dinamarca	509	(3,0)	^
17	Alemania	507	(3,7)	^
18	Irlanda	506	(2,4)	^
19	Suecia	505	(2,9)	^
20	Austria	500	(3,6)	^
	País Vasco	499	(2,9)	^
	Castilla y León	498	(4,7)	^
21	Hungría	495	(3,1)	^
22	Eslovaquia	494	(3,5)	-
23	Noruega	488	(2,6)	-
	Cataluña	488	(5,4)	-
24	Letonia*	487	(4,4)	-
25	Luxemburgo	487	(1,2)	-
26	Estados Unidos	486	(3,0)	-
27	Polonia	484	(2,7)	-
28	España	481	(2,8)	-
29	Rusia*	477	(4,6)	-
30	Portugal	468	(4,0)	-
31	Italia	452	(3,2)	v
32	Grecia	436	(4,3)	v
33	Turquía	423	(7,6)	v
34	Serbia*	419	(4,0)	v
35	Uruguay*	417	(3,6)	v
36	Tailandia*	405	(3,4)	v
37	México	364	(4,1)	v
38	Túnez*	337	(2,8)	v
39	Indonesia*	334	(4,6)	v
40	Brasil*	333	(6,0)	v
	Promedio OCDE	***499***	***(0,7)***	

Cantidad

		Media	E.T.	S.
1	Finlandia	549	(1,8)	^
2	Hong Kong-China*	545	(4,2)	^
3	Corea	537	(3,0)	^
4	Liechtenstein*	534	(4,1)	^
5	Macao-China*	533	(3,0)	^
6	Suiza	533	(3,1)	^
7	Bélgica	530	(2,3)	^
8	Holanda	528	(3,1)	^
9	Canadá	528	(1,8)	^
10	República Checa	528	(3,5)	^
11	Japón	527	(3,8)	^
12	Australia	517	(2,1)	^
13	Dinamarca	516	(2,6)	^
14	Alemania	514	(3,4)	^
15	Suecia	514	(2,5)	^
16	Islandia	513	(1,5)	^
17	Austria	513	(3,0)	^
18	Eslovaquia	513	(3,4)	^
	País Vasco	511	(2,9)	^
19	Nueva Zelanda	511	(2,2)	^
	Castilla y León	508	(4,1)	-
20	Francia	507	(2,5)	^
	Cataluña	506	(4,4)	-
21	Irlanda	502	(2,5)	-
22	Luxemburgo	501	(1,1)	^
23	Hungría	496	(2,7)	-
24	Noruega	494	(2,2)	-
25	España	492	(2,5)	-
26	Polonia	492	(2,5)	-
27	Letonia*	482	(3,6)	-
28	Estados Unidos	476	(3,2)	v
29	Italia	475	(3,4)	v
30	Rusia*	472	(4,0)	v
31	Portugal	465	(3,5)	v
32	Serbia*	456	(3,8)	v
33	Grecia	446	(4,0)	v
34	Uruguay*	430	(3,2)	v
35	Tailandia*	415	(3,1)	v
36	Turquía	413	(6,8)	v
37	México	394	(3,9)	v
38	Túnez*	364	(2,8)	v
39	Brasil*	360	(5,0)	v
40	Indonesia*	357	(4,3)	v
	Promedio OCDE	***501***	***(0,6)***	

Incertidumbre

		Media	E.T.	S.
1	Hong Kong-China*	558	(4,6)	^
2	Holanda	549	(3,0)	^
3	Finlandia	545	(2,1)	^
4	Canadá	542	(1,8)	^
5	Corea	538	(3,0)	^
6	Nueva Zelanda	532	(2,3)	^
7	Macao-China*	532	(3,2)	^
8	Australia	531	(2,2)	^
9	Japón	528	(3,9)	^
10	Islandia	528	(1,5)	^
11	Bélgica	526	(2,2)	^
12	Liechtenstein*	523	(3,7)	^
13	Irlanda	517	(2,6)	^
14	Suiza	517	(3,3)	^
15	Dinamarca	516	(2,8)	^
16	Noruega	513	(2,6)	^
17	Suecia	511	(2,7)	^
	Castilla y León	510	(3,9)	^
18	Francia	506	(2,4)	^
	País Vasco	503	(2,9)	^
19	República Checa	500	(3,1)	-
	Cataluña	495	(5,0)	-
20	Austria	494	(3,1)	-
21	Polonia	494	(2,3)	-
22	Alemania	493	(3,3)	-
23	Luxemburgo	492	(1,1)	-
24	Estados Unidos	491	(3,0)	-
25	Hungría	489	(2,6)	-
26	España	489	(2,4)	-
27	Eslovaquia	476	(3,2)	v
28	Letonia*	474	(3,3)	v
29	Portugal	471	(3,4)	v
30	Italia	463	(3,0)	v
31	Grecia	458	(3,5)	v
32	Turquía	443	(6,2)	v
33	Rusia*	436	(4,0)	v
34	Serbia*	428	(3,5)	v
35	Tailandia*	423	(2,5)	v
36	Uruguay*	419	(3,1)	v
37	México	390	(3,3)	v
38	Indonesia*	385	(2,9)	v
39	Brasil*	377	(3,9)	v
40	Túnez*	363	(2,3)	v
	Promedio OCDE	***502***	***(0,6)***	

Figura 2.6: Rendimiento por contenidos (Fuente: INECSE, 2004c)

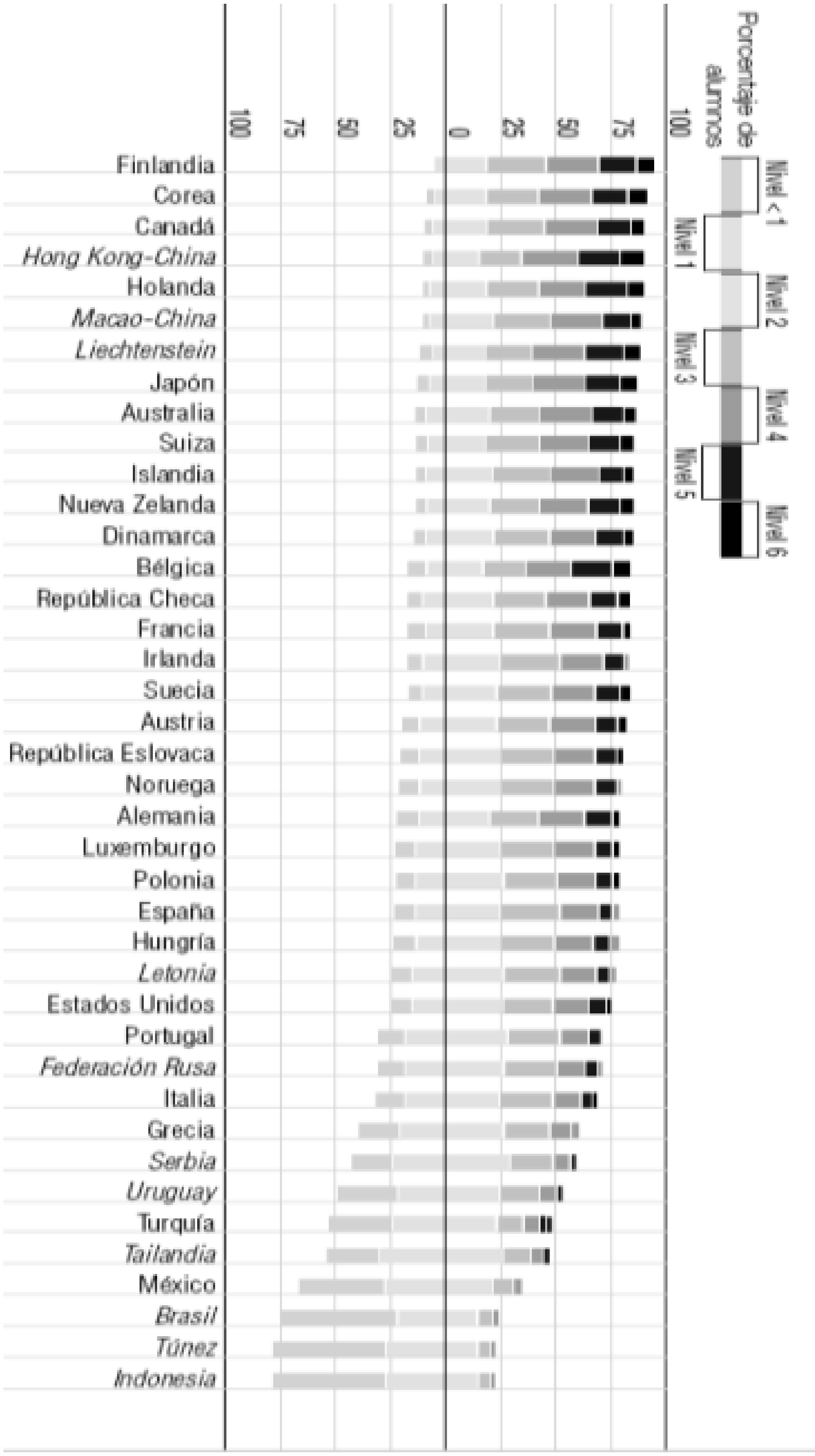


Figura 2.7: Rendimiento de los alumnos por niveles de competencia (Fuente: OCDE 2004b)

En el *nivel 6* de competencia matemática se sitúa un 1,4 % de los alumnos españoles frente a un 4 % de los alumnos de los países miembros de la OCDE. En consecuencia, España tiene relativamente pocos alumnos con resultados excelentes en Matemáticas en comparación con los países de la OCDE. En los niveles *menor que 1* y *1*, España sitúa un 23 % de sus alumnos frente al 21,4 % de los alumnos de los países de la OCDE. Como conclusión, España tiene un porcentaje de alumnos con resultados deficientes en Matemáticas ligeramente mayor que el conjunto de países de la OCDE. El grueso de los alumnos españoles (69,1 %) se concentra en los tres *niveles* intermedios *2, 3 y 4*, en mayor medida que la mayoría de los países y que el promedio de la OCDE (63,9 %), como puede verse en el gráfico de la figura 2.7.

Como se ha podido apreciar, los resultados obtenidos en matemáticas por los alumnos españoles no son muy satisfactorios, en general. Como consecuencia, nuestra educación matemática es susceptible de mejora como se reclama desde distintos foros de profesionales e investigadores.

Con motivo del año mundial de las matemáticas, 2000, declarado como tal por la Unión Matemática Internacional, UMI, en 1992, se celebraron en España una serie de actos que dieron lugar a debates, jornadas y análisis acerca de las matemáticas, en general, y su didáctica, en particular.

De los tres objetivos señalados por la UMI para este año, dos están relacionados con la educación: el segundo de ellos afirma que, puesto que las matemáticas son fundamentales para la comprensión del mundo y el desarrollo humano, es necesario asegurar que la cultura matemática y el acceso a la información científico-matemática sean suficientemente compartidos por los países, por lo que se requiere una educación y formación matemática bien diseñada y articulada; el tercero se refiere a la educación matemática de la sociedad, que debe tener una imagen real de lo que esta ciencia ha representado y representa para el desarrollo integral de la humanidad.

En este entorno Miguel de Guzmán (2000) afirmaba que la estructura actual de nuestro sistema educativo contiene algunos elementos que impiden que los jóvenes reciban en su educación matemática los grandes beneficios que ésta les puede proporcionar. En primer lugar la formación de profesores de primaria -claramente insuficiente, tanto en contenidos como en método, para desarrollar incluso los pobres objetivos actuales- y de secundaria -tan específica en los contenidos que omite muchos importantes aspectos para obtener una visión integral de las matemáticas necesaria para estimular el aprendizaje de sus alumnos-. En segundo lugar el tiempo dedicado al estudio de las matemáticas y la lengua en los primeros niveles de la enseñanza primaria y secundaria, que es mucho menor que el de otros países de nuestro entorno. Al ser las disciplinas instrumentales necesitan de un tiempo suficiente para la integración de las herramientas básicas, sin las cuales ningún aprendizaje podrá conseguirse. Por último, la extensión de la educación obligatoria hasta los 16 años sin una previsión suficiente de las necesidades organizativas que los distintos intereses de un alumnado tremendamente heterogéneo plantean.

En este mismo escenario L. Balbuena (2000) opina que hay que enseñar matemáticas consiguiendo que los alumnos aprendan a *hacer matemáticas*. Para ello es necesario no sólo enseñarles algoritmos y fórmulas de aplicación sino estimularlos para que piensen, para que aprendan a realizar pequeñas investigaciones, enseñarles a utilizar su imaginación y su intuición, a ensayar y errar para corregir y aprender del error, a hacer conjeturas y discutir resultados, a trabajar en equipo y manejar bibliografía, a comprender la importancia de acumular estrategias conocidas para que los futuros problemas sean más asequibles.

Como recomendaciones útiles para conseguir la mejora del futuro de las matemáticas, Xambó (2000) señala las propuestas realizadas por la Sociedad Matemática Americana en el estudio *«Towards excellence: Leading a Mathematics Department in 21st Century»* (1999), entre las que se incluye un compromiso con la investigación y la docencia.

En España, la investigación en didáctica de las matemáticas ha evolucionado mucho desde que Pedro Puig Adam, en el segundo tercio del siglo pasado, se constituyó en el mayor representante de los esfuerzos del profesorado para conseguir una mejora sustancial de la educación matemática. Durante la segunda mitad de la década de los años setenta se inició un movimiento de renovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que culminó con la creación de diversos grupos y asociaciones de profesores y, en especial, de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Hoy en día son muchas las publicaciones periódicas, los congresos, seminarios y jornadas que se afanan en buscar respuestas y alternativas a la insatisfactoria situación de la enseñanza de las matemáticas. Además, la investigación en didáctica de las matemáticas ha empezado a encontrar su lugar en algunas universidades y se ha creado la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Sin embargo la situación descrita por la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española en el año 2002 (RSME, 2002) parece no corresponderse con estos avances pues:

- *No parece haber un consenso sobre la forma más adecuada de articular, organizativa y metodológicamente, la enseñanza de las matemáticas en los niveles obligatorios de* *la educación o en la secundaria no obligatoria; no ha habido un debate abierto entre los profesionales sobre la forma más adecuada de afrontar las nuevas circunstancias, al estilo de lo acaecido para la elaboración de los estándares en USA.*

- *Por tanto no disponemos de directrices consensuadas para la formación de profesores de matemáticas, ante las profundas modificaciones que ha experimentado, en la práctica, el ejercicio de esta profesión de profesor.*

Además la importancia de la investigación en didáctica de las matemáticas, dentro de algunos foros profesionales, sigue siendo deficiente. Sirva como ejemplo la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, U.C.M., en cuya memoria del curso 2002-2003, de las 13 tesis, 18 trabajos de investigación, 52 proyectos financiados y 296 publicaciones que aparecen tan sólo 2 versan sobre didáctica de las matemáticas, a pesar de contar entre sus líneas de investigación con esta temática. Esta discriminación, que aún existe en la actualidad, entre la investigación matemática y la investigación en didáctica representa un escollo para el desarrollo de la investigación en educación matemática y, como consecuencia, para la mejora efectiva de la didáctica de esta materia en las aulas. En muchos casos, la sensibilización de los profesionales de las matemáticas hacia los problemas de la enseñanza se ha circunscrito a los docentes no investigadores, o a los investigadores en pedagogía más que a los propios matemáticos. Aunque, a nivel personal, cada vez son más los investigadores matemáticos que se preocupan por la didáctica de esta ciencia es difícil encontrar Facultades de Matemáticas que promocionen estas investigaciones. Pero los profesores de matemáticas se forman tanto en las facultades de Educación, para la educación primaria, como en las de Matemáticas, para la educación secundaria y superiores, por lo que es necesario una implicación mucho más activa de estos dos ámbitos en la formación inicial de los futuros docentes.

En el Congreso Internacional, organizado en 1999 en Madrid por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales con el título *The training and performance of primary teachers in mathematics education* se denunciaba una degradación de la enseñanza de las matemáticas en primaria (Guzmán, citado en Blanco, 2001) y se concluía que una de las causas principales es la escasa y deficiente formación del profesorado de primaria en el área de matemáticas (Rico y Carrillo, citados en Blanco, 2001).

La formación inicial matemática de los maestros es escasa. En la U.C.M. el título de maestro tan sólo ostenta 18, de los 173 créditos obligatorios, los mismos que la didáctica de las ciencias sociales o de las ciencias de la naturaleza, frente a los 22,5 del lenguaje, que también son pocos para un área instrumental. La situación en otras universidades no es más halagüeña. Una investigación acerca de los planes de estudio de sesenta y nueve centros de formación inicial de maestros (Abraira y colaboradores, citada en Blanco, 2001) revelaba una media de 13,5 créditos troncales y obligatorios en asignaturas relacionadas con las matemáticas en la especialidad de primaria, lo que resultaba un 6,4 % de los créditos totales, y un 3 %, en el resto de especialidades. Una revisión posterior de los nuevos planes de estudio (Rico y Carrillo, citados en Blanco, 2001) fijaba estos porcentajes en el 8 %, para la especialidad de primaria, y el 2 %, para las demás especialidades.

Además, no existe una especialidad en didáctica de las matemáticas, lo que claramente responde a la estructuración del sistema educativo español que considera la necesidad de especialistas para impartir lengua extranjera o educación física, pero no para impartir las materias instrumentales, ni siquiera en los cursos superiores de la educación primaria. Este hecho se agrava con el actual sistema de oposiciones que, al no contemplar suficientes plazas para los maestros de la especialidad de primaria, está potenciando que los maestros especialistas -los que menos han estudiado didáctica de las matemáticas (en algún caso, como en la especialidad de educación especial de ciertos centros, nada)- se conviertan en maestros generalistas y por tanto, encargados de la educación matemática en los colegios de primaria (Blanco, 2001).

En cuanto a la formación inicial de los profesores de secundaria, hay una preparación pedagógica escasa o incluso nula. En la U.C.M., de los 67,5 créditos que configuran el perfil de metodología (especialidad que orienta hacia la didáctica) tan sólo los 7,5 créditos de la asignatura de metodología son específicos de didáctica de las matemáticas. Además se da la paradoja de que ni siquiera la asignatura de metodología ostenta el máximo peso en créditos dentro de las optativas que se ofrecen para dicho perfil. Esta formación específica apenas sobrepasa el 11 %. Para completar el perfil es necesario realizar 15 créditos de prácticas de enseñanza que, junto con los créditos teóricos, representan menos de un 8 % del total de la licenciatura.

Los futuros profesores de matemáticas -doctores, licenciados, ingenieros o arquitectos- deben completar su formación específica con la superación del Curso de Aptitud Pedagógica, CAP, hasta que se regule el futuro título de postgrado de Formación del Profesorado de Educación Secundaria (Ley Orgánica de Educación, 2/2006, de 3 de mayo).

El CAP, tal y como lo ofrece la U.C.M., tiene una característica que lo hace especialmente distinto de otros similares. La metodología autoinstructiva, acompañada de tutorías, es un sistema de enseñanza flexible y respeta los estilos cognitivos de los alumnos. Dicho curso consta de una formación general acerca de la educación, el sistema educativo y el proceso de enseñanza y aprendizaje y una específica de la didáctica de las matemáticas, además de unas prácticas, de 100 horas -de las cuales el estudiante debe impartir un mínimo de 10-, en un centro de educación secundaria, tutelado por un profesor de dicho centro. Los licenciados en matemáticas por la U.C.M. que han obtenido el perfil de metodología pueden solicitar la convalidación de la formación en didáctica de las matemáticas y de las prácticas de enseñanza.

La evaluación de este curso consta de una prueba objetiva, tipo test, y la valoración positiva de la memoria de las prácticas de enseñanza. Este tipo de evaluación puede no asegurar una formación suficiente para la realización de la función docente, pues la evaluación tipo test es poco completa en cuanto a exposición de conocimientos. Además, las horas presenciales son escasas -tres días- por lo que la formación didáctica recibida está muy sesgada, al reducirse a una exposición de los contenidos de modo teórico desligados de la formación adecuada en prácticas, que se recibe por otro lado y sin un programa definido.

En otras universidades los cursos se estructuran de otras maneras, con más o menos horas presenciales y de prácticas, pero con unos resultados formativos similares, ya que están orientados a evaluar el aprendizaje de los estudiantes y no su capacidad para enseñar. Según Blanco (2002) esta estructura de la formación de los profesores de matemáticas para la educación secundaria no es la más adecuada, pues los conocimientos aprendidos, tanto en la licenciatura como en el CAP, no aseguran la calidad en relación con la enseñanza ya que se basan en un modelo sumativo y no integrado, con las didácticas y el conocimiento profesional desconectados de los contenidos disciplinares, y con el inconveniente adicional de que muchos licenciados que acceden al CAP consideran la enseñanza como una salida de segundo orden y están poco motivados por la formación del profesorado.

Lo anterior representa una reivindicación de la importancia de la didáctica en las matemáticas y una denuncia de la escasez de preparación específica de un profesorado no especialista, tanto a niveles de enseñanza elementales, en los que se carece de una suficiente preparación matemática, como a niveles medios, en los que se recibe una formación matemática importante y las carencias son pedagógicas. Tanto en un caso como en otro se presentan carencias graves para la práctica profesional que el profesor deberá desempeñar y que la sociedad va a exigirle. El profesor de matemáticas de hoy debe dominar los conocimientos matemáticos que tiene que impartir, con una profundidad epistemológica e histórica que no suele ofrecerse en la formación habitual, además de conocer los principios psicopedagógicos básicos para adecuar su didáctica al alumno, desde una perspectiva evolutiva. Estas carencias llevan a Blanco (2002) a afirmar que *«la mayoría de los profesores hemos aprendido por la técnica del ensayo y el error que es perjudicial para todos, pero sobre todos para los alumnos que nos padecieron en los primeros años de nuestra profesión».*

2.4.3. Didáctica en educación matemática: Las dificultades del conocimiento matemático

Según hemos visto, la enseñanza de las matemáticas ha tenido una trayectoria predominantemente *academicista*, poco participativa y desligada por completo de la realidad del alumno. Sin embargo, de un tiempo a esta parte los aspectos psicológicos han empezado a encontrar su reconocimiento en la enseñanza de las matemáticas, al menos en cuanto a las investigaciones se refiere (etnomatemáticas, teoría de situaciones, etc.). Estas investigaciones intentan poner de manifiesto la necesidad de fomentar en los docentes el espíritu pedagógico de la teoría constructivista:

- Reconociendo la importancia de una estimulación del aprendizaje de relaciones para fomentar la construcción de estructuras mentales en las que enmarcar los conocimientos de forma significativa y no exclusivamente memorística y falta de comprensión.

- Destacando su función de ayuda a los alumnos para encontrar conexiones y para modificar puntos de vista, favoreciendo la movilidad de pensamiento que el alumno necesita para alcanzar la autonomía en sus razonamientos.

- Favoreciendo la planificación temporal del aprendizaje respetando el ritmo de desarrollo del alumno, generalmente más lento si pretendemos la comprensión y no la mera memorización de datos.

- Procurando la estimulación y aprovechamiento de los métodos informales que el alumno inventa en la resolución de problemas, para así establecer unas sólidas bases de los conocimientos matemáticos y no presentar las matemáticas como algo mágico, completamente ajeno al alumno.

- Facilitando la adaptación a los conocimientos previos del alumno en cada momento, para conseguir el desarrollo continuo de su conocimiento matemático y evitar la sensación de fracaso que produce el estudio de una asignatura difícil de enseñar y aprender, debido a que se trata de una materia jerarquizada en la que es necesaria una buena comprensión de las cuestiones anteriores para adquirir un nuevo concepto (Informe Cockcroft, 1985).

- Aprovechando el interés natural de los alumnos en el juego, que facilita el aprendizaje y produce una sobremotivación.

Tradicionalmente el debate de la didáctica de las matemáticas se ha centrado en dos orientaciones, según Chevallard, Bosch y Gascón (1997), una centrada en el alumno y en el aprendizaje significativo -en la que cobra gran importancia la psicología- y otra centrada en el profesor y en la formación del mismo -orientada a los fundamentos donde importan la psicología educativa, la sociología, la historia de las matemáticas, la pedagogía y la epistemología de las matemáticas-, sin embargo, ninguna de las dos cuestiona los contenidos impartidos. Por ello es necesaria una ampliación del punto de vista de la didáctica de las matemáticas hacia una nueva situación en la que nociones como los conceptos matemáticos, las rutinas, las matemáticas creativas, los problemas, el álgebra, etc... cobran valor como objetos de estudio en sí mismos.

En el apartado siguiente se tratan las matemáticas como objeto de la didáctica y se analizan las dificultades propias de su enseñanza-aprendizaje.

Como ya se ha dicho, el aprendizaje en matemáticas no se realiza de fuera adentro, pero tampoco de dentro afuera, exclusivamente, sino que se construye en un compartir del alumno con el entorno social, sus profesores, sus compañeros, su familia y sus experiencias, que debe ser lo suficientemente motivador -estimulante y provocador- para que el alumno desarrolle sus conocimientos adquiriendo como herramientas de pensamiento nuevos conceptos y estructuras matemáticas.

Se define el aprendizaje matemático como

> *«un proceso complejo de aprovisionamiento de recursos para actuar intelectualmente. Proceso siempre inacabado cuyos dos rasgos esenciales son, dadas las características epistemológicas de la matemática, operatorio y semiótico» (Alcalá, 2002).*

En esta definición se debe entender la operatividad en un sentido amplio de operaciones mentales, y no exclusivista de la aritmética o el álgebra, y la semiótica como el estudio de las reglas de combinación de los signos -habitados por los oportunos símbolos, como se explicará en su momento- matemáticos.

Este autor considera las matemáticas como una tecnología simbólica,

> *«un sistema simbólico complejo que, paulatinamente, los niños han de ir adquiriendo a lo largo de su escolaridad, haciéndolo suyo y convirtiéndolo en herramienta del pensamiento».*

Ciertamente, las matemáticas se caracterizan por exigir un elevado nivel de formalización ya que el lenguaje matemático es convencional y, a veces, no muy fácil de entender. Aprender matemáticas requiere así dos esfuerzos diferentes: el primero, de comprensión -*recreación* adecuada- de los conceptos matemáticos y, el segundo, de aprendizaje de su expresión particular para la formalización. Esta priorización en el tiempo no es casual, pues el lenguaje podrá afianzar una idea previa pero nunca crearla si no la hay. Así, el desarrollo conceptual debe producirse previamente en la mente del aprendiz para proporcionar un significado completo a la propia formalización.

Este conocimiento previo a la formalización constituye lo que se ha dado en llamar conocimiento *informal* -sin formalización- del alumno y asegura el aprendizaje significativo y un correcto desarrollo cognitivo.

> *«Los alumnos a quienes se introduce con excesiva premura en la verbalización de situaciones no exploradas en el nivel perceptivo y activo no dispondrán de las dimensiones que hacen posible el diálogo intelectual. Carecerán del realismo que sostiene el símbolo y le presta el dinamismo necesario para reemplazar una toma de conciencia por otra»* (Gattegno, 1964).

Las dificultades que el alumno encuentra por este motivo no son pocas. La didáctica de las matemáticas persigue, entre otros, el objetivo de utilizar el lenguaje matemático para expresar informaciones y operar sobre ellas con precisión y rigor. Este objetivo domina tradicionalmente el desarrollo de la misma en el aula hasta el punto de supeditar la comprensión lógica de los conceptos al correcto uso de la formalización matemática. El error está en una tremenda confusión entre el fin que buscamos y los medios utilizados para alcanzarlo (Mialaret, 1986).

Es cierto que el rigor formal representa un objetivo importantísimo en el aprendizaje de las matemáticas, pero no por eso tiene que ser el mejor medio para conseguir éste. De hecho las investigaciones psicopedagógicas demuestran que el pensamiento del niño difiere mucho del pensamiento adulto y, por esta razón, nuestros esquemas mentales, con un grado de formalización adquirido, no son aplicables al niño que aún tiene que construir los suyos. Si el niño es incapaz de comprender el lenguaje formal matemático demasiado rápido, mucho más de expresarse en él de una forma rigurosa, como se le exige con prontitud.

Otros autores, además de los citados, como Baroody, Castelnuovo, Chevallard, Llinares, Santaló, Skemp, etc., han puesto de manifiesto la importancia del conocimiento informal por encima de la formalización del mismo:

> *«en matemáticas es más importante la etapa de adquisición de conocimientos, que es creativa, que la etapa de formalización de los mismos, que viene impuesta por quienes la hicieron»* (Santaló, 1994).

Se da repetidamente la circunstancia de que alumnos capacitados para resolver un problema por métodos informales propios se ven incapaces de expresar correctamente dicha resolución de una manera formal. El desasosiego que experimenta el alumno cuando se califica de *incorrecto* su procedimiento de resolución por este motivo, que él considera válido pues no está capacitado para evaluar en su justa medida la deficiente expresión que manifiesta, produce un sentimiento de insolvencia matemática que no se corresponde con la realidad.

Distinguir el aspecto formal del lenguaje y el pensamiento matemático informal, a cierta edad, es fundamental para evitar el desánimo de los estudiantes que se inician en el estudio de las matemáticas. De esta forma una excesiva formalización temprana, cuando el alumno no está capacitado para ella, puede crear una sensación de fracaso e incomprensión que fomenta la desmotivación, ya que desliga al estudiante del proceso evolutivo del conocimiento de las matemáticas.

> *«Cuando la instrucción formal no corresponde a su nivel los niños tienden a percibir las matemáticas como algo difícil, misterioso y hasta amenazante»* (Baroody,1988).

Este halo de misterio, esta percepción de las matemáticas como algo mágico puede sobrevenir en cualquier momento de su estudio, no necesariamente en los primeros años. Las matemáticas están llenas de conceptos concatenados y ello aumenta la dificultad de un conocimiento comprensivo de las mismas. Cada nuevo concepto se apoya en uno o varios adquiridos con anterioridad y precisa del establecimiento de ciertas relaciones entre ellos que serán fundamentales para aprendizajes futuros, el fallo de uno sólo de estos pequeños engranajes produce la desconexión de las estructuras que soporta y la incomprensión del edificio matemático con el que se relaciona. Si un concepto se introduce antes de tiempo, cuando la madurez del niño no está preparada para su reconstrucción, o se hace demasiado velozmente, tanto que la comprensión no resulta completa, las consecuencias no sólo son la incomprensión de dicho concepto y la imposibilidad de continuar de forma significativa el aprendizaje, sino que existe un efecto desmotivador importante debido a la sensación de fracaso que el alumno experimenta en su práctica matemática.

Esta desmotivación produce una disminución de la confianza del alumno en sí mismo y en sus capacidades y el temor a nuevas frustraciones impiden que progrese de un modo normal en su conocimiento de las matemáticas. El alumno comienza, de este modo, a elaborar una estrategia de defensa hacia estas decepciones y procura el éxito matemático instantáneo, a través de la memorización de conceptos y procedimientos sin comprensión significativa, de forma que cada vez se distancia más del aprendizaje matemático al que aspira. En última instancia este proceso conduce al abandono del estudio de las matemáticas por incomprensión de las mismas, incomprensión que oculta tras de sí todos estos motivos.

Por todo esto resulta necesario establecer un vínculo sólido entre el conocimiento informal del alumno y el formal de la escuela, como advierte Llinares (Llinares y Sánchez, 1994), pues es un hecho que muchos niños tienen dificultades a la hora de utilizar el conocimiento escolar en situaciones fuera de la escuela y de caracterizar el aprendizaje matemático como un proceso activo de construcción del conocimiento. De esta manera, la comunicación en el aula no será una mera transmisión de significados, sino que será *el receptor (guiado por el profesor) el que dota de significado a las señales que recibe desde sus propias referencias cognitivas*.

Kaput (1985) también nos advierte de los peligros de articular el currículo alrededor de la explicación-aplicación tradicional, pues no sólo lo considera un error pedagógico, sino incluso epistemológico. Propone pasar de las aplicaciones a la *acción matemática*, pensando en términos de modelos y diseño de estrategias a través de las cuáles surgen las matemáticas como estructura.

> *« Nuestro currículum, como muchos han reconocido, no funciona con el enfoque "primero habilidades, luego aplicaciones". Esto no es un simple error pedagógico, sino epistemológico y desde casi todos los puntos de vista. En lugar de "aplicaciones" deberíamos pensar en términos de modelización y diseño, de donde surge la matemática ya sea como una estructura en lo construido o en las herramientas usadas en dicha construcción. (Our curriculum, as many have acknowledged, gets it absolutely wrong with the "skills-first, applications later" approach. It is not merely wrong pedagogically, but is wrong epistemologically and in almost every other way. Instead of "applications," we should be thinking in terms of modeling*

> *and designing, from which the mathematics emerges either as a structure in what we make, or in the tools we must use in the making)»*[1].

La enseñanza activa se presenta como una solución al problema de la comprensión matemática, como veremos a continuación. La actividad matemática se concreta en la matematización de la realidad, es decir, la expresión mediante conceptos matemáticos de los objetos y las relaciones observadas en una situación para su comprensión y resolución.

En la didáctica tradicional esto se identifica con la resolución de problemas. Ya se ha dicho que, en la mayor parte de los casos, los problemas se encuentran descontextualizados del entorno de los alumnos. Además de no ser las actividades más frecuentes en el aula de matemáticas -abundan los ejercicios de aplicación directa de una explicación previa del profesor-, lo que fomenta en los alumnos la idea de que las matemáticas son una ciencia de reglas obsoletas, agotada y vacía de utilidad para la vida.

El aspecto abstracto de las matemáticas debe mantenerse, en la didáctica, siempre en relación constante con el nivel de lo concreto y establecer entre ambos relaciones reversibles que permitan al alumno abstraer los conceptos y propiedades matemáticos de la realidad y, al tiempo, estructurar el estudio de ésta mediante su propio conocimiento matemático. Lo importante en el aprendizaje de las matemáticas no son los conceptos y procedimientos programados en la didáctica tradicional, sino las estrategias que el alumno aprende de las matemáticas para usar en su vida futura. En este sentido denunciaba Puig Adam el fracaso de los matemáticos en la didáctica *porque no enseñamos matemáticas*.

El niño debe aprender cualidades como relacionar, simbolizar, deducir, inducir, analizar, etc., a través de las matemáticas y es mediante actividades variadas, con la misma cualidad en común, o en una misma actividad, estudiada desde distintas perspectivas, como él mismo es capaz de extraer dicha cualidad para su interiorización constructiva. Por eso el enfoque de la enseñanza debe dirigirse hacia etapas de pensamiento, más que hacia contenidos curriculares concretos, que se desarrollan a través de la actividad matemática y no de la sola memorización de conceptos y procedimientos matemáticos sin valor significativo.

En palabras de Puig Adam (1964)

> *«Es inútil intentar remediar a posteriori los perjuicios causados por una educación demasiado abstracta, (...), engullendo de cuando en cuando píldoras de concreto bajo la forma de problemas y ejercicios de aplicación».*

[1]La traducción es propia, por ello aparece entre paréntesis la versión original.

La *matemática activa* se articula alrededor del trabajo matemático de los estudiantes en la resolución de problemas y cuestiones adecuadas para procurar el desarrollo de los conceptos matemáticos propuestos.

Tradicionalmente se han distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas. Dewey (1989) señala las siguientes:

1. *Se siente una dificultad: localización de un problema.*
2. *Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto.*
3. *Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.*
4. *Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.*
5. *Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba.*

Polya (1987), por su parte, establece cuatro fases de trabajo:

1. *Comprender el problema.*
2. *Concebir un plan.*
3. *Ejecutar el plan.*
4. *Examinar la solución obtenida.*

Ambos procesos recorren el mismo camino que el expresado en la página 43 al hablar de las fases de la actividad matemática según el estudio PISA.

El proceso de resolución de un problema comienza con la delimitación y comprensión del problema real para poderlo resolver, que corresponde a las dos primeras fases, según Dewey, y la primera, según Polya y PISA. En él se realizan actividades como:

- Leer comprensivamente el problema discriminando la información relevante e irrelevante.
- Identificar los datos y las relaciones implícitas entre ellos.
- Entender cuál es la tarea o cuestión que se nos plantea para resolver.

El proceso continúa con la traducción del problema desde el mundo real al lenguaje matemático. Esto se conoce como matematización horizontal (INECSE, 2005b). La *matematización horizontal* se sustenta sobre actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático, lo que implica una estructuración de la realidad isomórficamente a una estructura matemática.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez traducido el problema al lenguaje matemático comienza una fase en la que el alumno hace suposiciones y plantea cuestiones, utilizando conceptos y destrezas matemáticas con el fin de despegarse de la realidad y encontrar distintos caminos que conduzcan a la solución. Se denomina *matematización vertical* (INECSE, 2005b) e incluye actividades como:

- Utilizar diferentes representaciones de acuerdo con la situación y el propósito buscado y comprender las interrelaciones entre ellas.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, entendiendo su relación con el lenguaje natural y manejando adecuadamente los enunciados y objetos matemáticos.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.
- Argumentar adecuadamente haciendo uso del sentido heurístico, las demostraciones y otros razonamientos matemáticos.
- Generalizar, consolidando la información extraída de casos particulares en un marco superior.

Estos dos procesos se corresponden con las fases tercera, según Dewey, segunda según Polya y segunda y tercera, según PISA.

A continuación se elige la solución más adecuada y se resuelve el problema, según la penúltima fase de los tres modelos. En esta fase el alumno utiliza los conceptos y procedimientos matemáticos aprendidos que ha considerado necesarios después de la fase anterior y las actividades que se realizan son las mismas que en ésta. El paso posterior en la resolución de un problema, y última fase de cualquiera de los modelos propuestos sobre resolución de problemas, implica reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados. Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo. Algunos aspectos de este proceso de validación y reflexión son:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución, expresándose a través de una amplia variedad de medios, de forma oral y también escrita.
- Criticar el modelo y sus límites, relacionándolo con el conocimiento anterior.

Para Fortuny (1990) las acciones de enseñanza-aprendizaje pasan por cuatro fases bien diferenciadas: experimentación, representación, comunicación y conceptualización. Se corresponden a grandes rasgos con las cuatro fases definidas -delimitación y comprensión del problema, matematización del mismo, resolución y reflexión acerca del proceso seguido y los resultados obtenidos- aunque son más amplias en su definición, pues no se refieren únicamente a resolución de problemas.

En la última fase, la reflexión y la recursión son acciones paralelas que se enmarcan en los procesos de concienciación y significación, respectivamente. Es precisamente esta fase la que posibilita el aprendizaje, al permitir al alumno establecer relaciones entre el proceso seguido y los resultados obtenidos y otros conocimientos propios anteriores. Además, de esta manera, se favorece el desarrollo del conocimiento matemático como proceso evolutivo continuo e inacabado.

En el marco de la triple dimensión activa-especulativa-estética de las matemáticas, que se ha destacado en 2.3.2, este proceso de desarrollo de la actividad matemática que se acaba de definir se relaciona con las capacidades lógicas del ser humano. En palabras de Mialaret (1986),

> *«Estudiar matemáticas es esencialmente aprender a razonar y habituarse a tomar conciencia del propio razonamiento. (...) Las reglas de deducción o, más generalmente, del razonamiento matemático, no son innatas; exigen un cierto aprendizaje».*

Dugas (1976), ya citado en la página 26 destacando los bienes que ofrece la educación matemática, también lo afirma:

> *«las matemáticas educan la capacidad de razonamiento».*

El razonamiento incluye el desarrollo de capacidades como:

- Plantear cuestiones propias de las matemáticas .
- Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones.
- Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas).
- Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

A pesar de ser un rasgo propio y necesario del ser humano, el niño encuentra grandes dificultades en la comprensión de los razonamientos matemáticos y en la creación de los suyos propios, en el ámbito matemático. La razón vuelve a ser la descontextualización del aprendizaje matemático y la baja significatividad que los conceptos matemáticos tienen para el niño.

La noción de *idea feliz*, tan común en las matemáticas, favorece de continuo la desmotivación de los alumnos que se inician en la lógica matemática. Con esta expresión suele hacerse referencia a los saltos significativos en los razonamientos que hacen que éstos sean difíciles de seguir o incluso imposibles, ya que algunos argumentos se presentan como por arte de magia desligados de la cadena natural lógica.

Como ya se ha dicho, la actividad matemática no comporta únicamente el conocimiento de las nociones y conceptos que intervienen, sino que requiere la comprensión de todas las relaciones que enmarcan dichas nociones en sus esquemas cognitivos correspondientes para, de este modo, ser capaz de aplicarlas a la resolución de nuevas situaciones. Esto exige una actividad creativa basada en la intuición, que a menudo resulta arbitraria y repentina para el alumno fomentando el carácter mítico que el mismo adjudica al quehacer matemático y desvinculándolo del proceso lógico que subyace, el cual debe aspirar a comprender.

> *«La intuición existe y es la consecuencia de una forma de imaginación. Pero también es el resultado de conocimientos precisos perfectamente asimilados y de numerosas asociaciones nacidas durante el aprendizaje».*

Estas palabras de Mialaret (1986) confirman que la intuición también se "aprende". El entrecomillado de este concepto no es casual ya que no es un conocimiento que pueda construirse en el sentido que se ha definido en este trabajo, sino que es un hábito que puede fomentarse.

Según Hadamard (1947) esta intuición proviene del trabajo mental del inconsciente y, aunque la solución se presenta de modo aparentemente instantáneo, es fruto de dicho proceso que puede quedar oculto a la propia introspección consciente. De esta manera la práctica matemática genera más seguridad en una *buena intuición*, pues afianza las relaciones entre conceptos subyacentes a los esquemas matemáticos. Dichas relaciones son las que permiten el trabajo inconsciente del que se obtienen algunas buenas ideas, que posteriormente llamamos intuiciones por no provenir de una acción consciente. Así pues,

> *«una expresión, una propiedad, debe provocar todo un torrente de ideas [reflejo intelectual] "adventicias" de forma que el alumno "proyecte" sobre el dato perceptivo (geométrico o algebraico) toda una serie de "posibles"»* (Mialaret, 1986).

Es en este sentido en el que podemos afirmar que el trabajo matemático del alumno educa su intuición, pues un mayor hábito en el razonamiento matemático aumentará la actividad de dicho reflejo intelectual inconsciente y, como consecuencia, la producción de *posibles* que el alumno recibe en su consciente para continuar el ejercicio racional sobre el objeto matemático en cuestión.

Alsina reivindicaba, en el XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática en el Nivel Medio celebrado en Castellón durante septiembre de 2004, que *la intuición se ha matado con la artillería pesada*. Se refiere a que una excesiva formalización ha desbancado al uso de la intuición en las clases de matemáticas por lo que, para los alumnos, *en matemáticas todo vale*. La falta de realismo ha condenado las matemáticas a ser un conjunto de reglas sin conexión con la realidad y cuyos principios y resultados no deben ajustarse a ésta. Por ello proponía partir de problemas sacados del mismo entorno de los estudiantes para recuperar la intuición y contextualizar y significar el aprendizaje de las matemáticas.

Decía Dugas (1976), que

> *«es de desear que la enseñanza matemática no exagere el dogmatismo y multiplique, por el contrario, recurriendo a la historia de la ciencia (...) los ejemplos en los que, según la feliz fórmula de Hadamard, el rigor no tuvo otro objeto que sancionar y legitimar las conquistas de la intuición».*

Por este motivo no podemos ignorar la importancia de la intuición en la práctica matemática, por lo que su didáctica debe suscitar el pensamiento intuitivo y no sólo el razonamiento, mediante actividades creativas y aperturistas que fomenten la generación de muchas respuestas posibles, en vez de limitar las opciones a una única respuesta válida que el alumno acaba aprendiendo a averiguar sin intervención del pensamiento lógico. Debemos aceptar la importancia de los métodos deductivos, pero aceptando el papel de la intuición en la producción matemática, pues sin imaginación no es posible el progreso, ni la evolución.

Para terminar citaremos a Santaló (1994), que destaca este aspecto de la educación matemática como el objetivo primordial que se debe perseguir:

> «*No es tan importante saber mucha matemática ya elaborada, como tener el hábito natural de dirigir el pensamiento y adoptar decisiones según las reglas y métodos de la matemática*».

Y continúa, *la enseñanza personalizada surge como una necesidad.* Una necesidad que surge de este mismo objetivo de educar la razón conforme a los métodos matemáticos, por lo que la importancia de la relación profesor-alumno quedará de manifiesto como producto de esta personalización de la enseñanza.

2.4.4. La comunicación entre el profesor y el alumno en la educación matemática

Como en toda relación humana de comunicación, la principal motivación para que ésta se establezca debe ser la necesidad de comunicar. Las necesidades de los dos participantes de esta comunicación son muy distintas, pero similares en algunos aspectos. La necesidad del profesor surge de su posición dominante respecto al conocimiento, obviando otras razones particulares y personales, como la vocación, la realización personal, el altruismo, etc. La necesidad del alumno surge de su propia posición respecto al conocimiento, en este caso de debilidad. La paradoja aparece en cuanto a que estos roles de fortaleza-debilidad son intercambiables, es decir, las limitaciones del profesor para trasmitir objetivamente un conocimiento, que es subjetivo, ofrecen su debilidad al alumno que ocupa la posición dominante como demandador.

De estas mismas necesidades se deducen las actitudes propias del profesor y el alumno en cuanto a la comunicación educativa. El profesor debe mostrarse abierto a darse en la comunicación educativa tal cual es, ofreciendo su conocimiento, pero también su persona, sus limitaciones y sus fortalezas para compartirlas con el alumno y favorecer el crecimiento del conocimiento de éste, que alcanza al terreno personal. El alumno debe ser curioso e interesado, incluso egoísta como demandador del conocimiento. Estas cualidades posibilitarán su rol de fortaleza en la comunicación, aunque no debemos olvidar que el ofrecimiento debe ser mutuo para que la relación de comunicación sea fructífera y sólo desde su humildad el alumno podrá construir su propio conocimiento en compañía de su profesor. De esta forma la idea de autoridad que tradicionalmente ha acompañado a la enseñanza se transmuta en respeto, surgido de esta dialéctica de fuerzas que soporta la comunicación.

Según la pedagogía de las matemáticas propuesta por Gattegno (1964), la didáctica de las matemáticas debe atender a tres factores diferentes: las personas y los mecanismos mentales, es decir, el proceso de aprendizaje y el pensamiento matemático; las estructuras matemáticas y su dinamismo propio; y las relaciones entre las estructuras y la realidad, en forma de aplicaciones de las matemáticas. Por esta razón el profesor debe ser: psicólogo, para conocer los mecanismos mentales de las personas y adaptar su pedagogía a ellos; matemático, en el sentido de conocer lo que distingue las matemáticas de otras ciencias a fin de poder enfocar su pedagogía; y con perspectiva social, para que lo que enseñe sea útil y aplicable a la realidad.

Las cualidades que el buen profesor debe tener se deducen de éstas definidas por Gattegno:

El profesor debe, desde su fortaleza, estar en posesión del conocimiento. Este conocimiento no sólo se limita a los contenidos estrictamente matemáticos, es decir, técnicos -conceptos y procedimientos, teóricos o de aplicación-, históricos -para contextualizar las situaciones de aprendizaje- o epistemológicos - para intervenir adecuadamente en la construcción del conocimiento por parte del alumno-, sino que alcanza los psicopedagógicos -procesos de la razón, epistemología del conocimiento y didáctica- (Shulman, 1986). Estos grandes rasgos deben caracterizar los programas de formación inicial del profesorado que con frecuencia adolecen de carencias, bien sea en el conocimiento psicopedagógico o matemático, como ya se adelantó en las páginas 49 y 53. Además, como parte de los conocimientos didácticos, cabe destacar lo que Fortuny y Azcárate (1994) llaman *conocimiento gerencial* o *de toma de decisiones juiciosas, rutinarias y heurísticas frente a las situaciones complejas que comporta la enseñanza de las* *matemáticas* -aunque ellos lo destacan como una subcategoría aparte de lo pedagógico-. Esta toma de decisiones está relacionada con la intervención necesaria del docente, discutida en la página 12.

El profesor debe moverse por un claro interés en su función dentro de la comunicación educativa, tanto por una necesidad esencial de autorrealización en el trabajo bien hecho, como por la motivación ajena que esta actitud provoca en el alumno.

La primera razón mueve el interés hacia la búsqueda constante del modo de adecuar su conocimiento singular para la comunicación. La subjetividad del conocimiento del profesor es un obstáculo para la comunicación, ya que la objetivación del mismo implica una pérdida de su esencia. Por ello este proceso de "transmisión" del conocimiento del profesor al alumno debe ser especialmente cuidado. El entrecomillado de la palabra transmisión nos dice que no es propiamente eso, como establece la didáctica tradicional, sino una reconstrucción del conocimiento por parte del alumno, acompañado del profesor, es decir, una reconstrucción conjunta del conocimiento, como ya se viene diciendo en secciones anteriores.

El concepto de razonamiento pedagógico (Llinares, en Llinares y Sánchez, 1994) o la transposición didáctica de Chevallard (1997) se basan en esta adecuación del conocimiento del profesor para la comunicación, definida por Shulman (citado en Llinares y Sánchez, 1994) como

> *«la capacidad del profesor de transformar su conocimiento sobre el contenido en representaciones que son pedagógicamente fuertes y adaptables a las diferencias en habilidad y conocimiento de sus estudiantes».*

Entender esta diferencia entre lo que el profesor sabe y cómo enseñarlo es clave en la comunicación educativa. La ruptura entre estos conceptos permite al docente hacerse cargo de su verdadera labor educativa y considerarla desde un punto de vista epistemológico.

Llinares (Llinares y Sánchez, 1994) define las siguientes fases en el proceso cíclico del razonamiento pedagógico:

- Comprensión de la materia (en este caso, las matemáticas) y las relaciones en ella misma y entre ella y otras disciplinas.

- Transformación, es decir, interpretación crítica de los materiales, formas alternativas de representar el contenido, adaptación de los materiales, situaciones, etc., a los alumnos y ajuste a las características particulares de los mismos.

- Instrucción, entendiendo por ésta, la gestión propia de la actividad, adecuando el ritmo, e interaccionando con los alumnos.
- Evaluación, tanto del aprendizaje del alumno como de la propia actividad docente.
- Reflexión y nueva comprensión.

Por su parte el National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, ha definido los Estándares Profesionales para la Enseñanza de las Matemáticas (1991) como siguen:

- Fijar metas y seleccionar o crear tareas que ayuden a los estudiantes a alcanzar dichas metas.
- Estimular y llevar el discurso de la clase de manera que los estudiantes y el profesor se aclaren acerca de lo que se está aprendiendo.
- Proporcionar un entorno adecuado para el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Analizar los aprendizajes de los estudiantes, las tareas matemáticas y el entorno para tomar decisiones acerca de cómo mejorar la didáctica.

En ambos, el proceso de comunicación presenta un empobrecimiento respecto de la idea de comunicación educativa que se ha propuesto. La fase de instrucción de Llinares presenta la idea de una *ingeniería didáctica* (como se ha explicado en la página 31) que deshumaniza la comunicación al centrarse en los aspectos de gestión de la tarea y no en la *re-construcción-con* (página 33). El hecho de estimular y llevar el discurso de la clase, aconsejado por el NCTM, sesga la comunicación matemática, al establecer el discurso como actividad central de la clase y no el *hacer matemáticas* (página 50) juntos.

Como ya se ha comentado en secciones anteriores, el conocimiento no se produce de manera espontánea sino que es necesario guiar al alumno en la construcción del mismo. Brousseau (1986) afirma incluso que a veces es necesario interpretar un *guión ya aprendido* en la práctica docente. Las singularidades de cada alumno y de cada grupo impide una aplicación radical de este consejo, pues se ha dicho que el profesor debe ser capaz de adaptar su labor a la diversidad de la realidad del alumnado. Por ello podríamos mejor decir que la misión del profesor es acompañar al alumno en su aprendizaje, suscitando en el mismo la acción matemática y el gusto por los valores especulativos y estéticos de la matemática para fomentar el deseo de seguir conociendo y desarrollándose como persona autónoma.

En este marco epistemológico los profesores no sólo tendrán que plantearse el modo en que aprenden los alumnos y buscar la mejor manera de organizar la clase, transmitir las consignas adecuadas y provocar la acción de los alumnos, sino que tendrán que participar en dicha acción, producir, animar y sostener la comunicación, provocar y aprovechar las situaciones de debate y las distintas oportunidades que la práctica educativa ofrece para procurar el aprendizaje, como *reconstrucción* del conocimiento matemático.

La enseñanza no puede, pues, limitarse a la exposición del profesor y la consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas, sino que debe incluir discusiones y debates entre el profesor y los alumnos y entre estos últimos, resolución de situaciones de la vida cotidiana, trabajos de investigación, etc., que fomenten la construcción del conocimiento del alumno de una forma significativa.

Esta búsqueda continua del profesor lo convierte en investigador permanente a través de la observación de los alumnos y con ayuda de la formación continua. Se necesitan profesores capaces de diagnosticar las dificultades e idear cuestiones para promover el progreso a través del conflicto cognitivo, encontrar el modo de mantener una atmósfera de colaboración para aumentar la independencia por parte de los estudiantes, reflexionar acerca de las estrategias para desarrollar la motivación cognitiva y reconocer los aspectos particulares epistémicos, cognitivos y sociales de la práctica educativa. (Llinares, en Llinares y Sánchez, 1994)

El interés mostrado por el profesor le lleva a adoptar un compromiso inherente a su función en la comunicación educativa. Este compromiso no sólo lo adquiere con el alumno, primer beneficiario de esta labor conjunta, sino consigo mismo en cuanto a la realización personal citada más arriba, con el sistema educativo local, que enmarca su actividad docente y, en última instancia, con la sociedad, por las necesidades señaladas en el apartado 2.3.2.

Estas tres cualidades -conocimiento, interés y compromiso- deben articular toda la acción docente, pues son un seguro para la integridad profesional en un mundo adverso a la labor de la escuela -en el sentido de que los valores de la sociedad a menudo están enfrentados a los que se proponen en este trabajo como valores de la educación, en particular, matemática, como ya se ha especificado en la página 24- y cuyo futuro depende, en gran parte, de ella.

Sin embargo, la realidad ofrece una evolución excesivamente lenta hacia estas consideraciones de la investigación, como podemos deducir del siguiente estudio del INECSE (2004b).

En cuanto a la enseñanza primaria más del 90 % de los alumnos reciben con frecuencia una explicación del profesor, en la que pueden participar a través de preguntas y tras la que se les suele proponer un trabajo individual (83 %). Tan sólo un 29 % de los alumnos suele realizar trabajos de grupo dirigidos por el profesor y entre un 30 % y un 40 % efectúa otras actividades didácticas, como trabajos en grupo con exposición posterior al resto o debates. En la enseñanza secundaria de las matemáticas encontramos unos porcentajes similares aunque aumenta la diversidad de estas actividades, entre las cuáles podemos citar trabajos de investigación y uso de talleres en porcentajes muy pequeños, 7 % y 3 % respectivamente. En general, podemos afirmar que las actividades didácticas se centran en el trabajo individual del alumno, frecuentemente en casa, y con el apoyo del profesor en el aula.

Si nos centramos en los materiales que se usan, casi un 100 % de la enseñanza primaria se apoya en el libro de texto, aunque hay un significativo 72 % que utiliza otros materiales elaborados por el profesor. El uso de libros de consulta se reduce a un 33 % y el uso de la informática a un 37 %. Menos de la cuarta parte tiene la oportunidad de beneficiarse de otros recursos didácticos como medios audiovisuales, prensa, ... En la secundaria se reduce el uso del libro de texto (75 %) en favor de los materiales propios del profesor (80 %) y aunque aumenta discretamente la utilización de materiales de consulta, se reduce significativamente la de otros recursos.

En cuanto a los medios de evaluación en primaria prevalece la observación del trabajo del alumno y la calificación de los trabajos de clase, casi el 100 % es así evaluado, aunque no se puede olvidar un significativo 65 % que realiza controles o exámenes. Se favorece de este modo en primaria una evaluación continua en detrimento de los métodos clásicos de la evaluación sumativa.

No ocurre así en secundaria, donde las pruebas objetivas y los exámenes aumentan, reduciéndose los otros medios de evaluación como los trabajos (50 %) y la observación (70 %). La autoevaluación ocupa en este nivel un insuficiente 10 %, cuando podría favorecer la responsabilidad en el estudio y la automotivación. Ver figuras 2.8 y 2.9.

Se evidencia que los supuestos dominantes en la investigación didáctica actual entran con cuentagotas en la escuela, en la que existe una metodología acomodada en los hábitos tradicionales, a pesar de que se ha demostrado que un aprendizaje pasivo no es un aprendizaje significativo y que la construcción del conocimiento debe ser una prioridad para la práctica educativa.

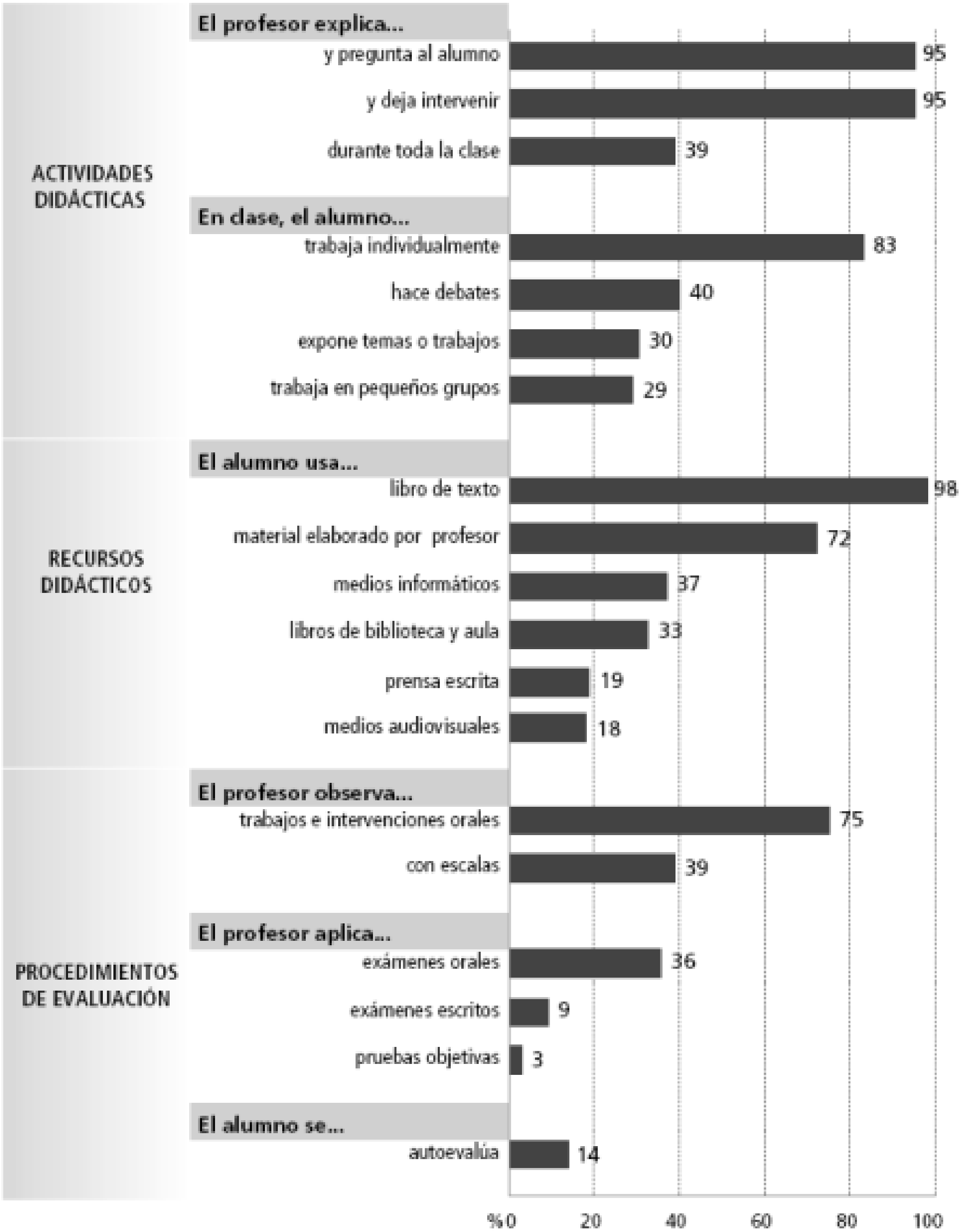


Figura 2.8: Porcentajes de alumnos que reciben ciertas prácticas metodológicas más frecuentemente en la educación primaria. (Fuente: INECSE, 2004b)

		2000		
		Ciencias Sociales, Geografía e Historia	Lengua castellana y Literatura	Matemáticas
Actividades didácticas	**El profesor explica y los alumnos...**			
	participan siempre	56	67	61
	participan a veces	33	25	34
	no participan	5	2	1
	En clase, el alumno trabaja...			
	individualmente	73	80	91
	en grupo	38	44	34
	en grupo con exposiciones	26	27	12
	en trabajos de investigación	19	16	7
	en talleres/laboratorio	2	3	3
	Fuera de clase, el alumno...			
	hace tareas escolares en casa	58	77	90
Recursos didácticos	**El alumno usa...**			
	libro de texto	87	81	75
	material elaborado por el profesor	72	85	80
	libros de consulta	53	62	37
	En clase se utiliza...			
	prensa escrita	45	42	5
	medios audiovisuales	54	26	5
	medios informáticos	16	17	12
Procedimientos de evaluación	**El profesor observa...**			
	intervenciones orales	76	82	70
	cuadernos	62	66	55
	trabajos	59	74	50
	con escalas de observación	42	55	46
	El profesor realiza...			
	exámenes con varias preguntas	78	72	76
	pruebas objetivas	45	48	66
	exámenes sobre un tema	49	57	29
	exámenes orales	8	13	5
	El alumno lleva a cabo...			
	su autoevaluación	12	19	11

Figura 2.9: Porcentaje de alumnos que reciben algunas de las prácticas metodológicas más frecuentes en secundaria, en tres áreas. (Fuente: INECSE, 2004b)

> *«Los profesores con 15 años o menos de experiencia docente (...) se caracterizan por ser proporcionalmente más los que ponen habitualmente trabajo en grupo, trabajo de investigación, usan medios informáticos y evalúan por pruebas objetivas, y por ser menos los que usan el libro de texto y los exámenes orales y escritos».* (INCE, 2002)

Una formación adecuada y un continuo reciclaje de los métodos es necesario en cualquier profesión, pero en educación la formación inicial y permanente debe ser una prioridad para el buen docente. Las reformas educativas, que han procurado las innovaciones pedagógicas más necesarias, han fracasado a menudo en este punto. La formación de los docentes constituye, de este modo, una pieza fundamental para el futuro de la educación.

En los últimos tiempos se viene analizando, desde distintos ámbitos, esta formación y se han propuesto algunas soluciones viables para el problema de la formación inicial del profesorado:

Las conclusiones del seminario PROPOME (Programas de Postgrado en Matemáticas y Educación Matemática) de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) acerca de los nuevos postgrados, celebrado en febrero de 2006, destacan la ilusión y expectativas que éstos han despertado en la comunidad de matemáticos pero manifiestan su preocupación por la especialidad de matemáticas del ansiado título de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, aconsejando la participación de las facultades y secciones de matemáticas en la elaboración de los nuevos planes de estudios de esta titulación y señalando su inquietud por la incidencia negativa que estos nuevos cursos pudieran tener en los restantes, propios de matemáticas. En este sentido, señalan la conveniencia de que se mantenga una oferta de materias optativas en el Grado de Matemáticas que inicien a los estudiantes en las especialidades de postgrado profesionales y que proporcionen coherencia y den continuidad a los postgrados que se van a impartir en cada universidad. Una buena planificación de los contenidos de dichos cursos y la elección cuidadosa de los profesionales que los impartan puede solventar en gran medida el problema de la *profesionalidad* del profesor de matemáticas.

En la Jornada Matemática, celebrada en el Congreso de los Diputados con motivo del año mundial de las matemáticas, Sánchez (2000) detallaba más. Según ella la formación inicial debe articularse alrededor de la práctica, planteando situaciones y tareas relacionadas con los diferentes dominios en las que se pueda compartir, discutir y negociar significados y, a partir de lo sucedido, reflexionar sobre el proceso seguido. Este tipo de actividades ha sido denominado por Fortuny y Azcárate (1994) *entornos expertos* ya que los profesores en formación aprenden a través del trabajo conjunto con profesores expertos las claves de las estructuras de conocimiento y comportamiento en la enseñanza de las matemáticas. El éxito de estas actividades depende casi en su totalidad del profesor experto que la imparta y sus concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, por lo que una selección cuidada de dicho profesorado es vital para el éxito de esta formación. Además no debe desatender los marcos teóricos necesarios para articular esta práctica, tanto en cuanto a los contenidos matemáticos como psicopedagógicos. De esta manera se facilitará la integración de estos conocimientos en la práctica educativa de una forma efectiva.

En el marco del Debate sobre la Enseñanza de las Matemáticas en España de la Comisión de Educación de la RSME, celebrado en enero de 2002, Blanco (2002) exponía sus consideraciones acerca de la necesidad de un nuevo diseño curricular con un tronco común que permita, en primer lugar, formar maestros y posteriormente especialistas según las diferentes especialidades de la LOGSE, para la educación primaria. Según Blanco, la mayor duración de la titulación como consecuencia del paso al nivel de licenciatura permitiría conjugar una formación sólida común para todos los profesores de primaria con un inicio de especialización, que contemplase de manera diferenciada todas las áreas del currículo. En cuanto a la secundaria, consideraba que sería mucho más adecuado que el profesorado de matemáticas de educación secundaria tuviese una formación científica específica, con las materias de didáctica de la matemática y las prácticas de enseñanza formando parte de la troncalidad, e integradas en una licenciatura de segundo ciclo, que debiera ser especialmente diseñada para que los alumnos que lo cursaran fueran los mejores profesionales. Y como paso necesario para corregir errores tradicionales en la formación de los profesores consideraba conveniente establecer un marco institucional estable, riguroso y coherente, entre las instituciones universitarias y no universitarias implicadas en la formación inicial y permanente que permita abordar con seriedad y rigor los problemas sobre los que se ha reflexionado. La decisión de que la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria se realice integrada como especialidad en el segundo ciclo de la licenciatura o como postgrado me parece menos importante que la elección de los contenidos y las metodologías de dichos cursos, ya que serán estos últimos los que el alumno interiorizará para su práctica docente posterior. Además, es de destacar la importancia de la colaboración permanente de las instituciones implicadas para asegurar una cobertura total de las necesidades particulares y una profesionalidad adecuada.

Pero para mantener profesionales como los definidos por Llinares (página 69) no basta una formación inicial como la sugerida por Sánchez (página 74), sino que esta autora concluye señalando la necesidad de una formación permanente programada y planificada con este objetivo investigador, que permita plantear propuestas, validarlas en el aula y reflexionar sobre ellas, creando un ciclo continuo que favorezca la construcción del nuevo conocimiento por parte del profesorado. Se concibe, de esta manera, al profesor como un profesional con criterio propio, al estilo de la *escuelas eficaces de Reynolds* (citadas por Fortuny y Azcárate, 1994), en las que el profesor se considera eficaz en la medida que aprende de sus propias actuaciones, o de la *escuela de Stenhouse* (citada en el mismo libro), en la que se considera al profesor como investigador. Estos autores proponen la creación de actividades de formación para profesores en el propio centro, atendiendo a sus necesidades particulares, favoreciendo la creación de equipos de profesionales -docentes e investigadores- en los centros y fomentando la innovación, en un proceso significativo para el profesorado.

La formación permanente actual está basada en cursos que se imparten a través de los Centros de Apoyo al Profesorado (CAP) o Centros del Profesorado (CEP). Estos cursos ofrecen un amplio bagaje de conocimientos acerca de metodologías, materiales, recursos, tecnologías, etc., tanto para el profesorado de infantil, como el de primaria o secundaria. Los principios que sirven para la elaboración del plan de formación son los siguientes: la mejora de la calidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje, el estímulo a la innovación en la planificación de actividades, la adecuación del plan a las peculiaridades de cada lugar, la llamada la participación de toda la comunidad educativa, la atención a la diversidad, la evaluación continua y la valoración del trabajo en equipo.

Para el curso 2005-06 las líneas prioritarias de actuación, en la Comunidad de Madrid, fueron las siguientes:

- Organización, planificación y gestión de los centros. Formación de equipos directivos.
- Aprendizaje de lenguas extranjeras y participación en programas internacionales. Formación prioritaria para el profesorado de colegios bilingües.
- Fomento de la lectura y la escritura en Educación Primaria, como instrumentos básicos para el aprendizaje.
- Especial atención a las asignaturas instrumentales, Lengua y Matemáticas, en la Educación Secundaria Obligatoria.
- Actualización científica y didáctica. Formación científica para el profesorado de Educación Infantil y Primaria.

- Integración de las tecnologías de la información y de la comunicación en las diferentes áreas y asignaturas.

- Integración del alumnado inmigrante: programas de español para extranjeros y refuerzos para alumnos con retraso escolar.

- Educación para la igualdad entre mujeres y hombres.

- Desarrollo de actividades participativas que favorezcan la convivencia escolar: teatro, deportes, coros...

- Educación en valores: tolerancia, respeto, convivencia y disciplina.

La concreción de estas líneas en actividades para los centros del profesorado atiende a la priorización de las acciones más necesarias, sin participación de los propios profesores, con sus necesidades particulares.

Esta formación continúa basándose en el modelo sumativo que ya señalaba Blanco para la formación inicial (página 74), sin atender a los aspectos señalados por Sánchez (2000) y Fortuny y Azcárate (1994), que acercarían la formación permanente a la tarea diaria del profesorado en un ciclo continuo de aprendizaje-enseñanza. Por lo tanto urge una reestructuración de la formación permanente para que sea realmente útil para el docente y motivadora para la innovación en su labor docente y no, como tristemente ocurre en bastantes ocasiones, interesada en la obtención de méritos con un fin nada o poco comprometido con la didáctica.

Por otra parte, según Chevallard, Bosch y Gascón (1997) no todo depende del profesor. Denuncian estos autores que, en la investigación didáctica tradicional,

> *«el análisis se centra en lo que el profesor debe hacer para favorecer el aprendizaje de los alumnos, un aprendizaje que se traduzca en adquisiciones significativas y en interés por la materia. En cambio, nunca se considera necesario un análisis detallado del proceso de estudio del alumno, es decir, del trabajo matemático que éste realiza, considerado como un objetivo en sí mismo».*

El profesor tiene, de esta manera, todo el peso de la responsabilidad en el proceso de aprendizaje. En la didáctica tradicional, su único medio de mejorar la práctica educativa es mediante modificaciones en sus métodos didácticos, puesto que no tiene ningún poder -aunque sí una

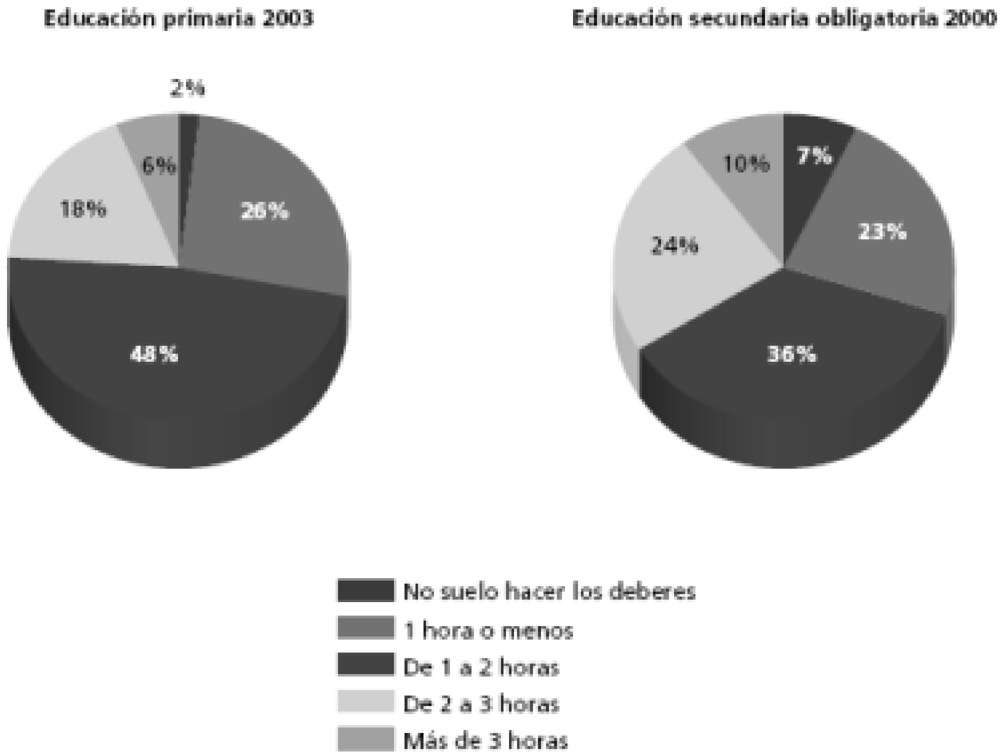


Figura 2.10: Porcentajes de alumnos según el tiempo extraescolar que dedican al estudio. (Fuente: INECSE, 2004b)

clara influencia motivadora- en cuanto a la acción propia del alumno. Chevallard sugiere la necesidad de un traslado de responsabilidad al alumno que debe ser el último responsable de su propio aprendizaje.

Paradógicamente, este hecho sólo puede ser posible desde la acción del propio profesor. El profesor debe procurar la independencia gradual del alumno en su aprendizaje y fomentar la *emancipación* pedagógica para conseguir el verdadero fin de la educación que es el desarrollo de la autonomía del alumno, en su dimensión de aprender a vivir trascendiendo el ámbito escolar.

El mismo estudio del INECSE (2004b) citado anteriormente muestra que sólo un 24 % en educación primaria y un 34 % en secundaria dedican al estudio más de 2 horas diarias. Un 74 % y un 59 %, respectivamente en primaria y secundaria, le dedican menos de este tiempo y sólo entre un 2 % y un 7 % de los alumnos de ambos niveles reconocen no estudiar nada diariamente (ver figura 2.10) . Además estos porcentajes de dedicación al estudio han bajado entre el 1997 y el 2000 en secundaria, donde comparativamente con estudios anteriores encontramos diferencias de hasta 8 puntos porcentuales, sin embargo, en educación primaria han aumentado 12 puntos entre 1999 y 2003. Parece que en los últimos tiempos el trabajo del alumno empieza a ser mayor, lo que es un dato esperanzador para el futuro.

El estudiante debe ser el centro del proceso educativo, es decir, el sujeto activo de su propio aprendizaje. Por ello, en este trabajo, la atención no se ha centrado tanto en qué contenidos matemáticos se han de enseñar o en cómo enseñarlos sino que el énfasis se ha colocado sobre la propia actividad matemática y cómo hacer que el alumno *reconstruya* su propio conocimiento matemático.

Llinares (Llinares y Sánchez, 1994) establece cinco metas curriculares para los alumnos: aprender a valorar las matemáticas, tomar confianza en la propia destreza, ser capaz de resolver problemas matemáticos, aprender a comunicarse matemáticamente y aprender a razonar matemáticamente. Todas ellas se enmarcan en la definición de competencia matemática que se ha citado con anterioridad (en la página 32). Pero este profundo cambio depende en última instancia del profesor, como ya se ha dicho, que debe disponer de una formación adecuada para ello y toda la confianza de las instituciones educativas.

En resumen, la relación del profesor y el alumno en la tarea educativa conjunta que es la formación matemática debe tener un gran peso en la práctica docente, pues articula toda la actividad en esta nueva dimensión de la competencia matemática. Las administraciones educativas tienen en esta tarea una responsabilidad importante para que no se produzca una brecha insalvable entre la realidad de las aulas y las necesidades evidenciadas en la investigación.

Con los principios definidos en esta sección, la educación matemática se acercará más a la idea definida por Castelnuovo (2004) en estas líneas:

> *«una didáctica natural, que acerque la matemática al alumno, que ofrezca una herramienta de comprensión de la realidad y que permita, en definitiva, un medio para abordar el fin último de la vida de todo ser humano: la felicidad».*

3 Aprendizaje del lenguaje algebraico

Desde esta perspectiva de la didáctica de las matemáticas, mi investigación se va a centrar en la didáctica del lenguaje algebraico. La razón es la importancia que dicho lenguaje cobra para el aprendizaje de las matemáticas -en los primeros niveles de ESO, donde se ha centrado mi práctica docente desde hace varios años- unida a las dificultades expuestas en la sección anterior acerca de la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos.

Mi experiencia me ha demostrado que gran parte del, tan conocido, fracaso escolar en matemáticas es debido a una incomprensión del lenguaje formal que se comienza a utilizar en esta etapa. Como se afirmaba en la sección anterior el conocimiento matemático conlleva una dificultad intrínseca: la formalización. La completa significación de los símbolos utilizados en ella es fundamental para el desarrollo posterior de la *matemática abstracta*.

La pretensión de este capítulo es delimitar esta investigación. Comenzaré definiendo cuidadosamente el concepto de álgebra, analizando sus cualidades y características generales. A continuación realizaré una profundización -fenomenológica y epistemológica- en el lenguaje algebraico y su aprendizaje, para llegar a analizar las dificultades más significativas a las que se enfrentan los alumnos.

3.1. ¿Qué es el álgebra?

Para una primera aproximación al concepto de álgebra se puede consultar el Diccionario de la Lengua Española. En él se define esta palabra de la siguiente manera

> *Álgebra: (latín tardío algebra, abreviado del árabe clásico algabru walmuqabalah, reducción y cotejo).*
>
> *Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos*

representa un valor desconocido se llama incógnita.

También se define álgebra, en el Diccionario Enciclopédico Larousse, como

> *Rama de las matemáticas que, en su parte clásica, se ocupa de la resolución de las ecuaciones algebraicas mediante fórmulas explícitas, y, en su parte moderna, estudia las estructuras (grupos, anillos, cuerpos, ideales) y se prolonga en las álgebras lineal y multilineal y en el álgebra topológica.*
>
> *Un conjunto E dotado de una adición y un producto interno y de un producto externo definido de K·E en E, respecto de los cuales: E tiene estructura de espacio vectorial sobre K para la adición y el producto externo; E tiene estructura de anillo para la adición y el producto interno (supuesto asociativo);* $\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y$*, para todo* λ *de K y todo par (x,y) de E*x*E.*

En la primera de estas citas el álgebra se define como método generalizador de la aritmética. En la segunda se define como método para la resolución de ecuaciones, de una parte, y de estudio de las estructuras matemáticas, por otra. En la tercera es un objeto matemático en sí mismo, más concretamente una estructura matemática con ciertas características en las que sus elementos se relacionan de un modo particular y cuyo estudio se realiza, valga la redundancia, con métodos algebraicos, por la segunda acepción.

En esta misma línea, Usiskin (1988) destaca los significados siguientes del álgebra:

- Como aritmética generalizada, que formaliza distintos patrones numéricos y propiedades, en los que los números se sustituyen por variables.
- Como método para la resolución de ciertos tipos de problemas matemáticos en los que se desconoce algún/os valor/es, llamado/s incógnita/s.
- Como estudio de las relaciones entre magnitudes, que implica la variación conjunta y el concepto de función.
- Como estudio de estructuras matemáticas, por ejemplo, grupos, polinomios, etc.

Todas estas acepciones se refieren al álgebra como método, aunque la última también contempla el álgebra como estructura propia de las matemáticas, que puede ser objeto de estudio en sí misma.

Cathy Seeley (1993) alude a la integración del álgebra en las distintas ramas de las matemáticas que incluyen geometría, estadística y matemática discreta, entre otras. Además, señala que el álgebra, como área específica de conocimiento, tiene distintos significados: el de una estructura abstracta, el de un instrumento para el estudio de las funciones o el de un método de resolución de problemas. De nuevo encontramos la doble acepción del álgebra, como objeto matemático, en la primera de ellas, y como método, en las otras dos.

Este doble carácter -como método y como objeto- ha sido destacado por Douady (1984). Como método o instrumento el álgebra es un medio poderoso que, según Rogers (2001), se encuentra entre la aritmética y la geometría y sirve a ambas, abstrayendo relaciones y propiedades de sus objetos y proporcionando un marco normado con ciertas reglas de transformación definidas, que facilitan la manipulación abstracta de los elementos para procurar la resolución de problemas. Como objeto de las matemáticas ya se ha dicho que el álgebra posee unas reglas y una lógica interna particulares. El conocimiento del álgebra conlleva la comprensión sintáctica y semántica de estas reglas y lógica interna para asegurar el uso significativo de las mismas. Estos aspectos del álgebra, como generalizadora de relaciones y propiedades de la aritmética y la geometría, o como estructura con sintaxis y semántica propias, serán tratados en profundidad más adelante.

La dualidad conceptual que se ha definido para el álgebra conduce a una interpretación integral, a la par que compleja, que no debe ser olvidada para su introducción en la escuela. Con frecuencia esta complejidad es subestimada en la enseñanza al presentar a los alumnos un álgebra radicalmente sesgada, como instrumento vacío de significado, que es fuente de numerosos errores y frustraciones. Generalmente el álgebra se introduce como método de resolución de ecuaciones desligadas de la realidad o de problemas parcialmente contextualizados. Seeley (1993) afirma que sería necesario que el álgebra fuera enseñada como objeto para procurar dotarlo de sentido en el aprendizaje de los alumnos. Al final de este capítulo se analizarán éstas y otras cuestiones relacionadas con la didáctica del álgebra.

La realidad que podemos encontrar en las aulas españolas acerca del concepto de álgebra puede analizarse atendiendo a algunas investigaciones más o menos recientes:

La tesis de M. Díez (1995) cita una encuesta realizada a profesores de secundaria para estudiar cuál es la idea de álgebra desde la que enfocan su didáctica. Esta encuesta fue tomada y transformada de otra semejante de Chevallard, en Francia, y preguntaba cuáles de los temas del bachillerato pertenecían al campo del álgebra. El único tema que todos los profesores reconocieron como algebraico fue el de *"Anillo de polinomios. Binomio de Newton"* seguido, con un 90 %

y un 80 %, respectivamente, por los temas *"Divisibilidad de polinomios. Cuerpo de fracciones"* y *"Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas"*. Con un 70 % y un 60 %, respectivamente, se hallaron los temas *"Cuerpo de los números complejos"* y *"Vectores. Estructura de espacio vectorial"*. Se apreció entre los profesores españoles una tendencia bastante marcada hacia la definición de álgebra como estructura. A pesar de ello la conclusión que la autora pudo extraer del estudio fue que *el marco correspondiente al álgebra no está claramente identificado en el sistema de enseñanza español*. Por su parte, P. Bolea (2002) presenta un estudio acerca de cómo los profesores españoles perciben su didáctica del álgebra, así como sus creencias acerca del álgebra escolar, concluyendo que su introducción suele vincularse a contenidos aritméticos. Todo esto muestra como la didáctica del álgebra no se encuentra unívocamente determinada entre los profesores españoles.

Entre los alumnos la situación no es más alentadora. En una investigación de Fortuny y Meavilla (1998) se expone que para la mayoría de alumnos de E.S.O. el álgebra se reduce a la manipulación de símbolos de acuerdo con reglas preestablecidas. Dicho más crudamente: el álgebra escolar es, hoy en día, rica en sintaxis, pero pobre en significados. La razón se analizará más adelante, pero radica en la toma contacto de los alumnos con los contenidos algebraicos de forma poco o nada significativa.

A lo largo de la historia la diversidad de problemas con los que la humanidad se ha ido enfrentando han sido la causa de la evolución del álgebra. La duración de su desarrollo histórico es una prueba más de la complejidad y dificultad que esconde el álgebra, como cita Brousseau (1989), parafraseando a Dieudonné,

> *«mientras que apenas fue necesario un siglo para que la geometría elemental lograra una forma casi definitiva, han sido necesarios trece siglos desde Diofanto para que el álgebra llegue a ser lo que ahora conocemos».*

Hoy se considera el álgebra como una herramienta fundamental en el trabajo con modelos matemáticos y en la resolución de una gran variedad de problemas que, además, proporciona una estructura imprescindible para el estudio de la realidad desde un punto de vista matemático.

3.1.1. Evolución histórica del álgebra

Este apartado no pretende ser un estudio exhaustivo acerca de la historia del álgebra y su desarrollo a lo largo de la evolución cultural y social, pues ello requeriría una profundización que no es necesaria para el objetivo de este trabajo. La exposición se limitará, por tanto, a establecer las pautas fundamentales de su origen y analizar los diferentes estadios de la evolución algebraica para conocer los obstáculos epistemológicos que presenta, lo que nos permitirá comprender mejor las particularidades de su aprendizaje.

En cuanto al origen histórico del álgebra es importante observar que su aparición ha respondido a necesidades de generalización y a la imposibilidad de resolución de problemas con métodos conocidos, como ya se había dicho. El álgebra clásica nace como generalización de la aritmética, para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades.

Es de destacar el carácter progresivo de la aparición de los métodos algebraicos en la historia de las matemáticas, distinguiendo tres grandes etapas: la llamada *álgebra retórica* -que abarca la etapa anterior a Diofanto de Alejandría, siglo III-, una segunda, denominada *álgebra sincopada* -desde Diofanto hasta el siglo XVI, con Vieta- y, por último, el *álgebra simbólica* -desde Vieta hasta nuestros días. En ella se considera una importante ruptura (González y Díez, 2002), con la aparición del álgebra como objeto, como se verá-. Las diferencias entre estas etapas van desde los métodos utilizados hasta la forma de expresión. (Malisani, 1999).

En el *álgebra retórica* el lenguaje utilizado para plantear y resolver problemas es el lenguaje natural y, a veces, el geométrico. Las cuestiones se plantean siempre en situaciones aritméticas o geométricas concretas, sin ninguna pretensión de generalización ni formalización. En este periodo ya se resolvían ecuaciones lineales y cuadráticas por métodos exclusivamente aritméticos, aún muy distantes del pensamiento algebraico posterior.

En 2.3.1 se ha explicado como la matemática griega abandona los métodos anteriores, basados fundamentalmente en lo concreto y lo práctico, para abrazar una fundamentación de la misma que la aleja de la realidad concreta y de los problemas que ésta plantea y la acerca a la especulación del pensamiento. Este hecho retrasa considerablemente el avance de los métodos algebraicos en favor del desarrollo de una geometría elemental que gusta de la contemplación y la argumentación de regularidades y propiedades, en muchos casos, evidentes desde el punto de vista intuitivo.

A pesar de ello, se pueden encontrar en *Los Elementos* de Euclides algunas proposiciones que sirven como recetas o fórmulas algebraicas pero en ningún caso hallamos una formalización general, ni una metodología definida para las colecciones de problemas análogos. La aparición de letras en esta obra para representar puntos, o parejas de letras -incluso una única letra- para representar segmentos, así como letras representando directamente a los números que son partes alícuotas o fracciones de otros puede interpretarse equívocamente como un avance de la

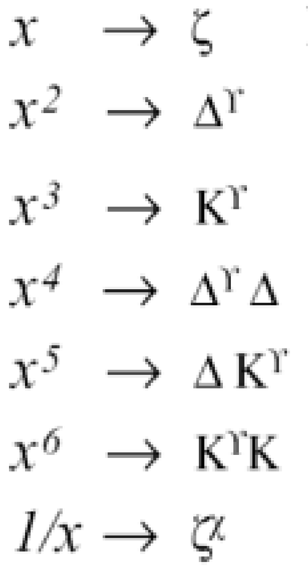


Figura 3.1: Simbolismo de Diofanto (siglo III). (Fuente: Malisani, 1999)

simbolización algebraica, sin embargo, la falta de cualquier indicio de generalización y operatividad con dichos signos impide que sean considerados como verdaderos símbolos algebraicos -los términos signo y símbolo deben ser cuidadosamente utilizados teniendo en cuenta que todo signo adquiere plenitud de significado cuando lo habita el oportuno símbolo (González y Díez, 2002), sobre esta diferenciación se volverá más adelante.

La consideración de esta etapa como algebraica debería ser puesta en entredicho pues, en esencia, no podemos hablar aún de álgebra como tal por todas las razones expuestas. Sería más conveniente denominarla etapa pre-algebraica, como convendría al rigor de esta investigación.

En el *álgebra sincopada* se distinguen varios momentos, uno anterior en el que se introducen algunas abreviaturas y nombres para ciertos conceptos matemáticos y otro en el que se intenta un proceso de generalización de problemas con un uso mayor o menor, según las épocas, de este incipiente simbolismo para la resolución de los mismos.

El tímido simbolismo iniciado por Diofanto de Alejandría (ver figura 3.1), aunque más que una simbolización representativa se refiere al uso de elementos geométricos (segmento, cuadrado, cubo, etc...), se pierde durante el periodo árabe. En este periodo se comienzan a desarrollar los métodos algebraicos, alcanzando una mayor generalización pero descuidando la expresión simbólica, que es estrictamente retórica, en los procesos de resolución.

El álgebra árabe nace de la síntesis de las tradiciones matemáticas griega, india y babilónica. En el siglo IX al-Khwarizmi sistematizó la teoría de ecuaciones en su libro *Hisab al-jabr w'al-muqabala (*Cálculo por restauración y reducción, Joseph, 1996) haciendo referencia a los métodos utilizados en la resolución de ecuaciones algebraicas. La técnica del cálculo por restauración (*al-jabr*) y reducción (*al-muqabala*) -hoy en día diríamos transposición y simplificación de términos- se impuso para el tratamiento de los problemas algebraicos.

Este libro ha dado nombre al área de conocimiento sobre la que versa pues ya se ha dicho que, etimológicamente, la palabra *álgebra* proviene de *al-jabr*. En él se pueden encontrar algunas palabras, que representan las incógnitas de manera concreta, como *jadhir* para la raíz, *mal* para su cuadrado, *kab* para el cubo, etc... (Boyer, 1992), aunque su uso es bastante irregular y no está cargado, aún, de un claro sentido simbólico.

Posteriormente, otro matemático árabe destacado en el desarrollo del álgebra, Omar Khayyam, siglo XI, resolvió las ecuaciones cúbicas con métodos geométricos de intersección de cónicas, con un considerable avance en la simbolización, ya que en su trabajo consideró los coeficientes como números concretos y no como segmentos.

En el siglo XIII, Fibonacci había introducido en Europa los nuevos métodos que conocía por sus contactos comerciales con los árabes. En su *Liber abaci* proporciona una aproximación para la fórmula de resolución de la ecuación cúbica general en función de sus coeficientes. En este mismo siglo, Jordano Nemorario escribe su *Arithmetica* donde comienza a emplear, de forma sistemática, letras para los números, en algunas exposiciones de propiedades. Sin embargo, se considera la *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* (1494), de Luca Pacioli (1445-1514), el primer libro de álgebra impreso. En él se halla una notación sincopada creciente, propia de la época, pues ya se había extendido el uso de ciertos signos para las operaciones aritméticas, *p* y *m*, respectivamente, para la suma y la resta, y algunas abreviaturas para las incógnitas y sus potencias.

Sin duda lo más destacable del álgebra renacentista son las aportaciones de los matemáticos Cardano (1501-1576), Tartaglia (1499-1557) y Ferrari (1522-1565). Los dos últimos aportaron las fórmulas de resolución de las ecuaciones cúbica[1] y cuártica, respectivamente, y Cardano las divulgó en su libro *Ars Magna,* en 1545. Este libro muestra aún muy poca sincopación y las soluciones de las ecuaciones se presentan en forma retórica. Lo que debe atribuirse a la origina-

[1]La polémica de la originalidad de dicho descubrimiento lleva a señalar a otro matemático anterior, Scipione del Ferro, como autor de la misma, la cual no llegó a publicar. No se sabe a ciencia cierta si Tartaglia conocía el trabajo de del Ferro o realizó el descubrimiento de forma independiente (Boyer, 1992).

lidad de Cardano es la generalización de la fórmula de Tartaglia, tan sólo aplicable a la ecuación de la forma $x^3 + px = q$, a otras doce formas de la ecuación cúbica. Los resultados recogidos en este libro proporcionaron un enorme estímulo a la investigación algebraica, distanciada de los planteamientos prácticos concretos. En los años posteriores se intentaron encontrar fórmulas para la ecuación quíntica por métodos similares, lo que no resultó posible aunque sí produjo como consecuencia mucha y buena matemática.

A pesar de que el simbolismo en esta etapa es aún arcaico y limitado, las ideas de variabilidad y generalización ya se pueden vislumbrar, discretamente, en trabajos como los citados. Otro ejemplo de generalización lo encontramos en Stevin (1548-1620), en cuyos trabajos podemos ver el uso de un número concreto como elemento genérico para demostrar una propiedad atribuible a todo el conjunto de los números.

> *«Algunos conceptos relacionados actualmente con el uso de la letra x, aparecen antes que la propia escritura explícita de la letra x». (Cardano, citado en González y Díez, 2002).*

Como hemos visto, en esta etapa se produce una primera ruptura en la evolución algebraica, al realizarse el tránsito de la aritmética al álgebra (Chevallard, citado en González y Díez, 2002). A lo largo del siglo XVI el pensamiento algebraico se va imponiendo sobre el aritmético. Los símbolos algebraicos dan un salto cualitativo importante al pasar de jugar el papel representativo de las abreviaturas o signos literales, utilizados hasta entonces, a ser un simbolismo cargado de sentido, con el que se pueden realizar operaciones (Mahoney, 1980). Se trata de operaciones distintas de las aritméticas, podría decirse que se ejecutan a un segundo nivel (González y Díez, 2002) ya que no se realizan las operaciones, sino que se plantean con la incógnita y, a través de unas nuevas manipulaciones, con reglas y características propias, se llega a hallar la solución.

Bochner (citado en Kaput, 1995) expresa con las siguientes palabras el cambio de la inercia del álgebra griega al dinamismo propio de los símbolos en el álgebra moderna:

> *«Esto provocó innovaciones trascendentales que gradualmente forjaron el relevo de lo inerte de los tradicionales esquemas silogísticos de la matemática griega por la movilidad de los símbolos, funciones y relaciones matemáticos. (It brought about momentous innovations which gradually wrought a changeover from the inertness of traditional syllogistic schemata of Greek mathematics to the mobility of symbols and functions and mathematical relations).»*

Esta nueva etapa se denomina *álgebra simbólica* y comienza con Vieta (1540-1603). Su contribución más importante se realiza en el terreno de la simbolización algebraica, con la introducción de los signos literales para los coeficientes. Es la primera distinción manifestada en la historia del álgebra entre los conceptos de parámetro, representado por vocales -*a,e,...*- e incógnita, representada por consonantes -*m, p,...*-. Su notación algebraica fue denominada *logistica speciosa* pues parece que asumía que la incógnita no tenía que esconder una cantidad o un segmento sino que podía representar una cierta *especie* (Boyer, 1992). Su pensamiento, aún más cerca de los planteamientos geométricos antiguos que del álgebra moderna, demuestra un interés por la matemática distinto al de sus contemporáneos, más preocupados por los aspectos prácticos de la misma. Vieta puso las bases para que, después de él, Descartes (1596-1650) y Newton (1643-1727) aplicaran el álgebra a la geometría y viceversa, así los matemáticos comenzaron a usar las nuevas entidades simbólicas y a operar con ellas como si fuesen cantidades reales.

> *«Después de Vieta, tanto Descartes como Newton dieron soluciones algebraicas a problemas geométricos y soluciones geométricas a problemas algebraicos, y los matemáticos estaban empezando a usar las nuevas entidades simbólicas y a operar con ellas como si fueran cantidades reales. (After Vieta both Descartes and Newton gave algebraic solutions for geometric problems and geometric solutions for algebraic problems, and mathematicians were beginning to use the new symbolic entities and operate with them as if they were "real" quantities).»* (Rogers, 2001).

Descartes, se encargará de modernizar completamente la simbolización y generalizar los métodos algebraicos hasta reducir la geometría clásica a la geometría analítica. En su obra *La Geometría*, emplea ya la letra x como incógnita, con claridad. En ese tratado de geometría se concreta el modo actual del lenguaje algebraico, con el uso de las primeras letras del alfabeto -*a, b, c,...*- para parámetros y constantes, y las últimas letras -*x, y, z,...*- para incógnitas y variables (González y Díez, 2002).

Es entonces cuando se sacrifica en su totalidad el lenguaje natural como medio de comunicación en la resolución de problemas matemáticos y es sustituido por los métodos formales, basados en un lenguaje algebraico completamente simbólico, tanto para la representación de las incógnitas como para los procedimientos de resolución. Los símbolos algebraicos, a partir de este momento, presentan una idea plena de generalización y las ecuaciones se resuelven también por métodos generales y no particulares como hasta este momento. El procedimiento nuevo es mucho más potente porque permite trabajar de la misma manera con objetos matemáticos diferentes: números, magnitudes, e incluso números negativos. González y Díez (2002) citan un texto francés del siglo XIX en el que puede leerse

> *«la potencia reside en estas combinaciones de los propios signos (deberíamos decir símbolos) que suplen al razonamiento de intuición y conducen por una vía (en ese momento) misteriosa al resultado deseado».*

Aún así, y debido a la automatización del cálculo que conlleva, el método algebraico fue considerado de nivel inferior a la aritmética, que apelaba directamente a la habilidad del calculador.

A partir del siglo XVIII se puede empezar a hablar del inicio de un álgebra moderna completamente distinta del álgebra clásica de la resolución de ecuaciones. Este álgebra llega a tomar tanta distancia de los casos particulares que se centra en el estudio de las estructuras de sistemas matemáticos abstractos. De este modo, se considera una segunda ruptura en el desarrollo histórico del álgebra a partir del siglo XIX, durante el cuál se produjo el paso del álgebra como método al álgebra como objeto.

Autores como George Peacock (1791- 1858), pionero en la aplicación del pensamiento axiomático a la aritmética y el álgebra, Augustus de Morgan (1806- 1871), que inicia el álgebra abstracta al considerar las letras y otros símbolos sin significado concreto, y Boole (1815-1864), que destaca como característica esencial de la matemática su forma y del que Russell (citado por González y Díez, 2002) llega a afirmar que descubre la matemática pura, son claros impulsores de este nuevo espíritu algebraico.

Pero, sin duda, el máximo exponente del álgebra moderna es Galois (1811-1832). El objeto principal en sus investigaciones fue la resolubilidad, por radicales, de las ecuaciones polinómicas. La importancia de sus aportaciones estriba en el método seguido para ello. Inspirado en la demostración de Abel de la insolubilidad de la ecuación quíntica general a través de los radicales, descubrió que una ecuación es resoluble de esta manera si lo es el *grupo* simétrico del conjunto de sus raíces. De este modo crea el concepto de *grupo*, que será fundamental para el desarrollo de la teoría de ecuaciones algebraicas y que da por finalizada el álgebra clásica de resolución de ecuaciones por radicales. Galois convierte, así, el estudio del álgebra en una teoría de estructuras que, no sólo no fue comprendida por sus contemporáneos sino que, tuvo que pasar más de un siglo para que sus ideas alcanzasen el merecido reconocimiento.

A partir de aquí el álgebra se funde con diversos campos de la matemática como son la lógica (álgebra de boole), la geometría (geometría algebraica), la topología (topología algebraica) o el análisis. Como se ha expuesto en 2.3.1, la crisis de la intuición, que sobrevino con la teoría de conjuntos, favoreció un intento absoluto de formalización. Pero las limitaciones de los formalismos, puestas de manifiesto con el teorema de Gödel, terminaron con las pretenciosas intenciones del álgebra formal.

La formalización ha recuperado su sitio como herramienta útil y objeto fundamental para el estudio de la realidad desde un punto de vista matemático. Sin embargo, no debe extralimitarse en sus funciones pues una fundamentación de la matemática exclusivamente sobre sistemas formales conduce a un vacío de significado en los métodos que no es compatible, en todas sus dimensiones -sí en varias de ellas-, con la compleja realidad que pretende estudiar.

En este apartado se ha puesto de manifiesto que el uso de las letras en matemáticas *no surge espontáneamente, ni tiene una evolución lineal, más bien es como un juego de aceptaciones y rechazos, de precisiones y ambigüedades, en el que las distintas necesidades de desarrollo del pensamiento matemático de cada momento ha permitido y propiciado ir buscando soluciones a través de formas de expresión en las que segmentos, puntos, números..., y letras han permitido llegar a un buen ajuste entre signos y símbolos en los usos algorítmicos para resolver problemas en los que se implica la singular lengua matemática. Consideraciones no subestimables, en su enseñanza y aprendizaje*. (González y Díez, 2002)

3.1.2. Pensamiento aritmético y algebraico

Para entender la génesis del álgebra es necesario diferenciar entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Al igual que en la evolución histórica el álgebra es posterior a la aritmética, el pensamiento algebraico va a continuar al aritmético, derivándose de él y superándolo en muchos aspectos.

No podemos afirmar que haya un hecho que marque el comienzo del pensamiento algebraico, sino que se trata más bien de un proceso de algebrización que supone un trabajo cada vez más explícito de generalización (Bolea, Bosch y Gascón, 2001).

Este proceso ha sido estudiado por incontables investigadores. Entre otros encontramos el Proyecto STAAR (*Supporting the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning*), que estudia el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico en estudiantes de enseñanzas medias (10-12 años) de Estados Unidos. Su investigación se divide en tres líneas diferentes: alumnos, profesores y desarrollo profesional. La primera se centra en el análisis de la comprensión de conceptos propios del razonamiento algebraico, como pueden ser equivalencia, variable, representación, etc, por parte de los alumnos. En la segunda, se analizan las creencias de los profesores sobre sus propias prácticas para saber en qué medida éstas pueden afectar al aprendizaje del alumno. Por último, en la tercera, se pretende utilizar las informaciones obtenidas en las otras dos líneas de investigación para ayudar a los profesores a reconocer los patrones de razonamiento algebraico de los alumnos y a buscar oportunidades para fomentar la mejora de su desarrollo matemático.

Otras investigaciones sobre este aspecto se han centrado en las dificultades del tránsito del pensamiento del niño de la aritmética al álgebra (Chevallard, 1984, 1989; Kieran, 1989), haciendo hincapié en las diferencias de estas disciplinas (Herscovics,1989) o en sus semejanzas (Kaput y Blanton, 2001).

Para Kaput (1995) tanto la aritmética como el álgebra dan soporte formal al razonamiento cuantitativo, es decir, a las operaciones mentales que subyacen a la operatividad numérica.

> «*Tanto la aritmética como el álgebra proporcionan medios formales de externalización del razonamiento cuantitativo. (Both arithmetic and algebra provide formal means for the externalization of quantitative reasoning*)».

Este razonamiento cuantitativo asegura una operatividad cargada de sentido, que excede la aplicación de ciertos algoritmos memorizados sin profundización conceptual. En el caso de la aritmética el propósito es el de operar con valores numéricos específicos, mientras que en el del álgebra el doble propósito es el de generalizar y formalizar relaciones cuantitativas.

Entendido de esta manera el álgebra es una generalización de la aritmética. Así lo ven A. Schliemann, D. Carraher y B. Brizuela entre otros (2003) que, además de destacar la generalización como actividad principal del razonamiento algebraico, incluyen la aritmética como parte del álgebra que trata con los números, entendiendo las operaciones aritméticas como funciones numéricas,

> «*La Aritmética es una parte del álgebra, a saber, la parte que se ocupa de los sistemas de números, la recta numérica, las funciones numéricas, etc. (Arithmetic is a part of algebra, namely, the part that deals with number systems, the number line, numerical functions, and so on*)».

Esta afirmación tan fuerte nos remite al debate inconcluso de la temática algebraica expuesto en esta misma sección (en la página 82). Se entienda el álgebra como método que generaliza cuestiones aritméticas o como estructura que les da soporte, álgebra y aritmética son dos disciplinas diferentes en esencia, con características distintas, y nunca contenida una dentro de la otra desde un punto de vista útil para la didáctica; ya que esta concepción errónea puede llevar a excesivas formalizaciones tempranas -sucedió con las matemáticas modernas (página 28)- que han fracasado rotundamente en la enseñanza de las matemáticas.

Kaput (1995) afirma que la introducción del álgebra en la escuela como generalización de la aritmética proporciona un anclaje seguro para su aprendizaje significativo. No hay duda de que entender el álgebra sin haber comprendido la aritmética es realmente imposible (Skemp, 1993), pues el álgebra hunde sus raíces en la operatividad aritmética. Como generalización de la aritmética que es, gran parte de las dificultades de aprendizaje que presenta el álgebra se deben a deficiencias en el dominio de la aritmética. Esta conclusión está avalada por los estudios citados al inicio de este apartado. Por ejemplo, J. Novotná y B. Sarrazy (2005) parafrasean a Malara cuando afirman que

> *«las dificultades en el enfoque de álgebra se basan en la escasa atención que se presta a los aspectos estructurales y relacionales de la aritmética que constituyen la base de álgebra elemental (the difficulties in the approach to algebra are rooted in the scarce attention paid to the relational or structural aspects of arithmetics which constitute the basis of elementary algebra)».*

Del mismo modo, Linchevski y Livneh (1999) se refieren al sentido estructural (*structure sense*) afirmando que las dificultades de aprendizaje de la estructura algebraica se deben, en gran medida, a la falta de comprensión de la estructura en situaciones aritméticas. Esto quiere decir que, para estar en disposición de aprender álgebra, no es suficiente con comprender la operatividad aritmética y los algoritmos propios que relacionan los elementos aritméticos, sino que se trata de dar un paso más y ampliar la visión sobre la aritmética evaluando las estructuras matemáticas comunes a varias situaciones aritméticas diferentes, analizando sus reglas y propiedades subyacentes y sus posibilidades manipulativas.

Pero también la aritmética resulta un obstáculo para el álgebra. La necesaria ruptura epistemológica que esta disciplina plantea respecto de la aritmética -se analizará en profundidad más adelante- ha sido detallada por varios autores (Cortés et al., 1990; Chevallard, 1984). Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) señalan como elementos fundamentales de esta ruptura los sentidos del signo igual (Kieran, 1981), la atribución de significado para los pasos intermedios en la resolución de un problema, (Vergnaud et al., 1987) y la conservación de la traza de las operaciones efectuadas (Chevallard, 1984). La idea de variabilidad del símbolo algebraico frente a la particularidad del aritmético supone otro de los elementos más destacados de la ruptura aritmética-álgebra, sobre el que se volverá en 3.3.

A diferencia del pensamiento aritmético, el algebraico exige explicitar todas las relaciones en juego, manipulándolas como objetos en sí mismas para la resolución de tareas. El pensamiento aritmético nunca agrupa relaciones, sino que las toma una a una, paso a paso, en sus procedimientos. Se podría decir que el objeto del pensamiento aritmético son los números mientras que el del algebraico son las relaciones que se establecen entre ellos. Hablamos aquí de un cierto *segundo orden* en las tareas algebraicas, puesto que el álgebra establece relaciones entre relaciones, como se analizará en 3.3.

Por este motivo, el álgebra conlleva un representación simbólica compleja, pues es un

> *«símbolo del símbolo, es decir (...) un intento simplificador, a través de la introducción de nuevos modos de simbolización, de las relaciones de la aritmética»* (Guzmán, 2000).

El proceso de simbolización que subyace a la asignación de carga semántica al signo algebraico es, sin duda, la tarea más importante en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Los nuevos significados que llevan asociados los símbolos algebraicos son distintos que los de la aritmética. De esta manera el álgebra no es sólo una generalización de la aritmética, sino un nuevo sistema que simboliza otros elementos y estudia sus relaciones, es un instrumento de estudio de las estructuras y no de los objetos individuales. En este sentido el álgebra puede verse como una herramienta modelizadora de los sistemas matemáticos, funcionalidad que no debe ser olvidada para planificar la didáctica del álgebra pues proporciona una contextualización muy útil para el aprendizaje. Bolea, Bosch y Gascón (1998) conceden tal importancia a la actividad de modelización del álgebra que denuncian la *desalgebrización* del currículo en la enseñanza secundaria en España basándose en la escasa presencia de esta función del álgebra, en favor de la generalización de la aritmética.

Un estudio acerca del uso de diferentes lenguajes de referencia en la resolución de problemas indica que los modelos de resolución creados espontáneamente por los estudiantes tienen rasgos claramente pre-algebraicos (Novotná y Sarrazy, 2005). Esta evolución natural debe ser aprovechada, procurando un desarrollo temprano de los rasgos propios del pensamiento algebraico -generalización, representación, variabilidad...- a partir de problemas contextualizados que fomenten el aprendizaje significativo, evitando la restricción del álgebra a la simbolización formal. El álgebra simbólica ofrece una perspectiva rica en sintaxis, pero a menudo pobre en significado, mientras que esta nueva orientación fomenta la comprensión, cargando los signos de significado con la intermediación de otros lenguajes más intuitivos, como el natural y el geométrico.

Asimismo, en algunos estudios (Mutschler, 2005) podemos leer como los alumnos que han comenzado el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela primaria tienen mejores habilidades aritméticas, así como una comprensión más completa de las estructuras y reglas subyacentes, lo que se espera prevenga las dificultades de aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria.

Diversos autores (Kaput, Panniza, Sessa, Sadovsky, Schliemann, Carraher, Brizuela, entre otros) han señalado que aprovechar las oportunidades ofrecidas por la propia aritmética -generalizando números y relaciones, estableciendo relaciones entre variables o estudiando estructuras comunes a diversos sistemas de algoritmos- a niveles de enseñanza tempranos, para comenzar el proceso de algebrización, facilitaría el paso de la aritmética al álgebra y evitaría que la ruptura necesaria en este proceso supusiera un obstáculo epistemológico insalvable para los alumnos.

Otras razones citadas por Kaput (1995), junto con las ya expuestas en este apartado, parecen indicar que el aprendizaje del álgebra debe estar perfectamente vinculado con el desarrollo del pensamiento aritmético y, no sólo ser continuación natural de éste sino, incluso solaparse en los aspectos expuestos para que la formalización posterior se haga sobre conceptos e intuiciones ya establecidos, lo que asegurará el aprendizaje significativo del álgebra.

El pensamiento algebraico debe generalizar el aritmético con continuidad, pero además debe procurar la ruptura con éste, superando la particularidad del álgebra como método para llegar al álgebra de estructuras, que asegura el pensamiento formal y la utilidad del álgebra como herramienta de estudio de la realidad. Todos estos detalles acerca del aprendizaje del álgebra se analizarán con detalle en la sección 3.3.

3.1.3. Abstracción y generalización

En Courant y Robbins (1967) podemos encontrar la siguiente afirmación acerca de las matemáticas

> «*Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad*».

Por su parte, National Research Council (NRC, 2001) proclama que el álgebra debe consistir en:

- Actividades de simbolización *(Representational activities)*
- Actividades de transformación de unas expresiones algebraicas en otras y de operatividad con símbolos algebraicos *(Transformational activities)*
- Actividades de generalización y justificación de propiedades y relaciones *(Generalizing and justifying activities)*

Otros muchos autores han destacado la importancia de la generalización en las matemáticas y, en particular, en el álgebra, (Goodson-Espy, 1998; Hazzan, 1999; Mason, 1996; Lee, 1996; Lee and Wheeler, 1989; Radford, 1996).

Mason et al. (1989) ofrecen la siguiente definición de *generalización*

> «*Generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema*».

Según Davis y Hersh (1988) la generalización sirve para *consolidar la información de casos particulares en un marco más general*.

Se puede afirmar que generalizar es la acción de extraer una idea de entre un conjunto de casos particulares que tienen algo en común. En matemáticas, normalmente, esta idea es una propiedad común a un conjunto de objetos matemáticos, o bien una relación que se repite entre distintos objetos matemáticos, lo que nos permite definir una ley general para el conjunto de los objetos observados, en las condiciones dadas. Una vez se demuestra que esta ley general se verifica para todos los elementos del conjunto (justificación), las palabras *parece ser* utilizadas en la definición de Mason son sustituidas por *es,* con toda la certeza matemática. De esta forma se alcanza la consolidación general de la que hablan Davis y Hersh.

Radford et al. (2005) destacan el aspecto progresivo de la aparición de esta idea o propiedad *más allá de lo que actualmente se ve,*

> «*Generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cuál el objeto por ser visto emerge progresivamente. (To generalize*

> *means to notice something that goes beyond what is actually seen. Ontogenetically speaking, this act of noticing unfolds in a gradual process in the course of which the object to be seen emerges progressively*)».

Según esta última reflexión, la propiedad o relación extraída de los casos particulares estudiados no se encuentra propiamente en estos sino que es necesaria la acción del sujeto para obtenerla a partir de ellos, pues se encuentra *más allá de lo que realmente se ve,* y sin ayuda de la abstracción no sería posible esta generalización**.**

Pero, ¿qué es la *abstracción*?

Schwarz et al. (2001) entienden la abstracción como una actividad de reorganización vertical del conocimiento matemático ya construido para formar una nueva estructura,

> *«consideramos la abstracción como una actividad vertical de la reorganización de los conocimientos matemáticos previamente construidos en una nueva estructura (we take abstraction to be an activity of vertically reorganising previously constructed mathematical knowledge into a new structure*)».

Muchos investigadores (Dreyfus, citado en Schwarz et al. 2001) han descrito la abstracción como un proceso de descontextualización. Esta idea insiste en la eliminación de lo superfluo y lo particular para encontrar lo general, lo esencial, que es una característica propia de la abstracción.

Otros destacan su carácter constructivo como mecanismo cognitivo que comienza desde una forma sencilla y acaba con una forma consistente y elaborada (Davydov, 1990). Esto tiene relación con lo expuesto en 2.1 acerca de los procesos cognitivos: la dialéctica -asimilación y acomodación- de la construcción del conocimiento, que conlleva acciones como la reorganización, la jerarquización y la adaptación a nuevos contextos conceptuales. De este modo, la abstracción surge de la acción sobre los objetos reales y la acomodación de nuestro pensamiento.

Según W. Servais (1964)

> *«La abstracción matemática se realiza por construcción de modelos simbólicos de todo orden y por el inventario de las propiedades relacionales y operatorias de esos modelos».*

La abstracción es uno de los procesos fundamentales propios del pensamiento matemático. Este pensamiento particular, como todo pensamiento, se basa en imágenes mentales (símbolos) formadas por el individuo a partir de su experiencia de la realidad. Malisani (2002) incide en la importancia de esta manipulación de las imágenes mentales elaboradas en la mente del alumno y que, aisladamente o reorganizadas, constituyen los conceptos y modelos en los que piensa. La abstracción, como parte del pensamiento humano, se realiza con este mismo procedimiento de manipulación de imágenes mentales.

A veces, esta manipulación es un proceso consciente conforme a la lógica del pensamiento, pero otras, las más de las veces, resulta oculto al propio sujeto (Hadamard, 1947). La manera en que se produce esta reorganización inconsciente y como ésta se hace consciente en forma de intuición sigue siendo un misterio que deberá ser resuelto por la ciencia en el futuro, pero algunos autores aventuran hipótesis como que el hábito (Russell, 1968) o la *belleza científica* (Hadamard, 1947) tienen que ver en este proceso de "elección de las buenas ideas".

Luego, podemos afirmar que la abstracción es una cualidad propia de la razón, puesto que es una actividad mental y, por lo tanto, en ello estriba la diferencia con la generalización: la abstracción es inherente al ser humano, no así la generalización, que debe desarrollarse a través de actividades adecuadas. La abstracción es el proceso mental que propicia la generalización.

La génesis de la abstracción que proponen Schwarz et al. (2001) se enmarca en esta línea. Consta de tres etapas:

- la necesidad de una nueva estructura
- la construcción (*constructing*) de una nueva entidad abstracta
- la consolidación de dicha entidad a través del reconocimiento (*recognition*) de la nueva estructura y su *aplicación*[2] (*building-with*) en actividades siguientes con creciente facilidad.

El segundo paso es el más importante en el proceso de *abstracción*. Consiste en ensamblar y reorganizar conceptos ya adquiridos para formar una nueva estructura, como ya se ha citado. En la tercera etapa ocurren dos hechos destacables, en el primero el alumno descubre que un objeto o una estructura es inherente a una situación matemática dada (reconocimiento), ya sea por analogía con otros casos conocidos o por clasificación en un conjunto más amplio al que

[2]No es traducción literal.

sus características se ajustan. La *aplicación*, el segundo hecho, consiste en la manipulación de conceptos existentes con el fin de satisfacer un objetivo, como la resolución de un problema o la justificación de una afirmación.

Estas tres acciones epistémicas -construcción, reconocimiento y *aplicación*- son presentadas por Schwarz et al. (2001) como modelo de abstracción bajo el nombre de *RCB*. La potencia de este modelo operativo es que permite identificar procesos de abstracción por observación de estas acciones epistémicas y la manera en que son jerarquizadas, superando, de este modo, la dificultad de conservación propia de la abstracción.

Una vez realizada la abstracción, la necesidad de comunicación del ser humano hace que la generalización de la cualidad, propiedad o relación detectada a partir de ciertos casos particulares, pretenda ser objetivada (Mason , 1996).

> *«El lenguaje y, de manera general, los sistemas simbólicos sirven para anotar y evocar las abstracciones. El símbolo, signo concreto, conduce a cosificar la abstracción y, por tanto, permite trabajar sobre ella como sobre un objeto concreto.»* (Servais, 1964)

Según Skemp (1993) el conocimiento matemático se adquiere siguiendo el esquema de la figura 3.2. La abstracciones son clasificadas mediante las relaciones de equivalencia, orden, transformación, etc. para formar una idea o concepto. El proceso de simbolización de esta idea nos permite su manipulación para integrarla con otros conocimientos en la formación de esquemas, de manera que estos esquemas conceptuales sirven de base para seguir conociendo a partir de nuevas experiencias en el proceso continuo de asimilación y acomodación que ya se ha definido (ver 2.1).

Los medios utilizados en matemáticas, al igual que en cualquier otro lenguaje, para lograr esta comunicación son modelos externos (Shepard, citado en Malisani, 2002): signos aritméticos y algebraicos, gráficos, figuras geométricas, etc. Estos medios son denominados por Radford (2003) medios semióticos de objetivación *(semiotic means of objectification)*.

De esta forma la generalización toma la forma de un proceso semiótico basado en la percepción que los alumnos tienen de los objetos matemáticos concretos. La subjetividad propia del lenguaje natural lleva al alumno a la búsqueda de otros medios de comunicación, como los citados. De entre ellos, el considerado como medio de comunicación más riguroso y objetivo es el álgebra.

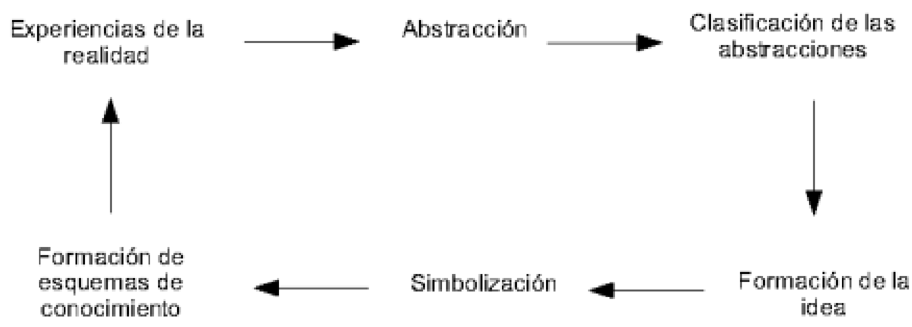


Figura 3.2: Construcción del conocimiento matemático.

Radford et al. (2005) señalan que el estudio de estos medios semióticos de objetivación utilizados por los alumnos para lograr la generalización puede ayudarnos a comprender cómo los estudiantes dotan de sentido a los símbolos algebraicos

> «*Nuestra comprensión del significado con el que los estudiantes dotan a sus expresiones algebraicas puede ser analizado en profundidad por la investigación de los medios semióticos de objetivación a los que los estudiantes han recurrido en su intento de generalizar. (Our comprehension of the meaning with which the students endow their algebraic expressions can be deepened by investigating the semiotic means of objectification to which the students have recourse in their attempt to accomplish their generalizations*)».

Como ya se ha dicho anteriormente la formalización algebraica es un gran escollo en el aprendizaje de las matemáticas. Para que esta formalización sea completamente significativa es necesario que los alumnos comprendan el sentido de los símbolos algebraicos. Dichos símbolos, una vez descontextualizados de sus orígenes cualitativos, constituyen una notación eficaz (Rogers, 2001) para el desarrollo del conocimiento matemático. Este proceso de descontextualización y dotación de sentido de los signos -para hacerlos símbolos- debe ser estudiado cuidadosamente para procurar una mejora en la didáctica del álgebra.

3.2. El lenguaje algebraico

Es evidente que la capacidad simbólica es un elemento fundamental en el desarrollo humano, ya que esta capacidad confiere la posibilidad de representar la realidad, valorarla, modularla virtualmente, transformarla, y comunicar sus transformaciones y valoraciones. La construcción del conocimiento se encuentra estrechamente ligada a la capacidad de simbolización, pues permite la construcción de los significados necesarios (Pérez Gómez, citado en Alcalá, 2002).

La simbolización algebraica no es esencialmente diferente a la función representativa del ser humano, pues es una representación más. Esto provoca una reflexión sobre la necesidad de crear los esquemas mentales propios del álgebra antes de la introducción de los signos convencionales correspondientes. De esta manera los alumnos no aprenderán el álgebra como una batería de signos y reglas propias, que hay que aplicar correctamente en la resolución de ciertas tareas planteadas, sino que el símbolo algebraico tendrá un sentido completo y su uso no parecerá caprichoso sino lógico y práctico.

En la sección anterior se ha comentado que durante el desarrollo del álgebra, en el siglo XVI, los símbolos algebraicos dan un salto cualitativo al pasar de jugar el papel sustitutivo de las abreviaturas o signos literales, utilizados hasta entonces, a ser un simbolismo representativo cargado de sentido. Podemos considerar éste el comienzo histórico del lenguaje algebraico, pues hasta entonces los símbolos sólo cumplían una función sustitutiva de números u objetos geométricos, pero carecían de toda la articulación semántica y sintáctica propia de un lenguaje.

También se ha dicho que, en la escuela, el aprendizaje del álgebra debe aprovechar las oportunidades que le brinda la aritmética aunque sin forzar la formalización a niveles tempranos, lo cual es un error didáctico comprobado. Parece que el aprendizaje del lenguaje algebraico debe posponerse para asegurar su comprensión y evitar obstáculos epistemológicos en el desarrollo del álgebra. Sin embargo, el uso de letras para representar números u otros objetos aparece con cierta anticipación en la actividad matemática.

La aparición de la función modelizadora del álgebra, de la que también se ha hablado, da comienzo al uso escolar del lenguaje algebraico en el aprendizaje de las matemáticas, al suponer una simbolización cargada de sentido y con posibilidades operativas.

Pero, ¿cómo presentar a los alumnos el lenguaje algebraico como una necesidad?

Russell (1988) afirma que las limitaciones propias del lenguaje natural, que no dispone de palabras que expresen con exactitud lo que se desea y cuya gramática y sintaxis califica de *extraordinariamente engañosas*, deben ser un punto de apoyo para iniciar la construcción de

> *«un lenguaje en el cual todos los aspectos formales estuvieran englobados en la sintaxis y no en el vocabulario».*

La carga semántica es sacrificada para obtener una operatividad completa, lo cuál deberá ser matizado para la didáctica -*es necesario distinguir entre las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares* (Ernest, 2000)-, aunque es tremendamente valioso para la obtención de una herramienta poderosa para la ciencia, ya que alcanza la manipulación objetiva de elementos sin obstáculos semasiológicos.

Aunque la afirmación de Russell se refiere al lenguaje de la lógica, que ofrece una formalidad aún más exigente que el lenguaje algebraico estándar, nos sirve para comprender la intención de rigurosidad y precisión que se busca en el algebraico pues elimina las ambigüedades propias del lenguaje corriente y permite una operatividad al margen de los aspectos particulares de la realidad.

El lenguaje algebraico debe, de este modo, superar al natural. Pero desde el punto de vista del aprendizaje será necesario que se base en él, que es conocido -aunque en muchos casos no dominado- para que adquiera sentido para el alumno. Por lo tanto, del mismo modo que el aprendizaje del álgebra debe partir de la particularidad aritmética, el lenguaje algebraico partirá de las limitaciones del lenguaje corriente o natural para su introducción.

Para comprender las particularidades de la simbolización algebraica será necesario antes estudiar algo de semiótica. De esta manera nos introduciremos en la materia de los signos, en general, y estaremos en disposición de dar un paso más, particularizando en las características singulares de los signos algebraicos basadas en la función generalizadora.

Por último, la siguiente cita de Sweet (1972) señala un camino para la didáctica de las matemáticas basadas en la naturalidad de la representación, ya que cuida que la introducción de la formalización se produzca sólo después de haber procurado el desarrollo de las capacidades matemáticas que ésta sustenta,

> *«si enseñáramos matemáticas de igual manera que enseñamos lengua, quizá, para empezar, tuviéramos que habérnoslas con menos actitudes negativas. A ningún niño se le enseña a leer antes de hablar, ni se le exige que escriba antes de saber leer»*

3.2.1. Signo y símbolo

Una tarea pendiente en la introducción teórica de este trabajo es la delimitación de los significados de algunos términos que se vienen usando (en 2.4.3, pero sobre todo en este capítulo) con sentidos particulares, ligeramente diferentes a los usados en el lenguaje cotidiano.

Se examinarán los distintos significados asignados a las palabras *signo* y *símbolo* para definir con precisión el sentido de ambos términos en este trabajo y poder explicar el proceso de simbolización de una manera clara y rigurosa.

Podemos encontrar la siguiente definición de *signo* en el Diccionario de la Lengua Española (se han omitido algunos significados particulares, poco o nada útiles para el propósito de este estudio)

> *Objeto, fenómeno o acción material que, por naturaleza o convención, representa o sustituye a otro.*

Encontramos en esta acepción la idea de representación, de este modo el signo sustituye y hace presente la idea de un objeto, acción, fenómeno, etc.- en adelante usaremos objeto, en general- al que evoca. La distinción de *por naturaleza* o *por convención* nos hará profundizar en la clasificación de los signos que se acepta en la semiótica y que se verá más adelante.

> *Indicio, señal de algo.*

Este significado nos introduce de lleno en la clasificación anunciada, pues un indicio es un signo particular que establece una relación real con el objeto al que se refiere. Por ejemplo, las nubes oscuras son un indicio de lluvia. Este tipo de signo nos remite a la parte natural de la definición anterior, pues la relación real debe ser por naturaleza y no convencional.

> *Señal o figura que se usa en los cálculos para indicar la naturaleza de las cantidades y las operaciones que se han de ejecutar con ellas.*

Como este significado encontramos varios -en la escritura, en la música, en la religión, etc.- que hemos omitido por analogía con éste. En todos ellos se nos hace referencia a una señal representativa, por convención, de un cierto objeto propio de la disciplina en cuestión. En concreto, en matemáticas, disciplina a la que se refiere esta última cita, encontramos signos para los objetos matemáticos -números, elementos geométricos, etc.- y para las operaciones -operaciones aritméticas, funciones, operaciones lógicas, etc.-. Esta última acepción no deja de ser una particularización de la primera, para las matemáticas.

En el Diccionario Enciclopédico Larousse encontramos, además: *Dibujo que es símbolo, señal o representación convencional.* Hace alusión directa al símbolo como representación convencional, es decir, una clase de signo.

Podemos concluir que un signo es cualquier objeto que puede ser percibido y que puede ser portador de algún tipo de información para el receptor. Con lo cuál aceptamos que el signo puede ser, o no, interpretado, afirmando la potencia simbólica que posee.

La diferencia entre la semiótica -teoría general de los signos-, derivada de las teorías de Peirce (1839-1914), y la semiología, derivada de las de Saussure (1857-1913), estriba en este último detalle. Para la segunda, que estudia *la vida de los signos en el seno de la vida social,* sólo el estudio de los hechos significativos con función comunicativa tiene sentido. Mientras la primera estudia cualquier hecho significativo, tenga o no una finalidad comunicativa.

En la siguiente definición de *signo* de Peirce (1986), puede parecer que éste se limita a su función comunicativa:

> *« Un signo, o representamen, es algo que, para alguien, representa o se refiere a algo en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o, tal vez un signo más desarrollado. Este signo creado es lo que yo llamo el interpretante del primer signo. El signo está en lugar de algo, su objeto. Está en lugar de ese objeto, no en todos los aspectos, sino sólo con referencia a una suerte de idea, que a veces he llamado el fundamento del representamen».*

Sin embargo más adelante continúa:

> *« Ningún representamen funciona como tal hasta que no determina un interpretante, sin embargo, se convierte en representamen tan pronto como es capaz de hacerlo y su cualidad representativa no depende de que siempre determine un interpretante, ni de que tenga realmente un objeto».*

Puede verse, por tanto, que la función comunicativa aparece de una forma potencial, y no necesariamente real, en cada signo, ya que la idea en la mente del receptor -que Pierce ha llamado interpretante- no es necesaria para la existencia del signo. Basta con que éste tenga la capacidad de provocarla para que sea considerado como tal.

Aparecen aquí varios conceptos: el signo en sí mismo, lo que el autor llama *representamen*, que representa a un *objeto*; el concepto que se crea en la mente del receptor, que el autor llama *interpretante*, y el *fundamento*, es decir, la idea por la cuál el signo está ligado al objeto. Este último término parece tener que ver con la idea de no arbitrariedad del signo, es decir, sería lo que garantiza que el signo proporciona conocimiento acerca de algo. Podemos deducirlo de la siguiente cita del artículo *De una nueva lista de categorías* (Peirce, 1967):

> « *el concepto de abstracción pura resulta indispensable por cuanto que no podemos comprender una concordancia entre dos cosas salvo como una concordancia en algún aspecto, y este aspecto es una abstracción tan pura como la negrura. A esta abstracción pura, cuya referencia constituye un atributo general o cualidad, podemos denominarla fundamento*»

Entonces el fundamento tiene que ver con los caracteres comunes de los objetos, lo que se abstrae de los mismos y que está como parte esencial en dicho objeto. El signo representa la realidad de una manera parcial y sesgada, que tiene que ver con esta forma de referirse el signo al objeto, a través del fundamento.

El estudio de las relaciones entre estos elementos dará lugar a la clasificación que Peirce (1988) hace de los signos, en diez clases diferentes (ver figura 3.3). Destacaremos tres: *iconos*, *indicios* y *símbolos*. Cada una de éstas se define por su relación entre el signo y el objeto representado.

Un *icono* es un signo que mantiene con el objeto una cierta relación de semejanza o analogía. Esta analogía no tiene por qué ser física, es decir, puede ser únicamente entre las relaciones de sus partes, como en el caso de un diagrama. El rasgo característico de un icono es el de representar algo, independientemente de su existencia en la realidad e, incluso, de la de un intérprete para el mismo. Según Peirce, una fórmula algebraica es un icono, en virtud de las reglas de conmutatividad, distributividad y asociatividad de los símbolos, es decir, por poseer la capacidad de revelar propiedades diferentes de las constitutivas del propio icono.

Un *índice* es un signo que mantiene con el objeto una relación de contigüidad, es decir, va ligado a la situación de una manera real. En este caso existe alguna cualidad común entre el signo y el objeto y es en relación con ella como aquel se refiere a éste. Los índices no tienen por qué ser intencionados, con lo cual su función comunicativa pasa a un segundo plano, la existencia de un intérprete también es indiferente para la categoría de índice, sin embargo, en este caso no puede faltar el objeto. La semiología, orientada hacia la función comunicativa de los signos, como se ha dicho, ignora esta categoría en su clasificación. Las letras de uso común en álgebra que no representan particularidades y los signos de operaciones son índices, según Peirce.

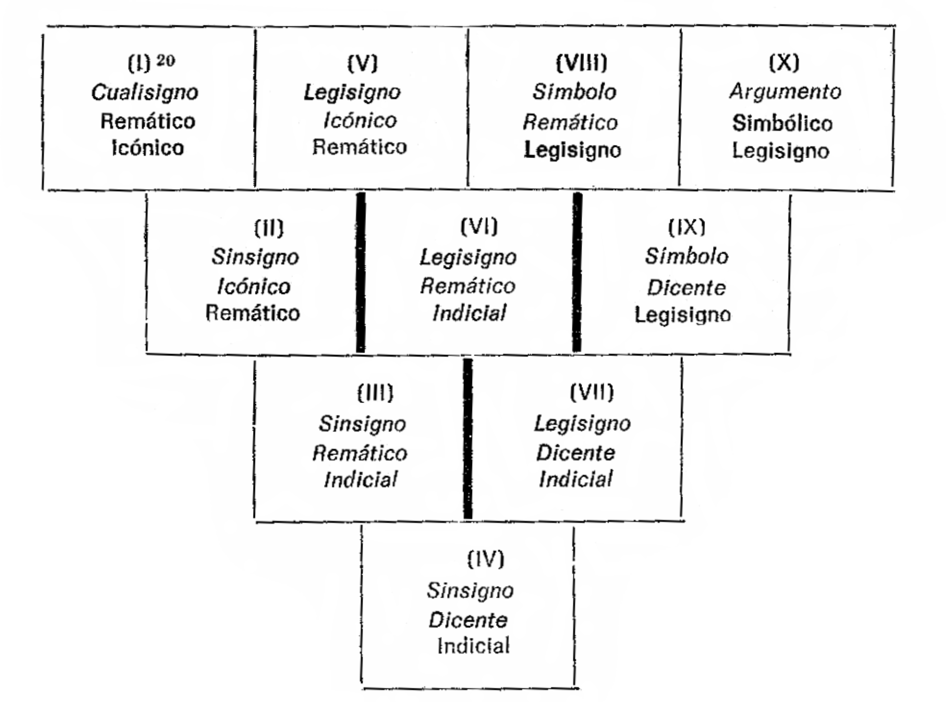


Figura 3.3: Clasificación de los símbolos en diez clases, de Peirce. (Fuente: Peirce C. S., 1986)

El *símbolo* es un signo arbitrario según la clasificación de Peirce[3]. Es decir, la relación que existe entre el signo y el objeto es mental, depende de un hábito o de una convención. En este caso la referencia al fundamento no se puede separar de la referencia a un interpretante, es decir, para esta categoría es indispensable la existencia de un intérprete que, previamente, conozca el significado. El fin de su uso es estrictamente comunicativo. Además, un símbolo no puede indicar una cosa particular sino que denota una clase de cosas, siendo también el signo, en sí mismo, una clase y no una cosa particular. Peirce incluye en esta clase a las proposiciones con sentido particular.

Frege (1848-1925) hace una disección similar de los elementos que intervienen en el proceso de la significación, con ligeras diferencias: distingue el *signo* como expresión externa que representa el *objeto*, de su *significado* o contenido, pero además, en dicho significado, distingue entre *sentido* y *denotación* o referencia (Frege, 1996). El primero es el verdadero significado del signo, es decir, el *modo de darse* el objeto en dicho signo, es objetivo, mientras que el segundo es el objeto mismo que se designa. A estos el autor añade la *representación*, completamente subjetiva y que se encuentra entre la denotación y el sentido. Se puede establecer una analogía suficiente entre el *fundamento peirceano* y el *modo de darse (sentido) fregeano* ya que este último término parece tener que ver con la misma idea de no arbitrariedad que el otro que, como ya hemos dicho, nos permite que el signo proporcione conocimiento acerca del mundo que nos rodea.

Pero además, a pesar de que no es exactamente lo mismo para cada autor, se puede hallar también una semejanza importante entre los conceptos de interpretante de Peirce y la representación de Frege, que viene a ser el significado que cada uno entiende con unas ciertas connotaciones que no conciernen a este trabajo.

La crítica de Russell (1872-1970) a esta diferenciación de Frege entre sentido y denotación es evidente (1967; 1981). Russell afirma que sólo tienen significado aquellos nombres que derivan de conceptos por medio de él, por ejemplo, los nombres propios denotan un objeto, sin poseer significado. Además Russell afirma que las proposiciones afirmadas no tienen denotación, y sólo pueden diferenciarse, si acaso, en el significado. Argumenta este autor (1981) que el significado no puede obtenerse sino por medio de expresiones denotativas, así que significado y denotación se reducen a una misma cosa. Afirma:

[3]Más adelante (en la página 109) se ofrecerá una definición de *símbolo* completa, que discrepa de la ofrecida por Peirce, según conviene a esta investigación.

> *« En la teoría que yo defiendo no habrá significado alguno, sino tan sólo en ocasiones denotación»* ,

Quiere decir que el significado no existe nunca como distinto de la denotación y sólo, en algunas ocasiones, existe esta última. A esta denotación Russell (1981) la denomina *significado*

> *«Cuando distingamos entre significado y denotación, nos estaremos ocupando forzosamente del significado»* .

En la definición de *signo* que encontramos en Russell (1983) se revela una total subjetividad: *podemos decir que A es un signo de B para un organismo O si, en presencia de A, O se comporta de una manera adecuada a B*. Objetivamente, el autor afirma que A es un signo de B si, en realidad, B acompaña o sigue a A. Este acompañar o seguir no se refiere a un modo físico, sino en una representación mental. Por lo tanto, según Russell,

> *« Los signos, por regla general, dependen de hábitos aprendidos por experiencia».*

El significado de dichos signos depende, de este modo, de la experiencia pero no así *su significación*. Entendamos en este término la misma idea de no arbitrariedad del signo que se ha citado en Pierce y Frege al hablar del fundamento y el sentido.

En la lingüística de Saussure podemos ver que cualquier signo pone en relación un *significante*, es decir, el signo sensible, la huella psíquica que deja lo que se percibe por los sentidos, y un *significado*, es decir, el concepto, la idea que se transmite, en un sentido suficientemente próximo, para este trabajo, -aunque no idéntico- al de representamen-interpretante de Peirce o al de signo-representación de Frege. Esta dualidad significante-significado se completa con el *referente* al que remite el signo, es decir, el objeto al que se hace referencia, y cuyas relaciones quedan esquematizadas en la figura 3.4.

Cada uno de estos conceptos se extiende en una línea dentro de la educación, según Mora (2000). El significante se relaciona con la semántica, es decir, con el conjunto de signos manifiestos en el acto docente en relación con los objetos designados; el significado, con la sintaxis, es decir, con las reglas de combinación de estos signos y las relaciones entre ellos; el referente se relacionaría con la pragmática, es decir, con la razón de ser de los signos en relación con los sujetos que los usan.

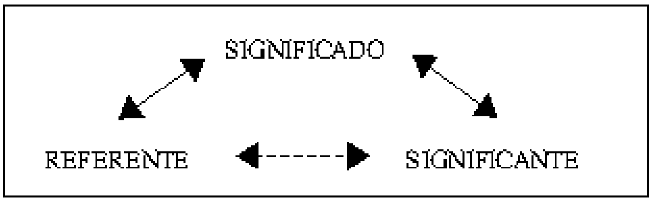


Figura 3.4: Relaciones entre los elementos del signo. (Fuente: Eco, 1994).

Por otro lado está la definición de *símbolo*. En el Diccionario de la Lengua Española se pueden encontrar las siguientes: (análogamente a como se procedió con el signo, se omiten algunos significados particulares, poco o nada útiles para el propósito de este estudio)

> *Representación sensorialmente perceptible de una realidad, en virtud de rasgos que se asocian con ésta por una convención socialmente aceptada.*

Como representación perceptible, el símbolo es un signo, según la definición que hemos dado de éste. Esta definición presenta una correspondencia total con la clase *símbolo* definida en la semiótica *pierceana*. La convencionalidad es el rasgo característico del símbolo, como tipo de signo.

> *Símbolo algébrico: Letra o figura que representa un número variable o bien cualquiera de los entes para los cuales se ha definido la igualdad y la suma.*

Esta última definición entra de lleno en la temática de este trabajo, al definir el símbolo algébrico o algebraico. La variabilidad que se le asocia como representación de un número o cualquier otro ente con el que se puede operar será analizada en profundidad más adelante, cuando se trate del valor de los símbolos algebraicos.

Otras definiciones interesantes pueden encontrarse en el Diccionario Enciclopédico Larousse:

> *Signo figurativo, ser animado o cosa, que representa un concepto, del que es imagen, atributo o emblema.*

En esta definición, además de clasificar el símbolo como signo, se especifican distintas formas de representar el objeto o concepto: por semejanza -imagen-, por cualidad o propiedad característica -atributo- o por figura que se asocia al objeto únicamente por hábito o convención -emblema-.

> *Representación convencional, generalmente unificada, de una operación o una relación matemática, de una magnitud física, de una unidad de medida, de un componente de un circuito eléctrico o electrónico, de una operación efectuada por una calculadora, de un elemento de notación lingüística, etc.*

Se ha destacado esta definición por la referencia a la representación de operaciones y relaciones matemáticas. Sin embargo, la definición que más se ajusta al sentido del símbolo matemático es la siguiente:

> *Elemento constitutivo de una teoría matemática formalizada. (Se distinguen los símbolos lógicos, comunes a todas las teorías, como &, $\forall$, etc., y los símbolos no lógicos, como $+$, $\times$, etc., propios de la teoría considerada.)*

La formalización de la que aquí se habla ha sido, como ya se ha dicho (en 2.3.1 y en 3.1.1), el objeto de gran parte del desarrollo de la matemática del último siglo, como intento de desterrar las particularidades y paradojas de la intuición. Consiste en la representación simbólica de los elementos de una teoría y la definición de las reglas de formación y deducción de las proposiciones de la misma para, independientemente del significado concreto, poder operar y extraer conclusiones válidas para la teoría en cuestión. Los límites de una excesiva formalización, vacía de sentido, ya han sido comentados con anterioridad sin, por ello, restar importancia a la formalización como herramienta útil para la ciencia.

Resumiendo, en la semiótica el símbolo es un signo convencional, es decir, la relación que existe entre el signo y el objeto que representa es fruto de hábito y está establecido socialmente. Las definiciones de *signo* y *símbolo* que hemos citado nos indican que el símbolo es un tipo de signo, su característica es que su relación con el objeto es de convencionalidad.

La terminología de Piaget para el *signo* y el *símbolo* es radicalmente diferente a la especificada hasta ahora. Para él, el *símbolo* debe tener alguna relación de semejanza con el objeto, es el producto directo de la interiorización que provoca una representación, a diferencia de los *índices*, que son indicios anticipadores que no provocan representación alguna. Por ejemplo, la evocación de un objeto ausente requiere de una representación mental, mientras que el hecho de observar un abultamiento en una tela y anticipar que existe un objeto bajo ella, no (Piaget, 1961). Los esquemas sensorio-motores que el niño ha formado en su interacción con la realidad y en los que Piaget asegura que no existe representación mental, como tal, se prolongan en esquemas simbólicos mediante la manipulación de imágenes mentales (representaciones icónicas), que finalmente alcanzarán la convencionalidad de los esquemas conceptuales, con la presencia de signos. El término *signo* el autor lo utiliza para expresar una representación convencional. De esta manera, el símbolo piagetiano puede considerarse análogo al icono semiótico con un intérprete necesario, mientras que el signo será convencional, lo que en semiótica se ha denominado símbolo.

Vemos que el uso de estos términos no está universalmente estandarizado en cuanto al conocimiento se refiere, por ello es necesario aclarar la nomenclatura utilizada en esta investigación, ya que es algo diferente. Se ha llamado *signo* al significante y *símbolo* al verdadero significado que soporta, en un sentido parecido al de la lingüística de Saussure.

Como ya se ha comentado, según González y Díez (2002)

> *«Todo signo adquiere plenitud de significado cuando lo habita el oportuno símbolo».*

De este modo los conceptos de *signo* y *símbolo* van íntimamente relacionados pues se entiende por *símbolo* el concepto que formamos en nuestra mente acerca de algo y al que nos referimos cuando evocamos un hecho, un objeto o una idea. El *signo* es, en este sentido, el soporte para el símbolo, es decir su representación sensorial, normalmente sujeta a una convención socialmente aceptada.

Esta diferente forma de utilizar el *símbolo*, antes denotativo de un tipo de signo, y ahora de su significado (interpretante, sentido, representación, o como queramos llamarlo) nos permite entender el proceso de simbolización como una construcción de conocimiento en la que se dota de sentido a un signo. Sin este aprendizaje el signo permanecería vacío e ininteligible para el sujeto.

Es este proceso de simbolización el que permite el pensamiento, como citan varios autores,

> *« el pensamiento no es posible sin la facultad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra cosa, o representar una cosa mediante otra»* (Dedekind, 1998).

La representación de la que habla el autor no es otra cosa que la simbolización que hemos citado como dotación de sentido de un signo.

> « *Es, en gran manera, por el uso de símbolos, como logramos control voluntario sobre nuestros pensamientos* » (Skemp, 1993)

Señala el autor la asociación de símbolos a las ideas como una necesidad para que el pensamiento se haga consciente, pues los símbolos son las herramientas con las que pensamos, como afirma rotundamente Peirce (1986),

> *« Pensamos sólo en signos. Estos signos mentales son de naturaleza mixta; las partes simbólicas de los mismos se denominan conceptos».*

El autor se refiere a la naturaleza mixta de los signos como iconos y símbolos. Su uso de la palabra signo en vez de símbolo cuando afirma que *pensamos en signos* se debe a esta naturaleza mixta de algunos signos que son a la vez iconos y símbolos pero, según esta terminología, cuando pensamos en ellos lo hacemos a través de los conceptos, más que de las imágenes icónicas.

La construcción progresiva del pensamiento se liga, irremediablemente, a la formación de los símbolos y, sobre estos, los conceptos. De esta manera la siguiente cita, que encontramos en este mismo libro, *Omne symbolum de symbolo* -todo símbolo se sigue de un símbolo- se refiere a que la constitución de un nuevo símbolo se realiza a través de pensamientos que involucran conceptos, por lo tanto, otros símbolos ya creados.

Piaget (1961) afirma que el concepto es un esquema abstracto y la imagen un símbolo concreto. Sin llegar a reducir el pensamiento a un sistema de imágenes, se puede decir que todo pensamiento se acompaña de imágenes, puesto que, si pensar consiste en relacionar significaciones, la imagen sería un significante y el concepto un significado. Esta diferenciación se puede interpretar en el sentido utilizado en este trabajo para la dualidad signo-símbolo. Los conceptos son manejados por la mente en todo proceso de pensamiento, acompañados de las imágenes, que son los signos sensibles.

Este autor entiende la representación de dos maneras: en sentido amplio, como pensamiento basado en una estructura mental, y en sentido estricto como imagen que evoca una realidad ausente. Al primero lo denomina *concepto* (representación conceptual) y al segundo imagen o *símbolo* (representación simbólica). El símbolo es el producto de la interiorización de la imitación, de la misma manera que *el lenguaje interior es a la vez el esquema de las palabras que deben venir y la interiorización del lenguaje exterior adquirido*.

De acuerdo con la teoría de Vigotsky acerca de la conexión natural entre pensamiento y lenguaje se consideran el pensamiento y el lenguaje como dos aspectos interdependientes de un mismo proceso. El lenguaje es concebido como una herramienta viva del pensamiento -

en continuo desarrollo- y, además, la evolución del pensamiento suscita el uso de términos y construcciones del lenguaje más sofisticadas y complejas.

De este modo, la representación conceptual y simbólica permite el pensamiento y el lenguaje, sin relación causal entre ambos,

> *« ... aproximadamente en el momento mismo en que la inteligencia sensorio-motora se prolonga en representación conceptual y la imitación se convierte en representación simbólica, el sistema de signos sociales aparece bajo la forma del lenguaje hablado (e imitado)»* (Piaget, 1961).

Según Saussure, toda lengua es un sistema de signos, es decir, un conjunto de signos interdependientes, de tal manera que cada uno se define no por lo que es en sí, sino por sus relaciones con los demás. Esta definición nos acerca a la noción de estructura, pues se presupone la existencia de unos elementos y unas reglas de combinación definidas para estos, de manera que el valor de cada elemento depende del todo al que pertenece.

3.2.2. El símbolo algebraico: semántica y sintaxis en el lenguaje algebraico

Ya se ha adelantado una definición de símbolo algebraico a la hora de definir el símbolo, recordemos:

> *Letra o figura que representa un número variable o bien cualquiera de los entes para los cuales se ha definido la igualdad y la suma.* (Diccionario de la Lengua Española)

Además se definía el símbolo lógico de la siguiente manera:

> *Elemento constitutivo de una teoría matemática formalizada.* (Diccionario Enciclopédico Larousse)

Como lenguaje simbólico artificial de la matemática, que opera haciendo abstracción de los contenidos, el lenguaje algebraico es parte de la lógica. Por lo tanto la definición de símbolo lógico es válida para el algebraico.

El símbolo algebraico es, por tanto, elemento constitutivo de una teoría matemática formalizada, que representa un número o un ente con el que se puede operar dentro de los límites establecidos por las propias reglas de la teoría matemática en cuestión.

Por otra parte, entre las definiciones de signo se citó también la siguiente:

> *Señal o figura que se usa en los cálculos para indicar la naturaleza de las cantidades y las operaciones que se han de ejecutar con ellas.* (Diccionario de la Lengua Española)

Debemos entender, en esta última definición, el signo como marca sensible que representa los elementos -números u otros objetos matemáticos- y las relaciones -operaciones y funciones-. El signo algebraico es una señal, una grafía que, al ser percibida, nos indica cualquiera de estos elementos del campo matemático. Pueden ser letras, números u otros signos convencionales.

Peirce clasifica estos signos como índices, ya que tienen una relación real con el objeto que representan, es decir, existe alguna cualidad común entre los signos y el objeto representado. Bajo mi punto de vista, puesto que en el caso de estos signos la relación no es por naturaleza en absoluto y sólo puede establecerse como de orden mental, estos signos se clasifican mejor como símbolos pierceanos que como índices. La razón es la convencionalidad que define su uso para representar números, otros objetos matemáticos o las relaciones entre ellos.

Los signos matemáticos más comunes usados en la enseñanza elemental son los siguientes:

SIGNOS	**SIGNIFICADO (SÍMBOLO)**
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Cifras numéricas
+, -, $\times$, $\cdot$, :, /, $\sqrt{}$, $\sum$, $\int$, $\cap$, $\cup$, $\circ$,...	Operaciones
$=, \neq, <, > \leq, \geq, \subset, \in, \notin, \sim, \simeq, \approx, \ldots$	Relaciones
a,b,c, ...,α, β, γ,..., A, B, C, ...	Letras que representan números u objetos generales
π, e, i,...	Letras que representan números particulares
d, r, a, h, M, D, $\Delta, \sigma, \mu, \infty, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$,...	Letras o símbolos que representan objetos particulares
$\forall, \exists$	Cuantificadores
$(\,), \{\,\}, [\,], \vert\,\vert, \Vert\,\Vert, \rightarrow, \Leftrightarrow$, %, ^, $\perp$ ...	Otros signos

Excepto las cifras numéricas, que son signos exclusivamente aritméticos, los demás pueden considerarse signos algebraicos, aunque también sean aritméticos, lógicos, etc.

Como ya se ha explicado en la página 109, el símbolo es la carga semántica del signo. Particularizando en las matemáticas, el símbolo algebraico es el concepto que un signo algebraico induce en la mente de un sujeto capaz de interpretarlo. Este concepto que subyace a las letras o las relaciones, en sí mismas, como signos, es lo que se denomina símbolo algebraico.

Las dos primeras definiciones se refieren al símbolo en este sentido conceptual, ya que asocian a la grafía correspondiente las ideas de representación que le son propias. En la primera se especifica la idea de variabilidad propia de las letras en álgebra, mientras que en la segunda se hace referencia a una teoría matemática formalizada, la cuál lleva implícita la representación de los elementos matemáticos de la teoría por símbolos y la operatividad correspondiente con ellos definida por las reglas propias de la teoría en cuestión.

Las palabras de E. Meyerson (1931) nos ilustran esta idea del símbolo como acto mental, en el más puro significado de acción creadora del conocimiento que ya se ha explicado:

> *«el signo algebraico es el símbolo de una operación, de un acto»*,

aunque, con nuestra terminología, sería más correcto decir que el signo es el soporte del símbolo de una operación. Una operación mental que, restringida al campo matemático, no debemos confundir con una operación aritmética concreta. Se refiere esta operación a todo acto de representación de un concepto matemático, con las características de significación y operatividad que estos símbolos conllevan y que estudiaremos en este mismo apartado.

Para Alcalá (2002)

> *« ... los símbolos (...) son los significantes de algo no visible: el pensamiento matemático. (...) aprender matemáticas es aprender a operar con los símbolos necesarios y de la forma adecuada a la situación»*

En esta cita el autor utiliza el término símbolo en el sentido que se ha definido para el signo en este trabajo y al símbolo lo llama significado. Con esta terminología los signos algebraicos son los significantes y los símbolos los significados de dichos signos, que forman los conceptos en los que se basa el pensamiento matemático.

Este mismo autor clasifica los símbolos matemáticos en:

- Símbolos de primer orden: las palabras que expresan cantidades o relaciones entre ellas.
- Símbolos de segundo orden: los números y la aritmética (operaciones aditivas y multiplicativas).
- Símbolos de tercer orden: el lenguaje algebraico.

Se encuentran en la primera clase las palabras del lenguaje natural que se utilizan en las matemáticas, pero que no tienen por qué ser específicas de éstas. Por lo tanto, la simbolización que encontramos no es diferente de la hallada en el lenguaje natural, entre cualquier palabra y el objeto representado por la misma. Este tipo de símbolos no es, por tanto, específico de las matemáticas.

En la segunda clase los símbolos requieren una representación de orden superior. Se asocia un signo convencional distinto del propio del lenguaje natural para simbolizar los conceptos matemáticos más simples, como son las cantidades y las operaciones con ellas. Esta representación se denomina de segundo orden, pues simboliza un símbolo de primer orden. Es distinta de la hallada en el lenguaje natural, ya que utiliza signos diferentes y revela una profundidad mayor en la interpretación de dichos signos. Bajo mi punto de vista, se corresponde con lo que Peirce denomina índices.

La tercera de estas clases simboliza sobre los símbolos de segundo orden. Es evidente que este tipo de representación es muy diferente de la de primer orden y que los signos, además de seguir siendo convencionales, son mucho menos frecuentes que los utilizados para los símbolos de segundo orden y, por supuesto, los de primer orden. La especificidad de estos símbolos representa uno de los grandes obstáculos para el aprendizaje del álgebra, ya que es un lenguaje poco usual, muy distanciado del natural.

Hemos citado ya, en 3.1.2, las palabras de Guzmán (2000) refiriéndose al álgebra como el *símbolo del símbolo*. Análogamente, según la clasificación de M. Alcalá el lenguaje algebraico sería el símbolo del símbolo del símbolo, para describir el tercer grado en el orden de representación, ya que el símbolo algebraico representa un símbolo aritmético que, a su vez, representa una palabra o palabras expresadas en lenguaje natural -o conceptos del pensamiento-. Así pues el álgebra ¿es de segundo -Guzmán- o de tercer orden -Alcalá-?.

Independientemente de la nomenclatura particular, que no va a ser usada en este trabajo, el lenguaje natural no debe ser considerado una representación matemática, sino sencillamente una representación acerca de las matemáticas, como en otro momento puede tratar de cualquier otra temática. Para este trabajo se distinguirán dos niveles de representación en matemáticas: uno particular y otro general, en un sentido próximo a los símbolos de segundo y tercer orden de Alcalá y reforzado por la afirmación de Guzmán. Al primero de estos niveles corresponderán los símbolos aritméticos, los de las operaciones concretas e incluso las letras con un sentido particular. Al segundo corresponderán los símbolos algebraicos propiamente dichos u otros informales -letras y otros signos que soporten la variabilidad y la generalidad propia del álgebra-con sus características propias: *significación* y *operatividad*.

Se hablará de *significación* cuando se quiera hacer referencia a la carga semántica del símbolo algebraico, es decir, a su significado completo, separando éste de las posibilidades operativas y sintácticas que la simbolización algebraica comporta. Éstas últimas se denominarán *operatividad*.

Estos dos aspectos del lenguaje algebraico han sido llamados, respectivamente, *semántica* y *sintaxis*, como podemos ver en Cohors-Fresenborg (2001) donde se distinguen estos mismos dos puntos de vista en el análisis matemático del álgebra de los alumnos, denominándolos semántico -enfatizando en la estructura algebraica- y sintáctico -centrado en la forma-. El primero se refiere al significado o al contenido del símbolo, es decir, a como éste es entendido por el sujeto, mientras que el segundo tiene que ver con los procesos de representación y manipulación de estos símbolos.

Desde hace unos años, la conexión entre ambos aspectos del símbolo algebraico ha llamado la atención de los investigadores (Vergnaud et al., 1987). En estos trabajos se han incluido las consideraciones de la lógica matemática, así, las referencias al sentido y la denotación de Frege son frecuentes (Sessa, 2005; Bazzini et al., 2001; Arzarello et al., 2000).

Aplicando esta dualidad del símbolo a la expresión algebraica, encontramos que la denotación -el objeto al cual la expresión se refiere- es el conjunto numérico que representa dicha expresión y el sentido -el modo de darse el objeto- es la manera a través de la cuál se expresa dicho conjunto. Si la expresión es una ecuación la denotación se relaciona con una función booleana, dicho de otro modo, es el conjunto de valores para los que la expresión es verdadera (Sessa, 2005).

Bazzini et al. (2001) definen estos conceptos de la misma manera y representan las relaciones entre ellos y la expresión a la que se refieren mediante la figura 3.5:

> *« La denotación de una expresión es el objeto al cuál la expresión se refiere, mientras que el sentido es el modo en el cuál el objeto nos viene dado. (The denotation of an expression is the object to which the expression refers, while the sense is the way in which the object is given to us).»*

Esta misma distinción entre sentido y denotación, también denominados valor mostrativo y valor designativo o connotación y denotación- podemos encontrarla en otros autores (Chevallard, 1989; Drouhard et al., 1995, Arzarello et al., 2000, Rogers, 2001).

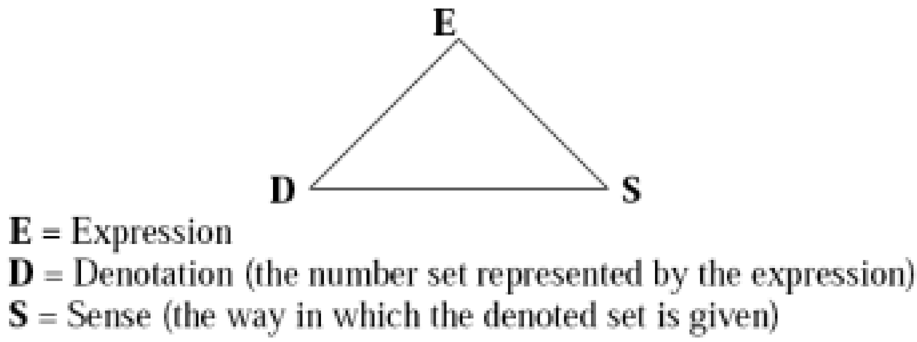


Figura 3.5: Triángulo semiótico de Frege para expresiones algebraicas -E=expresión; D=denotación y S=sentido- (Fuente: Bazzini et al., 2001)

Existe una convención, un acuerdo tácito, una conexión entre lo que percibimos de una expresión -sentido, valor mostrativo, connotación, etc.- y lo que ésta significa -denotación, valor designativo, etc.-. La dificultad de esta conexión para los estudiantes se fundamenta en la no biyectividad de la misma, es decir, a un sentido le corresponde una única denotación, mientras que una misma denotación puede corresponder a varios sentidos, por ejemplo, el caso de dos expresiones algebraicas equivalentes.

Veamos los siguientes casos:

La expresión x^2-9 denota un conjunto numérico igual al de la expresión $(x+3)\cdot(x-3)$, es decir, estas dos expresiones tienen distintos sentidos pero una única denotación. Las ecuaciones $x^2+1=0$ y $5x-3=0$ tienen una misma denotación en $\mathbb{N}$, pero tienen sentidos distintos. Figura 3.6.

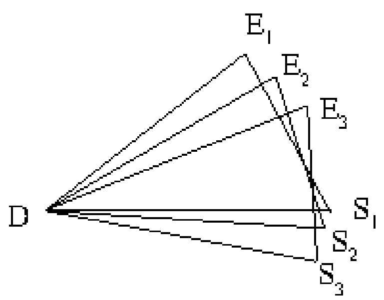


Figura 3.6: D como en figura 3.5; E_i=expresiones diferentes para cada i; S_i=sentidos, diferentes para cada i, correspondientes a la expresión E_i.

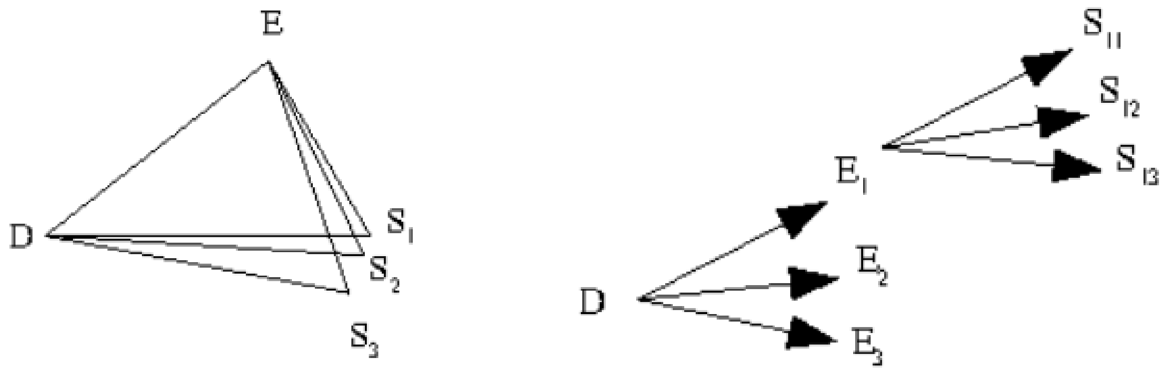


Figura 3.7: D, E, E_i y S_i como en figuras 3.5 y 3.6; S_{ij}=Sentidos, diferentes para cada j, correspondientes a E_i.

Un mismo sentido siempre tiene la misma denotación, es decir, la expresión $x-1$ siempre se refiere al mismo conjunto, excepto si restringimos dicha expresión a un dominio concreto. En Arzarello et al. (2000) además lo llaman *sentido contextualizado de la expresión* (*contextualised sense),* señalando así el significado de dicha expresión contextualizada en una realidad concreta, es decir, dependiente del dominio en que se aplica. De este modo un mismo sentido corresponde a múltiples sentidos contextualizados, con la complejidad que esto añade a la interpretación de una expresión para los estudiantes. Para Bazzini et al. (2001) no existe este sentido contextualizado de modo diferente al mismo sentido, con lo cuál se acepta que una expresión tenga distintos sentidos, según su contextualización.

En el ejemplo anterior, la expresión $x-1$ puede referirse al número anterior, interpretada en $\mathbb{N}$, o a una disminución de un número en una unidad, interpretada como función o incluso al área de un rectángulo de base *x-1* y altura 1, interpretada geométricamente. Figura 3.7.

Cuando se trata de interpretar un enunciado de una cuestión o un problema matemático que viene dado en lenguaje natural dicha expresión debe ser, primero, comprendida, es decir, encontrada su denotación. Una vez hallada ésta los alumnos deben elegir entre la multitud de sentidos posibles para esta misma denotación. De esta forma, si el enunciado se ha interpretado correctamente, se estará en condiciones de comenzar a resolver el problema. Este es el paso más costoso en la resolución de un problema, como vimos en 2.4.3. La figura 3.8 muestra este complejo proceso.

La capacidad de dominar las relaciones entre estos conceptos es el fundamento del pensamiento algebraico y la clave para la correcta formalización por parte de los alumnos que se

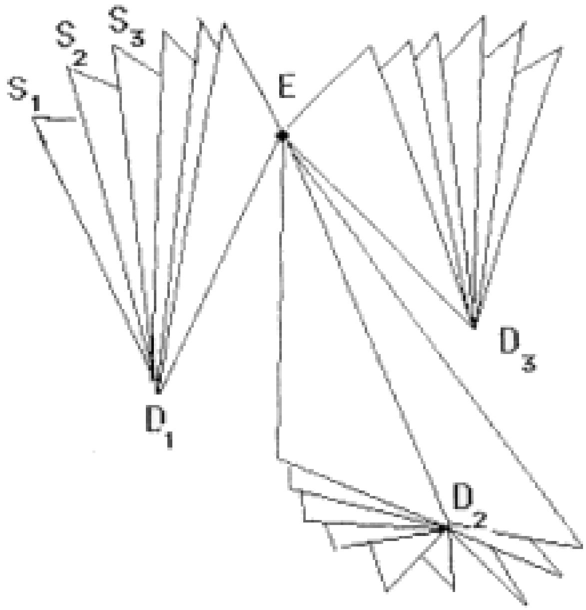


Figura 3.8: E, y $S_i$como en figuras 3.5 y 3.6; D_i= denotaciones, distintas para cada i, que pueden corresponder a la expresión E. (Fuente: Arzarello et al., 2000)

introducen en este lenguaje. Es necesario que comprendan el papel de cada uno de ellos en la simbolización para establecer correctamente las relaciones entre sentido y denotación y, de este modo, hacer posible la comprensión del lenguaje algebraico, en su doble aspecto sintáctico y semántico.

Herscovics (1989) afirma que, con frecuencia, se enseña a los alumnos la sintaxis del lenguaje sin la semántica. Es decir, los alumnos aprenden las reglas de la gramática (reglas algebraicas) pero no entienden las palabras (símbolos). En álgebra esto se manifiesta con un uso de las reglas algebraicas de un modo arbitrario y sin fundamentación significativa. Los alumnos perciben, así, el álgebra como un sistema abstracto, sin conexión con la realidad y vacío de significado.

Cohors-Fresenborg (2001) señala como responsable de este hecho al abandono de los procesos cognitivos de la sintaxis algebraica en la didáctica del lenguaje algebraico, más que a la significación del proceso de abstracción.

> *« Contrariamente a la opinión generalizada en educación matemática de que las actividades del alumno en cuanto a la manipulación de fórmulas se adhieren al marco "abstracto", estamos convencidos de que el principal problema para los alumnos es trabajar con objetos formales de forma concreta y combinatoria (Con-*

> *trary to the widespread opinion in mathematics education that pupils' activities as regards formula manipulation were to be attached to the frame "abstract", we are convinced that the primary problem for the pupils is to work with formal objects in a concrete and combinatory manner)».*

Estos complejos procesos de manipulación de símbolos bajo las estrictas reglas convencionales algebraicas representan una dificultad añadida a la comprensión de la simbolización. El autor ha delimitado algunos problemas destacables en dicho proceso: la elección de una parte de la manipulación algebraica para la cuál exista una transformación conocida, el conocimiento de la aplicación correcta de dicha regla o transformación y la decisión sobre qué regla aplicar y a qué parte. Estos problemas se pueden clasificar atendiendo dos causas diferentes: el conocimiento de las reglas generales de transformación y las particularidades de la aplicación de las mismas al caso concreto.

El verdadero conocimiento de las reglas generales implica una comprensión semántica de los símbolos y las relaciones entre ellos, por lo tanto no es sólo un problema sintáctico ya que no se puede separar de la semántica asociada a dicha sintaxis. Por otro lado, la aplicación de las mismas al caso particular es un proceso mucho más complejo, pues intervienen en el mismo la capacidad de comprensión de una situación y el modo de transformarla mediante los conocimientos que se poseen, lo que conlleva la capacidad de anticipar el resultado de estas transformaciones antes de la elección de la más adecuada a la situación concreta. De nuevo la semántica está presente en este proceso ya que nos permite interpretar la situación concreta y nos facilita la información necesaria para la aplicación de las reglas de transformación a la misma.

Luego la semántica y la sintaxis están íntimamente relacionadas, en cuanto a la simbolización algebraica se refiere, pues la significación de las expresiones algebraicas depende de las reglas de formación sintácticas de la misma y la sintaxis, sin semántica, es un proceso vacío de significado. Ambas forman parte de lo que Arcavi (1994) define como *sentido simbólico* (*symbol sense*), es decir, *la capacidad de manipular e interpretar expresiones simbólicas, tomando conciencia de los diferentes roles que los símbolos pueden ostentar en distintos contextos y siendo capaces de evaluar la adecuación de una representación para expresar una información.* Linchevski y Livneh (1999) hablan, además, del *sentido estructural* (*structure sense*) que incluye *la capacidad de reconocer la estructura algebraica y aplicar estos conocimientos a otros contextos para elegir las operaciones apropiadas*.

Bergsten (1998) señala que la capacidad para conectar forma -sentido- y contenido -denotación- es un rasgo característico de la comprensión del simbolismo matemático y destaca el papel de los esquemas mentales (*image schemata*) y las formas genéticas de la matemática (*genetic mathematical forms*) -las que se extraen de la experiencia, como partir, juntar, etc.- en el desarrollo de este sentido simbólico. La didáctica deberá saber aprovechar ambas cosas para facilitar la construcción simbólica a los alumnos.

En cuanto al análisis sintáctico de las expresiones algebraicas, Kaput (1995) señala dos niveles:

- uno asociado con la escritura y el análisis de las expresiones y
- otro relacionado con las transformaciones y la manipulación de estas expresiones.

La escritura y la forma de las expresiones ya han sido analizadas al tratar el par sentido-denotación. Acerca de las transformaciones, algunos autores afirman que son invariantes con respecto a la denotación, es decir, pueden cambiar el sentido pero no el objeto al que se refieren.

> *«Las transformaciones algebraicas son invariantes respecto a la denotación de la expresión simbólica sobre la que actúan, porque pueden cambiar el sentido pero no la denotación de la propia expresión algebraica. (They (algebraic transformations) are invariant with respect to the denotation of the symbolic expression they act upon, because they can change the sense but not the denotation of the symbolic expression itself)».* (Bazzini, 2001)

Sin embargo, Arzarello et al. (2000) contradicen esta afirmación. Si observamos el siguiente ejemplo, dado por las expresiones $(\sqrt{x})^2$ y x, observaremos que tienen distinto sentido y distinta denotación en $\mathbb{R}$ y, sin embargo, pueden aplicarse transformaciones algebraicas simples para obtener una a partir de la otra. El recíproco no es cierto, es decir, dos expresiones que tengan el mismo sentido no siempre se puedan hacer corresponder mediante transformaciones algebraicas, por ejemplo, $x^2+1=0$ y , $x^2=-2$. Para esta afirmación no hay polémica entre los investigadores citados.

Según Cerulli (2002), la manipulación de expresiones algebraicas está relacionada con el concepto de equivalencia. El problema es que el concepto de expresiones equivalentes no está unívocamente definido, sino que viene determinado por la asunción de un conjunto de axiomas. Así las manipulaciones simbólicas sólo cobran sentido en el marco de un sistema teórico.

En cuanto al análisis semántico de las expresiones algebraicas, Nicaud, citado en Sessa (2005) señala tres niveles:

- Nivel 1º (Nivel de evaluación): dar sentido a una expresión algebraica mediante el reemplazo de valores en las variables y la realización del cálculo correspondiente.
- Nivel 2º (Nivel de tratamiento): transformar las expresiones en otras equivalentes. Implica conocer las transformaciones y saber justificarlas. Tal justificación reposa en el hecho de que una expresión y su transformación coinciden en toda evaluación.
- Nivel 3º (Nivel de resolución de los problemas): tener conocimiento de estrategias que permitan la elección de las transformaciones adecuadas para resolver un determinado problema, haciendo significativo el cálculo. Implica, necesariamente, saber anticipar el efecto de las transformaciones a realizar.

En cuanto al primer nivel, se trata de una evaluación del significado de la expresión para ciertos valores numéricos, aunque la sintaxis no deja de estar presente en las operaciones indicadas y las reglas aritméticas que soportan, es más semántico que sintáctico. Las tareas asociadas a este nivel resultan relativamente sencillas para los alumnos que se inician en el lenguaje algebraico debido a que la semántica es más evidente para el niño que la sintaxis. El segundo nivel se corresponde con uno de los niveles sintácticos expresados por Kaput (1995) que, como ya hemos dicho no podemos separar de la semántica. El tercero ya ha sido analizado en este mismo apartado, pues la interpretación del enunciado se relaciona con la búsqueda de la denotación y el sentido adecuados para la resolución (en la página 117) y la elección y aplicación de las transformaciones adecuadas es uno de los problemas de la sintaxis detectados por Cohors-Fresenborg (en la página 119). Ambos presentan una componente sintáctica importante, de ahí su mayor dificultad para el aprendizaje por parte de los alumnos.

Podemos afirmar que el niño es pura semántica, es decir, su conocimiento se desarrolla a partir de la formación de nuevos significados. En álgebra esto no es diferente. La construcción algebraica debe partir de esta construcción semántica que resulta natural para el alumno, a pesar de que los símbolos sean convencionales, lo que no implica una dificultad mayor que la del aprendizaje de la lengua materna.

Sin embargo la sintaxis le cuesta porque es convencional y particular, distinta de la sintaxis de la lengua materna. El aprendizaje de la sintaxis debe enfocarse a partir de la significación de los símbolos y de las reglas de formación y transformación para que tenga sentido para los alumnos ya que, como sintaxis pura, está vacía de significado y no provoca desarrollo conceptual alguno en la mente de los mismos.

Desde la semántica de su intervención didáctica el profesor debe procurar este desarrollo del conocimiento algebraico en la mente del niño, asegurando la significación de las representaciones simbólicas y las relaciones entre ellas y procurando la formación de estructuras sólidas en las que las manipulaciones algebraicas adquieran el carácter pragmático que les corresponde.

3.2.3. El valor de las letras

Hemos visto que el lenguaje algebraico está compuesto de números, incluyendo ciertas letras que representan números particulares, otros signos específicos que representan operaciones y de símbolos que soportan las ideas de variabilidad y generalidad que le son propias. Esta diferenciación ha sido establecida, en la página 115, delimitando dos niveles de representación diferentes: uno particular y otro general. El segundo es el que corresponde al lenguaje algebraico. En él se encuentran las letras, que son elementos del álgebra formal, y, según la clasificación antes citada, también otros signos no formales que encierran las ideas algebraicas, como "□", "?", "...", etc.

Esta extensión del lenguaje algebraico se apoya en las ideas de álgebra temprana que varios autores han defendido en sus investigaciones (Booth, 1988; Schliemann, A.D., et al., 2003; Carraher y Schliemann, 2002; Kaput, 1995). En ellas se defiende que los déficit cognitivos y las dificultades que los alumnos presentan en su aprendizaje del álgebra pueden ser suavizados si la enseñanza de las matemáticas, a edades tempranas, fomenta las conexiones entre la aritmética y el álgebra a través de actividades aritméticas que incluyan ideas como la generalización, la representación y la variabilidad. Además en ellas se demuestra que los alumnos son capaces de entender y asimilar estos conceptos mucho antes de la edad en la que, generalmente, se incorporan a los currículos escolares. Por ejemplo, niños de 7 años pueden entender la lógica básica de las ecuaciones y en tercer grado (8-9 años) pueden desarrollar representaciones de problemas algebraicos y resolverlos por ecuaciones lineales usando diferentes estrategias. Incluso que niños de cuarto grado (9-10 años) instruidos en técnicas algebraicas desde primer grado (6-7 años) resuelven mejor los problemas y ecuaciones que niños de sexto y séptimo grado (11-13 años) que sólo han recibido esta instrucción durante uno o dos años (Brizuela y Schliemann, 2003). Todo esto demuestra que no sólo se trata del grado de dificultad de los conceptos algebraicos sino también de la enseñanza que los alumnos reciben en el momento de iniciación en el aprendizaje del álgebra.

Los signos informales pueden favorecer la representación en alumnos que aún no tienen conocimientos formales de álgebra y, a pesar de ello, pueden utilizar las ideas de variabilidad y generalización algebraicas. Novotná y Sarrazy (2005) encuentran distintas variables que pueden ser consideradas indicadores del pensamiento prealgebraico, en el que los niños no utilizan el lenguaje formal algebraico: el nivel de revelación de la estructura (*level of revealing the structure*) del problema, mediante diagramas u otras representaciones gráficas, el nivel de pensamiento simbólico (*level of thinking in symbolic language*), con una alta dependencia de las representaciones gráficas respecto de los objetos reales, y el nivel de abstracción de la lengua de referencia (*Level of the reference language abstractness*), con una abstracción suficiente de modo que la representación sólo hace referencia al procedimiento descrito en el problema y no al caso particular de dichos objetos.

Las letras suelen aparecer asociadas a la dificultad, es decir, *al punto donde el trabajo en la clase de matemática se torna incomprensible y ajeno* (Panizza et al., 1995). Además su introducción frecuentemente coincide con un cambio importante en la institución escolar -de primaria a secundaria- lo cual puede acrecentar esta dificultad hasta convertirla en un verdadero obstáculo al desarrollo del conocimiento matemático que algunos alumnos no logran superar jamás. Orton (1990) lo expresa de la siguiente manera, como ya se ha citado,

> *«la introducción de nociones algebraicas es causa de problemas que nunca nos perdonan ciertos alumnos en posteriores etapas de sus vidas».*

Los conceptos que subyacen a la introducción de las letras son complejos, a esta dificultad se añade el uso de un objeto -la letra-, ya conocido, con un significado radicalmente distinto. El alumno que se enfrenta a una letra con un carácter algebraico, por primera vez, va a asociar ésta a su conocimiento del alfabeto, por lo tanto, la letra a va a significar la primera letra del alfabeto, vocal, con un sonido determinado y que aparece en unas ciertas palabras. La idea de que esta letra pueda llevar asociada una representación diferente de la citada es nueva para el alumno, y no evidente. Conlleva, no sólo la generación de nuevos esquemas mentales, sino el cambio de otros ya establecidos y fuertemente arraigados. Un ejemplo de esto lo encontramos en una conversación con una alumna de 12 años:

Profesora: Si m es un número, ¿podrías decirme cómo representas el número siguiente?

Alumna: n.

P: Pero n es la letra siguiente, no el número siguiente.

A: Pero si m es un número, su siguiente es la letra siguiente.

P: ¿Cómo sabes que n no representa otro número?, m y n representan números cualesquiera.

A: Porque es el siguiente a m.

A pesar de que un alumno sea capaz de aceptar que una letra puede representar cualquier número, la asociación de ésta con su conocimiento anterior como elemento del alfabeto prevalece sobre el nuevo.

Por otro lado, una letra puede tener distintos significados asociados a su carácter algebraico. La función de una letra depende del contexto en el que se encuentra y no es fácil para los alumnos que se inician en el álgebra diferenciar *cuando la letra representa un valor o cantidad de un número u objeto o cuando representa el número u objeto mismo*. (Booth, 1984). De esta manera las letras son manejadas como entidades en sí mismas, lo que dificulta la operatividad con ellas, pues no se ha interiorizado su representación como número generalizado, variable o incógnita.

Küchemann (1981), en sus test para el *CSMS -Concepts in Secondary Mathematics and Science- Project,* establece la siguiente clasificación del uso de las letras por parte de los alumnos:

- letra no usada, los alumnos simplemente ignoran la letra para superar la dificultad que su presencia plantea en una fórmula. De esta forma evitan el problema de no clausura de las fórmulas algebraicas que veremos más adelante. Un ejemplo de este uso puede ser el siguiente: dada la expresión $2x+3+2x$, se pide reducirla lo más posible. El alumno puede responder $2x+3+2x=7$, sumando los coeficientes e ignorando la presencia de la x. Otro ejemplo de este mismo caso podría ser: $2x+3+2x=7x$, manifestando una incomprensión de la función del símbolo algebraico y realizando una libre interpretación de la suma de monomios que también conlleva el desprecio de la letra, a pesar de que ésta aparezca en su respuesta. Este tipo de errores se producen cuando el álgebra se interioriza como una serie de reglas arbitrarias que los alumnos no llegan a comprender.

- letra evaluada, los alumnos asignan un significado numérico concreto a la letra para superar la dificultad que supone. Análogamente al caso anterior evitan el problema de no clausura. En este caso un ejemplo como el anterior podría ser concluido de la siguiente manera por un alumno: $2x+3+2x=11$, sustituyendo la x por 2, aleatoriamente. Este uso se ve reforzado por el concepto de valor numérico de una expresión algebraica, que es uno de los primeros que se introducen en el estudio del álgebra, antes incluso que la idea de generalización de la aritmética que las letras soportan. Los alumnos no comprenden por qué unas veces se sustituyen las letras por números y otras veces no, ni cuando estos números están o no determinados. Es frecuente la pregunta *¿Por qué x vale 2?*, tras una explicación del profesor que pone un ejemplo de que *el valor numérico de la expresión* $x+3$*, cuando x vale 2, es 5.* Resulta un gran obstáculo para los alumnos distinguir entre la función de variable y la de representación de un número cualquiera de la letra, pues no son conceptos evidentes, como veremos.

- letra como objeto, los alumnos utilizan la letra como si de un objeto se tratara, de este modo *3a* representa *tres aes* o dos manzanas son expresadas algebraicamente por *2m.* Esta concepción de la letra es fomentada directamente por la didáctica cuando se explica la suma de monomios, pues es frecuente que ésta sea introducida con expresiones como *no se pueden sumar peras con manzanas,* para argumentar que no se pueden reducir dos monomios que no sean semejantes, o incluso cuando se resuelven ecuaciones, con expresiones como *se juntan las x con las x y los números con los números.* La concepción de la letra como objeto no tendría por qué resultar un obstáculo en el inicio del aprendizaje algebraico, pues favorece la no comisión de errores en la manipulación operativa con los símbolos algebraicos, sin embargo, impide el desarrollo de las ideas que se han señalado como características del pensamiento algebraico -la variabilidad y la generalidad- por lo tanto está asociada a una didáctica no significativa, en la que se busca la memorización de las reglas algebraicas sin el desarrollo subyacente de estos conceptos asociados al álgebra.

- letra como incógnita, es con frecuencia el modo de presentación de las letras a los alumnos. Los alumnos interpretan la letra como un número desconocido que deben hallar. Este modo de pensar no es incorrecto en algunos casos, pero puede provocar errores en la interpretación de otros, como en el caso de las variables en el que asociar la letra con un número particular resulta un obstáculo para su comprensión. Janvier et al. (citado en Panizza et al., 1999) han señalado que la concepción de las letras como incógnitas podría constituir un obstáculo epistemológico para el acceso a la noción de variable. La introducción de la incógnita como un conjunto de valores posibles sobre los que se imponen ciertas restricciones, dadas por la ecuación o ecuaciones, puede evitar este hecho (Sessa, 2005).

- letra como número generalizado, los alumnos asocian a la letra un número, pero ese número no está determinado, no es un número fijo, sino que puede ser cualquier número. Esta interpretación de la letra conlleva la idea de generalización que se ha señalado como una de las características principales del álgebra, aunque aún no se comprenda la variabilidad en toda su dimensión. La introducción de las letras a través de actividades que favorezcan esta generalización resulta un importante apoyo para alcanzar el concepto de variable: *Un pre-requisito para el desarrollo de la comprensión de la variable como número general es la capacidad para reconocer patrones y encontrar y deducir reglas generales que los describan* (Trigueros y Ursini, 2003).

- letra como variable, los alumnos asocian la letra a un conjunto de números u objetos de manera que esta letra puede representar cualquiera de los elementos de dicho conjunto y comprendiendo la idea de variabilidad que este hecho conlleva. La diferencia fundamental con el caso anterior se encuentra en la relación entre la letra y lo que representa. Tomemos el siguiente ejemplo: $x+3$, con $x \in \mathbb{R}$. Un alumno que interprete esta expresión como un número más tres y sea capaz de evaluarla, sustituyendo la letra por números reales y realizando las operaciones para obtener un resultado, está comprendiendo la letra como número generalizado. Si además este alumno entiende que la variación del valor de esta letra supone una relación determinada con el resultado de dichas operaciones, comprenderá la dimensión variable de dicha letra. Dicho de otro modo, el alumno que es capaz de generalizar números asocia una letra a dichos números como representación unívoca, es decir, la relación entre cada número y la letra que lo representa es única en cada momento, aunque ésta pueda representar varios números. Sin embargo, el alumno que entiende la letra como variable establece una relación entre dicha letra y todo el conjunto numérico que representa, asociando una idea dinámica a la misma. Esta relación es tal que una vez elegido aleatoriamente uno de dichos números la relación entre él y la letra queda unívocamente determinada, es decir, la relación establecida entre el conjunto de letras $\{x, y, z, \ldots\}$ y el de números $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ cuando elegimos una letra como variable que representa un conjunto de números no es una aplicación -sea $g(x) \longrightarrow n$-, puesto que una misma letra representa a varios números, mientras que si la relación se restringe a un único número -definimos $f_{\mathrm{i}} = g\,|_{n_{\mathrm{i}}};\ f(x) \longrightarrow n_{\mathrm{i}};\ i \in \{1,2,3,...\}$-, entonces se convierte en aplicación. Según Bloedy- Vinner (2000) *las letras se usan como variables cuando se establece una relación de segundo orden, es decir, una relación entre relaciones.* Este punto de vista es ligeramente distinto al definido en la página 115 para la representación de segundo orden. En ella se definía como representación de primer orden la propia de los símbolos aritméticos y como representación de segundo orden la de los símbolos algebraicos, que representan números. Sin embargo, aquí el autor se refiere a que existe una relación superior a la relación establecida entre los números y las propias letras que los representan. Una variable en sí misma posee una relación representativa -que hemos definido $g(x) \longrightarrow n$- mientras que cualquier expresión matemática, ya sea ecuación, función, etc., impone nuevas relaciones sobre las variables -sea, por ejemplo, $h(x,y) \longrightarrow x+y$ o $h(x,2,5) \longrightarrow x+2=5$-. Desde este punto de vista las transformaciones algebraicas pueden considerarse relaciones de tercer orden pues se aplican sobre relaciones de segundo orden, etc. No será necesario profundizar en la nomenclatura utilizada y sí subrayar el carácter gradual de las sucesivas relaciones, primero de representación aritmética y algebraica y posteriormente entre estas mismas representaciones y entre las estructuras que constituyen.

Küchemann (1981) ha demostrado que la mayoría de los alumnos entre 13 y 15 años interpretan las letras como números desconocidos -incógnita- antes que como números generalizados o variables en relaciones funcionales. La dificultad de la idea de variabilidad se ha puesto de manifiesto en varias investigaciones, que ya han sido citadas anteriormente (en la página 89) y que profundizan en las conexiones entre la aritmética y el álgebra. Algunas, además, señalan que la introducción del concepto de variable *representa un punto crítico en esta transición* (Malisani, 2002).

En Socas et al. (1989) encontramos los estadios del desarrollo cognitivo que pueden establecerse a partir de los trabajos de Piaget y Collis relacionados con las capacidades de comprensión de las funciones de las letras son[4]:

- Temprano de operaciones concretas (7-9 años), el alumno puede comprender la letra como sustitución de un número y sustituir aquella por éste para realizar las operaciones.

[4]El preoperatorio (4-6 años) ha sido omitido por no presentar ninguna relación con las letras.

- Final de operaciones concretas (10-12 años), el alumno puede comprender la letra como sustitución de varios números, ampliando las capacidades anteriores.

- De generalización concreta (13-15 años), el alumno puede comprender la letra como generalización del número.

- De operaciones formales (16 años en adelante), el alumno puede comprender la letra como variable y realizar operaciones con ésta.

A partir de estas dos clasificaciones se pueden establecer cuatro niveles en el desarrollo del pensamiento matemático:

Las tres primeras clases de Küchemann corresponden a las dos primeras etapas del desarrollo cognitivo, las dos siguientes, a la tercera y cuarta etapas del desarrollo cognitivo, y la letra como variable, sólo a la etapa de las operaciones formales. Se establecen los siguientes niveles, según este cruce de clasificaciones:

- Nivel 1, los alumnos necesitan los números, el trabajo con letras es erróneo.

- Nivel 2, los alumnos tienen más familiaridad con la notación algebraica, aunque aún no realizan un trabajo formal con incógnitas, números generalizados o variables.

- Nivel 3, los alumnos son capaces de comprender la letra como incógnita y número generalizado en casos sencillos.

- Nivel 4, los alumnos son capaces de comprender la letra como incógnita y número generalizado en casos complejos y como variable, con ciertas dificultades.

Otras clasificaciones que encontramos del uso de las letras son las siguientes:

- Trigueros y Ursini (2003): número desconocido, número generalizado y variable en relaciones funcionales.

- Usiskin (1988): número generalizado, número desconocido, variable en relaciones funcionales, elemento abstracto en el estudio de estructuras algebraicas -como grupos o anillos- y registro de memoria -en informática-.

Estas clasificaciones responden a categorías similares a las establecidas por Küchemann, por lo tanto no requieren mayores aclaraciones, salvo las correspondencias entre distintas terminologías. Así, el número desconocido corresponde a la incógnita. Además Usiskin establece dos nuevas categorías muy concretas que podemos vincular al concepto de variable particularizado en campos del conocimiento determinados, como son la teoría de grupos y la informática.

Para este trabajo se han establecido las siguientes categorías -las dos primeras clases de Küchemann no se consideran como tales, pues las letras no se utilizan con un propósito algebraico- en el uso de las letras:

- Letra como signo vacío, es decir, sin carga semántica. Los alumnos utilizan la letra como objeto, bien mimetizándola de un ejemplo similar anterior, bien recordándola en una fórmula ya memorizada. Su valor representativo es nulo y no se le atribuye ninguna relación con la aritmética conocida. En estos casos son frecuentes los errores, como en el nivel 1 definido más arriba.

- Parámetro, es decir, la letra es considerada como representación de un valor constante en general que, a veces, puede ser fijado aleatoriamente y otras vendrá determinado por ciertas condiciones según el caso concreto. En este uso se pueden encontrar dos niveles claramente diferenciados: uno inferior, que no soporta las ideas de variabilidad y generalidad, y otro superior, que sí las soporta. El primero de ellos se corresponde con un nivel 2, de los definidos anteriormente, ya que los alumnos tan sólo son capaces de sustituir letras por números en fórmulas conocidas, sin ningún carácter general. El segundo se puede asociar al nivel 3, ya que a la letra subyace la generalización del número.

- Variable, es decir, la letra como símbolo general que representa cualquier número, pero en el cuál lo que nos interesa no es tanto el conjunto de valores que representa, sino la relación de dependencia que experimenta con otras *variables* de la misma expresión. La comprensión de esta función del símbolo entraña una mayor dificultad pues la *relación entre relaciones* forma parte de un estadio superior en cuanto a las operaciones mentales, como ya hemos visto. Podemos establecer una correspondencia entre el nivel 4, de los definidos más arriba, pues requiere una comprensión total de la función representativa del símbolo algebraico.

- Incógnita, es decir, la letra como representación de uno o varios valores desconocidos que podemos calcular por medio de manipulaciones algebraicas en una ecuación o sistema de ecuaciones. Este uso es el que requiere menor abstracción algebraica una vez que se presenta la incógnita en una ecuación, por restringirse su uso a manipulaciones mecánicas sin carga conceptual, por ello la enseñanza tradicional ha dado preferencia a este concepto sobre los anteriores sin reflexionar acerca de lo que esto puede acarrear en cuanto al desarrollo del pensamiento algebraico -se deja esta reflexión para la sección 3.4.1 en la que estudiaremos algunas de las dificultades más destacables del estudio del álgebra-. Sin embargo, la función representativa del símbolo algebraico conlleva el desarrollo de la capacidad de comprensión integral del valor de la incógnita, asegurando su detección en un problema y su carga completa de sentido antes de comenzar la resolución de la ecuación -procedimiento que implica el vaciado semántico de los signos para su manipulación algebraica, como hemos explicado-. Entendida de esta manera, la incógnita también refleja las ideas de variabilidad y generalidad propias del álgebra y su complejidad mental puede equipararse a la variable, pues también se establece una relación entre relaciones, pues sólo desde la comprensión de las relaciones entre las variables del enunciado de un problema puede procederse a su representación mediante una ecuación. La incógnita se corresponde, de este modo con el nivel 4 anteriormente definido, pues en el nivel 3, la capacidad de resolución de ecuaciones se limita a la manipulación mecánica algebraica, sin la carga conceptual correspondiente.

3.3. Aprendizaje del álgebra

Se presenta como necesario, llegado este momento, el análisis del proceso por el cuál el niño construye los conocimientos algebraicos, lo llamaremos psicogénesis del álgebra utilizando el glosario piagetano de la teoría del conocimiento.

La psicogénesis del álgebra requiere un proceso de traducción debido a su función de lenguaje de la matemática. Según la perspectiva cognitiva que se ha propuesto para el desarrollo del conocimiento, se puede tomar como primer referente de traducción el paso de la impresión afectiva -intuición momentánea en la conciencia- al lenguaje, que realiza el niño a edades muy tempranas (Mialaret, 1986). La siguiente gran traducción en el desarrollo infantil la encontraremos en el plano de la aritmética, cuando el niño realiza el paso de la matemática informal a la matemática formal (Baroody, 1988). La traducción algebraica viene a coronar, de esta manera, una sucesión de traducciones que deben tener lugar antes de llegar a la construcción del pensamiento algebraico. Para analizarla se plantean dos preguntas fundamentales: ¿dónde se encuentra el niño antes del álgebra? y ¿cómo construye su conocimiento algebraico?.

3.3.1. El niño antes del álgebra

Hemos citado a Socas (1989) para establecer los periodos de desarrollo cognitivo que atraviesa el niño según los trabajos de Piaget y Collis. Sus capacidades operativas en cada uno de estos estadios son[5]:

- Preoperatorio, de 4 a 6 años. El niño no es capaz de realizar operaciones.
- Temprano de las operaciones concretas, de 7 a 9 años. En el cuál el niño es capaz de realizar operaciones simples con un referente físico. En esta etapa los niños necesitan la clausura de las operaciones y no están establecidas la inversión de operaciones, ni la estructura operacional.
- Final de operaciones concretas, de 10 a 12 años. En el cuál el niño es capaz de realizar operaciones complejas, incluso comprendiendo la no clausura, para números pequeños. Aún no está del todo establecida la inversión de operaciones, ni la estructura operacional, sin embargo se comienza a comprender, en esta etapa, el papel de las letras como generalizaciones numéricas.
- De generalización concreta, de 13 a 15 años. En el cuál el niño es capaz de realizar operaciones complejas sin necesidad de clausura y están establecidas correctamente la inversión de operaciones y la estructura operacional. En esta etapa el niño es capaz de generalizar correctamente a través de símbolos algebraicos con pleno sentido representativo.
- De operaciones formales, de 16 años en adelante. En el cuál el niño es capaz de realizar todo tipo de operaciones sin necesidad de ningún referente físico, ni clausura, comprendiendo la inversión de operaciones y la estructura operacional que posibilitan la operatividad formal. En esta etapa se desarrollan los conceptos de variable e incógnita propios del álgebra.

[5]La cronología no debe entenderse como cerrada, sino aproximada. El propio Piaget establece los desfases horizontales para aceptar las variaciones de ésta debido a múltiples factores socioculturales o personales, sin que ello afecte a la secuencia de adquisición del conocimiento.

Existe una etapa anterior, denominada sensorio-motriz, de 0 a 4 años, que no ha sido considerada por razones obvias, ya que no tiene ninguna relación específica con las matemáticas. Se caracteriza por la ausencia de la función simbólica en sus inicios, ya que el niño es incapaz de realizar representaciones mentales y por lo tanto de operar sobre ellas. En cambio, la asimilación funcional, a través de la repetición, de ciertos reflejos innatos dará lugar a hábitos que permitirán las coordinaciones motrices y sensoriomotrices. La interacción con el medio proporciona al niño, en esta etapa, el desarrollo de la función representativa, así como la lingüística, que le permitirá evolucionar la inteligencia inicialmente práctica de esta etapa hacia el pensamiento intuitivo de la etapa preoperatoria. La evolución de los estadios posteriores se hace posible gracias a la función representativa ya que parece existir un estrecho vínculo entre el proceso de simbolización y la toma de conciencia, como ya se ha citado

> *«es, en gran manera, por el uso de símbolos, como logramos control voluntario sobre nuestros pensamientos».* (Skemp, 1993)

Cuando el niño alcanza la edad de 7 u 8 años comienza la etapa de las operaciones concretas. Este niño empieza a intuir la reversibilidad de operaciones. Esto va a hacer posible la adquisición de conceptos como el de número, y para ello será necesario que descubra por sí mismo la cualidad de conservación de la cantidad en los conjuntos de objetos. En etapas anteriores el niño era incapaz de comprender la equivalencia entre dos conjuntos del mismo cardinal si no se correspondían de manera espacial o visual. La reversibilidad en la operación de equivalencia le permite superar la dependencia de la percepción espacial y dar ese paso definitivo que supone la conservación del número. Veamos con detenimiento cómo se desarrolla este proceso en el caso de la construcción de la idea de número. Según Piaget (1987) el número es el producto de una síntesis de estructuras de seriación y clasificación, lo que implica su conceptualización como clase, con una relación de orden definida entre dichas clases, ya que cada una contiene la anterior. La operación de clasificación necesaria para la formación del concepto de número hace referencia a los aspectos semejantes de los objetos a clasificar, mientras que la seriación nos obliga a atender a las diferencias de dichos objetos. Esta colección de inclusiones y relaciones asimétricas evidencian dos aspectos englobados en el concepto de número: ordinal y cardinal.

> *«El número cardinal supone una ordenación de las unidades necesaria para su diferenciación, mientras que el número ordinal supone la coligación de los términos ordenados, sin lo cual n+1 no podría ser distinguido de n».*

De este modo, un número n considerado como cardinal -clase- contiene las subclases *{n-1, n-2, ..., 1}*, y para diferenciarlo de otro número m sería necesario atender a las subclases del otro número *{m-1, m-2, ..., 1 }*, es decir, sería necesario enumerar para ordenar y ordenar para diferenciar. Sin embargo, un número n considerado como ordinal indica únicamente su posición en una única serie -no en clases-, por lo cuál las únicas diferencias entre dos ordinales se hallan en la posición que ocupan. Para el correcto establecimiento de la relación entre los aspectos ordinal y cardinal del número se hacen necesarias las coordinaciones parte-todo, como se verá a continuación.

En la etapa intuitiva, el niño aún no ha comprendido esta relación por lo que el *número* -la cursiva indica que es un preconcepto, pues aún no posee toda su carga semántica- se establece como ente aislado, sin relación con los otros entes numerales, y progresivamente va encontrando su posición respecto a un todo que representa la secuencia de los números naturales. Hasta que llega este momento el niño es incapaz de centrar su atención, a la vez, en el número como ordinal -posición que ocupa dentro de la serie de los naturales- y como cardinal -número como clase-. En las relaciones parte-todo si el niño piensa en el todo B -con B=A+A'- es incapaz de distinguir las partes A y A', de la misma manera, si piensa en las partes A y A' rompe la coherencia del todo, y delega en A' las cualidades del todo B destruido, por lo que es fácil, si A>A', encontrar afirmaciones del tipo A>B -la parte es mayor que el todo-, en niños que aún no han desarrollado la reversibilidad de estas acciones. Cuando se alcanza la reversibilidad de las operaciones citadas se logrará la coordinación de los conceptos de ordinal y cardinal que conforman la idea de número.

Pero para poder dar por finalizada esta presentación de la construcción del número se debe explicar detalladamente el concepto de conservación. Se entiende por conservación la comprensión del hecho de que la correspondencia biunívoca establecida entre dos conjuntos del mismo cardinal no varía con las distintas configuraciones que presenten los conjuntos. El niño adquiere esta comprensión en varias etapas. En la primera el niño necesitará la correspondencia visual entre los dos conjuntos para identificar una correspondencia biunívoca entre ambos, es decir, dicha correspondencia desaparecerá en cuanto se varíe la forma de uno de los dos conjuntos. En una segunda etapa, suponiendo la variación de configuración de uno de los dos conjuntos, el niño tendrá capacidad para retornar a la situación inicial de correspondencia visual y afirmar la correspondencia en tal caso, pero no está muy claro que el sujeto comprenda la invariancia de la correspondencia biunívoca por la forma. En la última etapa el niño puede afirmar dicha invariancia sin necesidad de apoyo visual, pues es capaz de aplicar la reversión de la acción de cambio de configuración mentalmente, comprendiendo que ambas configuraciones son equivalentes.

Para ilustrar este proceso de recreación de la conservación del número se citará un ejemplo de Piaget (1987). Supongamos dos hileras de objetos iguales que guardan la configuración uno a uno -situación 1-, si preguntamos a un niño en su etapa de pensamiento intuitivo si hay el mismo número de objetos nos dirá que sí, pero si modificamos la configuración de la segunda hilera, aumentando la distancia entre sus objetos y con ello la longitud de la serie -situación 2- la respuesta, con mucha probabilidad, será que la hilera más larga tiene mayor número de objetos. El niño parece estar convencido de que la mayor longitud implica mayor número, esto ocurre porque se encuentra en la etapa primera y necesita de la percepción visual para identificar la equivalencia de ambos conjuntos. No hay conservación en esta etapa. Si repetimos la operación con un niño en la segunda etapa el niño dudará en su respuesta y es posible que conteste que en la situación 2 no se conserva el mismo número en ambas hileras aún cuando, por sí mismo, sea capaz de retornar a la situación 1, donde no le quepan dudas de la igualdad del número de objetos en ambas hileras. Existe reversibilidad manipulativa, pero no mental. La conservación no está afianzada en esta etapa. Por último, si preguntamos a un niño en la etapa de las operaciones concretas, que coincide con el tercer nivel del experimento piagetano, no tendrá dudas en afirmar la equivalencia de ambas hileras en la situación 2 y por lo tanto la conservación del número tras la variación en la configuración. La invariancia de la relación de equivalencia asegura la conservación del número, completamente comprendida en esta etapa.

> *«El pasaje de las configuraciones perceptuales o imaginadas, desprovistas de conservación, a las colecciones lógico-matemáticas con conservación necesaria es la resultante de la reversibilidad progresiva de las acciones de reunir y seriar, y desemboca simultáneamente en los "agrupamientos" del encaje de las clases y la seriación de las relaciones asimétricas, así como en el "grupo" que caracteriza a la sucesión de números enteros».*

Entonces, y sólo entonces, Piaget afirma que el niño ha adquirido por completo el concepto de número.

Las críticas a Piaget han hecho hincapié en el hecho de que niños que han fracasado en los test piagetanos sobre la conservación del número sean capaces de manipularlos e incluso puedan aprender a sumar y restar. Baroody (1988) afirma que contar es la vía por la cual el niño aprende los conceptos de equivalencia y conservación, es decir

> *«parece que los niños pequeños suelen pasar por una etapa en la que se basan en contar para conservar (conservación con "verificación empírica") antes de conservar por comprensión (conservación con "certeza lógica"). (...) contar es la clave para hacer explícitas y ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden de magnitud».*

Este autor también afirma que los programas de enseñanza coherentes con la teoría de Piaget ponen el objetivo general en fomentar el pensamiento lógico y por ello consideran inútil enseñar el número y la aritmética hasta después del desarrollo de ciertos requisitos psicológicos, como comprender las clases, las relaciones o la correspondencia biunívoca.

Aunque la manipulación de números sencillos, e incluso de operaciones con ellos, se vaya realizando paralelamente al proceso mental de la construcción del concepto de número -y no podrá ser de otra manera-, dicho proceso se hace necesario para una correcta comprensión de los conceptos matemáticos posteriores, incluso de generalizaciones y abstracciones futuras. El aprendizaje tradicional de las matemáticas ha presentado los procedimientos independientemente de una base conceptual adecuada y, en muchas ocasiones, vacíos de significado. Esto no quiere decir que no se puedan aprender dichos procedimientos, sino que su aprendizaje no será significativo hasta que no se sustente sobre una base conceptual bien fundamentada.

> *«Se puede enseñar a los niños a dar la respuesta correcta a 2+3 pero no puede enseñárseles directamente la relación que subyace a esta adición»* (Kamii, 1988).

La repetición de procedimientos vacíos de significado no origina aprendizaje por sí mismo, sino memorización, lo cuál puede ser útil pero nunca constituirse en objetivo consistente. El aprendizaje en matemáticas no sólo va dirigido a la adquisición de procedimientos operativos, sino al desarrollo del pensamiento lógico, a través del cuál y para lo cuál serán necesarios dichos procedimientos, pero no como objetivo final, sino como medio para fomentar el desarrollo del pensamiento lógico. Por ello el objetivo del desarrollo del pensamiento debe prevalecer por encima de los procedimientos *a corto plazo*.

La enseñanza derivada de Piaget corre el peligro de centrarse en el aspecto cognitivo de las etapas y las actividades de experimentación piagetanas, olvidando la dimensión global de su filosofía del desarrollo personal. La escuela debe buscar dicho objetivo del desarrollo (Kamii y De Vries, 1985), pero esto no tiene por qué implicar el abandono total de las actividades aritméticas, sino que debe hacerse uso de todas las oportunidades posibles para desarrollar el pensamiento lógico, y la aritmética es una de las mejores actividades para hacerlo (Nesher et al., 1982). La comprensión conceptual del número puede llegar a través de las relaciones lógicas o del conteo, pero todas las acciones que el niño realice vinculadas a la aritmética -siempre que no sean vacías de sentido y exclusivamente miméticas- serán positivas para su construcción. Lo que no se debe olvidar es que el objetivo no es aprender a contar, ni aprender aritmética, ni siquiera matemáticas, el objetivo debe ser más general y debe referirse a la autonomía del niño para capacitarlo para su vida actual y futura, como ya se ha afirmado con anterioridad.

No se trata de convertir la enseñanza del número en un análisis psicológico, ni siquiera Piaget pretende que su obra sea un sistema de enseñanza, sino un análisis psicogenético del conocimiento que ha presentado su mayor utilidad en la comprensión de cómo los niños construyen el conocimiento a la vez que desarrollan su pensamiento lógico. Se trata de utilizar estos resultados para enfocar la didáctica de una manera eficiente que fomente la formación en el niño de estructuras mentales a través de su interacción con el medio.

Aproximadamente desde los 11 o 12 años el niño es capaz de realizar razonamientos abstractos y sistemáticos y aritméticamente ha alcanzado cierto nivel de reversibilidad operatoria -aunque aún no esté dominada por completo, ni en todos los casos-. Es el momento de las formalizaciones y, como consecuencia de ello, del aprendizaje del álgebra.

> *«La formación algebraica consiste en la adquisición: del sentido de la reversibilidad de operaciones; del dinamismo operatorio que resulta de las equivalencias y de las combinaciones cíclicas que se pueden obtener añadiendo un nuevo par de operaciones inversas en un ciclo dado; y del interés por la determinación a priori de las propiedades que puede tener un conjunto de operaciones».* (Gattegno, 1968)

Tras la consecución de la conservación en el número, la introducción del razonamiento algebraico viene a perturbar el aparente equilibrio alcanzado con conceptos como variable, incógnita, generalización, etc.

En este momento son muchas las preguntas que se plantean, a las cuales se va a intentar dar respuesta en este trabajo:

1. ¿La naturaleza del álgebra permite pensar en que éste pueda presentarse como necesidad en el proceso de evolución del conocimiento matemático del niño?

2. De ser así, ¿adquiere el niño esta necesidad de un modo natural tras el dominio de la aritmética?

3. Y si no, ¿se puede propiciar esta necesidad?

4. En el campo de la didáctica, ¿se produce la introducción del álgebra de manera lo más adecuada posible para el desarrollo del aprendizaje del niño?

5. De no ser así, ¿qué nuevas situaciones serán idóneas para que el niño extraiga los conceptos algebraicos a partir de su propia experiencia?

3.3.2. Proceso de la psicogénesis del álgebra: paso de la aritmética al álgebra

La aritmética es la parte de las matemáticas que estudia los números, las operaciones entre ellos y las relaciones y propiedades que de éstas se deducen. Se ha analizado el proceso de construcción del número con relativo detenimiento y no parece adecuado para el objeto de este trabajo extenderse en el modo en que se construyen las operaciones aritméticas. Bastará con señalar que igual que el número ha surgido de forma natural, por desarrollo de las operaciones lógicas de clasificación y seriación, el resto de la aritmética tiene el mismo origen ya que se basa en simples estrategias de conteo que van adquiriendo complejidad a lo largo del tiempo, conformándose las estructuras mentales adecuadas (Kamii, 1988; Baroody, 1988).

El álgebra se ha definido como método para el estudio de la realidad y como objeto de las matemáticas con una semántica y sintaxis propia. En cualquiera de los casos se basa en la convencionalidad de los símbolos que se usan en el lenguaje algebraico para la expresión de informaciones y manipulación de los objetos y relaciones de las mismas, lo que lo aleja de los planteamientos de naturalidad que se han manifestado para la aritmética.

Sin embargo, tanto el proceso de representación -que aparece de un modo natural en el desarrollo del conocimiento del niño- como la operatividad algebraica -que está sujeta a unas reglas concretas que se extraen de la aritmética- permiten pensar que el aprendizaje del álgebra no debería suponer un obstáculo mayor que el aprendizaje de la aritmética, cuya expresión formal también es convencional.

Esta afirmación se fundamenta en la idea del álgebra como generalización de la aritmética y en la continuidad que el pensamiento algebraico supone respecto del pensamiento aritmético, una vez salvada la necesaria ruptura epistemológica (ver 3.1.2). Lo convencional es el lenguaje algebraico, que es la expresión matemática del pensamiento algebraico.

El tránsito de la aritmética al álgebra en el niño se produce por la generalización del concepto de número y la abstracción de las propiedades de la aritmética, acciones mentales que favorecen la construcción de las estructuras formales necesarias para el sustento del pensamiento algebraico (3.1.3).

D'Alembert (citado en Piaget, 1987) sostuvo que

> *«el álgebra es evidente de por sí, o al menos debería serlo, en la medida en que generaliza las primeras ideas basadas en la sensación».*

Esta afirmación se refiere a lo que hemos denominado pensamiento algebraico, que es el que generaliza el concepto de número al de objeto matemático y la aritmética a la lógica interna del álgebra. En cuanto al lenguaje algebraico, éste depende de una serie de convenciones matemáticas que el niño debe aprender de su entorno social, una vez ha realizado su propia construcción interna del pensamiento algebraico.

> *«Los niños no aprenden los signos matemáticos mediante asociación y absorción del entorno, sino mediante su asimilación a las ideas que ya han construido»* (Kamii, 1988).

He aquí la gran diferencia entre el aprendizaje del pensamiento aritmético o algebraico, que requieren la construcción activa del sujeto a través de la interacción con la realidad, y el aprendizaje de las notaciones aritméticas o algebraicas, como simbolización posterior de un concepto ya aprendido para su comunicación universal.

Como ya se ha dicho, el pensamiento algebraico también se sustenta en imágenes (página 96). Hadamard (1947) afirma que el inconsciente no usa palabras, aunque sí otros símbolos propios no convencionales y que son objetivados a través del lenguaje, en nuestro caso del lenguaje algebraico. Éste aparece entonces como medio de objetivación y estabilización del pensamiento individual para, a través de signos convencionales, permitir la comunicación.

De este modo el pensamiento algebraico está relacionado con la función representativa que el niño ha desarrollado en la etapa del pensamiento intuitivo, además de con el dominio de la aritmética que ha alcanzado a lo largo de la etapa de las operaciones concretas. Sin cualquiera de estas dos capacidades previas la psicogénesis del álgebra no sería posible. Además, también es una cualidad necesaria para el desarrollo del álgebra una cierta madurez de pensamiento y lenguaje, sin una capacidad de generalización y de expresión rigurosa adecuadas no se pueden

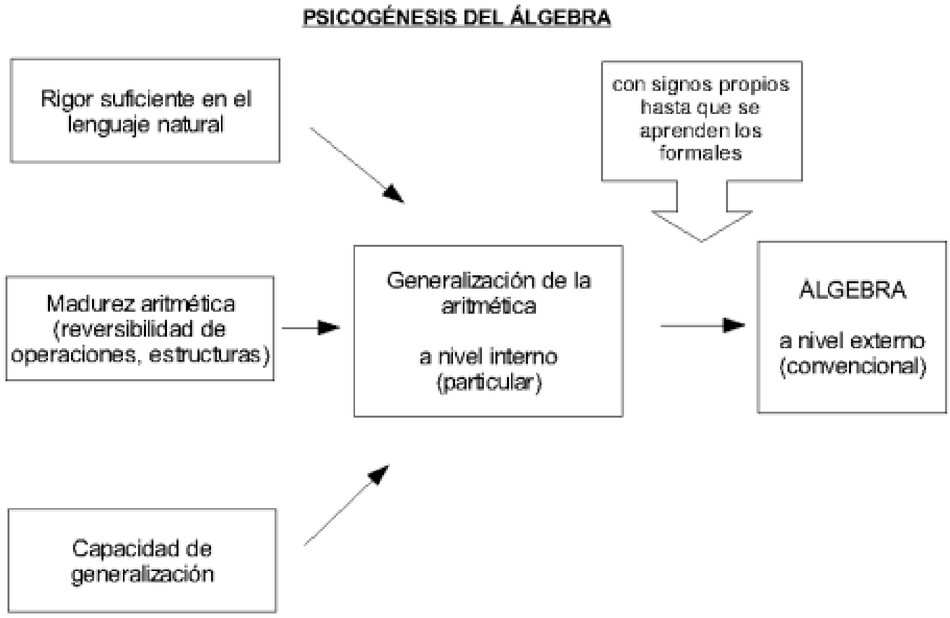


Figura 3.9: Psicogénesis del álgebra

construir los conceptos algebraicos que se soportan, precisamente, en dichas necesidades, como ya hemos visto. (Figura 3.9)

Piaget y García (1982) estudian este proceso de psicogénesis del álgebra y realizan una evaluación del paralelismo evolutivo que existe entre la historia del álgebra y la construcción de los conocimientos algebraicos en el niño. Encuentran tres etapas en la psicogénesis que se corresponden en su funcionalidad con tres periodos distinguibles en la historia del álgebra: el primero marcado por el uso particular de algunos signos a partir de la matemática griega; el segundo caracterizado por el uso de una simbología abstracta general, a partir de Vieta, y en la que se empiezan a resolver colecciones de ecuaciones con métodos aún particulares y, más adelante, por el uso de transformaciones algebraicas que transforman ecuaciones no resueltas en resolubles; el último periodo se caracteriza por la aparición de las estructuras algebraicas, a partir de Galois[6].

[6]Los tres periodos que hemos determinado en 3.1.1 no concuerdan con la división que hacen aquí estos autores. He encontrado, además, ciertas incongruencias a la hora de delimitar sus etapas, que denominan intra-operacional, inter-operacional, y trans-operacional en la historia del álgebra. Por ejemplo, en un lugar afirman que el periodo inter-operacional comienza con el uso de las transformaciones en álgebra (páginas 155-157), que correspondería a la época de Lagrange y Gauss, y en otro afirma que el periodo inter-operacional comienza con el simbolismo de Vieta (página 161), bastante anterior. Yo he respetado la delimitación establecida en 3.1.1 que me parece más clara, pues se relaciona directamente con el simbolismo, que es el caso que nos ocupa en

La primera de estas etapas corresponde, en la psicogénesis del álgebra, con la denominada por los autores *intra-operacional*. Este nombre responde al estudio de las propiedades de los objetos como entes aislados y en ella el niño comienza a realizar una simbolización particular de los objetos matemáticos utilizando algunos signos algebraicos. La segunda, denominada *inter-operacional*, se refiere al estudio de las relaciones entre objetos. En esta etapa el niño inicia una manipulación de los símbolos de modo más general y abstracto. Esta generalización no se verá plenamente realizada hasta la etapa *trans-operacional*, que trata del estudio estructural de conjuntos de objetos matemáticos, la cual representa el mayor grado de abstracción algebraica posible.

Las dos primeras etapas se refieren al álgebra como método de estudio de aplicaciones concretas, la tercera lo establece como un fin en sí mismo, que generaliza los métodos de las dos etapas anteriores y se abstrae totalmente de la realidad particular que subyace en éstas, permitiendo la manipulación de estructuras operatorias.

> *«Después de haber considerado que podía construir libremente el conjunto de la matemática mediante algunas operaciones manejadas a voluntad, el espíritu ha descubierto la existencia de totalidades operatorias»*

Esta última etapa de las estructuras algebraicas, que Piaget (1987) hace corresponder con la de las operaciones formales, permite modelizar algebraicamente una situación concreta para su manipulación independientemente de la realidad y así, una vez conseguida su resolución, aplicar los resultados obtenidos por métodos puramente algebraicos a la misma.

La construcción del álgebra va de lo particular a lo general (3.1.3), de su función de estudio de la realidad como lenguaje a su establecimiento como ciencia independiente de la misma y con autonomía suficiente para generar conocimiento por sí misma, ya que se espera que el producto del estudio de las estructuras algebraicas manifieste, *a posteriori,* una conformidad con la realidad que lo muestre prolífico en sus aplicaciones (páginas 23 y 25).

Piaget y García (1982) observan que este método trifásico, tanto en la historia del álgebra como en la psicogénesis de la misma, completa al descrito en la psicogénesis del conocimiento.

este trabajo. La otra división se centra más en los métodos de resolución de ecuaciones por ello sitúa el periodo *inter-operacional* a partir de Vieta, que comienza una sistematización de la resolución de ecuaciones aún con métodos particulares y el *trans-operacional* con la aplicación de las transformaciones a la resolución de ecuaciones, lo que implica una generalización de los métodos y una clasificación de las ecuaciones en familias.

> *«Si la sucesión intra-inter-trans se la encuentra, en dirección proactiva, tanto en las subetapas como en las etapas, actúa también en forma retroactiva sobre las construcciones anteriores por medio de una reorganización»* .

Según los autores, el proceso de construcción del conocimiento está seriado en etapas y los mecanismos de sucesión entre ellas, que coinciden con los que relacionan las etapas históricas, son el rebasamiento y revisión continuos propios de la generalización constructiva de los conocimientos previos y el proceso *intra-inter-trans*, que se acaba de exponer. Estos mecanismos se encuentran en los pasos entre etapas, pero también en cada progreso dentro de la misma etapa. Ello les permite afirmar la analogía funcional entre la historia de la ciencia y la psicogénesis del conocimiento, pues en ambos casos se observan los mismos mecanismos comunes a la epistemología del propio conocimiento, ya sea entendido como proceso personal o como proceso histórico. Los mecanismos propios del conocimiento son únicos y podemos descubrirlos en todo proceso que implique generación del conocimiento, aunque sea a niveles de pensamiento o investigación diferentes.

Sin embargo, la cronología histórica para el aprendizaje de las matemáticas no ha resultado un método consistente. Más que esta idea, lo destacable sería la comprensión del funcionamiento de los mecanismos de construcción del conocimiento, que no pueden seguirse de manera fiel, pero sí es necesario conocerlos para guiar mejor al alumno en su *re-construcción-con*. Se utiliza, en este momento, la preposición *con* de forma consciente pues no se trata de que cada alumno recorra toda la historia de las matemáticas por sí mismo, ni las redescubra con su profesor, sino de que éste le guíe de un modo pausado, reconstruyendo los conocimientos, profundamente unas veces, someramente otras, según las necesidades de los conceptos y procedimientos y la utilidad de éstos en el desarrollo posterior de las matemáticas del alumno. Se deben destacar conceptos históricos importantes, independientemente de su utilidad actual, si son necesarios para la comprensión de las matemáticas contemporáneas, mientras que se ignorarán otros que no tienen relevancia para la construcción propia del alumno, aunque su peso histórico sea considerable.

3.3.3. La construcción del símbolo algebraico

Ya se ha dicho que la psicogénesis del álgebra va de lo particular a lo general. Hunde sus raíces en la particularidad de la aritmética y, a través de la generalización de ésta, alcanza la variabilidad y la abstracción que lo caracterizan, permitiendo la formalización y la manipulación simbólica (ver 3.1.2).

El niño construye el concepto de número como se ha analizado en 3.3.1, para lo que requiere alcanzar la conservación, pero el método algebraico supone la perturbación de dicha conservación con la introducción de conceptos como variable, incógnita, parámetro, etc.

El signo numérico ha adquirido significado para el niño cuando éste asocia su concepto de número, extraído, como se ha visto, de experiencias de una misma cantidad de objetos (por ejemplo, tres bolas, tres lápices, etc.) y el signo numérico correspondiente (en este ejemplo, "3"). La significación de "3" se realiza a posteriori de la conformación del concepto de 3, por ello el niño debe tener muchas y distintas experiencias del número antes de ser capaz de construir dicha relación asociativa. Esta significación del número como asociación de un símbolo -concepto del número- a un signo -grafía numérica correspondiente- establece una relación que es invariable para el niño, una vez afianzada.

No es equívoco pensar que el niño concede el mismo carácter de conservación a las letras en una expresión algebraica. Supongamos que pedimos a un niño sin conocimientos algebraicos que resuelva una cuestión como x+3=7 -dándole todas las explicaciones necesarias respecto a los significados que desconoce- y que responde correctamente que la x debe ser 4. El niño que ha alcanzado la conservación y aún no comprende el significado de las letras en álgebra puede fácilmente extrapolar dicho valor x=4 a una siguiente cuestión x+2=8, sin siquiera percibir, al menos no *a priori*, el problema conceptual subyacente (6=8). Se trata de un problema de conservación del valor del signo. La consecución de la propiedad de conservación, que tanto esfuerzo le ha costado al niño, puede convertirse en un inconveniente a la hora de iniciarse en el álgebra.

Para superar esta dificultad se requiere una ruptura (ver 3.1.2) con la aritmética a través de la construcción del concepto de variabilidad que implica el pensamiento algebraico. En realidad se trata de traer el concepto intuitivo que el niño tiene de variable al pensamiento reflexivo (Skemp, 1993). El uso de *variable* en el lenguaje común no coincide plenamente con el significado de la *variable matemática*. Es un concepto más amplio, sujeto al sentido de variabilidad, que no sólo engloba el concepto de *variable matemática* sino que también se refiere a los conceptos matemáticos de *parámetro* e *incógnita* (ver página 129).

Este uso intuitivo del concepto de variable viene implícito en expresiones como "un hombre", ya que

> *«el término "un hombre" (...) es independiente del número si pertenece a un sistema operatorio que sólo se refiere a las relaciones de individuo a clase, o de clases parciales a clases totales»* (Piaget, 1987).

En ambos casos *un* representa variabilidad, ya sea porque no importa de qué elemento de la clase se trate o es un elemento desconocido de la misma (relaciones individuo-clase), o porque nos referimos a la clase entera (relaciones entre clases). También se utiliza este tipo de sentencias en las matemáticas, por ejemplo, cuando se enuncian propiedades generales para los números naturales como *el orden de "los" sumandos no altera la suma*, que el niño ya ha manejado y de las que comprende su carácter general.

De esta idea de variable y de su asociación con la aritmética surge el pensamiento algebraico,

> *«nuestra finalidad (...) consiste en mostrar cómo el esquema numérico, combinado con la idea de variable, conduce directamente al álgebra»* (Skemp, 1993).

Pero esta asociación no resulta evidente. La dificultad de concebir el concepto de variable de manera independiente de la variación de una magnitud referida a un objeto es un buen ejemplo de ello. Frege (citado en Panizza et al., 1999) ofrece un marco incomparable para entender esta cuestión al analizar el concepto de función:

> *«¿son las variables del análisis números variables? ¿Qué tendrían que ser además si, en general, pertenecen al análisis? ¿Pero, por qué casi nunca se dice "número variable" y sí por el contrario a menudo "longitud variable"? Parece esta expresión más admisible que "número variable". Entonces crece la duda: ¿Hay números variables?(...). Cuando algo cambia tenemos sucesivas, diferentes, cualidades y estados en el mismo objeto. Pero si él no fuera el mismo no tendríamos ningún sujeto del cual pudiéramos afirmar el cambio. Una vara se dilata con el calor. Mientras esto sucede permanece la misma. Si en lugar de ello se la arroja y se la sustituye por una más larga, no se podría decir que se ha dilatado. Un hombre envejece, pero si no lo podemos a pesar de todo reconocer como el mismo, no tendríamos a nadie del cual podríamos decir la edad. Apliquemos esto al número. ¡Si cambiamos un número qué queda del mismo? Nada. En consecuencia no se cambia de ningún modo un número, pues no tenemos nada respecto de lo cual podríamos predicar el cambio.»*

Las magnitudes variables introducen un cambio importante en el significado del uso de los símbolos, para el niño. Cuando éste relacionaba "3" con el concepto de 3, ya formado en su mente, "3" aún no tenía un significado para él, era un signo nuevo. En el caso del álgebra los signos tienen un significado previo al algebraico. Los signos *a, b, x,* etc. ya representan símbolos dotados de significado para el niño. La acomodación de los esquemas en los que se enmarcan dichos símbolos, con sus significados concretos, a otros nuevos en los que se acomoden los nuevos significados asimilados a ellos, va a resultar costosa para el niño. Veamos cuáles son esos nuevos significados y cómo resulta dicho proceso de asimilación-acomodación.

Ya se ha dicho (en la página 129) que las letras en álgebra muestran significados diferentes según su uso, lo que representa un handicap importante en cuanto a lo que a su distinción y comprensión se refiere. Una letra puede funcionar como *parámetro* -como representación de un valor constante en general que, a veces, puede ser fijado aleatoriamente y otras vendrá determinado por ciertas condiciones según el caso concreto-; como *variable* -en el cuál lo que nos interesa no es tanto el conjunto de valores que representa, sino la relación de dependencia que experimenta con otras *variables* de la misma expresión-; o como *incógnitas* -representando uno o varios valores desconocidos que vienen determinados por la imposición de ciertas condiciones.

En el primero de estos usos se puede observar una aplicación entre el signo literal y el número general representado, mientras que en el segundo y el tercero esta relación no es una aplicación. En el caso del parámetro, una vez que se fija el significado del signo éste se asocia al mismo, aunque dicho número puede ser representado por otros signos literales diferentes. En el caso de las variables y las incógnitas el signo literal puede representar distintos números, es decir, todo un conjunto de números con una determinada cualidad. Por ello mismo la relación entre el signo y el número no es una aplicación.

La variabilidad va asociada a una relación que no es una aplicación, en general, pero una vez restringida a un valor concreto dicha relación es una aplicación inyectiva, como ocurre en el caso del parámetro. En este caso la variabilidad se restringe a una particularización aritmética, aunque sea con un número general. En una expresión algebraica las mismas letras representan siempre el mismo número, es decir, se particulariza su valor numérico. En distintas expresiones algebraicas las mismas letras pueden representar números diferentes, es decir, en general la relación no es una aplicación. En el caso de la variable y la incógnita esta relación no es nunca una aplicación, sino una relación entre relaciones (relación de segundo orden, ver en la página 127), pues si lo fuese desaparecería en la idea de variabilidad asociada con la variable y la idea de conjunto de valores que verifican la expresión asociada con la incógnita.

La dificultad de estos conceptos no puede superarse de otra manera que mediante la manipulación de las letras en múltiples y variados casos, pero esta idea nos remite a la paradoja descrita por Sfard (citado en Arcavi, 2007) al buscar una explicación a la dificultad de las matemáticas. Este autor describe la siguiente circularidad: *si el significado es función del uso, uno debe manipular un concepto para entenderlo (en nuestro caso, manipular símbolos para sentirlos y sentir qué pueden hacer por nosotros), pero por el otro lado, ¿cómo podemos usar algo sin entenderlo (o sin sentirlo)*?.

Algunos autores (Tabach y Friedlander, 2003) han probado que iniciar el aprendizaje algebraico desde los problemas contextualizados puede ayudar a distinguir entre parámetros y variables y a comprender mejor sus características.

La acomodación del significado intuitivo de variabilidad a estos nuevos esquemas, una vez establecidos, no debería comportar mayor dificultad, pero el cambio de la significación tradicional del signo literal, por ejemplo, *b,* a signo que representa un número o un conjunto de números, no es en absoluto evidente. En ambos casos *b* es una letra del alfabeto que se combina con otros signos en un sistema de comunicación, la diferencia estriba en el modo de combinación que presenta dicho sistema y la naturaleza de los símbolos con los que se combina. En el primer caso la combinación se realiza únicamente por yuxtaposición con otras letras, lo cual no representa más que una relación de enlace que señala la pertenencia a una unidad - la palabra- dentro del sistema de comunicación. En el segundo esta combinación se produce a través de signos de operaciones matemáticas (a veces omitidos, como en el caso del producto entre letras o entre número y letra, lo que ocasiona ciertos problemas con la yuxtaposición tradicional, como analizaremos en la siguiente sección) con otras letras o con números, constituyendo expresiones algebraicas con sentido para el nuevo sistema de comunicación. El significado primero de *b* lo enmarca en un conjunto finito de signos ordenados, en el cuál *b* ocupa el segundo lugar, sin embargo, en cuanto a la representación de un número *b* pertenece a un conjunto infinito de ellos (*..., b-2, b-1, b, b+1, b+2,* ..., si son naturales; ..., b-r, b, b+r, ..., donde $r \in \mathbb{Q}$, si son racionales; ..., b-ε, b, b+ε, ..., donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, si son reales).

La conquista de este nuevo sentido puede resumirse en la comprensión del carácter numeral -en este caso de *un* número, en general- de *b* lo cuál dependerá de la reflexión exhaustiva sobre los esquemas numéricos y el concepto de variabilidad, en este sentido la discusión y la argumentación se presentan como actividades imprescindibles para la toma de conciencia de la nueva simbolización. La experiencia que Skemp (1993) realiza con un grupo de alumnos acerca del valor de la explicación a terceros como método para fijar los propios conocimientos nos muestra que el aspecto social es determinante para la construcción del conocimiento, como ya anunciaran Kamii y De Vries (1985). Esta actividad permite la reflexión acerca de los propios esquemas para poderlos comunicar de una forma clara, ayuda a establecer relaciones con otros esquemas, e incluso entre distintos conceptos de un mismo esquema, además de considerar implicaciones con experiencias cercanas al contexto del propio alumno.

Una vez adquiridos estos conceptos -parámetro, variable e incógnita- el niño está en condiciones de comprender el verdadero alcance de la simbolización algebraica.

Como generalización de la aritmética el álgebra permite la abstracción de la estructura común de ciertas operaciones aritméticas y fijarla como elemento matemático en sí mismo. Esto requiere una madurez aritmética suficiente, a la vez que una madurez de razonamiento que permita la generalización. Además las actividades aritméticas que se realicen deben ir encaminadas a la facilitación de esta abstracción, mediante la reiteración de actividades variadas que permitan la reflexión acerca de ciertas propiedades operatorias.

La formalización algebraica debe realizarse una vez que se ha dado este paso de generalización hacia las estructuras matemáticas. Al igual que en el aprendizaje de la aritmética se proclamaba la prioridad de la comprensión de los conceptos aritméticos intuitivos sobre formalización de los mismos, en el aprendizaje del álgebra es prioritaria la formación de los conceptos algebraicos en el pensamiento del alumno sobre la comprensión de la notación algebraica formal, para así conseguir un aprendizaje realmente significativo del álgebra. Esto no implica la ausencia de notación algebraica a lo largo de este proceso, es más, ésta será necesaria para la formación de los conceptos algebraicos del mismo modo que la aritmética formal se intercala con la informal para una formación de los conceptos más completa. Pero el hecho de exigir una formalización prematura en un momento en el que el alumno no pueda proporcionarla significativamente puede provocar un rechazo y, lo que es peor, un mal aprendizaje que después sea fuente de errores difícilmente subsanables (Brizuela y Schliemann, 2003). Estas autoras han demostrado que los alumnos dotan de sentido su aprendizaje algebraico desde niveles muy tempranos si se introduce la notación algebraica como variación de sus representaciones espontáneas de problemas fuertemente contextualizados. Según las palabras de Baroody (1988)

> *«se debería ayudar a los niños a que vean que la matemática formal es, en muchos casos, una manera de representar lo que ya saben».*

El álgebra formal alcanza un suficiente nivel de abstracción que permite la configuración del mismo como teoría de las estructuras y su aplicación al estudio de problemas matemáticos o de otras ciencias como herramienta independiente y prolífica.

3.4. Dificultades de la enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico

Según el Informe Cockcroft

> *«la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen como medio de comunicación, y así ayuda a hacerlas "útiles", puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar».*

Esta es la primera dificultad que debe señalarse en cuanto al aprendizaje del álgebra, como ya se ha destacado en secciones anteriores. El carácter novedoso que presenta el álgebra como lenguaje, además de los conceptos de variabilidad y generalización de la aritmética, hacen que su comprensión sea un obstáculo en la evolución del pensamiento lógico del niño. Orton (1990) lo expresa de la siguiente manera

> *«la introducción de nociones algebraicas es causa de problemas que nunca nos perdonan ciertos alumnos en posteriores etapas de sus vidas».*

Esto puede ser la causa de abandono del estudio de las matemáticas por parte de ciertos estudiantes que se encuentran frustrados ante el estudio del álgebra. En otro lugar se puede leer

> *«el álgebra parece ser fuente de gran confusión y de las actitudes negativas de muchos alumnos»* (Cockcroft, 1985),

relacionándolo de nuevo con la incomprensión y la falta de sentido de los conceptos enseñados.

Otros muchos autores han señalado la dificultad de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Booth, 1984, 1988; Herscovics, 1989, Kieran, 1992). Kieran (1992) destaca distintas variables que influyen en esta dificultad: el contenido del propio álgebra, el aprendizaje inapropiado o la forma de enseñarlo, por esta última razón es por lo que Orton afirma que algunos alumnos *nunca nos perdonan*. Por su parte, A. Cortés (citado en Panizza et al., 1995) ha identificado ciertos invariantes operatorios que los estudiantes deben construir en su proceso de aprendizaje del álgebra: la conservación de la igualdad, el control algebraico de la validez de la transformación y la elección de la operación aritmética prioritaria. Todos ellos dan lugar a dificultades específicas de aprendizaje que se analizarán a continuación.

En esta sección se pretende poner de manifiesto algunas de las dificultades más frecuentes que se presentan en el aprendizaje tradicional del álgebra y algunos intentos que se han hecho, desde la didáctica, para contrarrestarlas.

3.4.1. Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico

Ya se ha señalado que, tradicionalmente, la primera toma de contacto del alumno con el álgebra es a través de una ecuación, en donde se le informa de que la letra representa un valor desconocido que hay que averiguar (Panizza et al., 1999). De este modo el alumno se enfrenta a signos vacíos de su significado literal habitual, como se ha analizado en la sección anterior, y cuya nueva significación se encuentra descontextualizada de la realidad.

Además, los primeros problemas contextualizados que suelen plantearse para su resolución con ecuaciones son tan sencillos que son fácilmente resolubles a través de la aritmética, por lo que el alumno no comprende la necesidad de este nuevo método. El álgebra no aparece, de esta manera, como una herramienta útil sino como un método impuesto por el profesor que sólo puede cobrar sentido a largo plazo, con la desmotivación que ello supone para el alumno. La introducción de ecuaciones con letras en ambos miembros de la igualdad plantea un problema desde esta perspectiva de iniciación al álgebra ya que requiere la interiorización de un procedimiento sin un sentido operativo real para el alumno.

> *«Presumimos que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación, no contienen, en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual. Las ecuaciones de ese estilo carecen de sentido a la vista de la presunta concepción ingenua de los niños de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente»* (Kieran y Filloy, 1989)

En este caso la ecuación no expresa su verdadero sentido como restricción del dominio y no conlleva la idea de variabilidad propia del álgebra. El alumno no aprende el paso explicado anteriormente de la conservación del número a la variabilidad del símbolo algebraico de esta manera y podrán darse situaciones en las que se dé prioridad a la conservación del valor de la letra por encima de la lógica de la aritmética, como vimos en un ejemplo anterior (en la página 142).

Esta introducción tradicional del álgebra ha puesto su acento en el aspecto sintáctico del mismo -programas educativos anteriores a 1971-. En contraposición podemos citar la introducción del álgebra como lenguaje, que pone su énfasis en su doble aspecto semántico y sintáctico (Nuffield, 1978) y otras propuestas con una clara carga semántica, como son la introducción desde la perspectiva de las estructuras (Diennes, 1971) y desde los elementos funcionales (Castelnuovo y Barra, 1983).

La presentación del álgebra desde un punto de vista semántico, como lenguaje y no como procedimiento de resolución, puede evitar la situación descrita anteriormente. Se trata de no enseñar el álgebra como método vacío de significado, lo cual provoca incomprensión e inseguridad y, a la larga, frustración. El álgebra es útil en cuanto a que proporciona una estructura simbólica en la mente del niño y, lo más importante, una forma de conexión entre distintas estructuras.

> *«Si los alumnos conectan los símbolos con sus referentes basados conceptualmente, los signos adquieren significado y llegan a ser poderosas herramientas. Desafortunadamente muchos estudiantes parecen aprender símbolos como marcas en el papel sin sentido. Los símbolos se separan del conocimiento conceptual que representan»*[7] (Hiebert y Lefevre, 1986)

Si la conexión entre el signo y el símbolo no se realiza correctamente el signo queda vacío de significado y el álgebra se presenta como un método engorroso, consistente en transformaciones que se aplican memorísticamente en ciertas situaciones, con un fin desconocido o incomprensible. El conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental del álgebra se apoyan enriqueciéndose mutuamente, pues el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental en que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos, mientras que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual en que los símbolos adquieren significado y se retienen y aplican más fácilmente los procedimientos (Hiebert y Lefevre, 1986).

[7] Se entiende aquí el *símbolo* en un sentido diferente al que hemos estado utilizando, pues en el mismo se distingue el signo sensible que lo soporta del referente conceptual que representa. Traduciríamos esta cita, utilizando los significados de signo y símbolo definidos en la página 109, de la siguiente manera: s*i los alumnos conectan los signos con los símbolos que soportan, los signos adquieren significado, y llegan a ser poderosas herramientas. Desafortunadamente muchos estudiantes parecen aprender signos como marcas en el papel sin sentido. Los signos se separan del símbolo que soportan.*

Desde la semántica el álgebra se convierte en la *poderosa herramienta* a la que se hace referencia en la cita anterior (en la página anterior), permitiendo las operaciones con los símbolos mediante la manipulación de los signos que los representan, de una forma económica y rigurosa, sin estorbos de significados pero de manera que los resultados obtenidos puedan ser extrapolados a su significado simbólico inicial. Apoyado en las relaciones funcionales y en las estructuras operativas el álgebra cobra sentido para el alumno pues es un medio de expresar, en forma general, informaciones útiles ya conocidas de la aritmética.

La traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, y viceversa, cobra así una importancia destacable para el aprendizaje del álgebra mismo. Podemos hablar de distintos tipos de procedimientos para la traducción observados en varios estudios realizados con alumnos que se inician en el lenguaje algebraico:

- La *traducción sintáctica* (Clement et al., 1981) se realiza sustituyendo palabras claves por símbolos matemáticos secuencialmente de izquierda a derecha y es usada, frecuentemente, por los estudiantes para escribir ecuaciones desde expresiones del lenguaje natural. Es una causa importante de errores, particularmente de inversión.

- En la llamada *comparación estática* (Clement et al., 1981) o *traducción semántica* (Herscovics, 1989) se intenta representar en la ecuación la relación entre términos de una forma global y no como traducción literal desde el lenguaje natural. MacGregor y Stacey (1993) sugirieron que la mayoría de las traducciones incorrectas son consecuencia de modelos cognoscitivos que procuran representar cantidades desiguales comparadas.

Vemos que ambos procedimientos son fuente de errores para el alumno que comienza su andadura en el lenguaje algebraico, ya sean por la traducción literal o por la incapacidad de representación de relaciones numéricas complejas a través de una expresión matemática.

Una parte importante de los errores en la resolución de problemas a través del álgebra se encuentran en la mala traducción realizada o la incapacidad de los alumnos para hacerla. Desde distintas experiencias contextualizadas y a través de esta traducción los alumnos pueden ir construyendo, por sí mismos y apoyados por el contexto social, el significado de variabilidad característico del signo algebraico, que no se construye con los programas exclusivamente sintácticos. Además, la posibilidad de dar y seguir instrucciones en un lenguaje nuevo y la componente imaginativa que esto conlleva pueden servir de incentivo a la hora de realizar dichas actividades.

Los problemas contextualizados presentan así una oportunidad inmejorable para el aprendizaje del lenguaje algebraico. En este sentido Sinitsky (2003) propone los problemas de combinatoria, por ejemplo, las particiones de un número natural como suma de dos bajo ciertas restricciones, como punto de partida para la introducción del álgebra. Ya se ha dicho que la enseñanza del álgebra a partir de situaciones concretas cercanas al alumno ayuda a presentar su aprendizaje de forma lo más natural posible pues este aprendizaje informal, en el terreno del pensamiento algebraico, obliga a la utilización de un lenguaje que exprese informaciones matemáticas y posibilite la manipulación de las mismas en orden a la resolución de problemas.

La resolución de problemas verbalizados, los cuales representan tradicionalmente una de las mayores dificultades para los alumnos, resulta más accesible si la conexión entre signo y símbolo de la que se hablaba (en la página 149) se ha realizado correctamente en la conceptualización que conlleva el pensamiento algebraico. El esquema de resolución de un problema de este tipo ya se ha analizado minuciosamente pues no es diferente del esquema de resolución de problemas aritméticos (ver página 60) que el alumno ya está habituado a resolver. Puede resumirse como: abstracción de la situación real, modelización matemática del problema, manipulación del modelo y aplicación de los resultados a la situación inicial. El álgebra posibilita, mediante un proceso de simbolización, la formación de un modelo matemático independiente de la situación real concreta, manipulable según las reglas algebraicas -que son completamente objetivas, incluso mecanizables- y traducible después, una vez encontrados los resultados, a la situación inicial por un proceso inverso al de la abstracción realizada. El aspecto instrumental que adquiere el álgebra *a posteriori* de su comprensión como lenguaje permite su uso con un objetivo definido en cada caso y no como un sistema de reglas vacías de significado que no se sabe bien cuando aplicar, ni cómo.

Por otra parte, ya se ha dicho que el aprendizaje de la aritmética es fundamental para el desarrollo del álgebra. Las actividades aritméticas son un excelente punto de partida para fomentar las ideas de generalización del álgebra y llegar a la necesidad de formalización de un modo espontáneo, como hemos visto en las propuestas de Sinitsky (2003). Partiendo de la aritmética se planteó una actividad para introducir el álgebra en una clase de 1º de ESO. Consistía en trabajar la inversión de operaciones a través de los juegos mentales de *"piensa un número..."*: un alumno piensa un número, realiza ciertas operaciones con él y ofrece el resultado al resto de los compañeros, junto con la secuencia de operaciones seguida. La experiencia era motivadora para los alumnos por la parte lúdica que conlleva y se esperaba que permitiese la comprensión de la dinámica interna de la inversión de operaciones, así como la expresión generalizada y gradualmente formalizada de las operaciones con un número desconocido.

Lo positivo de la experiencia fue que la formalización de una ecuación se introdujo en el aula de una forma sencilla, sin necesidad de explicar el valor de la incógnita y los procedimientos de resolución de las ecuaciones. Además está comprobado que el uso del álgebra como expresión de informaciones aritméticas en general se interioriza sin mayores obstáculos desde actividades de este tipo. La contrapartida negativa está en que los ejemplos que los alumnos proponen favorecen el pensamiento de que una ecuación esconde un valor único y no impone una condición que cumplen un cierto conjunto de valores -conjunto solución- ni la idea de variabilidad. El primer hecho sería fácilmente subsanable imponiendo otras ecuaciones que tuviesen varias soluciones posibles para que los alumnos entrasen en conflicto y resolviesen mediante el diálogo el problema de la no unicidad de solución. Sin embargo, las variables no están presentes en esta actividad, ni la introducción de las ecuaciones con incógnita en ambos miembros de la igualdad puede realizarse de esta manera, por lo que el método es insuficiente y debe complementarse con otras actividades que permitan el paso a dicha complejidad o a la idea de variabilidad.

Por todo esto se puede afirmar que el aprendizaje del álgebra es posterior a la aritmética, recordemos las palabras de Skemp (1993):

> *«entender álgebra sin antes haber comprendido aritmética, realmente es imposible»;*

mientras Piaget (1987) afirma que

> *«la utilización de los métodos algebraicos (...) supone efectivamente la toma de conciencia de las operaciones».*

Se ha señalado que el álgebra nace como generalización de la aritmética por lo que el dominio de las reglas de cálculo es completamente necesario, pero no sólo a un nivel informal, sino a un nivel de estructuración formal adecuado que permita la comprensión de los conceptos aritméticos y las relaciones y propiedades entre ellos, además de una manipulación sin errores. En este punto, al igual que ocurre con el conocimiento conceptual y procedimental, el conocimiento algebraico y aritmético también se benefician mutuamente, ya que el álgebra se basa en la aritmética, por ser una generalización de ésta y la aritmética se ayuda del álgebra, pues mediante la generalización y la formalización se alcanza una madurez estructural, en cuanto a las operaciones, que no es probable sin el álgebra.

3.4.2. Algunos errores concretos en la manipulación de símbolos algebraicos

Algunos de los problemas más importantes que se presentan en el aprendizaje del álgebra son derivados de una mala interiorización de la aritmética. El análisis de estos ejemplos nos pueden ayudar a inferir las deficiencias de la enseñanza tradicional en este punto:

En los principios del aprendizaje algebraico es frecuente la simbolización de cada cifra por una letra. Por ejemplo, a un alumno de 12 años, iniciado en el lenguaje algebraico, se le pide en un problema un número entre 10 y 100 cuyas cifras cumplan ciertas condiciones. El alumno deduce que el número debería tener la forma ab y cuando es interrogado acerca de su respuesta afirma que a representa la cifra de las decenas y b la de las unidades. El problema es que el alumno no es capaz de hacer transferencia correcta de su aprendizaje del valor de las cifras en el sistema de numeración decimal posicional, ya que la correcta expresión, $10a+b$, hace referencia a la formación del número en cuanto a la posición, aumentando el valor de las cifras de 10 en 10, cuando ocupa una posición superior. En estas circunstancias, el alumno no percibe la lógica interna de composición de los números en nuestro sistema de numeración y ello le plantea problemas de formalización algebraica.

Otros errores que encontramos frecuentemente están relacionados con el uso de exponentes. Una mala interiorización de la operatividad con potencias induce a confusiones como las siguientes: $3a^3+2a^2=5a^5$, ó $a^2 \cdot b^3=(ab)^5$, lo que se relaciona directamente con errores en el aprendizaje del cálculo con potencias, ya que en el primer caso nos encontramos con una suma de potencias, contraria al cálculo aritmético, y en el segundo con una multiplicación de potencias de distinta base, lo que vulnera la naturaleza de la definición de la potencia como multiplicación abreviada de factores iguales.

La mala aplicación de las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas también provoca equívocos, por ejemplo, $7(a+4)=7a+4$, en este caso no se ha aplicado correctamente la propiedad distributiva por la cuál se obtendría el resultado correcto $7(a+4)=7a+28$. Este tipo de errores implican una comprensión inadecuada de la prioridad de operaciones y del carácter de éstas. El paréntesis nos indica que 7 multiplica a $a+4$, y la multiplicación obliga a la adición reiterativa de a+4, siete veces, o lo que es lo mismo, de a siete veces y de 4 siete veces. A menudo, en la enseñanza tradicional, se enseñan las propiedades como reglas memorísticas en vez de como formalización de una característica hallada en la lógica de la operatividad con números, lo que va en contra del carácter constructivo que hemos destacado en el desarrollo de la misma.

Margilues (1993) y Parish y Ludwig (1994) han señalado otros errores comunes en la operatividad algebraica que son reportados de la operatividad aritmética, por ejemplo, $\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{3}{a+b}$ o $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, así como de una extensión errónea de las propiedades de las operaciones aritméticas $(a-b)^2=a^2-b^2$ o $\frac{a+b}{b}=a$.

Otro concepto aritmético que provoca dificultades en el aprendizaje del álgebra es el significado de la igualdad (Booth, 1984, 1988; Kieran, 1981; Vergnaud, 1985). Kieran (1981) sugiere que la comprensión del signo "=" en primaria no es completa y esto puede ser causa de gran número de errores en etapas posteriores. Si su utilización siempre se presenta en expresiones del tipo 4+2=6, se favorece la idea de que "=" simboliza un operador, en este caso de adición. Dicho signo habitualmente precede al resultado de una operación y, por lo tanto, se le confiere el sentido de signo *totalizador*. En álgebra no ocurre así. La mayor parte de las veces no podemos terminar nuestros cálculos -falta de clausura-, como es usual en aritmética (Skemp, 1993). De este tipo de desaciertos en la generalización provienen errores como *7+2a=9a*, en los que el deseo de clausura desborda la capacidad de pensamiento lógico-algebraico. La introducción de cuestiones variadas en la enseñanza aritmética, dónde no siempre se pida el total, como por ejemplo sumas en las que se desconoce un sumando o incluso los dos, o relaciones de igualdad con omisión de un número, ...+3=5, 4+2=...+1, etc., pueden favorecer la correcta significación de la relación de igualdad (Skemp, 1993), que resulta fundamental para la comprensión de las expresiones algebraicas y las ecuaciones.

En el caso de una ecuación, según Vergnaud et al. (1987), los alumnos piensan que lo que está a cada lado del signo igual es una cuenta indicada cuyo resultado debe tener algún significado. El igual se interpreta, de este modo, como un signo de escritura para separar dos informaciones o cantidades, como una coma. El problema de fondo se halla en que el aprendizaje del igual aritmético se ha interiorizado sin las propiedades de simetría y transitividad que le son propias, por ejemplo, cuando los alumnos deben resolver un problema a través de los cálculos 32 + 15 = 47, 47 - 8 = 39, ellos escriben 32 + 15 = 47 - 8 = 39. Muchos de los errores de resolución de ecuaciones se enmarcan en la incomprensión de la relación de igualdad, lo que provoca que las reglas de resolución carezcan de sentido propio y deban ser memorizadas sin comprensión alguna.

Hemos visto que los errores algebraicos debido a causas aritméticas se explican por un aprendizaje no significativo de la misma, ya sea del sistema de numeración o de las operaciones, sus propiedades y relaciones. Kamii (1988) afirma que el problema es que, ignorando el carácter constructivo de la matemática,

> *«actualmente la aritmética se enseña por transmisión»* .

Otro gran problema en el aprendizaje del álgebra son los errores derivados de las peculiaridades de la notación algebraica, como ocurre con la omisión del producto entre dos letras o entre número y letra. La falta de comprensión de la conmutatividad del producto que hallamos en una niña de 11 años - $xy \neq yx$, *no son iguales porque si la x vale 1 y la* y *2, no es lo mismo 12 que 21*- se relaciona con el error explicado anteriormente (en la página 153) de extensión de la posición de las cifras en el sistema de numeración decimal al álgebra. En otra ocasión encontramos una contestación incorrecta (12 años y medio) en un problema planteado de cálculo de dimensiones de un rectángulo de base dos unidades más que de altura -*si la altura es x, la base es 2x*- tras lo cuál se le planteó por parte de la profesora la siguiente pregunta -*¿es la base el doble de la altura?*- a lo que respondió *-no, es dos unidades más, añadimos 2 a x*-. Este tipo de razonamientos demuestran que la omisión del producto nos remite a la idea errónea de la yuxtaposición como adición, con la cual el niño se ha familiarizado en su etapa de las operaciones concretas. Otros errores más complejos tienen esta idea como fondo común, veamos algunos ejemplos: $a+a=a^2$, es decir, *aa*, $a+b=ab$ ó $3a+2a^2b=5a^3b$, en este último la secuencia de operaciones que el alumno realiza es la siguiente *(3+2)aaab*.

Por otra parte, la incomprensión del cambio de significado que experimentan las letras, como hemos explicado en la sección anterior, así como los problemas con la variabilidad (Küchemann, 1981, Vernaud, 1985) provocan errores conceptuales como los siguientes:

> *Profesora*[8]*:* Si *m* es un número, ¿podrías decirme como representas el número siguiente?
>
> *Alumna: n.*
>
> *P:* Pero *n* es la letra siguiente, no el número siguiente.
>
> *A:* Pero si *m* es un número, su siguiente es la letra siguiente.
>
> *P:* ¿Cómo sabes que *n* no representa otro número, *m* y *n* representan números cualesquiera?
>
> *A:* Porque es el siguiente a *m*.
>
> *P:* Bien, piensa en un número concreto para *m*.
>
> *A:* Por ejemplo, 5.

[8]Ya se ha hecho referencia a esta conversación con una alumna de 12 años en la página 124.

P: ¿Sabrías decirme el siguiente?

A: Sí, es fácil, 6.

P: ¿Cómo lo has hecho?

A: Porque 6 es el número siguiente a 5.

P: Me refiero a cómo calculas 6 a partir de 5.

A: Ah, sumándole 1.

P: (Después de poner varios ejemplos similares). Pues haz lo mismo con *m*, súmale 1.

A: $m+1$.

P: Pues ese es el número siguiente a *m*.

Esta alumna tardó mucho más en entender que *n* no tenía por qué ser el siguiente a *m*, necesitó varias experiencias e incluso discusión con otros compañeros; tras comprenderlo no tuvo problemas en calcular el siguiente a *x* o el siguiente a $r+6$. Como ya hemos visto, la asociación de las letras al alfabeto es normal en este estadio del aprendizaje, en el cuál la experiencia con ellas no ha ido más allá. El cambio de este tipo de esquemas para formar otros diferentes, en los que la letra puede simbolizar otro concepto matemático distinto al propio de *letra del alfabeto*, no va a ser en absoluto inmediato.

Relacionado con la variabilidad encontramos otro error característico del aprendizaje algebraico. Surgió con ocasión de la traducción al lenguaje algebraico de sentencias del lenguaje natural la siguiente frase: *Suma de dos números.* La contestación mayoritaria fue del tipo $a+b$, $x+y$, $s+j$, etc. Una alumna (11 años) planteó su solución $x+x$, que provocó un animado debate en clase. La dificultad que presenta para algunos alumnos asumir que en una misma expresión el mismo signo no puede tomar, a la vez, distintos valores -a pesar de que puede representar varios de ellos- pero sí podemos encontrar dos símbolos diferentes que representan el mismo valor, choca con la idea de conservación que han adquirido a lo largo de su aprendizaje del número. Para esta alumna la letra representaba un número cualquiera, por lo tanto una misma letra puede significar dos números diferentes en una misma expresión. Para el resto de los alumnos la letra representaba un número, pero siempre el mismo y no un número cualquiera, según su punto de vista para representar dos números distintos debemos escribir letras diferentes, lo cual es cierto si queremos simbolizar dos incógnitas diferentes -aunque a posteriori devengan el mismo valor- pero no si queremos representar un parámetro variable, que puede tomar un conjunto, finito o infinito, de valores (ver página 144).

Por último, pero no por ello menos importante, encontramos la dificultad de comprensión de las ecuaciones. A pesar de que la introducción del álgebra suele realizarse a través de las ecuaciones y de que su manipulación procedimental no comporta una dificultad excesiva para los alumnos -se trata de reglas mecánicas muy simples y repetitivas- se encuentran frecuentemente errores asociados a la mala comprensión del significado de la incógnita y la igualdad. Errores como x+4; x=4 ó 6x=3; x=2, pertenecen a este tipo pues, a pesar de la simplicidad de la intuición que soporta, la manipulación mecánica se hace sin sentido lógico permitiendo incongruencias aritméticas. Pero la mayor parte de los errores vienen asociados a la resolución de ecuaciones con variables en ambos miembros (Filloy y Rojano, 1989; Herscovics y Linchevski, 1994). Estos autores, entre otros (Macgregor, 2001; Collis, 1975), piensan que se debe a que los adolescentes no son capaces de aprender álgebra, sin embargo numerosos estudios (Booth, 1988; Kaput, 1995; Brizuela y Schliemann, 2003) demuestran que el problema se encuentra en el tipo de enseñanza de las matemáticas que se ofrece en edades tempranas, exclusivamente centrado en los procedimientos del cálculo aritmético, y está favorecido, como ya se ha dicho, por el propio método de enseñanza de las ecuaciones. Filloy (1993) plantea el uso de modelos concretos para enseñar a resolver ecuaciones lineales, tanto a través de áreas rectangulares como de modelos con balanzas en equilibrios, ambas propuestas pueden minimizar el impacto de este tipo de errores en el aprendizaje de las ecuaciones.

Estos y otros errores son frecuentes en muchos de nuestros alumnos a lo largo de su educación secundaria. El paso de la aritmética al álgebra, así como el dominio significativo de los conceptos aritméticos, será fundamental a la hora de reducir estas deficiencias. Pero no debemos olvidar que no se trata de evitar el error sino de provocar la discusión acerca de los mismos para comprender la conveniencia o inconveniencia de ciertos procedimientos. Se intenta fomentar la autonomía del alumno y, como ya se ha argumentado, la intervención del profesor para calificar de *incorrecta* una respuesta del alumno sin dar lugar a debate que fomente el razonamiento

> *«procedente de una fuente externa con autoridad (es) no deseable porque subyuga la iniciativa de los niños y la confianza en su propia capacidad para pensar»*[9]
> Kamii (1988).

[9] Se refiere esta cita a la enseñanza de la aritmética, para la que afirma que se debe fomentar que los niños discutan entre sí para construir su propio conocimiento significativo, pero estas mismas palabras pueden ilustrar el sentimiento de fracaso del niño que aprende álgebra, para lo cuál hacemos extensibles las recomendaciones de la autora.

3.4.3. La didáctica del álgebra

Entre las recomendaciones de la NCTM (1991) podemos encontrar que el currículum de matemáticas debe incluir exploraciones de conceptos y procesos algebraicos para que los estudiantes sean capaces de:

- entender las ideas de variable e incógnita, expresión y ecuación;
- representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas, reglas verbales y ecuaciones, y explorar las interrelaciones de estas representaciones;
- analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones;
- adquirir confianza en la resolución de ecuaciones lineales usando métodos concretos, informales y formales;
- investigar de manera informal inecuaciones y ecuaciones no lineales;
- aplicar métodos algebraicos en la resolución de diversos problemas matemáticos y del mundo real.

Alineados con estos estándares se han desarrollado algunos materiales validados como *Connected Mathematics Project* (Lappan et al., 2002), financiado por la *National Science Foundation* (NSF). Sin embargo, desde otros foros se ha manifestado la insuficiencia de estas recomendaciones para la enseñanza algebraica, como desde el NRC (Kilpatrick et al., 2001), donde se ha precisado que se necesita más investigación para el desarrollo del sentido simbólico señalado por Arcavi (1994).

Desde su punto de vista la enseñanza del álgebra debe ir dirigida a:

- reconocer el potencial de las situaciones relacionadas con el sentido de los símbolos,
- hacerles un lugar en la conversación de aula,
- estimular la expresión de percepciones subjetivas acerca de los símbolos,
- respetar y estimular ideas parcialmente desarrolladas y

- no siempre apurarse para obtener *clausura*[10].

Se insiste, de esta manera, en la comprensión significativa de la formalización, que no se introduce como lenguaje vacío de significado sino como herramienta representativa que facilita la expresión de ideas previas.

Para este autor las prácticas de aula se deben centrar en cultivar la búsqueda de los significados de los símbolos -en paralelo y a continuación de la solución de problemas- antes de proceder a la aplicación automatizada de reglas algebraicas, así como el sentido del uso de estos símbolos y el poder que su comprensión nos confiere sobre una multitud de situaciones. Además, se debe fomentar la paciencia necesaria para el aprendizaje en general y, más precisamente, la capacidad de aceptar comprensiones parciales.

Esta misma idea de paciencia es destacada por Rogers (2001) como necesaria para realizar el tránsito al símbolo de una manera progresiva. Señala este autor que la transición del *icono, a través del índice, al símbolo no ocurrió de una sola vez, como tampoco es cierto que ahora se hagan matemáticas en una dirección exclusivamente simbólica.* Ya había sido recomendado por Llinares (ver página 33) fomentar las traducciones entre distintos modos de representación -icónico, activo y simbólico- como herramienta para facilitar la reconstrucción de conocimientos matemáticos por parte del alumno, ahora se hace hincapié en el tránsito de uno a otro de un modo significativo, sin prisas que dificulten el proceso real de simbolización.

Algunos investigadores han definido ciertos principios elementales para la enseñanza-aprendizaje del álgebra. En Socas et al. (1989) podemos encontrar los siguientes:

1. Un determinado grado de automatización de las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo en el estadio siguiente.

2. No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado rápido.

3. No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro.

4. Asegurar que los aspectos diferentes de una idea, técnica o símbolo algebraico estén claramente distinguidos.

[10]La necesidad de clausura que el alumno ha superado en la aritmética a lo largo de los años (ver página 131) resulta una imperiosa exigencia en los comienzos del aprendizaje algebraico, una valoración cuidadosa de lo que esta clausura significa, tanto en la aritmética como en el álgebra, será positiva para la comprensión de la formalización.

5. No introducir la notación formal antes de que una idea o técnica algebraica haya sido asimilada por los alumnos.

6. Evitar la complejidad notacional innecesaria.

7. Favorecer la comprensión algebraica en términos de lenguajes.

8. No introducir técnicas formales demasiado pronto.

Se resumen en una introducción gradual y significativa, haciendo al alumno consciente de las cualidades de los conceptos algebraicos y sus posibilidades operativas y formalizando sólo después de la asimilación conceptual de cada idea algebraica. El Grupo Azarquiel ha propuesto materiales que desarrollan la enseñanza-aprendizaje del álgebra desde estos principios y han validado su utilidad en la investigación *Una propuesta curricular alternativa para el aprendizaje del Álgebra en Secundaria* de la Universidad Autónoma de Madrid, 1989-1990, donde se demuestra que los materiales elaborados y las metodologías utilizadas disminuyen el número de errores a corto plazo y mejoran las estrategias de pensamiento para resolver problemas matemáticos (Puig y Calderón, 1996).

En cuanto a las actividades algebraicas para el aula, en esta misma línea de pensamiento, Kieran (1996) describe tres clases de actividades: actividades generativas (*generational activities*), actividades de transformación (*transformational activities*) y actividades globalizadoras (*global, meta-level activities*); señalando que el equilibrio entre ellas en la educación algebraica es necesario para un aprendizaje significativo. Denuncia esta autora la tremenda descompensación que existe en el álgebra de la escuela de secundaria ya que la enseñanza tiende a centrarse en actividades de transformación sin atender el aspecto necesario de las actividades globalizadoras, que fomentaría una visión del álgebra como herramienta útil y no como conjunto de transformaciones vacías de sentido. Además, afirma que las actividades generativas se proporcionan a menudo a través de tareas en las cuales el uso de la notación algebraica puede aparecer como una tarea impuesta por el profesor más que de una parte integral de la actividad, al poderse solucionar ésta por medios no-algebraicos. Ainley, et al. (2003) han propuesto un programa de tareas que procura alcanzar un equilibrio de estas tres clases de actividades dentro de contextos significativos.

Otros medios cada vez más usados para la enseñanza del álgebra son las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. La presencia creciente de dichos medios en las aulas y hogares ha favorecido el desarrollo de programas de investigación alrededor de estas herramientas para analizar su influencia en el aprendizaje. La capacidad motivadora que poseen, así como las posibilidades que ofrecen frente a limitaciones de la enseñanza tradicional, como el cariz estático del conocimiento ofrecido, han abierto nuevas perspectivas para la didáctica. En matemáticas han surgido diferentes herramientas (calculadoras, software, recursos on-line, etc), que tratan de facilitar la construcción del conocimiento por parte de los alumnos al fomentar un aprendizaje más autónomo, fundado en la diversidad.

Aún así, Hershkowitz and Kieran (2001) precisan que el uso de estas tecnologías en el aula es complejo y no debe hacerse a la ligera, pues hay que considerar varios factores contextuales tales como el contenido y la estructura epistemológica del mismo, los conocimientos previos de los alumnos y su predisposición a la actividad, la organización de la clase, el papel del profesor, etc. y, por supuesto, la potencial aportación que se espera de la herramienta en sí misma:

> *«Tanto al diseñar como al estudiar la actividad de aprendizaje en el aula en un entorno informatizado del aprendizaje de las matemáticas, se deberían considerar factores contextuales de diversas fuentes, como (a) El contenido matemático a aprender y su estructura epistemológica; (b) Los alumnos, su cultura de conocimiento matemático, y el comienzo de su actividad investigadora; (c) La cultura del aula y sus normas, el papel del profesor, la organización del aprendizaje "en pequeños grupos o individualmente", etc.; y (d) La potencial "aportación" de la herramienta informatizada. (In designing as well as in studying a classroom learning activity in a computerized mathematics learning environment, one should consider contextual factors of various origins, like: (a) The mathematical content to be learned and its epistemological structure; (b) The learners, their mathematical knowledge culture, and the history with which they started the researched activity; (c) The classroom culture and norms, the role of the teacher, the learning organization "in small groups or individually", etc.; and (d) The potential "contribution" of the computerized tool)».*

Por lo tanto, lo más importante no es la tecnología propiamente dicha, sino el enfoque que el profesor ofrezca a los recursos educativos que utiliza. Si se parte de un enfoque excesivamente tecnicista se empobrecerán las posibilidades de cualquier recurso didáctico o educativo, incluso el más innovador, pues se estará predeterminando su uso como mero transmisor de una información acabada que el profesor reproduce por medio de la tecnología y el alumno se limitará a memorizar. Sin embargo, si se quiere imprimir a la educación un carácter más práctico, dirigido hacia una actitud reflexiva y constructiva del alumno, se deberán ampliar los horizontes de aplicación de los medios tecnológicos y hacer un uso creativo de los mismos. Es decir, utilizarlos como sistema de representación y análisis interactivo que va a permitir que el alumno adquiera unas capacidades de comunicación, relación, comprensión de la realidad, etc. prácticas para su aprendizaje.

En la didáctica del álgebra las nuevas tecnologías ofrecen la posibilidad de explorar el lenguaje simbólico como una herramienta computacional. Estas herramientas permiten al estudiante realizar transferencias de conocimiento entre distintos contextos y modos de representación lo que hace el aprendizaje más significativo. Además algunos conceptos algebraicos, como el de variable, ecuación o función, se tratan desde una perspectiva dinámica, lo que fomenta una mejor comprensión de los mismos a través de experiencias interactivas. En general, este tipo de tecnologías favorecen la construcción conceptual del álgebra frente a la enseñanza tradicional que se centra en las características de la manipulación algebraica.

En esta línea y en el campo del aprendizaje del álgebra se pueden encontrar investigaciones como las siguientes:

- Uso de *Cabri* para la enseñanza de las funciones (Falcade, 2003; Falcade et al., 2004).
- Uso de *L'Algebrista* para la enseñanza de la operatividad algebraica (Mariotti y Cerulli, 2001; Cerulli, 2002 y Cerulli y Mariotti, 2002).
- Uso de *CAS (Computer Algebra Systems)* para la enseñanza de las variables (Drijvers, 2001) y las ecuaciones (Ball, Pierce and Stacey, 2003).
- Uso de las calculadoras gráficas para el aprendizaje de las funciones (Kaput and Hegedus, 2002) y el lenguaje algebraico, como generalización de la aritmética (Cedillo, 1997).
- Uso de un modelo automatizado de balanzas para el aprendizaje de las ecuaciones (Aczel, 1998).
- Uso del paquete interactivo *The Learning Equation* para el aprendizaje de las ecuaciones (Norton and Cooper, 2001).
- Uso de hojas de cálculo (*excel*,etc) para el aprendizaje de las manipulaciones algebraicas (Arzarello et al.,1995) y la representación de generalizaciones (Tabach y Hershkowitz, 2002).

- Uso de *VisualMaths* para la introducción del álgebra a través de las funciones (Yerushalmy, 1997; Yerushalmy y Bohr, 1995).
- Uso de *SimCalc* para el aprendizaje de las funciones a través de la simulación virtual de las situaciones cotidianas (Hegedus y Kaput, 2003).
- Uso de una herramienta automatizada *TRM (Triple Representational Model: Algebraic, graphical and tabular)* para el aprendizaje de la transferencia de conocimiento entre distintos medios de representación: algebraico, gráfico y mediante tablas (Schwarz and Bruckheimer, 1988).

Resumiendo, la didáctica del álgebra debe buscar el aprendizaje significativo del mismo como herramienta útil tanto para la expresión de informaciones como para la manipulación y el razonamiento a partir de las mismas. Para ello es importante el conocimiento conceptual que requiere de un ritmo de introducción adecuado y de una serie de actividades variadas facilitadoras de la construcción por parte de los estudiantes. El conocimiento procedimental entra entonces, de un modo paralelo, a complementar el conceptual, influyéndose mutuamente, y generando la herramienta operativa completa que es el álgebra. La generalización a partir de la aritmética, el uso de problemas contextualizados como punto de partida, el conocimiento informal del alumno y los recursos didácticos y tecnológicos que fomenten un aprendizaje dinámico y creativo deben ser aprovechados al máximo en este viaje de la psicogénesis algebraica para asegurar la construcción significativa. Por último, la formalización, a posteriori o de forma paralela -siempre que no intercepte el desarrollo de la construcción conceptual y procedimental- posibilitará la operatividad algebraica de una manera útil y llena de sentido y asegurará el desarrollo de las estructuras algebraicas a lo largo de la construcción del conocimiento matemático futuro.

El álgebra es muy generosa.
Siempre nos dice más de lo
que le preguntamos.
D’Alembert

Parte II

Del símbolo a la formalización algebraica: una experiencia

4 Situación de la investigación

Según esta lista de doce problemas de la educación matemática, propuesta por Freudenthal en 1980, en el IV Congreso Internacional de Educación Matemática -emulando la famosa lista de Hilbert del II Congreso Internacional de Matemáticas, en 1900 (Callejo, 1991)- la investigación en didáctica de las matemáticas debe tratar de dilucidar aspectos como:

1. ¿Por qué Juanito no sabe calcular?[1]

2. ¿Cómo se aprenden las matemáticas? ¿Cómo enseñar a aprender?

3. ¿Cómo introducir la formalización y la esquematización progresiva para enseñar matemáticas?

4. ¿Cómo mantener abiertos los sentidos durante el proceso educativo? ¿Cómo estimular la intuición y el espíritu inquisitivo del proceso del aprendizaje?

5. ¿Cómo estimular la reflexión del estudiante acerca de su propio proceso de aprendizaje?

6. ¿Cómo desarrollar una actitud propia del comportamiento matemático?

7. ¿Cómo estructurar el aprendizaje de las matemáticas según distintos niveles, en función de las aptitudes y capacidades de los alumnos?

8. ¿Cómo crear contextos significativos para enseñar a hacer matemáticas?

9. ¿Qué es lo que hay que enseñar?

10. ¿Cómo se pueden utilizar las calculadoras y los ordenadores para despertar e incrementar la comprensión matemática?

[1] Recordando el título de un libro de M. Kline (1976) en el que critica la enseñanza de la matemática moderna.

11. ¿Cómo concebir la enseñanza de las matemáticas para que sea instrumento de cambio y de desarrollo de los pueblos?

12. ¿Cómo formar al profesorado de matemáticas?

Estos problemas se pueden englobar en cuatro grandes grupos: epistemología de las matemáticas y de su aprendizaje, al que corresponden el primer y el segundo de los problemas planteados; metodología de las matemáticas, al que corresponden los problemas del tercero al sexto y el octavo y décimo; el currículo en la enseñanza de las matemáticas, al que corresponden el séptimo, el noveno y el decimoprimero y la formación del profesorado, que se corresponde con el último problema. A través de todos ellos queda definida a grandes rasgos una concepción activa de la enseñanza de las matemáticas que ya ha sido analizada en 2.4.

En esta misma línea, haciendo hincapié en el carácter constructivo de la matemática y la influencia del aspecto social en su aprendizaje, Balacheff, N. y Fischbein, F. (1990) encaminan de esta manera el futuro de la psicología de la educación matemática:

1. el análisis de la influencia de la introducción de los ordenadores en los entornos de aprendizaje;

2. la manera de ayudar a construir el conocimiento formal matemático desde una perspectiva constructivista debido a que el razonamiento formal no se desarrolla espontáneamente;

3. el análisis de relaciones entre diferentes tipos de conocimiento (intuitivo, algorítmico, formal) durante la actividad matemática;

4. el análisis del papel de la metacognición en contextos socio-culturales.

Estos aspectos también han sido analizados en 2.4.

Miguel de Guzmán (1996) destaca los siguientes campos de investigación del estudio del ICMI en Washington sobre la naturaleza de la investigación en educación matemática (Kilpatrick y Sierpinska, 1993):

1. pensamiento matemático avanzado: la peculiar psicología del pensamiento matemático; el carácter cognitivo especial del pensamiento matemático; la abstracción; la representación simbólica; la representación gráfica; la utilización de los modelos visuales; la aparente transparencia y la relativa opacidad de los procesos de transmisión.

2. aplicaciones en la construcción y diseño a varios niveles.

3. la demostración a lo largo del tiempo, la demostración hoy, el papel de la demostracción en los procesos de transmisión y aprendizaje.

Esta investigación se enmarca en todas estas propuestas ya que pretende dar respuesta al problema del aprendizaje del álgebra, tal como se plantea en las cuestiones de la página 136. Dichas cuestiones tratan acerca de la epistemología de los conocimientos algebraicos, la metodología más adecuada para el aprendizaje del álgebra y las actividades concretas que fomentan dicho aprendizaje desde la perspectiva definida en este trabajo. Se corresponden con varios de los problemas definidos por Freudenthal pero de un modo específico con el tercero, que habla de la formalización, en este caso algebraica, y el octavo, que busca el modo en que la acción matemática pueda ser la base del aprendizaje significativo.

Asimismo esta investigación se relaciona con los puntos segundo y tercero de las propuestas de Balacheff y Fischbein, ya que sus bases, definidas en los capítulos anteriores, se han asentado sobre la construcción matemática, el conocimiento intuitivo como punto de partida de la formalización y la interacción profesor-alumno y alumno-alumno como medio de desarrollo de dicha construcción.

Por último, de entre los campos de investigación destacados por Guzmán, esta investigación se centra en el primero ya que pretende profundizar en el pensamiento matemático para analizar temas como la abstracción, la representación simbólica, los distintos modos de representación, etc., fundamentales para la construcción algebraica.

5 Planificación del trabajo de campo

Como hemos visto en 3.3.2 el paso de la aritmética al álgebra es un delicado proceso de simbolización basado en una traducción similar a la operada en el paso del pensamiento subjetivo a la convención lingüística o de la operatividad aritmética informal a la expresión formal de la misma. Se han delimitado de tres fases en la construcción del conocimiento algebraico que Piaget y García (1982) han denominado intra-operacional, inter-operacional y trans-operacional y que se se pueden relacionar con las apuntadas en el desarrollo evolutivo del niño: preoperatoria, de las operaciones concretas y de las operaciones formales. Como todo proceso de simbolización la construcción algebraica comporta un paso de la subjetividad de pensamiento a la objetividad del lenguaje comunicativo. En la etapa preoperatoria el niño comienza un proceso de simbolización que le permite dar el paso de su propio pensamiento al lenguaje convencional como forma de comunicación, en la etapa de las operaciones concretas el niño aprende la expresión aritmética, lo que requiere una nueva simbolización normada, tránsito de la aritmética informal a la formal. Es en la etapa de las operaciones formales cuando el niño aprenderá el lenguaje algebraico, como simbolización del pensamiento algebraico de generalización y variabilidad en la expresión algebraica convencional.

En la escuela este proceso se realiza, fundamentalmente, en los primeros cursos de ESO -1º ESO y 2º ESO- aunque continúa durante los cursos siguientes con el desarrollo del álgebra formal. Además en capítulos anteriores se ha evidenciado la necesidad de la construcción de las ideas de variabilidad y generalización de la aritmética en la mente del niño para que el aprendizaje del álgebra sea significativo, es decir, la imagen mental debe existir antes de realizar la formalización. Sería deseable detectar el grado de desarrollo que dichos conceptos han alcanzado en la mente del niño cuando llega a la situación previa al aprendizaje del álgebra formal. Ello nos permitiría conocer las particularidades del proceso natural de construcción del pensamiento algebraico y serviría de base para analizar tanto las pautas positivas como los inconvenientes de la didáctica actual algebraica y pre-algebraica en aras de fomentar una orientación efectiva para la enseñanza del álgebra.

Profundizar en el conocimiento del niño en etapa pre-algebraica y su predisposición para el álgebra se presenta como una necesidad inminente en la línea de este trabajo de investigación. Para ello se ha diseñado un trabajo de campo dirigido a detectar el grado de desarrollo que los conocimientos matemáticos han alcanzado en la mente del niño cuando llega a la situación previa al aprendizaje del álgebra formal y su predisposición para el estudio de la misma. Dicho trabajo de campo consistirá en un cuestionario sobre la capacidad de comprensión, expresión, generalización y formalización de los alumnos de 6º EP -de 11 a 12 años-, que aún no han recibido ninguna enseñanza algebraica formal en la escuela, que será analizado y contrastado con los resultados obtenidos por los alumnos de 1º ESO -de 12 a 13 años- y 2º ESO -de 13 a 14 años[1]-, ya iniciados en el estudio del álgebra. Los conocimientos algebraicos que se suponen en estos niveles podemos verlos en el Anexo 1.

5.1. Objetivos del trabajo de campo

Los objetivos del trabajo de campo se enmarcan en la necesidad de conocer el grado de desarrollo de las capacidades matemáticas que tienen que ver con el álgebra en los alumnos que comienzan el aprendizaje del lenguaje algebraico y compararlo con el de alumnos ya iniciados o en fase de iniciación. De esta manera podremos determinar cuales son las dificultades más acusadas, lo que resulta fundamental a la hora de orientar la metodología en la didáctica del álgebra.

Los objetivos definidos son los siguientes:

1. Comprobar la capacidad de los alumnos de expresarse con rigor a través de la escritura en lenguaje natural, lo cual resulta imprescindible para la comprensión de la necesidad del lenguaje algebraico formal.

2. Valorar la capacidad de comprensión de un enunciado matemático en lenguaje natural. Esto no sólo requiere la lectura del mismo sino el análisis de la problemática planteada y la detección de datos facilitados para su posible resolución como problema.

3. Determinar el grado de comprensión de los signos de operaciones aritméticas bien conocidos a este nivel en dos aspectos, operativo y relacional. Se hace referencia con esto

[1]Las edades corresponden a los alumnos que han promocionado siempre con su curso, ocasionalmente puede haber alumnos hasta dos años mayores en cada curso.

último al valor del signo aritmético no sólo como operador que nos devuelve un resultado sino en consideración a la relación que establece entre los números y a sus propiedades -incluidas su conservación y su inversión-, que son las que permiten que se abstraiga, a partir de la aritmética, la estructura que da soporte a las construcciones algebraicas.

4. Valorar la capacidad de expresión de un enunciado matemático mediante el uso de operaciones aritméticas. Sólo con un buen dominio del lenguaje aritmético será posible su generalización al algebraico.

5. Evaluar la capacidad de los alumnos para detectar regularidades y relaciones entre objetos a través de un análisis de casos.

6. Comprobar la capacidad de generalización, es decir, de enriquecer la abstracción, de pasar de lo que es común y esencial a varios casos particulares a formar un concepto general que los comprenda a todos.

7. Determinar el grado de comprensión de la formalización algebraica. Ello no implica un conocimiento profundo del lenguaje algebraico y sus peculiaridades, sino simplemente el conocimiento del uso de fórmulas matemáticas y el significado de sus términos.

8. Evaluar la capacidad de simbolización. Con esto se hace referencia a la expresión de informaciones matemáticas utilizando signos no aritméticos, ni tampoco del álgebra formal, que sustituyan a los objetos a los cuales se hace referencia. Debería ser el paso previo a la formalización algebraica para asegurar el aprendizaje significativo de la misma. Podemos considerarlo ya un lenguaje algebraico, convencional por tanto, pero que tiene pleno sentido para el individuo que lo plantea, sentido este último que corresponde al dominio del pensamiento.

9. Valorar la capacidad de formalización algebraica, lo que en este caso no exigirá el conocimiento previo del lenguaje algebraico pues se facilitará el signo a utilizar en todos los casos.

10. Comprobar la capacidad de detección de una incógnita en una situación problemática.

5.2. Elaboración del cuestionario

Para la elaboración del cuestionario se partió de los objetivos definidos para el trabajo de campo y se diseñaron cuestiones adecuadas para la consecución de los mismos. En una primera aproximación (ver anexo 2) se enunciaron doce preguntas que se sometieron a validación a través del examen de varios profesores de matemáticas de los cursos seleccionados para el estudio y de nueve alumnas, tres por cada uno de los cursos, con los que se mantuvieron entrevistas posteriores para detectar las dificultades de comprensión de los enunciados propuestos y la adecuación para evaluar los objetivos propuestos.

5.2.1. Validación

Una vez elaborado el primer cuestionario (anexo 2) se sometió a juicio de un total de cuatro profesores de los grupos sobre los que se realizaría el estudio, uno de 6º EP, otro de 1º ESO, otros dos 2º ESO y un catedrático de otro instituto que diese una visión más general del mismo. Las correcciones fueron de forma más que de contenido y llevaron a modificar los enunciados de las preguntas 4ª, 8ª y 9ª, así como a desdoblar la 3ª pregunta en dos, para que los requerimientos fuesen más claros.

En las entrevistas con las alumnas quedó de manifiesto que las mayores dificultades en cuanto a la comprensión de lo que el enunciado pedía se encontraban en las preguntas 4ª, 6ª, 10ª y 11ª. En la 4ª pregunta el concepto de estructura operacional causaba problemas a una tercera parte de las alumnas entrevistadas, por lo que se especificó mejor en el enunciado lo que los cuadros en blanco de la columna de la estructura operacional querían decir. En cuanto a la pregunta 6ª, se especificó que lo que se pedía era la fórmula y se recuadró el lugar donde el alumno debía escribirla, pues casi una cuarta parte de las alumnas pensaban que se trataba de dar un nuevo ejemplo. En la pregunta 10ª más de la mitad de las alumnas tuvieron problemas para comprender el enunciado debido a que buscaban una relación que definiese la serie geométrica, en vez de relacionar los números de lados y triángulos de cada una de las figuras, por ello se especificó esto último en el enunciado y se añadió una tabla de ayuda para comprender la relación que se pedía. En cuanto a la 11ª pregunta una tercera parte de las alumnas, las tres de 6º EP, encontraron dificultades para entender lo que se pedía en el ejercicio de traducción al lenguaje algebraico, sin duda por la falta de experiencia en este tipo de ejercicios. Por sugerencia suya se cambió la palabra *operación* por *traducción* en la columna dedicada a la expresión algebraica correspondiente al enunciado.

En cuanto a la validez de las cuestiones para la evaluación de los objetivos propuestos, se consideró suficiente, pues las respuestas ofrecidas por las alumnas a las cuestiones planteadas eran del tipo esperado, salvo por las dificultades especificadas más arriba y que se subsanaron en la versión definitiva del cuestionario.

Finalmente los cambios propuestos definieron un cuestionario de trece preguntas (ver anexo 3), al desdoblarse los dos apartados de la tercera en dos preguntas diferentes.

5.2.2. Evaluación de los objetivos a través del cuestionario

Las preguntas 1ª, 3ª, 4ª, 5ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª y 12ª surgen como respuesta al objetivo 1. Las preguntas 5ª y 10ª responden a los objetivos 2 y 4. El objetivo 3 se trabaja con las preguntas 2ª, 10ª y 13ª. Las preguntas 3ª, 4ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª y 11ª responden a los objetivos 5 y 6. El objetivo 7 se enmarca en las preguntas 6ª, 12ª y 13ª. Las preguntas 9ª y 10ª responden a los objetivos 8 y 9, aunque éste último se trabaja también con las preguntas 11ª , 12ª y 13ª. Por último, el objetivo 10 se trabaja, únicamente, con la pregunta 12ª.

En el análisis de cada pregunta se especificará de una manera más detallada los objetivos que ésta persigue.

5.2.3. Análisis del cuestionario por preguntas

En este apartado se explica cada una de las preguntas elaboradas para el cuestionario de alumnos, describiendo detalladamente en qué consisten y relacionándolas con los objetivos generales del cuestionario a que responden. Asimismo se exponen los resultados esperados a priori, tanto en cuanto a la abstención, como a la corrección o a la tipología de respuesta.

Definiremos por lo tanto dos variables: corrección y formalización. La primera atenderá, como es evidente, al grado de corrección de la respuesta ofrecida por el alumno, mientras que la segunda se referirá al tipo de respuesta que éste ofrece.

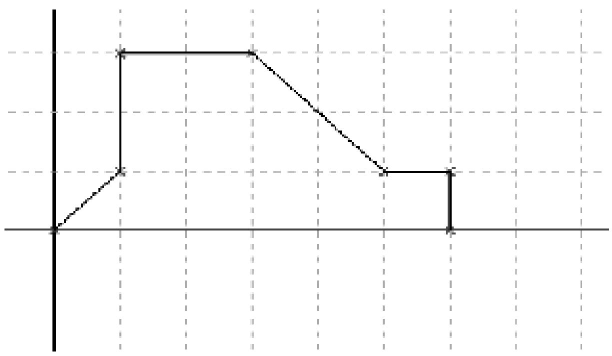
Clasificaremos la corrección atendiendo a los siguientes niveles: *correcta, parcialmente correcta* o *de corrección intermedia e incorrecta* y daremos, en cada caso, las claves específicas para interpretar los resultados de cada uno de ellos.

En cuanto a la formalización se tendrán en cuenta las siguientes clases, ordenadas de menor a mayor grado de formalización: *informal, aritmética, retórica, simbólica* y *formal*. Es necesario especificar que las respuestas de los alumnos se clasificarán atendiendo a la mayor de las categorías a las que pertenezca, ignorando si se presentan en la misma respuesta otros tipos inferiores e incluso la corrección de las mismas.

Diremos que la respuesta es *informal* cuando presente incorrecciones aritméticas importantes, es decir, el alumno no demuestra un dominio cierto de la aritmética. En caso de que se presente este dominio la clasificaremos como *aritmética*, ya que el alumno demuestra su conocimiento de las operaciones concretas. Si la respuesta se presenta argumentada mediante el lenguaje natural la denominaremos *retórica*. Sólo en caso de que se utilicen otros signos, distintos de las palabras, para representar los objetos matemáticos podremos valorar la respuesta como, en cierto modo, algebraica, pues existe una simbolización más o menos formal. En este último caso hablaremos de *simbolización* cuando los signos utilizados por el alumno sean informales ("□", "?", "...", etc.) y no convenidos por la comunidad matemática como signo algebraico formal, hablaremos de *formalización* cuando los signos utilizados por el alumnos sean signos algebraicos formales (letras, etc.).

1ª pregunta

Imagina que quieres dictar a tu compañero el siguiente dibujo. Describe de forma lo más clara posible todos los pasos que tendría que seguir para dibujarlo igual.



Con esta pregunta se pretende comprobar la capacidad de los alumnos de expresarse con rigor a través de cualquier tipo de lenguaje. Para ello se les pide la descripción de los pasos a seguir para dibujar un diagrama dado de forma lo más clara posible. La sencillez del diagrama se había premeditado para evitar perder posibles respuestas debido a una excesiva dificultad. Cualquier intento de respuesta sería tremendamente valioso, pues se trataba de analizar la cualidad de la respuesta más que la calidad, aunque ambas características nos dan una visión complementaria.

De este modo se supone una proporción elevada de respuestas a esta pregunta, debido a que no requiere de conocimientos altamente específicos, sino que la pregunta es abordable incluso con conocimientos básicos de orientación espacial y cierto dominio de la expresión escrita en la lengua natural.

En cuanto a las respuestas, se esperan de distinta tipología y distinto nivel de abstracción. Lo razonable es pensar que los alumnos que aún no conocen el sistema cartesiano de representación en el plano den una respuesta predominantemente retórica, es decir, basada en su propia expresión en lenguaje natural. Este tipo de respuesta presenta limitaciones en cuanto al rigor y precisión necesarios en matemáticas ya que el propio lenguaje, frecuentemente, es ambiguo. Además, la etapa del desarrollo en que se encuentran los alumnos, en pleno proceso de maduración lógica, sin desplegar aún toda su capacidad de generalización, obliga a un uso imperfecto del lenguaje (ver página 100). Por todo ello las respuestas de este tipo no serán todo lo rigurosas que el ejercicio requiere. En cambio, los alumnos que ya han tenido contacto con los conocimientos del sistema cartesiano de representación en el plano podrían ir utilizando gradualmente dicho sistema de coordenadas, obteniendo así un mayor rigor en su expresión provocado, indiscutiblemente, por una necesidad de precisión que el lenguaje natural dista mucho de ofrecer (ver 3.2).

Para la evaluación de las respuestas se consideran completamente correctas las de cualquiera de los tipos esperados, siempre que describan sin errores la trayectoria representada en el diagrama. En este caso se analizarán separadamente los niveles de rigor en cada uno de ellos. Se clasifican como incorrectas únicamente las respuestas que no se ajusten a la representación establecida, es decir, se tratarán como errores menores la falta de precisión en el lenguaje o en la expresión de las coordenadas. Además se observarán, sin evaluar su corrección, otras características como el tratamiento de los ejes de representación, así como las referencias a la cuadrícula, el punto de inicio, etcétera...

2ª pregunta

En la operación siguiente el cuadro en blanco representa un número cualquiera. Elige, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debes realizar con dicho número:

$\square\cdot 2+3$

a) toma el número y multiplícalo por 5.

b) toma el número, multiplícalo por 2 y súmale 3.

c) toma el número, multiplícalo por 2 más 3.

La pretensión de esta pregunta es detectar el grado de comprensión de los signos matemáticos bien conocidos a esta edad -los números y los signos de operaciones aritméticas- en todas sus dimensiones -operativa y relacional- a través de su comportamiento respecto a la prioridad.

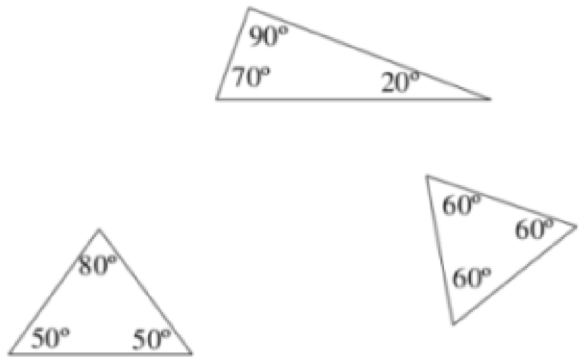
Para ello se presenta una operación aritmética sin clausura en la que uno de los números está sustituido por un cuadro en blanco, especificando su significado de variabilidad, y se pide que se seleccione de entre tres respuestas la descripción más fidedigna a la operación realizada con dicho número variable. El hecho de proporcionar tres opciones de respuesta resulta crucial para limitar las posibilidades: la primera de las opciones proporciona una respuesta incorrecta por falta de rigor en la prioridad de operaciones, la segunda proporciona la respuesta correcta, y la tercera, sin ser incorrecta en esencia, adolece de una falta de precisión en la expresión que la hace ambigua, por lo que sería considerada como intermedia. Según la respuesta que elija cada alumno podremos saber si comprende los signos a nivel operativo informal, es decir, no les confiere el valor riguroso de su escritura aritmética en cuanto a prioridad de operaciones, propiedades de las mismas, etc, si los comprende en toda su magnitud y se expresa correctamente o, por el contrario, le falta rigor en la expresión, aunque distinga la prioridad de operaciones.

Se espera un alto porcentaje de respuestas correctas en esta cuestión pues, según el nivel aritmético alcanzado por los alumnos de estas edades, no deben encontrar mayor dificultad en dichas operaciones (ver Anexo 1). No se concibe que la idea de variabilidad encubierta tras el cuadro en blanco pueda acarrear grandes inconvenientes debido, no a la comprensión de tan complicado concepto, sino al uso frecuente de este tipo de notación en los libros de texto actuales -si bien con un carácter diferente al de la variabilidad, es decir, más bien orientado a la resolución mental de ecuaciones sencillas-. Tampoco se esperan grandes diferencias entre los tres cursos, a pesar de que puedan encontrarse mayores dificultades en la comprensión del enunciado en 6º EP que en los otros dos cursos.

Por la misma estructura de la respuesta se considera ésta completamente correcta para la evaluación si el alumno elije la segunda opción, intermedia si elije la tercera opción e incorrecta en caso de que elija la primera opción. El análisis de los tipos de errores ofrecerá información en cuanto a los problemas de formalización aritmética de los alumnos.

3ª pregunta

En los tres ejemplos hay una característica común. Descúbrela y redáctala de forma clara:



Esta pregunta está orientada a conocer la capacidad de generalización, es decir, de la abstracción de lo que es común y esencial a varios casos particulares para formar un concepto general que los comprenda a todos (ver 3.1.3). Con este fin se muestran tres triángulos distintos, de manera que no se encuentren regularidades en su clasificación por lados o ángulos ni por cualquier otra razón, especificando numéricamente el valor de los ángulos de cada uno. Se pide descubrir y redactar una característica común de los tres casos.

Se asume el riesgo de que algunos alumnos conozcan la regla universal de la triangularidad y echen mano de estos conocimientos previos para enunciar dicha característica común, pero esto no se considera un problema, pues el análisis exhaustivo de los casos se hace ineludible incluso para este grupo de alumnos. Además quiere hacerse especial hincapié en el estudio de la expresión que el alumno presenta en la regla a enunciar, por lo tanto no debe ser tan compleja como para que sólo un pequeño grupo pueda responder a la pregunta. Se pretende, por tanto, no sólo que el alumno tenga que distinguir y separar las figuras en sus partes más elementales, comparar características, inferir consecuencias y extraer conclusiones de su análisis, sino también que refleje las mismas del modo más general y riguroso posible.

En cuanto a las previsiones del número de respuestas obtenidas se espera una disminución respecto a las cuestiones anteriores y sobre todo un nivel de corrección bastante menor, debido a la dificultad que el análisis y la generalización presentan a estas edades. La razón es la falta de madurez de pensamiento (ver en la página 146) de los alumnos que aún se encuentran en la etapa de las operaciones concretas o en tránsito hacia las operaciones formales (ver en la página 131), además de la falta de hábito que presentan para este tipo de actividades que requieren una comprensión significativa de las matemáticas aprendidas (ver en la página 56). Por cursos puede encontrarse una mejora progresiva en los resultados desde 6º EP a 2º ESO, con diferencias de cierta importancia, puesto que la generalización se desarrolla de forma gradual y de acuerdo a la madurez . Además las cuestiones que se presentan a través de la geometría suponen una complejidad añadida a los alumnos, más habituados a la aritmética que a la geometría.

Para la evaluación de las respuestas obtenidas se considera completamente correcta la respuesta en la que el alumno redacte la ley de la triangularidad sin errores, ni en la conclusión ni en la expresión, ya sea en general, para cualquier triángulo, o en particular, para los tres en cuestión. Se considera la respuesta de corrección intermedia, es decir, deficiente aunque no incorrecta, cuando la característica común sea detectada por el alumno pero se presenten imprecisiones en su expresión. Por último se considera la respuesta incorrecta cuando los errores de expresión cometidos por los alumnos afecten al sentido esencial de la ley de la triangularidad o éstos no lleguen a obtener la conclusión correcta.

En cuanto al tipo de respuestas no se espera ninguna fórmula algebraica, debido al nivel de los alumnos y al tipo de enunciado planteado. Más bien se supone que los alumnos responderán a través de la redacción de un enunciado, más o menos general, dependiendo de su propio nivel de madurez. Incluso pueden encontrarse comprobaciones únicamente aritméticas, que indicarían que el alumno no ha llegado a las puertas de su madurez operatoria, es decir, el comienzo de la etapa de las operaciones formales (ver en la página 131).

4ª pregunta

Redacta de forma clara la característica común de estas tres expresiones aritméticas: 6+2; 4+4; 3+5.

El objetivo de esta pregunta coincide plenamente con el de la cuestión anterior. La razón de repetirlo es estudiar y comparar los distintos resultados que se pueden obtener al variar la actividad y proponer una situación más evidente desde el punto de vista aritmético. Dicha actividad resulta mucho más cercana a la realidad matemática que dominan todos estos alumnos y, por lo tanto, supone una menor dificultad a la hora encontrar la característica general a enunciar; de este modo se puede apreciar el grado de dependencia que los resultados de la 3ª cuestión tienen de la problemática concreta que plantea.

Para ello se proponen tres sumas de dos sumandos, distintos en cada una de ellas, de manera que los resultados sean iguales si se realiza la adición. Se pide a los alumnos que redacten, de forma clara, la característica común encontrada entre dichas expresiones aritméticas.

Se espera obtener, contrariamente a la cuestión 3ª, una respuesta casi total y muy acertada, puesto que la dificultad añadida por la situación concreta planteada en dicha cuestión desaparecía en ésta. Además, al igual que en la pregunta precedente, se suponen respuestas mayoritariamente retóricas, aunque no se descarta que algún alumno exprese la respuesta utilizando únicamente la aritmética particular, limitándose a la resolución de las propias operaciones. Es incluso más probable encontrar este tipo de respuestas en este caso que en el anterior puesto que el enunciado es eminentemente aritmético. Sin embargo este rasgo es esperable únicamente en los alumnos de la enseñanza primaria, donde la necesidad de clausura se manifiesta de un modo más acusado (ver página 131); no es hasta 1º ESO cuando los alumnos entran en contacto con un aspecto diferente de los signos aritméticos y comienzan a conocer el lenguaje algebraico en el cual los números, las letras y los signos aritméticos adquieren un sentido relativo (ver página 92 y en 3.2.3), donde la importancia de las relaciones que se establecen entre ellos supera al del resultado evaluado. Por todo esto pueden encontrarse diferencias entre los alumnos de 6º EP y los de secundaria, aunque no muy significativas debido a la sencillez de la cuestión propuesta.

No se conciben grandes diferencias en cuanto a la expresión de los alumnos en sus respuestas. Se espera que éstas no presenten ninguna generalización en sentido pleno, ya que el enunciado no se presta a ello y resulta totalmente innecesario bajo el punto de vista del alumno de este nivel, como se ha dicho anteriormente. Por lo mismo, los resultados obtenidos en esta cuestión tendrán valor comparativamente con los de la cuestión 3ª, pues por sí mismos no aportan tanta información como en la pregunta anterior.

Para la evaluación de las respuestas se considera totalmente correcta aquella que presente la conclusión común para los tres casos particulares *en general* -aceptando la limitación que ya se ha dicho que supone *generalizar* en este caso- es decir, afirmarlo para los tres. Se considera una respuesta aceptable la que manifieste errores o imprecisiones de expresión en dicha generalización y sólo se considera incorrecta la respuesta en la que se realicen las operaciones por separado y no se concluya una regla general para los tres casos, además de, por supuesto, aquellas en la que la conclusión obtenida no sea correcta.

5ª pregunta

La siguiente tabla muestra tres columnas. La primera de ellas da una información matemática que debe corresponderse con la operación de la segunda. La tercera columna expresa la misma operación pero sin números, es decir, en general, de manera que los cuadros en blanco puedan representar cualquier número. Completa las casillas sombreadas según los ejemplos:

Enunciado	Operación aritmética	Estructura operacional
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	□ + □
El cine cuesta 6 € y voy tres veces esta semana	3·6	□ · □
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños		
	9-5	
		□ + □ − □

Con esta cuestión se pretenden estudiar varias cosas: la capacidad de comprensión de enunciados matemáticos y su expresión mediante operaciones aritméticas, la capacidad de enunciación verbal de los alumnos a partir de una situación matemática dada y la capacidad de simbolización y formalización a partir de operaciones aritméticas concretas. Es decir la capacidad del alumno de traducir una información de un tipo de lenguaje matemático a otro -algebraico, aritmético y verbal- que es el punto de partida para la comprensión significativa del lenguaje algebraico (ver en la página 159).

La actividad diseñada para este fin es una tabla de tres columnas y cinco filas, encabezamiento aparte. A modo de ejemplo se ofrecen completas las dos primeras filas: en la primera columna aparece un enunciado matemático verbal, en la segunda las operaciones aritméticas correspondientes y en la tercera, titulada estructura operacional, se expresa la misma operación matemática en general, es decir, sustituyendo los números por cuadros en blanco con el fin de que los alumnos se acerquen a la idea de variabilidad necesaria en la representación algebraica. En las siguientes filas se sombrean algunas casillas que se dejan en blanco para que el alumno las rellene a partir de los datos facilitados en las restantes. El hecho de sombrearlas no es casual sino que se supone muy complicado, sobre todo para los alumnos de 6º EP, entender que en los cuadros en blanco de las estructuras operacionales dadas no es necesario escribir ningún número, de este modo los alumnos tienen claro qué casillas deben completar y se facilita la comprensión de lo que se pide en la última columna.

No se espera que los alumnos encuentren ninguna dificultad en la traducción de un enunciado matemático, tan sencillo como los propuestos, a operaciones aritméticas y viceversa, con lo cuál se espera un éxito total en cuanto a los dos primeros objetivos (ver 3.3.1). En cuanto al tercero, el objetivo es más difícil de evaluar. La comprensión del enunciado de la pregunta va a determinar el éxito o fracaso de este empeño, puesto que a pesar del esfuerzo realizado para que sea lo más claro y transparente posible, es un hecho que a estas edades su longitud puede suponer una complicación añadida para la correcta interpretación del mismo. Además la idea de variabilidad asociada a un signo es difícil de comprender en esta etapa, sobre todo para los alumnos de 6º EP que aún no han tenido contacto alguno con los primeros conocimientos algebraicos (ver Anexo 1). Por todo ello se espera que la tercera columna tenga una respuesta menos cuantiosa que las otras dos y, sobre todo, menos acertada, con diferencias evidentes entre los cursos de secundaria y el de primaria, pero no tanto en los dos de secundaria entre sí.

No se concibe que el tipo de respuesta vaya a manifestar diferencias suficientes para la extracción de conclusiones debido al carácter tan cerrado que ostenta.

Para la evaluación de las respuestas se consideran correctas aquellas que no presenten ningún error significativo en cualquiera de las tres columnas. En caso de aparecer errores sólo en una de ellas, la respuesta se clasifica como intermedia y se considera incorrecta cuando los errores se repitiesen en dos o más columnas.

Se aprecia un error en la primera columna cuando el enunciado propuesto por el alumno no corresponda con la operación facilitada en el cuestionario, y no sólo por una imprecisión en la expresión. Se considera un error en la segunda columna cualquier expresión aritmética que no se ajuste exactamente a la operación demandada, y un error en la tercera cualquier expresión que no refleje la intención de variabilidad en la estructura operacional, así como las que no sean fieles a la operación correspondiente.

6ª pregunta

El área de un triángulo es $A = \frac{a \cdot b}{2}$, donde b representa la base y a representa la altura. Calcula las áreas en los siguientes casos:

En la siguiente pregunta el objetivo es evaluar el grado de comprensión de la formalización algebraica. Para ello se pide calcular la superficie de los triángulos concretos representados, una vez se ha especificado la fórmula de cálculo del área del triángulo y habiendo señalado en la representación la base y la altura de cada uno de ellos.

Se supone que los alumnos de este nivel son totalmente capaces de interpretar, en una representación geométrica de un triángulo, la base y la altura del mismo. Además es necesario que sepan deducir el significado de las letras en la fórmula, es decir, que al menos se encuentren en un segundo nivel de Socas et al. (página 128) . En general, la sustitución de las letras por sus valores numéricos correspondientes no debe suponer mayor inconveniente, como tampoco el cálculo del resultado final, una vez sustituidas las letras, debido a la sencillez de las operaciones demandadas y a pesar de que los errores aritméticos sean frecuentes en esta edad. Aunque el uso de fórmulas ya ha sido practicado por todos los alumnos de estos niveles (ver Anexo 1), incluso los de 6º EP, esta tarea debe resultar más difícil para dicho curso por ser los alumnos menos habituados a este tipo de actividad.

Por todo ello se espera una respuesta masiva y bastante correcta en general, aunque con más fallos en 6º EP, debido a errores en la interpretación de las letras en la fórmula. Como el tipo de respuesta se supone predominantemente aritmética pueden aparecer algunos errores en las operaciones, pero como dato despreciable por su insignificancia, al tratarse de despistes, y por no implicar diferencias notables entre los distintos grupos (ver en la página 131).

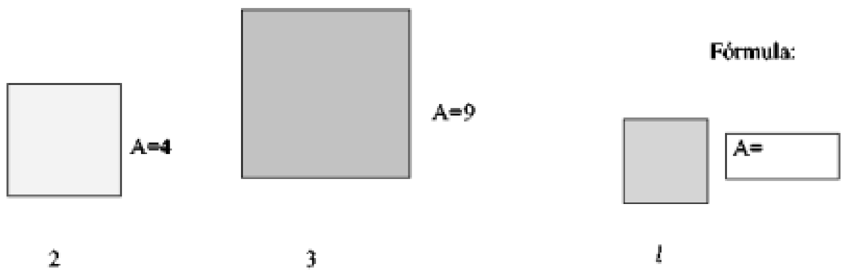
Para la evaluación de las respuestas obtenidas se considera acertada la respuesta en la que el alumno calcule correctamente las áreas de los dos triángulos propuestos; si hay algún error operativo menor, es decir, por despiste, la respuesta se considera intermedia, al igual que si uno de los dos cálculos es correcto sin serlo el otro; en cualquier otro caso, la respuesta se considera incorrecta.

Por último es conveniente pararse a reflexionar sobre la posibilidad de que el conocimiento previo de la fórmula en cuestión distorsione los resultados obtenidos en esta actividad concreta, es decir, que se obtenga una evaluación positiva del objetivo debido al hábito y no a la comprensión de la formalización algebraica. La conclusión a la que se ha llegado respecto a este punto es que cualquier tipo de fórmula, conocida o no, se interpreta de la misma manera una vez especificado el significado de cada variable, por lo tanto la familiaridad con la fórmula elegida no tiene por qué distorsionar los resultados, más bien evitará errores añadidos por causas ajenas a lo que aquí interesa.

7ª pregunta

Escribe la fórmula del área del cuadrado observando los siguientes casos:

(Nota: A significa área y l significa lado)



El objetivo de esta pregunta es similar al de las preguntas tercera y cuarta, es decir, comprobar la capacidad de generalización en el mismo sentido que en ellas aunque, en este caso, se da más importancia a la expresión formal de la característica común hallada. Es decir, se pretende evaluar la capacidad de formalización, de una regla general, a través de una fórmula matemática.

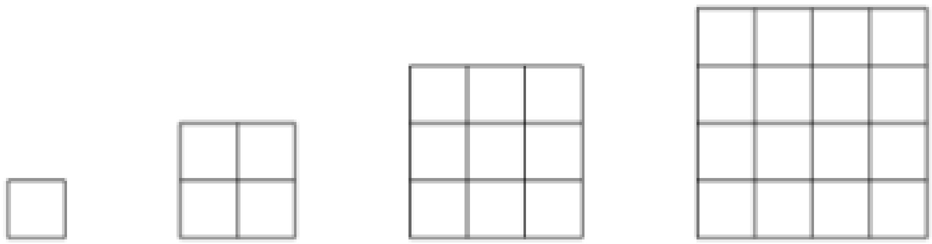
La actividad planteada requiere escribir la fórmula del área del cuadrado después de la observación de dos casos particulares. Lo complicado a la hora de plantear la pregunta es cómo demostrar, sobre todo a los alumnos poco familiarizados con las fórmulas y el álgebra, que lo que se espera que hagan es repetir la misma relación que en los casos previos pero para un cuadrado de lado general, l. Para salvar esta dificultad se representan geométricamente los cuadrados, indicando el valor de su lado y a su derecha el área, escribiendo $"A="$ y la cantidad correspondiente a su superficie; en el último se indica l donde el alumno espera el lado y se recuadra $"A="$ bajo la palabra "*fórmula*" para aclarar dónde debe escribirse ésta. Aún así el ejercicio resulta complejo para los alumnos no habituados a este tipo de actividades y, por otro lado, excesivamente sencillo para aquellos que conocen, de sobra, la fórmula del área del cuadrado. Se pensó introducir otra letra distinta para el lado y así evitar que los alumnos escribiesen la fórmula sin deducirla a partir de los ejemplos, pues es la l la letra a la que están acostumbrados cuando estudian el área del cuadrado, pero esto interrumpía la progresión creciente de formalización demandada a los alumnos en este cuestionario. Por ello se prefirió que esta cuestión fuese más sencilla para los alumnos aventajados en estos conocimientos que más difícil para los menos duchos en la materia y se rechazó complicarla, con el objetivo de obtener el mayor número posible de respuestas y evitar que los alumnos no pudiesen responder por la imposibilidad de extraer la correspondiente ley general. Como ya se ha especificado, en este ejercicio es más interesante valorar la capacidad de formalizar que la de generalizar, pues el objetivo relacionado con la generalización ya había sido estudiado en las preguntas 3ª y 4ª.

En cuanto al número de respuestas se espera muy elevado y con una notable corrección en la mayor parte de los alumnos de 1º ESO y 2º ESO y, posiblemente, también en un gran grupo de 6º EP. En general, las respuestas incorrectas se esperan en el primer curso de este estudio, relacionadas con la incomprensión de lo que el enunciado requiere más que con la dificultad de la tarea. También se contempla la posibilidad de obtener algunas respuestas aritméticas, en el curso de primaria, que particularicen en un nuevo caso concreto en vez de generalizar.

Para la evaluación sólo se considera correcta la respuesta que presenta la fórmula del área del cuadrado de lado l, ya sea en forma de multiplicación o en forma potencial. Ninguna otra respuesta se considera, ni siquiera la misma con otras letras -exceptuando el caso de que el cambio de variable se encuentre perfectamente especificado- pues no estaría deducida a partir de la figura propuesta. Tampoco hay posibilidad de respuestas de corrección intermedia, por lo tanto cualquier respuesta que no sea completamente correcta se considera incorrecta.

8ª pregunta

En cada apartado se presenta una serie con una característica concreta, descúbrela y añade un par de elementos más a cada serie. Después contesta las preguntas propuestas:



a)

¿Qué añades a cada figura para obtener la siguiente?

b) 2, 4, 6, 8, ... ¿Cómo sigue la serie y por qué?

c) 1, 2, 3, 4, ... ¿Cómo se forma cada nuevo número a partir del anterior?

d) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿Cuál es la característica que define esta serie?

El objetivo perseguido con esta pregunta es evaluar la capacidad de generalización -que ya se supone poco desarrollada en general- a partir de casos particulares y de aplicación de la regla abstraída a otros casos similares.

Para ello el alumno tiene que observar una serie de elementos y completarla añadiendo algunos más, además de contestar unas preguntas que permiten detectar el nivel de comprensión de la regla de formación de la serie. Los rasgos fundamentales que se pueden examinar son el descubrimiento de la regla de formación y su expresión generalizada (3.1.3). La aplicación de la misma para particularizar en otros casos tiene menor interés en sí misma aunque sirve para que los alumnos tengan menos dificultades a la hora de detectar la característica buscada.

El ejercicio consta de cuatro apartados clasificados por tipo y dificultad. El primero muestra cuatro figuras cuadradas divididas en cuadraditos iguales, más pequeños, de modo que en la primera aparece un cuadrado, en la segunda dos cuadrados por lado, en la tercera tres y así sucesivamente. La pregunta planteada incide en la regla de formación de cada figura a partir de la anterior. Para contestar se requería un sencillo análisis comparativo -no puede pedírseles más- de las figuras en cuestión y la redacción rigurosa de la respuesta, donde podían encontrarse las mayores dificultades debido a la falta de rigor propia de la edad, sobre todo en los cursos más bajos (ver en la página 100).

El segundo apartado presenta los cuatro primeros términos de la serie de los números pares seguidos de puntos suspensivos para indicar la infinitud de la misma. En este caso la pregunta pide escribir razonadamente algunos de los términos siguientes. El análisis en este apartado ya no era geométrico -más difícil para los alumnos, ver página 182- sino numérico y asequible debido a la sencillez de la serie propuesta. La redacción de la respuesta no debe suponer ninguna dificultad, pues se ofrece total libertad para la expresión propia del alumno. Sin embargo, en el siguiente apartado se limita la respuesta a través de la pregunta. Se trata, en esta ocasión, de la serie de los números naturales, más sencilla en su formación, y la pregunta requiere detectar la ley de formación por recurrencia, lo que exige una mayor rigurosidad en la expresión de la respuesta.

Por último, en el cuarto apartado la serie también es numérica, en este caso la de los cuadrados perfectos, y la pregunta versa sobre la característica determinante de la misma. Este último es el que plantea una mayor dificultad en la detección de la regla de formación y por lo tanto el que puede presentar una mayor incorrección en las respuestas. La expresión, sin embargo, al ser más libre no aumenta la complejidad de la tarea.

En cuanto a los resultados esperados el nivel de respuesta debe ser casi total en el caso de los apartados segundo y tercero, en cuanto a los otros dos se supone una mayor tasa de abstención debido a la mayor dificultad de abstracción de la regla de formación y la complejidad de su expresión. Incluso puede darse el caso de que algún alumno no comprenda la enunciado de la actividad en absoluto, dejándolo en blanco o respondiendo incoherentemente. Estos errores serían más esperados cuanto más bajo fuese el nivel académico del alumno, por lo tanto deberían presentarse con mayor frecuencia en los cursos inferiores.

Respecto a la corrección de las respuestas se espera un éxito muy extendido en los apartados segundo y tercero y una tasa de incorrección bastante elevada en el resto de apartados, sobre todo en el último por presentar una serie que requiere un análisis más complejo.

Dado el carácter de las preguntas, el tipo de respuesta pronosticado es predominantemente retórico. Se espera un escaso rigor en la expresión de las respuestas a los apartados más difíciles y un número importante de errores en la redacción de todas las respuestas, en general, dado el desarrollo del lenguaje que encontramos en estos niveles (en la página 100). También puede hallarse falta de generalización -por falta de madurez de los alumnos (en la página 146)- en los apartados primero y último, únicos apartados donde es posible evaluar esta capacidad de manera significativa, pues la generalización resulta prácticamente evidente en los apartados segundo y tercero. Por este mismo motivo es en los apartados primero y cuarto donde se puede hallar algún indicio de formalización en los cursos superiores, en los que ya se conoce el lenguaje algebraico.

Para la evaluación de las respuestas se utilizan los siguientes calificativos: correcta para la respuesta que presente los cuatro apartados bien respondidos, aceptando alguna imprecisión en la expresión de los apartados primero y cuarto que no afectase a la corrección de los mismos; incorrecta, en caso de presentar errores en cada uno de los apartados, incluyendo la no generalización como error en los mismos; en los demás casos, se califica como intermedia.

9ª pregunta

Explica qué relación existe entre cada pareja de números de esta tabla:

3	6
10	20
7	14
4	8

¿Puedes expresarla mediante una operación de manera que sirva para todos estos ejemplos y otros que sigan la misma relación?

Esta pregunta pretende comprobar varias capacidades en los alumnos: detectar relaciones entre números, expresarlas a través del lenguaje natural y a través del lenguaje formal, ya sea mediante los signos algebraicos habituales u otros más informales, de manera que indiquen una generalización suficiente, en el mismo sentido de preguntas anteriores como la 3ª o la 8ª. La novedad en esta cuestión se halla en que se requiere expresar la formalización a través de una operación.

El ejercicio presenta una tabla con dos columnas y cuatro filas de números y se solicita a los alumnos que expliquen qué relación hay entre cada pareja de números. De esta manera se examina tanto la expresión verbal como el análisis de casos para generalizar la relación. Además se añade la pregunta acerca de la posibilidad de expresarla *"mediante una operación de manera que sirva para todos estos ejemplos y otros que sigan esa misma relación"*, para explorar la capacidad de formalización de los alumnos.

Se esperan claras diferencias entre los tres cursos, tanto en el número de respuestas dadas como en la corrección de las mismas, debido a la distinta experiencia de cada uno de ellos con el procedimiento que el ejercicio exigía y al nivel de madurez (en la página 131). Los alumnos de 2º ESO ya tienen cierta destreza en el manejo de las relaciones funcionales y las tablas de valores necesarias para su representación gráfica (ver Anexo 1), por lo tanto realizan tareas de este estilo sin mucha dificultad y pueden escribir formalmente la relación con más rigor que mediante el uso del lenguaje natural. En 1º ESO se conocen también estos conceptos (ver Anexo 1), pero no se dominan con la misma soltura, por lo tanto la respuesta debe ser menos formal, aunque se supone que son capaces de expresar, de manera verbal y forma más o menos clara, la relación entre los números de cada fila. En cuanto al curso de primaria, sin ninguna experiencia con actividades que requieran un procedimiento similar y desconociendo los conceptos de función y tabla de valores de la misma (ver Anexo 1), los alumnos pueden encontrar dificultades para comprender lo que el enunciado requiere. En este último nivel, las respuestas dadas a la primera de las preguntas deben ser más acertadas que las de la segunda, en la que se espera una abstención importante.

En cuanto a los tipos de formalización se puede afirmar que se espera una respuesta mayoritariamente algebraica en el último curso de secundaria y predominantemente informal -con símbolos no formales como cuadros en blanco, como hemos utilizado en las preguntas anteriores, o huecos, etc...- en las respuestas del curso de primaria. En el curso intermedio pueden hallarse ambos tipos de respuesta en proporciones más o menos similares. También se presupone una falta de generalización importante entre las respuestas de los alumnos de los cursos más bajos, sobre todo en el de primaria. Esto es, respuestas que se limiten a particularizar con otros casos numéricos distintos a los propuestos en la tabla, sin atender la exigencia de que la expresión *"sirva para todos"* debido a la incomprensión de lo que esto significa (ver en la página 146).

Para terminar especificaremos lo que se considera correcto y lo que no a la hora de evaluar nuestro estudio. Se considera incorrecta toda respuesta que no exprese específicamente la relación pedida, ya sea verbal o formalmente, por error en el análisis o por incorrección semántica. La falta de rigor en la retórica así como las imprecisiones en la formalización no se consideran errores, por ello se clasifican este tipo de respuestas como intermedias. De la misma manera se califican las respuestas que presentan tan sólo una de las dos respuestas incorrecta. Se consideran correctas las respuestas que utilicen ambos modos de expresión -formal y retórico- sin imprecisiones, exceptuando una posible falta de rigor en la expresión formal como no expresar la relación funcional sino sólo la operación realizada con los números de la primera columna, o no especificar el significado de los símbolos que representan cada uno de los números de las dos columnas.

10ª pregunta

Piensa un número, multiplícalo por 2, súmale 4, divídelo entre 2, réstale el número que habías pensado. ¿El resultado es, siempre, 2? ¿Por qué?

¿Puedes expresarlo de manera que sirva para cualquier número que pienses, sin especificar cuál?

El objetivo de esta pregunta es bastante similar al de las preguntas 5ª y 9ª: se trata de comprobar la capacidad de comprensión de un enunciado matemático y su expresión mediante operaciones aritméticas, así como de detectar, a través de un análisis de casos, la estructura operacional dada y generalizarla.

El ejercicio presenta un enunciado del tipo *"piensa un número..."* en el que se insta a la realización de una serie de operaciones e inversiones de las mismas de modo que, al final, se obtiene siempre el mismo resultado independientemente del número inicial pensado. La primera pregunta que se plantea a los alumnos les obliga a hacer las comprobaciones necesarias para averiguar si siempre da dicho resultado, mientras que la segunda les hace reflexionar sobre la razón de que esto ocurra. A través de la respuesta a la primera pregunta se detecta el grado de comprensión de las instrucciones dadas en el enunciado y de las operaciones aritméticas implicadas y a través de la respuesta a la segunda se comprueba la capacidad de análisis de la estructura operacional en cuestión y las conclusiones obtenidas. Aún hay una tercera pregunta que pide la expresión de este mismo enunciado *"de manera que sirva para cualquier número, sin especificar cuál"*. A través de la respuesta obtenida se evalúa la capacidad de generalización y el nivel de simbolización y formalización presentado por los alumnos, en el mismo sentido que en cuestiones anteriores.

En las dos primeras preguntas el nivel de respuesta esperado es bastante elevado dado el dominio que estos alumnos tienen de la aritmética (ver en la página 131), suponiendo mayor corrección en las respuestas de los cursos superiores. Para la evaluación de las respuestas esta corrección exige un suficiente rigor en la expresión, con la salvedad de alguna imprecisión de forma y no de contenido. La respuesta se considera incorrecta si la idea sugerida no es la adecuada; en caso de que lo sea pero haya imprecisiones en la concreción de la respuesta, ésta se considera de corrección intermedia.

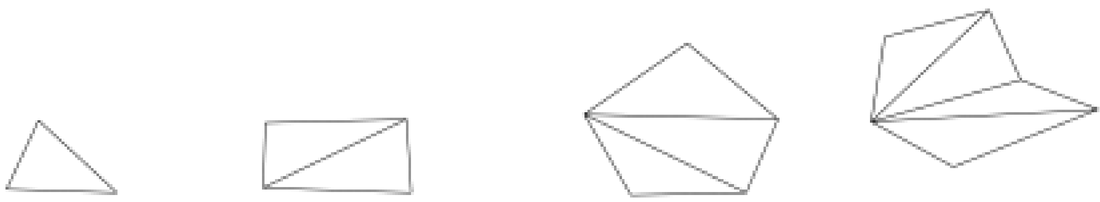
Con respecto a la tercera pregunta la abstención se espera elevada, sobre todo en el curso de primaria debido a que la expresión de la generalización es desconocida para ellos a nivel formal (ver Anexo 1) y demasiado confusa, en este caso concreto, si se realiza mediante el lenguaje natural. A la hora de evaluar las respuestas a esta pregunta se consideran correctas las que presenten una expresión general, ya sea con signos convencionales algebraicos o inventados para la ocasión, sin perjuicio de algún error como la falta de paréntesis -no es que se considere despreciable en importancia sino que no es el objetivo perseguido en esta pregunta-. Se considera incorrecta cualquier respuesta que no alcance la generalización esperada, es decir, que se limite a particularizaciones aritméticas, así como la que no observe fielmente las operaciones dictadas en el enunciado.

La respuesta global es considerada correcta cuando lo son las respuestas a las tres preguntas planteadas y considerada incorrecta cuando lo son las respuestas dadas al menos a dos de ellas. En cualquier otro caso la respuesta es considerada de corrección intermedia. Además es necesario especificar que las respuestas monosilábicas -sí, no- a las preguntas 2ª y 3ª no se consideran, contabilizándose como abstenciones.

Según los tipos de respuesta obtenidos se puede acotar el nivel de simbolización y formalización de los alumnos pues, aunque las dos primeras preguntas sólo aceptan respuesta retórica, la tercera es de tipología completamente abierta. Las escasas respuestas obtenidas a esta última pregunta, en el curso de primaria, se esperan retóricas y se supone una mayor formalización en los cursos de secundaria, creciendo el uso de la simbolización algebraica según aumente el nivel académico de los alumnos y no descartando, como ya apuntamos anteriormente, el uso de otros signos no convencionales que representen números en general, como cuadros, etc...

11ª pregunta

Observa las figuras y explica qué relación encuentras en cada una entre el número de lados de polígono y el número de triángulos formados:



Nota: Para ayudarte puedes hacer una tabla como en el ejercicio 9:

Número de lados	*Número de triángulos*

¿Puedes expresar con una operación esta relación de manera que sirva para un polígono de n lados? (Nota: n representa cualquier número)

Como en la pregunta anterior, se pretende evaluar la capacidad de realizar un análisis de casos, en esta ocasión con objetos geométricos, extraer una relación del mismo y expresarla en forma general verbal y formalmente, utilizando el lenguaje algebraico.

El ejercicio presenta una serie de polígonos en orden creciente de lados, triangulados desde un vértice. La serie comenzaba por el triángulo y presentaba cuatro polígonos irregulares de tres, cuatro, cinco y seis lados, con uno, dos, tres y cuatro triángulos, respectivamente. Se pedía explicar la relación hallada, en cada figura, entre el número de lados y el número de triángulos.

En las validaciones del cuestionario con alumnos de estas edades se había detectado una especial dificultad para la comprensión de lo que se pedía, por lo que se propone a los alumnos hacer una tabla como la de la cuestión 9ª con dos columnas: número de lados y número de triángulos. El hecho de rellenar la tabla favorece la discriminación de la información relevante de las figuras y facilita la detección de la relación pedida.

A pesar de esta ayuda se espera que tal detección presente una elevada dificultad, sobre todo en los cursos inferiores, debido, ante todo, a dos causas: la presentación de los casos a través de la geometría, pues la falta de experiencia con este tipo de cuestiones complica el análisis, como ya se advierte en la pregunta 8ª (en la página 182); y el desconocimiento previo de la relación, lo que exige una total detección a través de la investigación personal, al contrario de lo que ocurría en las preguntas 3ª ó 7ª. Por ello la abstención se espera elevada y la corrección escasa en todos los cursos, mejorando paulatinamente según se aumenta el nivel académico.

Finalmente la cuestión presenta una pregunta que implica la formalización de la relación para un polígono de *n* lados. Su respuesta proporciona la fórmula general buscada en lenguaje algebraico formal y no informal como se había permitido en otras cuestiones anteriores. Para facilitar la comprensión de la pregunta a los alumnos de cursos inferiores, poco o nada familiarizados con el álgebra, se aclara que *n representa cualquier número*. Aún así, se supone que la formalización en lenguaje algebraico debe poner de manifiesto diferencias evidentes entre los tres cursos cuestionados pues, su conocimiento del mismo es prácticamente nulo en 6º EP, bastante limitado en 1º ESO y sólo para los alumnos de 2º ESO podemos decir que es conocido (ver anexo 1), aunque tampoco se puede considerar dominado (ver en la página 131) por lo tanto la respuesta a esta segunda cuestión se espera, en general, inferior en cantidad y calidad que a la primera.

Para la evaluación de las respuestas se considera correcta la respuesta que presenta adecuadamente la relación del lenguaje natural y formal con lenguaje algebraico, aunque se permite alguna imprecisión en la retórica, dada la falta de rigor en el lenguaje natural que suelen presentar los alumnos de estos niveles (ver en la página 100), y el cumplimentado de la tabla. Asimismo, se considera de corrección intermedia la respuesta que presenta carencias de importancia, ya sea en su expresión verbal o formal, pero permite realizar el análisis sugerido, es decir, al menos presenta la relación bien, ya sea en forma de tabla, de fórmula o de narración verbal. Por último, sólo se contabiliza como incorrecta la respuesta que no presenta bien ninguna de las tres tareas encomendadas -explicación de la relación, formalización de la misma y cumplimentado de la tabla.

12ª pregunta

En la siguiente tabla cada enunciado debe corresponderse con la expresión matemática que está a su derecha, en la columna titulada traducción. Completa las casillas en blanco:

(Nota: x representa cualquier número)

Enunciado	Traducción
Lola tiene una amiga 3 años mayor que se llama Marta. Si la edad de Lola es x años, ¿cuántos tiene Marta?	
María y Juan son hermanos. Juan tiene 3 años y la suma de sus edades es 14 años.	
	x-2=15

El objetivo de esta pregunta es comprobar la capacidad de detección de una incógnita en una situación problemática y la comprensión de la magnitud abstracta que ésta supone. Además se pretende evaluar la capacidad de formalización de esta situación a través del lenguaje algebraico.

Se plantea con este propósito una tabla de dos columnas encabezadas con las palabras ***”Enunciado”*** y ***”Traducción”*** y se pide a los alumnos que completen ciertas casillas en blanco de manera que cada enunciado de la izquierda se corresponda con la expresión matemática de la derecha.

En la primera tarea se plantea un enunciado que trata de una suma del tipo $a+x$, donde a es un número particular y se especifica con la letra x la incógnita para que la determinación de la misma en el enunciado no suponga una dificultad añadida. Para que los alumnos de primaria, que no conocen el álgebra, comprendan su significado se aclara al final del enunciado de la cuestión que *x representa cualquier número*. Esto nos permite conocer si el alumno es capaz de escribir una expresión algebraica a partir de un enunciado de este tipo o si por el contrario representa una dificultad inabordable el hecho de que uno de los términos sea una letra en vez de un número -se supone que un enunciado del tipo $a+b$, con a y b números particulares, no debe plantear ninguna dificultad a estos niveles-.

La segunda tarea muestra un enunciado que corresponde a una expresión del tipo $a+x=b$, con x desconocido y a y b números particulares -los significados de las letras se mantienen de esta misma manera de aquí en adelante- aunque sin especificar la incógnita, es decir ésta estaba implícita en el enunciado. De esta manera se puede comprobar la capacidad del alumno para detectar la incógnita y escribir la ecuación formal correspondiente. Se contempla la posibilidad de que el alumno formalice mediante una operación aritmética, b-a, y resuelva el problema -que no es tal, pues no se especifica pregunta alguna- pero ello sirve para determinar su grado de madurez en cuanto al álgebra se refiere.

En la tercera tarea no se propone ningún enunciado sino una ecuación del tipo x-a=b en la columna de la derecha, lo que permitía comprobar la capacidad de comprensión de una ecuación y el significado de cada uno de los signos que la componen, incluida la incógnita. Además a través del enunciado propuesto se podría evaluar la expresión verbal del alumno y el rigor que éste imprime a su retórica.

En cuanto a los resultados se espera una abstención alta en el curso de primaria debido al desconocimiento del lenguaje algebraico de estos alumnos (ver Anexo 1), mientras que en los cursos de secundaria la respuesta debe ser masiva. Asimismo la corrección en estos dos cursos se espera elevada. Sin embargo, en 6º EP no se esperan apenas respuestas totalmente correctas. Probablemente la tasa de abstención aumente en la tercera tarea para todos los cursos debido a la dificultad añadida de crear un enunciado, no tanto por falta de imaginación como por la inseguridad de los alumnos ante este tipo de ejercicios a los que no están acostumbrados y que no tienen una respuesta unívoca cuya veracidad sea claramente contrastada con el libro de texto (ver 2.4.3).

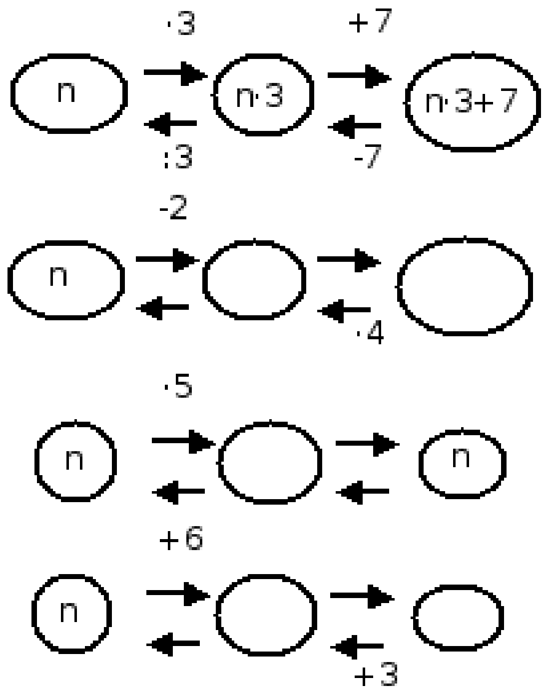
A efectos de evaluar las respuestas se considera correcta la respuesta adecuada en las tres tareas e incorrecta la errónea, u omisión de ella, en las mismas tres. En cualquiera de los otros casos la respuesta se considera de corrección intermedia.

En cuanto al tipo de respuesta debe ser tan sólo algebraico en las dos primeras tareas, aunque se ha apuntado la posibilidad de que los alumnos de primaria e incluso los de menor nivel de madurez de secundaria, planteen respuestas exclusivamente aritméticas que se correspondan con el enunciado, como en la segunda tarea, o realicen particularizaciones aleatorias, que evalúen las letras (ver en la página 124) como en la primera. En la tercera tarea la respuesta sólo puede ser retórica, aunque con la falta de rigor en la expresión propia de la edad como ya hemos comentado en preguntas anteriores (ver en la página 100).

13ª pregunta

Fíjate en la primera de estas figuras que está completa, a modo de ejemplo. Completa las siguientes de la misma manera:

(Nota: n representa cualquier número)



Con esta pregunta se persigue evaluar la capacidad de los alumnos para invertir operaciones, así como, en todos los supuestos, para detectar el grado de comprensión del lenguaje algebraico y determinar su nivel de utilización.

Para ello el ejercicio plantea cuatro cadenas de operaciones, de tres eslabones cada una, unidos por flechas sobre las que se indica la operación a realizar, por ejemplo *"· 3"* ó *"- 2"*. Todas las cadenas comienzan por *n* y están cerradas, es decir, todos los eslabones están unidos por dos flechas de sentidos opuestos que indican operaciones inversas.

La primera cadena se ofrece, completamente resuelta, a modo de ejemplo debido a la dificultad de explicar lo que se pide en esta cuestión mediante un enunciado que todos los alumnos puedan comprender. Así el enunciado sólo insta a completar las restantes de un modo análogo, aunque en cada una se proporciona una información diferente para hacerlo. En la segunda se facilita el eslabón inicial y las operaciones sobre las flechas en sentido directo -hacia la derecha- esto exige al alumno escribir dos expresiones algebraicas e invertir las operaciones dadas. Es la más sencilla de las tres tareas a realizar. En la tercera se plantean las expresiones algebraicas del principio y del final que, además, coinciden y la primera de las dos operaciones correspondientes al sentido directo. Por lo tanto, junto a una tarea similar al anterior, los alumnos tienen que caer en la cuenta de que la segunda operación debe ser la inversa de la dada, para que el eslabón final y el primero sean iguales y así poder completar todas las flechas. Por último, en cuarto lugar, se complica aún más la tarea pues se proporciona, únicamente, el primer eslabón y dos operaciones: la primera de las dos correspondientes a las flechas en sentido directo y la inversa de la segunda de ellas (ver figura anterior). Esto requiere que el alumno haya comprendido completamente la estructura de las cadenas a través de los casos anteriores y, por lo tanto, la inversión de operaciones, además de ser capaz de aplicar los operadores correspondientes a las expresiones algebraicas.

A partir de las respuestas obtenidas se puede determinar el nivel de interiorización que los alumnos tienen del signo aritmético como operador y su predisposición para aplicar estas estructuras operatorias a otros objetos no numéricos. Esta formalidad conlleva todo un proceso de abstracción de la aritmética, en el sentido de Schwarz et al. (página 97) y contiene toda la esencia del tránsito de la aritmética al álgebra, por lo tanto su dificultad es mayor para los alumnos con menor nivel de desarrollo matemático. Por ello se espera una abstención elevada en el curso de primaria. Esta debe ser bastante menor en los dos de secundaria, con pequeñas diferencias entre ellos debido a que la comprensión de las tareas no debe plantear mayor problema a los alumnos que conozcan el álgebra.

Asimismo, los resultados en la corrección se suponen similares en los cursos de secundaria, aunque siempre algo mejores en 2º ESO que en 1º ESO. Se espera que las respuestas correctas sean una clara minoría en 6º EP debido al desconocimiento del lenguaje algebraico (ver Anexo 1), aunque es posible que algunos alumnos sean capaces de responder adecuadamente, ya sea por madurez en su desarrollo simbólico y matemático o por analogía con el ejemplo propuesto. La dificultad creciente de las cadenas hace prever unos resultados peores en las últimas tareas, así como mayor nivel de abstención.

La tipología de respuesta esperada sólo puede ser formal algebraica, aunque no se descartaban posibles particularizaciones aritméticas de algunos alumnos como ya hemos afirmado en otras ocasiones.

Para la evaluación se denomina correcta la respuesta adecuada a todas las cadenas, aun cuando contenga algún error en la prioridad de operaciones, que no es despreciable en importancia sino irrelevante para el objeto de esta cuestión: el grado de uso del álgebra formal y no la evaluación del rigor aritmético. Se considera de corrección intermedia la respuesta que atiende al enunciado de la pregunta pero presenta alguna carencia, ya sea la falta de expresiones algebraicas o de operaciones. Sólo se consideran incorrectas las respuestas que no se corresponden en absoluto con el enunciado propuesto, así como las particularizaciones aritméticas o las expresiones algebraicas inadmisibles.

6 Metodología de trabajo y análisis de resultados

Se toma una muestra de 231 alumnas -en los cursos indicados, durante el curso escolar 2004-2005 no había alumnos en dicho centro-, de los cursos de 6º EP, 1º ESO y 2º ESO, distribuidas de la siguiente manera: 66 alumnas del curso de primaria, 81 de 1º ESO y 84 de 2º ESO, todas ellas del mismo centro educativo.

Se trata de un centro educativo privado concertado, homologado y mixto, de carácter católico, que cubre las enseñanzas regladas de Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, este último en régimen no concertado. Cuenta con tres líneas en todas las etapas educativas, excepto en Educación Infantil donde existe una cuarta línea que irá subiendo progresivamente a la Primaria. El número total de alumnos ronda los 1200.

Está situado en una zona de Madrid de nivel socioeconómico medio-alto y en su propuesta educativa destacan como aspectos básicos de la acción pedagógica la atención individualizada y la relación educativa personal, la pedagogía activa, con una metodología abierta y flexible y una exigencia en el trabajo escolar y en el cumplimiento de las normas de convivencia, todo ello con el objetivo de una educación integral del alumno como persona crítica y comprometida con la sociedad.

La razón de centrar el estudio en dicho centro ha sido la necesidad de dar respuesta a los problemas particulares de sus alumnas, pues son los que han motivado el interés por esta temática y el deseo de realizar esta investigación, en particular. La elección de la muestra no se realiza, pues, de un modo aleatorio, sino que se pretende estudiar las dificultades particulares de las alumnas escolarizadas en dicho centro para establecer unas líneas didácticas adecuadas a su problemática particular.

No obstante, muchas de las características encontradas serán claramente generalizables a otros entornos educativos de similares características.

La investigación consta de un doble análisis: cualitativo, basado en las respuestas ofrecidas por las alumnas al cuestionario y en su observación diaria en el aula, y cuantitativo, basado en métodos estadísticos propios de investigaciones sociales.

Para el primero de ellos es fundamental un estudio detenido de las peculiaridades halladas en la respuestas y las razones a que se deben en cada caso particular. La observación directa cobra gran importancia para facilitar esta valoración particular ya que, sin ella, los resultados obtenidos pueden depender de factores condicionantes que distorsionan la realidad de los conocimientos de los alumnas. La descripción detallada de los casos es el medio más fiable para extraer conclusiones veraces a nivel particular, es decir, más ajustadas a la realidad de cada una de las alumnas de la muestra, pero tiene el inconveniente de ser demasiado lenta y farragosa para realizar una investigación medianamente extensa.

Para estudiar esta extensión de un modo adecuado, ordenado y suficientemente general se utilizan los métodos estadísticos en dos orientaciones diferentes: descriptiva e inferencial.

A través de la estadística descriptiva se analizan las distribuciones de las variables relevantes para el estudio, así como las posibles relaciones entre ellas, atendiendo a un adecuado resumen de los datos que hace comprensible la información extraída a partir del cuestionario.

La estadística inferencial nos proporciona un procedimiento adecuado para sacar conclusiones con una significación suficiente, es decir, de manera que vayan más allá de los propios datos analizados (Aron, 2001).

No debemos olvidar las limitaciones de este tipo de estudios en el campo de la educación, donde las particularidades y el continuo cambio de los sujetos sometidos a estudio impiden que las conclusiones aparezcan de un modo tan universal como en otros campos. En la investigación educativa los estudios estadísticos facilitan la búsqueda de generalidades y apuntan algunos resultados que deben ser verificados y estudiados de manera particular en cada caso.

Por ello tendremos cuidado con los resultados obtenidos de ellos y los relativizaremos siempre a nuestro estudio concreto, con el fin de no inferir conclusiones erróneas por una extrapolación excesiva.

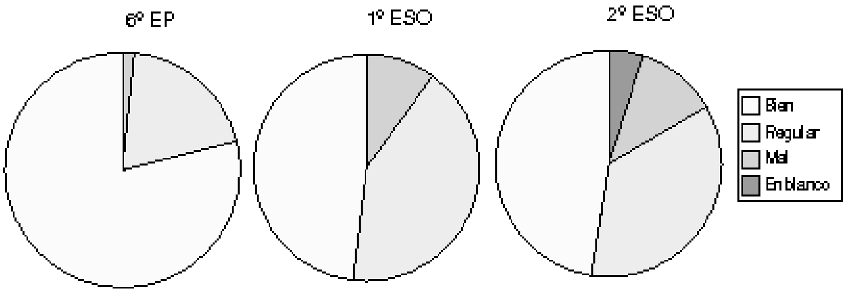


Figura 6.1: Resultados de la corrección en la 1ª cuestión

6.1. Análisis de los resultados obtenidos en cada pregunta

A continuación se expone el análisis de las respuestas obtenidas para cada una de las preguntas del cuestionario.

Se muestra, generalmente, en forma de tanto por ciento el número de alumnas que representa el rasgo estudiado en cada momento y se compara con los resultados esperados que han sido recogidos en la sección (5.2.3).

Además se adelantan conclusiones sobre un posible significado, que será contrastado y matizado con los resultados obtenidos en el resto del cuestionario para, posteriormente, realizar un análisis conjunto y sacar las conclusiones globales del trabajo de campo.

1ª pregunta

Muy pocas alumnas eluden dar respuesta a esta pregunta, como ya se había anunciado que sucedería. Extrañamente las cuatro alumnas que no responden son de 2º ESO y representan menos del 5 % de dicha categoría y ni siquiera un 2 % sobre el total.

En cuanto a la corrección en la respuesta se han obtenido unos resultados inesperados. Casi la totalidad de las alumnas de 6º EP, concretamente un 99 %, contestan a la pregunta de modo correcto o con corrección intermedia, frente a un 90 % de las alumnas de 1º ESO e incluso poco más de un 80 % de las de 2º ESO. Los resultados son aún más sorprendentes si nos ceñimos a las respuestas completamente correctas: 80 % en el caso de 6º EP, frente a menos de la mitad de las alumnas de 1º ESO y 2º ESO. Tan sólo un 2 % contesta mal en el caso del grupo de 6º EP, pero estas cifras se elevan al 10 % y al 12 %, respectivamente en 1º ESO y 2º ESO.

Una razón que justifica la masiva respuesta de las alumnas de primaria es la reciente resolución de ejercicios similares en clase, lo que ha aumentado la seguridad de las alumnas frente a esta cuestión. Al analizar la tipología de las respuestas encontramos otra razón de tal incoherencia con las suposiciones previas pues en el curso de primaria la respuesta obtenida es, mayoritariamente, de una tipología de complejidad inferior, como veremos.

Se han hallado tres modos claramente distintos de respuesta: retórico, es decir, mediante la expresión en lenguaje natural; con coordenadas cartesianas formales; y a través de otros signos distintos de las coordenadas cartesianas, es decir, una especie de coordenadas informales, algunas de ellas originales -ya sean inventadas por las alumnas o copiadas de alguna actividad similar- y otras simplemente distintas en su expresión -con una apariencia diferente a lo que se considera formal ya sea debido al orden de las coordenadas o a los signos de los que se acompañan-. Mientras que los dos primeros tipos habían sido anunciados en la sección (5.2.3), este último ha resultado una grata sorpresa pues ha facilitado información acerca de la predisposición natural de las alumnas a la formalización.

Los porcentajes de respuestas de cada tipo que se han obtenido en los cuestionarios analizados son los siguientes: un 25 %, es decir, una cuarta parte de las alumnas da una respuesta con coordenadas cartesianas, un 10 % lo hace con coordenadas informales y un 60 % responde de manera retórica. Pero la distribución no es uniforme en los distintos cursos:

Un 98 % de las alumnas de 6º EP contesta utilizando tan sólo el lenguaje natural y únicamente una alumna, que representa el 2 % restante, lo hace a través de coordenadas formales. En el caso de 1º ESO el uso de las coordenadas, formales o informales, aumenta a un 40 % y se reducen las respuestas retóricas al 53 %. Sigue reduciéndose este porcentaje en el siguiente curso hasta un 38 %, ampliándose a un 56 % el uso de cualquier tipo de coordenadas.

Con estos datos podría deducirse que la respuesta retórica -más intuitiva porque no requiere de conocimientos matemáticos formales y, por ello, más utilizada en los cursos inferiores (recordemos que en 6º EP todavía no se conocen las coordenadas cartesianas a nivel académico)- es más adecuada para la corrección. Sin embargo, si se analizan los distintos niveles de corrección según los tipos de respuesta, se observan resultados que no confirman esta hipótesis. Los porcentajes de respuestas correctas son de un 61 % sobre las respuestas retóricas y de un 58 % sobre las respuestas con coordenadas, por lo tanto son bastante aproximados en ambas tipologías. Pero si nos centramos en los cursos de ESO, ya que en 6º EP se puede considerar despreciable la diversidad de tipos de respuesta, esta diferencia se invierte, es decir, la corrección de las respuestas retóricas desciende a menos de la mitad, el 44 % en 1º ESO y el 47 % en 2º ESO, mientras que más de la mitad de las respuestas con coordenadas son correctas, el 65 % y el 53 %, respectivamente, en 1º ESO y en 2º ESO.

De esta exposición de datos se puede concluir que, a pesar de que en 6º EP se hayan obtenido buenos resultados a través de la respuesta retórica, en cursos superiores se contradice este hecho y se obtienen mejores resultados entre las respuestas con coordenadas. Veamos si esto es suficiente para desterrar la hipótesis de que sea más sencillo dar una respuesta adecuada utilizando como medio de expresión el lenguaje natural.

Realizando una prueba de independencia de los tipos de respuesta -retórica y con coordenadas- y la corrección obtenemos que son independientes en los dos primeros cursos y dependientes, con una muy baja asociación en 2º ESO, por lo que no se puede afirmar que la corrección dependa de la tipología de respuesta. Ver anexo 5.

Lo que es evidente es que el lenguaje natural es utilizado de un modo más espontáneo pues, como hemos dicho anteriormente, no requiere de conocimientos matemáticos específicos, por lo tanto es muy probable que esta sea la razón de la inversión de los resultados de corrección esperados. Como en 1º ESO y 2º ESO ya es bien conocido el sistema de representación por coordenadas cartesianas las alumnas más reflexivas tienden a utilizar este medio de expresión de manera gradual, dado el aumento de porcentajes de uso de coordenadas cartesianas. Aunque algunas alumnas no recuerden exactamente dichas coordenadas formales sí conocen el procedimiento de representación por lo que las coordenadas informales tienen una base siempre similar a la formal, como veremos a continuación. A las alumnas que, en estos cursos de ESO, siguen utilizando la retórica como expresión en esta actividad podemos considerarlas más intuitivas o quizás, incluso, con menos madurez para la matemática formal, por lo que es normal que los resultados obtenidos en este grupo de alumnas sean sensiblemente inferiores en cuanto a su nivel de corrección.

Por lo tanto, a pesar de los resultados de corrección de 6º EP, un 78 % de respuestas correctas, un 20 % de respuestas más o menos correctas y un 2 % de respuestas incorrectas, sí parece deducirse que resulta relativamente sencillo responder de modo aceptable a través del lenguaje natural, desestimando la falta de rigor propia de dicho medio. Es fácil concluir que si hubiésemos impedido a las alumnas de ESO que utilizasen cualquier tipo de coordenadas en su respuesta se habrían obtenido unos resultados similares a los del curso de primaria o quizás superiores.

En cuanto al uso de coordenadas no formales se obtienen los siguientes resultados: en 6º

EP no se halla ninguna respuesta en la que aparezca algún tipo de coordenadas informales, en 1º ESO son tan sólo un 9 % de las alumnas de dicho grupo las que las utilizan de este modo, mientras que en 2º ESO este porcentaje se duplica. Aunque muy por debajo del uso de las coordenadas formales, este uso informal presenta la misma progresión a través de los tres cursos. Como ya se ha dicho antes su presencia puede deberse tanto a incorrecciones en el uso de coordenadas cartesianas formales, como a la creatividad de las alumnas, que recuerdan un procedimiento de representación en el plano pero no el método formal del mismo.

Se pueden destacar, entre estos usos informales creativos, los puntos representados por un número y una letra, en un 14 % de las respuestas con coordenadas, y de entre ellos algunas notaciones curiosas como la que inventa una alumna de 2º ESO, que en el estudio hemos denotado con el número 58 (2º.58; en adelante utilizaremos la notación "curso.nº de alumna" para nombrar a cada alumna), que designa los puntos mediante un número con un subíndice: el número representa la abscisa del punto y el subíndice la ordenada.

Otros casos destacables son los que mezclan retórica y coordenadas, como el de una alumna de 2º ESO (2º.71) que utiliza una única coordenada cada vez, sea abscisa u ordenada, y especifica el resto mediante el lenguaje natural; o esta otra (2º.20) que también utiliza una sola coordenada pero distingue si es horizontal o vertical añadiendo una x o una y, respectivamente. Alguno (2º.45), incluso, no asocia las coordenadas a los ejes sino al movimiento en horizontal y en vertical, lo que resulta mucho más cercano al método intuitivo del lenguaje natural.

Por último destacan también dos respuestas retóricas, la primera (2º.59) describe el dibujo como si estuviese dando instrucciones para hacer un recorrido por una ciudad, incluso se le escapa alguna frase como *"la primera calle a la derecha"*. La segunda (1º.7) inventa un enunciado que se pueda representar gráficamente mediante un diagrama similar al dado, representando niños en el eje de abscisas y dinero en el de ordenadas.

Todas estas son muestras de la imaginación de las alumnas que, a menudo, suple la falta de conocimientos y nos informa sobre la necesidad de formalización que experimentan, cada una a su nivel de abstracción propio, a la hora de comunicar una información a otros. Esto hace pensar que el diálogo abierto entre las alumnas acerca de sus métodos propios de representación puede ser enriquecedor a la hora de construir el lenguaje formal algebraico de un modo participativo y, por supuesto, significativo (ver experiencias de Skemp en la página 145).

Otras diferencias destacables según los distintos tipos de respuesta son las especificaciones acerca del origen o los ejes de coordenadas. En el tipo de respuesta retórica las alumnas dejan patente su necesidad de situar el origen pues, frente al 3 % de las que lo hacen cuando utilizan coordenadas, encontramos casi un 50 % en las respuestas retóricas. Esto se debe a que en un sistema de referencia cartesiano tanto el origen como los ejes son algo preestablecido formalmente y las alumnas que han tenido contacto con estos conceptos lo aceptan de este modo, sin siquiera considerarlo parte de la representación propiamente dicha. Sin embargo, no se encuentra esta diferencia en cuanto a la descripción de los ejes, puesto que también en primaria, sin necesidad de conocimientos formales, son considerados algo previo a la representación y no parte de la misma. Algunas, incluso, hacen referencia al eje vertical como *margen*, concretamente el 3 % de las alumnas de este curso, y el 38 % de las mismas incluye la base de la figura, que en secundaria es considerada esencialmente parte del eje horizontal, en la descripción del dibujo. Estas diferencias se deben más a una cuestión de hábito que a un verdadero conocimiento del significado de los elementos del sistema de referencia, que a estos niveles aún no se domina de forma absoluta.

Para terminar, otro dato destacable: un 29 % del total de alumnas que utilizan coordenadas se limitan a dar las mismas sin preocuparse de que se unan los puntos fijados para obtener el diagrama correcto, lo que advierte del uso tan precario del sistema de coordenadas cartesianas que tienen las alumnas a esta edad, como ya se había podido intuir en líneas superiores.

Resumiendo, se puede afirmar que el rigor en la expresión es superior en los cursos de secundaria que en 6º EP, ya que el uso de coordenadas demuestra una necesidad de precisión que no proporciona el lenguaje natural y éste es mayor cuanto más elevado es el nivel del curso académico, aún así, debemos aceptar que el hábito tiene un peso específico importante en las respuestas obtenidas en cada curso.

2ª pregunta

Como era de esperar las respuestas a esta pregunta han sido cuantiosas, tan sólo un 2 % de las alumnas no contestan a la misma y este porcentaje no varía si se estudian los resultados por cursos.

La mayor parte de las alumnas responde correctamente, el 71 %. Si se analiza esta corrección por cursos se obtiene la similitud esperada entre 1º ESO y 2º ESO, pero no con 6º EP; es de destacar el salto hallado entre el curso de primaria y los otros dos: mientras que los porcentajes de corrección en 1º ESO y 2º ESO son del 78 % y el 76 %, respectivamente, en 6º EP no llega al 60 %.

En cuanto a las respuestas que se han clasificado como intermedias, es decir, con falta de

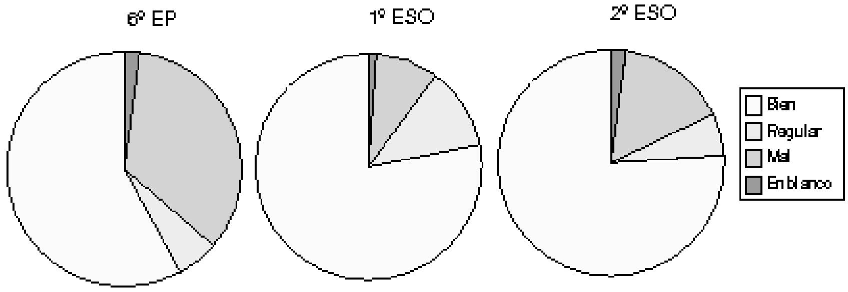


Figura 6.2: Resultados de la corrección en la 2ª cuestión

rigor en la expresión, el porcentaje es del 8 %, que no es muy elevado teniendo en cuenta la imprecisión en la expresión presente en estas edades. Por cursos se encuentra un 12 % en 1º ESO, frente a un 6 % en 6º EP y 2º ESO, que por sí mismos no son datos significativos sino analizados en conjunto con la corrección e incorrección.

Respecto a los errores cometidos el porcentaje es bastante mayor en el curso de primaria que en los de secundaria, un 35 % de 6º EP, frente a un 9 % de 1º ESO y un 16 % de 2º ESO, aunque habrá que analizar el tipo para ver a qué se deben estas diferencias entre cursos.

Examinando más detalladamente las respuestas erróneas se encuentra que el 37 % de ellas se debe a confusiones en la prioridad de las operaciones mientras que el 63 % restante es debido a una mala interpretación del enunciado, se trata en este caso de alumnas que no eligen ninguna respuesta y sólo escriben una letra o un número en el cuadro en blanco. Por cursos obtenemos esta distribución, en el grupo de 6º EP un 48 % de errores del primer tipo, frente a un 52 % del segundo, en 1º ESO un 29 % de los errores se deben a la prioridad, mientras que un 71 % son por mala comprensión del ejercicio, por último, frente a un 23 % con falta de prioridad en 2º ESO hay un 77 % que no entienden lo que se les pide. Vemos que en el caso de 6º EP los errores se distribuyen de un modo más uniforme, mientras que en los otros dos cursos la mayor parte de ellos se debe a la mala comprensión del enunciado, lo que indica que en los cursos de secundaria las leyes aritméticas se encuentran más interiorizadas a nivel formal (ver en la página 131).

Respecto a la prioridad de operaciones el resultado sobre el total en 6º EP es un 17 % frente a un 3 % en secundaria, lo que confirma que la operatividad formal está menos desarrollada en este curso y es relativamente frecuente encontrar errores de rigor formal en la operaciones de estas alumnas. En cuanto a la falta de comprensión del enunciado no se esperaba que pudiese darse en tan gran medida; sobre el total representan un 12 %, que corresponde a un 18 % en 6º EP, un 6 % en 1º ESO y un 12 % en 2º ESO. Tanto el valor de 6º EP como el de 2º ESO son demasiado elevados, aunque se considera dentro de lo normal que sea mayor la falta de comprensión en el curso de primaria no se esperaban estas diferencias entre los cursos de secundaria. Se puede concluir que los errores en 6º EP superan tanto a los cometidos en los otros dos cursos por la falta de rigor en la prioridad de operaciones y por una mayor dificultad para la comprensión del enunciado, pero sobre todo por la primera razón ya que las diferencias son considerablemente superiores.

La espontaneidad con la que las alumnas expresan su respuesta ha hecho que de esta cuestión pueda extraerse mucha más información de la que se esperaba. Algunas alumnas han escrito dentro del cuadro en blanco, bien letras bien números, y esto podría arrojar luz acerca del modo de enfrentarse al problema y el nivel de abstracción sobre la aritmética concreta que cada una posee, independientemente de la corrección o incorrección de su contestación. Analizando de este modo los resultados se obtiene que en 6º EP un 27 % deja el cuadro como está, mientras que un 33 % lo rellena con una letra y un 38 % con un número. En 1º ESO, sólo el 6 % de las alumnas ponen una letra en el cuadro y el 11 % pone números, es decir, el grueso del grupo deja en cuadro como está, un 81 %. Por último, en 2º ESO hay un 14 % que rellena el cuadro con una letra y un 12 % que lo hace con números, dejándolo la mayoría vacío, un 71 %.

Si se examina, de este modo, la distribución de tipos de respuesta por cursos vemos que tanto en 1º ESO como en 2º ESO la mayor parte de las alumnas dejan el cuadro en blanco, mientras que la mayoría de las de 6º EP escriben algo en él. Esto podría darnos una pista sobre la excesiva dependencia de la aritmética que se tiene a esta edad más temprana y una razón que lo confirma es que casi el 40 % de las alumnas de este curso pone números en el cuadro en blanco, incluso estos porcentajes siguen apareciendo en 1º ESO y 2º ESO, aunque reducidos a menos de la tercera parte. La expresión de un número dentro del cuadro en blanco evidencia la necesidad de particularizar en números concretos para poder operar, hasta hay algunas alumnas -cinco de 6º EP, una de 1º ESO y dos de 2º ESO- que realizan las operaciones, a pesar de que no es necesario para responder a la pregunta. Estas alumnas se encuentran en el primer nivel de los establecidos por Socas et al. por su necesidad numérica (ver en la página 128).

Es natural que haya una diferencia tan alta entre el número de alumnas que utilizan la aritmética particular en 6º EP y en secundaria, ya que es a partir del trabajo con conceptos algebraicos y la necesaria abstracción que conllevan cuando empiezan a deshabituarse del uso de los números como única posibilidad para operar en matemáticas. Este hecho demuestra que la comprensión de la aritmética trascendiendo la idea de *reglas mecánicas que sirven para obtener el resultado correcto en los ejercicios de matemáticas* no es muy frecuente en estos cursos, pero mucho menos en el curso de primaria. La falta de sentido estructural (*structure sense*) de Linchevski y Livneh es uno de los obstáculos que se han señalado para el correcto aprendizaje del álgebra (en la página 91).

Si se puede deducir esto de los datos que presentan el uso de la aritmética, tendríamos que poder deducir algo similar de los que presentan letras, es decir, sería razonable pensar que el uso de la letra dentro del cuadro indicase una iniciación en el conocimiento del álgebra. Pero hay un dato que entorpece estas conclusiones y es el elevado porcentaje de alumnas que responden de este modo en 6º EP contrariamente a lo que sería de suponer, pues en dicho curso aún no han tenido contacto con el signo literal como elemento del lenguaje algebraico que puede representar un número. Aunque son menos que las que usan el número en el cuadro, comparadas con las alumnas de 1º ESO y 2º ESO son muchas, ya que quintuplican y duplican dichos valores, respectivamente. La explicación se halla en que no existe tal intencionalidad algebraica en dichas respuestas, ya que se observa que el 45 % de las respuestas de este tipo en 6º EP, así como el 60 % de las de 1º ESO e incluso más, el 67 %, en las de 2º ESO presentan tan sólo una letra -coincidente con una de las opciones de respuesta, a, b o c- en el cuadro en blanco sin señalar ninguna respuesta, lo que parece indicar que la letra dentro del cuadro no es sino la elección de la opción de respuesta al ejercicio *recuadrada*, como es tan habitual en las clases de matemáticas en estos niveles. Para hacernos una idea de la cantidad global de alumnas que contestan de esta manera representan un 9 % sobre el total, cantidad pequeña, pero no despreciable. No obstante podemos afirmar que algunas respuestas, sobre todo de 2º ESO, sí están claramente relacionadas con la idea de variabilidad del signo literal algebraico, como nos confirma en el caso de una alumna de 2º (2º.39) que inserta una x en el cuadro.

Concluyendo, las diferencias en el dominio de la aritmética formal son más significativas de lo que se esperaba entre el curso de primaria y los de secundaria. Además la dependencia de la aritmética se hace evidente en los tres cursos, aunque mucho más acusada en 6º EP.

3ª pregunta

Los resultados globales hallados en esta pregunta son los esperados: se encuentra casi un 7 % de abstenciones en la respuesta, bastante más que en las dos cuestiones anteriores que rondaban el 2 %; curiosamente, y contrario a lo que sería natural pensar, estos niveles son mayores en 2º

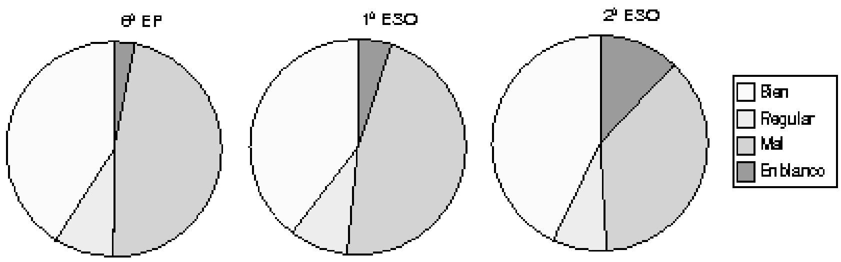


Figura 6.3: Resultados de la corrección en la 3ª cuestión

ESO, con un 12 %, que en los otros dos cursos inferiores, donde son menos de un 5 %.

Los niveles de corrección también han bajado ya que se puede ver tantas respuestas correctas, como incorrectas. Sin embargo, si comparamos por cursos, la similitud de las respuestas no era de esperar. El porcentaje de respuestas correctas está en un 41 % en 6º EP, un 40 % en 1º ESO y un 43 % en 2º ESO. Lo primero que sorprende es que la progresión esperada no se manifiesta entre los cursos, pero si a las respuestas totalmente correctas se añaden las que tienen corrección intermedia, se obtiene un 50 % en 6º EP, un 48 % en 1º ESO y un 51 % en 2º ESO, con lo cuál el resultado está aún más apretado. Estas diferencias mínimas entre los tres cursos parecen significar que no se alcanza un desarrollo mucho mayor de la capacidad de generalización entre las alumnas de diferentes niveles de este estudio. Pero para poder afirmarlo se deben estudiar más a fondo los tipos de respuesta, así como los errores más frecuentes.

En cuanto a la tipología de respuesta, casi la totalidad de las mismas se exponen mediante el lenguaje natural, tan sólo se halla una excepción de una alumna de 6º EP, que representa menos de un 0,5 % del total, la cuál realiza una comprobación aritmética particular sin generalizar la característica encontrada en los tres casos concretos. En ningún caso se ha encontrado una respuesta formal algebraica. Este hecho se adapta fielmente a lo que se había supuesto que ocurriría.

En la expresión de las distintas respuestas de corrección intermedia se pueden encontrar diferentes niveles de rigurosidad, pero destacan dos grandes bloques: el general y el particular. En el primero las alumnas se despegan de los tres casos concretos para enunciar la ley de la triangularidad universal, es decir, abstraen la regularidad común encontrada en los tres casos particulares y la generalizan para todos los triángulos. Sorprendentemente son más las alumnas de 6º EP que alcanzan este nivel de generalización, con un 33 % frente a un 26 % de las de 1º ESO y un mísero 9 % de las de 2º ESO. En el segundo las alumnas enuncian dicha ley sin especificar que sea válida para todos los triángulos y no sólo para los tres presentados, los porcentajes respectivos para 6º EP, 1º ESO y 2º ESO son 67 %, 74 % y 91 % -estos porcentajes están calculados respecto al total de respuestas no incorrectas, ni en blanco-. Vemos, claramente, que entre las respuestas retóricas más o menos correctas tan sólo la quinta parte de ellas expresan una generalización completa, mientras que el resto no pasan de referirse a los casos particulares examinados. Se puede afirmar que la expresión de un concepto general que comprenda los casos particulares y los generalice para toda una clase resulta poco necesaria para las alumnas de estos niveles (en la página 146). Además las diferencias que se esperaban a favor de los cursos superiores siguen sin aparecer, pues en este caso son las alumnas de 6º EP las que más generalizan.

En cuanto a los tipos de errores se encuentra que la mayor parte de ellos, casi un 30 % del total, se cometen a la hora de extraer la conclusión, por ejemplo, podemos encontrar un 26 % de alumnas que se limita a detectar que *"todos son triángulos"* y un 10 % que dice encontrar la característica común en el tipo de ángulos o de lados. Es importante destacar que a esta edad, debido a la falta de madurez de pensamiento de la que hablábamos, la constancia no es un grado y es por este motivo por el que algunas alumnas se quedan con la primera respuesta encontrada sin contrastarla, ni ponerla en duda y por supuesto sin analizar que puede no ser la más adecuada.

Otros errores destacables son los de análisis, en un 9 % de las contestaciones de las alumnas. Entre estos casos hay algunas que no comparan -un 4 % respecto al total- sino que se limitan a describir cada caso por separado y otras que creen encontrar regularidades que no existen como que *"todos son triángulos equiláteros"* (1º.33) o que *"todos los ángulos son agudos"* (6º.10).

Por último se citan los errores de expresión -el 4 % de los casos-, desde incorrecciones semánticas como la afirmación *"el resultado de los polígonos es 180º"* (6º.29) o *"los ángulos de los cuadrados suman 180º"*(1º.79), hasta imprecisiones del lenguaje, como *"los triángulos forman* (2º.61), *suman* (1º.23), *miden* (6º.37) *o tienen 180º* (6º.6)*"* o *"los ángulos de los triángulos miden 180º "* (6º.55). También es destacable que el 5 % de las alumnas de 6º EP y 1º ESO responden que *"la suma de los lados es 180º"*.

Es interesante detenerse en los resultados por cursos porque los de 6º EP y 1º ESO son bastante similares, mientras que los de 2º ESO difieren. En los dos cursos más bajos se distribuyen aproximadamente como hemos descrito, se mantienen los porcentajes totales para los errores por conclusión y por análisis y son algo más altos los de expresión, el 8 % en 6º EP y el 6 % en 1º ESO. Sin embargo, en 2º ESO el porcentaje correspondiente a los errores de conclusión es un 3 % menor y se aumenta un poco el relativo al análisis, pero lo destacable es que no encontramos

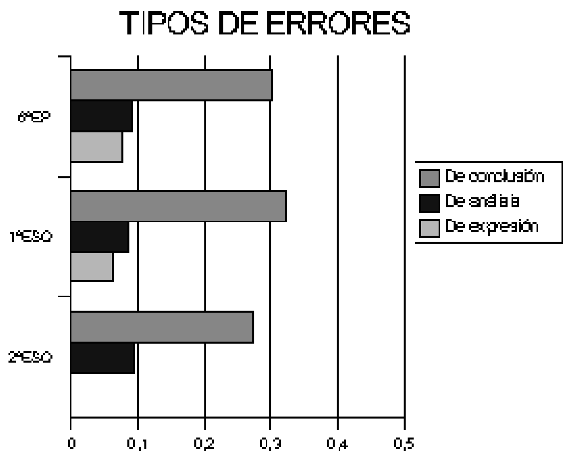


Figura 6.4: Tipos de errores en las respuestas a la 3ª cuestión, por cursos

ningún error de expresión en este curso. Por lo que se puede deducir que la expresión mejora de un curso a otro, aunque no podamos afirmar lo mismo de la capacidad de generalización. (Figura 6.4)

Como conclusión diré que no se ha encontrado la razón de tan alta abstención en 2º ESO, ni de que en 6º EP haya una generalización tan elevada a la clase de todos los triángulos. Podría ser que en este curso, en que se estudia la regla universal de la triangularidad, tengan una reminiscencia más clara de lo que ésta supone, pero no puedo afirmarlo basándome en datos. La consecuencia de tan inesperados resultados es la aparente uniformidad en la capacidad de generalización de los tres cursos, que se presenta como poco desarrollada en general, aunque con claras diferencias en la expresión.

4ª pregunta

El nivel de respuesta obtenido en esta cuestión es el esperado. Tan sólo hay un 4 % de respuestas en blanco, de las cuales la mayor parte son de 6º EP y de 1º ESO -un 5 % de cada grupo- y tan sólo un 2 % de 2º ESO. Si se comparan los resultados con la pregunta anterior se observa una reducción considerable de la abstención, aunque realmente se produce en un único grupo, 2º ESO, ya que los porcentajes se mantienen en 1º ESO e incluso aumentan un poco en 6º EP. Aún así no llegan a los niveles mínimos obtenidos en las cuestiones 1ª y 2ª, lo que demuestra que la idea de encontrar una característica común a unos casos particulares dados representa una

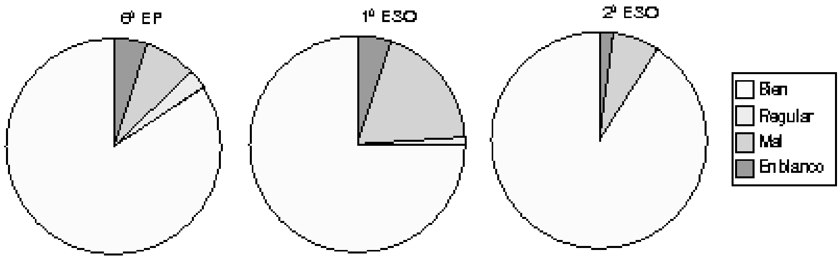


Figura 6.5: Resultados de la corrección en la 4ª cuestión

dificultad notable a esta edad, independientemente de la complejidad de la cuestión. Se puede considerar el nivel de abstención en 2º ESO como una muestra del dominio de la aritmética que las alumnas experimentan en este curso.

En cuanto a los niveles de corrección los porcentajes son bastante elevados -hay un 84 % de respuestas correctas- como era de suponer debido a la sencillez de la cuestión. En comparación con la cuestión anterior se observa un 40 % más de respuestas correctas en este caso, de lo que se deduce que existe dependencia entre los resultados obtenidos en la cuestión precedente y la relación concreta que las alumnas tenían que hallar. Este hecho debe ser tenido en cuenta a la hora de sacar conclusiones pues la consecución del objetivo determinado para dicha pregunta puede haberse visto afectada por la dificultad de la relación.

Por cursos hallamos una similitud suficiente entre los resultados de 6º EP y 2º ESO, en clara ventaja sobre los de las alumnas de 1º ESO. Frente al 88 % y 91 % de respuestas intermedias en 6º EP y 2º ESO, respectivamente, en 1º ESO encontramos tan sólo un 77 %. Estos datos contradicen la progresión supuesta para los tres cursos, aunque hay que apuntar que el rigor en la expresión parece ser menor en el curso de primaria y en 1º ESO pues, de dichos porcentajes, un 3 % y un 1 %, respectivamente, corresponden a respuestas no completamente correctas. Será necesario analizar los tipos de respuesta y los errores cometidos en cada curso para ver a qué se debe esta inesperada situación.

En lo correspondiente a la forma se suponía una respuesta predominantemente retórica y es lo que se ha obtenido, exceptuando el caso de un pequeño grupo de alumnas que contestan aritméticamente. El porcentaje de alumnas que se limitan a utilizar la aritmética en su respuesta es algo mayor que en la respuesta anterior debido a que las situaciones presentadas son numéricas y favorecen que algunas alumnas se contenten con dicho tipo de solución, en total se trata de tres alumnas, dos de 6º EP y una de 2º ESO, que representan algo más del 1 %, por lo que no se considera indicador del nivel de formalización de las alumnas. Como se había anunciado no hay ningún indicio algebraico, pues tampoco se pedía específicamente en el enunciado.

Entre las respuestas retóricas se observa una mínima cantidad de ellas que presentan enunciada la característica que se buscaba de un modo particular, es decir, redactando las operaciones aritméticas presentadas y evaluando el resultado, pero sin obtener la conclusión general. Este dato confirma las similitudes entre los tres cursos -un 2 % en 6º EP y en 2º ESO y un 4 % en 1º ESO- con lo que podemos reafirmar lo deducido a partir de los resultados de la pregunta anterior acerca de las escasas diferencias entre los niveles de generalización. No parece adecuado realizar una comparación directa, dato a dato, respecto a la generalización con los resultados obtenidos en la pregunta anterior, pues la abstracción que permitía la actividad de los triángulos no es comparable a la de esta situación aritmética.

Volviendo a la expresión de las alumnas podemos concluir que es bastante uniforme entre las respuestas correctas: retórica y con la *generalización* adecuada a esta cuestión, esto es, simplemente redactando que *en todos los casos se repite la característica enunciada*. Algunas alumnas asocian la conclusión obtenida con la comprobación de alguna propiedad, como la distributiva (6º.58) o la asociativa (6º.62), lo que podríamos entender como un cierto intento de generalización aunque no direccionado en el sentido adecuado.

Por último se analizan los errores encontrados en las respuestas de las alumnas. Se pueden dividir, al igual que hicimos en la cuestión precedente, en errores de análisis, de expresión o de extracción de la conclusión.

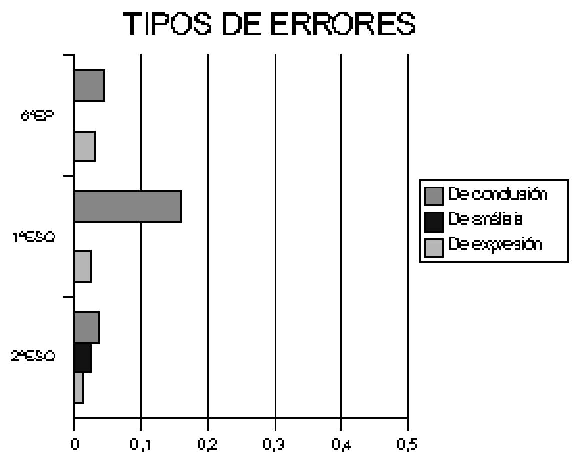


Figura 6.6: Tipos de errores en las respuestas a la 4ª cuestión, por cursos. Se ha mantenido la misma escala que en la figura 6.4 para facilitar su comparación.

Como en el caso anterior el grueso de respuestas fallidas se debe a errores en la extracción de la conclusión, un 73 % de los mismos, mientras que los errores de expresión se duplican, un 19 %, y los de análisis presentan un descenso espectacular, del 21 % al 8 %. La razón de esta notable mejora en el análisis es la sencillez de la cuestión propuesta, que sólo requiere un simple examen aritmético. En este último caso los errores de las alumnas se deben a fallos en las operaciones aritméticas, aunque son sólo dos alumnas, un 1 % del total.

Por cursos, tan sólo son destacables la evidente mejoría ya anunciada en la expresión, el 40 % de errores en 6º EP se deben a la expresión, frente al 13 % en 1º ESO y al 17 % en 2º ESO, y el 87 % de errores que presenta el grupo de 1º ESO a la hora de extraer la conclusión frente al 60 % de 6º EP y el 50 % de 2º ESO. En este dato encontramos la razón del elevado nivel de error en 1º ESO, aunque no existe correspondencia con la pregunta anterior por lo cuál no podemos extraer ninguna conclusión válida en el sentido de que en 1º ESO la capacidad de generalización sea menor, que por otro lado resultaría anti-intuitivo. Lo que volvemos a encontrar es una diferencia mínima entre la capacidad de generalización en alumnas de 6º EP y de secundaria. (Figura 6.6)

5ª pregunta

Los niveles de abstención son los esperados. Como en los resultados de la primera y segunda pregunta se observa un porcentaje bajísimo de abstención en esta cuestión, tan sólo un 2 %. La mayor abstención se encuentra en 1º ESO, con un 4 %, y la menor en 2º ESO, con un 1 %. En cuanto a la corrección de las respuestas se obtiene un resultado positivo, puesto que hay un 68 % de respuestas correctas que, analizado por curso, se concreta en un 49 % en 6º EP, un 74 % en 1º ESO y un 76 % en 2º ESO. Estos datos respaldan los supuestos que se han hecho acerca de las diferencias entre el curso de primaria y los de secundaria y la similitud entre los dos últimos. Sin embargo la tasa de incorrección es más elevada en secundaria, alrededor del 2 % -dos alumnas de 1º ESO y otras dos de 2º ESO- frente a ningún error encontrado en 6º EP.

Si se analizan los resultados obtenidos por objetivos evaluados se observa que el total de las alumnas que responden realizan bien la parte correspondiente a la comprensión de enunciados matemáticos y su expresión mediante operaciones aritméticas. En cuanto a la capacidad de enunciación verbal a partir de una situación matemática dada hay tan sólo un 3 % de las alumnas que redactan mal o dejan en blanco los enunciados, dos de ellas no han sabido interpretar la estructura operacional y por lo tanto no han podido resolver el último caso, en el que había que inventar enunciado y operación aritmética a partir de la estructura dada. No se advierte

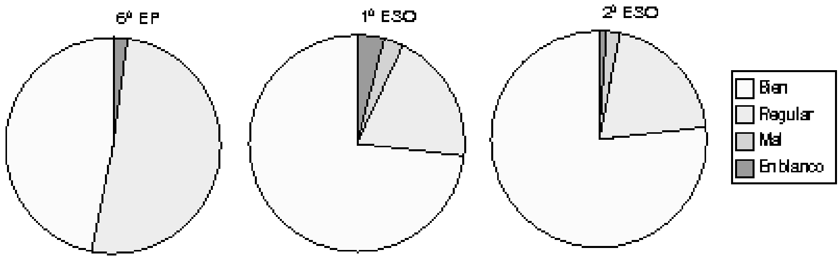


Figura 6.7: Resultados de la corrección en la 5ª cuestión

ninguna dificultad destacable, en ninguno de los cursos, en cuanto a estos dos objetos de estudio. Por último, en cuanto a la capacidad de simbolización y formalización a partir de operaciones aritméticas concretas, la creatividad de las alumnas a la hora de contestar la última columna ha procurado mayor información de la que cabía esperar. Así, algunas alumnas dejan en blanco sólo la parte de la estructura -un 3 % del total, de las cuales ninguna es de 6º EP-, otras respetan la estructura de cuadros blancos y rellenan adecuadamente las casillas sombreadas -el 64 %- y el resto rellenan los cuadros en blanco con letras -un 5 %- o con números -un 29 %-. Analicemos por cursos este interesante hecho.

En 6º EP ninguna alumna utiliza letras en la columna de la estructura operacional, sin embargo un 49 % rellena los cuadros con números. En 1º ESO hay un 5 % de alumnas que contestan con letras en esta columna, mientras que el número de alumnas que utiliza números concretos es de un 21 %. En 2º ESO el porcentaje de alumnas que rellena los cuadros con letras es de un 8 %, mientras que el correspondiente a los números alcanza el 20 %. Con estos datos es fácil deducir que la necesidad del número concreto va disminuyendo a medida que va aumentando el conocimiento de conceptos algebraicos, como la variabilidad del signo literal, aunque esté muy presente aún en 2º ESO. El uso de la letra como variable (ver en la página 129) va claramente unido al dominio del álgebra formal y este dominio va aumentando progresivamente desde 1º ESO, curso en el que ocurre la primera toma de contacto con la formalización algebraica. Para analizar este desarrollo progresivo es para lo que se ha concebido este trabajo.

Otro hecho destacable es que en un 17 % de las respuestas que utilizan números concretos en la estructura -corresponde a un 10 % en 6º EP y 2º ESO, y un 33 % en 1º ESO- las alumnas se inventan dichos números, de forma que no coinciden con los utilizados en las operaciones aritméticas pertinentes. Este hecho puede verse como un indicio, aunque poco formal y muy débil, de entender la variabilidad del signo explicada en el enunciado.

Entre los casos curiosos se halla el de una alumna de 6º EP (6º.61) que, en la última fila, inventa un enunciado correspondiente a la operación *8+2* pero como en la estructura hay una suma y una resta indica *8+2-x* en la última columna, dentro de los cuadros. Esta alumna no utiliza el signo algebraico como variable, sino más bien como algo despreciable, por desconocido, ya que en el resto de la respuesta lo ignora -al nivel de la letra no usada de Küchemann (página 124)- sin embargo el hecho de citar, *motu proprio*, la *x* como algo desconocido no deja de ser destacable en este curso en que no se conoce el álgebra. Otro caso extraño es el de una alumna de 1º ESO (1º.72), que deja todo el ejercicio sin hacer, pero rellena los cuadros en blanco con letras, no se puede afirmar que tenga relación con la variabilidad pues el resto de sus respuestas al cuestionario demuestra un nivel algebraico muy elemental. Por último, dos alumnas de 2º ESO, la primera (2º.46) escribe un enunciado en la última fila tras aplicar la propiedad asociativa a la operación correspondiente y la segunda (2º.64) escribe el resultado de cada operación en la columna de la estructura, lo que demuestra su dependencia de la aritmética y su necesidad de clausura, por encima de todo. Además un 5 % de las alumnas de 6º EP también operan en la estructura tras rellenar con números los cuadros en blanco, por lo tanto es evidente que en el curso de primaria es mayor esta necesidad de clausura (página 131).

Resumiendo se puede afirmar que prácticamente todas las alumnas de estos cursos son capaces de traducir un enunciado a su expresión aritmética y viceversa, y sólo se establecen diferencias significativas en cuanto a la traducción a su estructura formal, en la que las alumnas de mayor curso académico demuestran una madurez algebraica de la que carecen las alumnas del curso de primaria.

6ª pregunta

El nivel de respuesta es el esperado, tan sólo hay un 2 % de alumnas que no contestan a la cuestión, como en las primeras preguntas de este cuestionario. Por cursos el mayor porcentaje es el de 2º ESO, con un 5 %, aunque se contrarresta con una tasa de error muy baja 1 %, mientras que en 1º ESO, con ninguna respuesta en blanco, la tasa de error es del 6 %. La corrección es bastante elevada en general, hay un 91 % de respuestas correctas que oscilan entre el 89 % de 6º EP y 2º ESO y el 93 % de 1º ESO. Sin embargo, si consideramos el dato de respuestas intermedias las diferencias favorecen al grupo de 6º EP, un 97 %, frente a un 94 % de los grupos de secundaria.

Los resultados no confirman la suposición de que en 6º EP habría más errores que en el

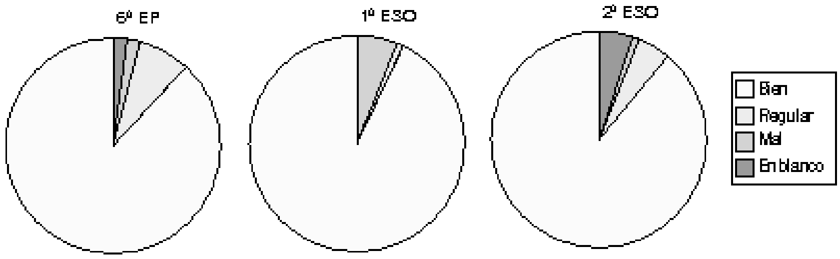


Figura 6.8: Resultados de la corrección en la 6ª cuestión

resto de los cursos, así que será necesario analizarlos con más profundidad más adelante para determinar el motivo. La similitud de resultados esperada en los cursos de secundaria se ha manifestado, por lo que se confirma que no hay grandes diferencias entre estos dos cursos en cuanto a la comprensión y utilización de fórmulas.

El tipo de respuesta obtenido ha sido uniforme, casi en su totalidad. Como se había supuesto, la respuesta aritmética se presenta en todas las respuestas obtenidas, aunque se observan distintos grados de formalización entre ellas. La mayor parte de éstas presentan una sustitución directa de las letras en la fórmula, un 84 %, apreciándose una cuantiosa diferencia entre el curso de primaria, con un 68 %, y los de secundaria, con un 89 % y un 92 % en 1º ESO y 2º ESO, respectivamente. Las alumnas que no sustituyen directamente en la formula representan un 7 % -20 % en 6º EP, 3 % en 1º ESO y 2 % en 2º ESO-. La diferencia que se esperaba entre estas dos etapas, primaria y secundaria, no se ha hallado tanto en el éxito o fracaso del ejercicio como en los procedimientos utilizados para resolverlo. Como consecuencia de ello podemos afirmar que se encuentran diferencias notables en la expresión de las respuestas en los distintos niveles, del mismo modo que en las cuestiones precedentes.

En cuanto a las alumnas que no proceden por sustitución directa en la fórmula hay un elevado porcentaje de ellas, un 45 % en 6º EP y un 100 % en 1º ESO -representan un 9 % y un 3 % del total, respectivamente-, que comete errores en la expresión aritmética, tales como no respetar las igualdades, lo que demuestra una importante falta de madurez formal. Sin embargo, esto no ocurre en 2º ESO. Se puede advertir que la progresión esperada entre dichos cursos se manifiesta, en esta cuestión, en el grado de formalización y expresión aritmética así como en el procedimiento a seguir, de la aritmética informal a la sustitución directa de las letras en la fórmula, actividad que resulta habitual para las alumnas que ya tienen algunos conocimientos de álgebra.

Por último se analizan los tipos de errores más frecuentes, aunque no sean numerosos, porque pueden aportar algún dato más de interés.

No se esperaban errores en la interpretación de la base y la altura de un triángulo en la representación geométrica del mismo por considerarlo demasiado evidente a estas edades, pero hay dos alumnas de 1º ESO (1º.25 y 1º.35), que apenas llegan a representar un 1 % del total, que evalúan incorrectamente la base, con lo cuál el resto del ejercicio es incorrecto.

Otros errores encontrados son los de operaciones. Como ya se había anunciado son relativamente frecuentes en estos niveles, incluso con las operaciones más sencillas, debido fundamentalmente a despistes. Hay un 5 % del alumnado -cinco de 6º EP, una de 1º ESO y cuatro de 2º ESO- que los presenta y es de destacar que, al igual que los errores de expresión se manifestaban en su totalidad en respuestas que no se realizaban por sustitución, en este caso todos se producen tras realizar sustitución directa de las letras por los números correspondientes. Extraña el hecho de que sean más alumnas del curso superior de secundaria que del inferior las que cometen este tipo de errores, pero se deben claramente a despistes, por lo que no se considera significativo.

Sorprendentemente hay una regularidad más, un 2 % de las alumnas, correspondiente a dos alumnas de 1º ESO (1º.61 y 1º.62) y dos de 2º ESO (2º.18 y 2º.26), utilizan el teorema de Pitágoras para calcular lados desconocidos que en ningún modo resultan necesarios. Esto demuestra que a menudo la estudiante siente urgencia por aplicar lo último aprendido, sin pensar, y, por supuesto, manifiesta una deficiencia de nuestro sistema educativo que fomenta que el aprendizaje de las matemáticas se base en reglas aisladas útiles para cierto tipo de problemas y no en procedimientos de resolución de los mismos que se puedan ir facilitando con la incorporación de nuevos conocimientos puntuales (ver 2.4.2).

Otros casos destacables son el de una alumna de 6º EP (6º.38) que se limita a identificar la base y la altura en el dibujo y no hace nada más; el de dos alumnas (6º.13 y 6º.20) que resuelven el ejercicio por sustitución, pero cambian en la fórmula la a por la h, lo que confirma que conocían la fórmula y se encuentran más cómodas con su notación habitual; y el de una alumna de 2º ESO (2º.62) que, además de resolver el ejercicio, da una explicación retórica de los pasos que ha ido siguiendo, lo que demuestra una mayor madurez en la expresión.

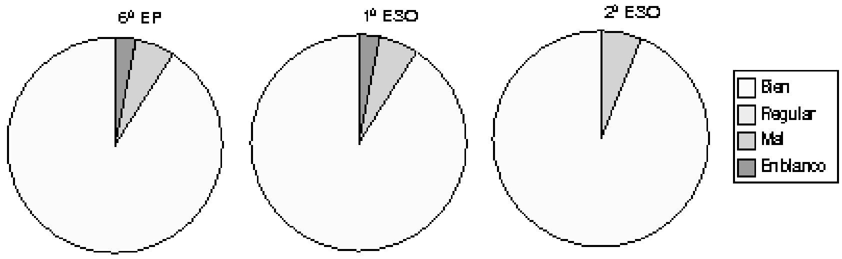


Figura 6.9: Resultados de la corrección en la 7ª cuestión

7ª pregunta

El número de respuestas ha sido muy elevado, tal y como se esperaba. Tan sólo hay cuatro alumnas -dos de 6º EP y otras dos de 1º ESO- que no contestan a la pregunta, representando menos de un 2 % sobre el global de alumnas cuestionadas. Además las respuestas han sido mayoritariamente correctas, se observa un porcentaje de corrección del 91 % en los dos cursos más bajos y el 94 % en el más alto.

Sorprende la similitud de los resultados obtenidos entre el curso de primaria y los de secundaria. Los porcentajes obtenidos en los dos cursos más elevados confirman el supuesto de que la cuestión resultaría sencilla para ellas, acostumbradas al uso de fórmulas, sobre todo a las más simples, como la que aquí se pedía. Pero en cuanto al rendimiento de las alumnas de primaria había un preconcepto algo diferente. Es cierto que en este curso ya se estudian las fórmulas de cálculo de áreas pero la pretensión de que la formalizasen a partir de un cuadrado de lado general no ha resultado como se esperaba. Era de suponer que un gran grupo de este curso sería capaz de realizar la tarea propuesta pero no que la mayoría de ellas, alcanzando incluso los niveles de secundaria, lo hiciesen. Quizás las alumnas han recordado la fórmula aprendida, sin más, y de ahí vengan las escasas diferencias encontradas.

En cuanto a la tipología de respuesta, se observa un elevado nivel de formalización como se pronosticaba, un 95 % de las respuestas dadas que, por cursos, se traduce en un 94 % en 6º EP y un 95 % y 96 %, respectivamente, en los dos cursos de secundaria. A pesar de la progresión esperada, las diferencias entre 6º EP y los cursos de secundaria vuelve a ser bastante reducida. Además hay una sola respuesta, correspondiente a una alumna de 1º ESO (1º.52), que contesta retóricamente *lado por lado* y tan sólo un 3 % de alumnas, correspondiente a un 3 % en 6º EP, un 1 % en 1º ESO y un 4 % en 2º ESO, que ofrece una solución meramente aritmética a esta cuestión, alguno incluso mide el lado del cuadrado con regla (2º.26). El porcentaje mínimamente superior de respuestas de este tipo que se halla entre las alumnas de 2º ESO no es significativo puesto que las diferencias son de una alumna arriba o abajo, aunque sí se suponía que este tipo de respuestas sería más frecuente en el curso de primaria.

Analizando otras regularidades halladas en este estudio se pueden clasificar las respuestas en dos grupos bien diferenciados: las que formalizan a través de la multiplicación, es decir, alumnas que utilizan la expresión $A=l \cdot l$, y las que lo hacen a través de la potenciación, con la fórmula $A=l^2$. Se trata de dos sentidos diferentes que tienen la misma denotación, según lo definido en la página 115. En 6º EP es más frecuente el primer tipo de respuesta que el segundo, con una razón de cuatro, mientras que en secundaria se invierten los resultados, en 1º ESO con una razón de dos y en 2º ESO de hasta cinco. Los porcentajes del primer grupo de respuestas son del 73 %, el 30 % y el 16 %, respectivamente en 6º EP, 1º ESO y 2º ESO, mientras que los del segundo grupo son del 18 %, el 62 % y el 79 %, respectivamente en dichos cursos.

De estos resultados se deduce que, efectivamente, en la mayor parte de los casos, las alumnas responden independientemente de los casos particulares presentados a modo de ejemplo y recuerdan la fórmula del área del cuadrado con el sentido más adecuado a su nivel. En el curso de primaria, en el que la operatividad algebraica es completamente desconocida e incluso las potencias son poco conocidas, es más adecuado el sentido $A=l \cdot l$ para la fórmula -ya se ha dicho que alguna hasta lo escribe retóricamente- y en los de secundaria el sentido más apropiado para la fórmula es $A=l^2$, debido al dominio de las potencias y al incipiente conocimiento de las operaciones algebraicas, que facilitan la identificación de ambas expresiones. Un ejemplo de la dificultad de la identificación de ambos sentidos para el curso de primaria lo hallamos en el caso de una respuesta (6º.7) en la que podemos observar la expresión $l \cdot l=l\ cm^2$. Otro indicio que nos hace pensar que las alumnas recuerdan la fórmula del área requerida es el elevado número de respuestas que la anticipan en las comprobaciones con los ejemplos propuestos antes de expresarla como respuesta al ejercicio, o incluso sin hacerlo explícitamente. Sin embargo también hallamos el caso de una alumna (2º.16) que después de utilizar la fórmula $A=b \cdot a$ en las comprobaciones con los ejemplos propuestos formaliza correctamente en el último caso.

Tan sólo el 3 % de las alumnas contesta formalmente con una expresión inadecuada, ya sea correspondiente al área de otra figura geométrica -como una alumna (1º.68), que utiliza la fórmula del área del triángulo, y otras dos (6º.36 y 2º.68), que utilizan la del rectángulo que, aunque sea válida operativamente, no lo es su formalización, debido a que el cuadrado facilitado tenía lado general l-, o incluso con el teorema de Pitágoras (2º.1), además de con muchas otras expresiones incorrectas, como $l \cdot l^2$ (1º.35), $A+l$ (1º.73) o $A=A \cdot l$ (6º.47).

Estos ejemplos ponen de manifiesto que el álgebra formal es desconocida o no está suficientemente dominada por muchas de estas alumnas, aunque a veces el problema se arrastra desde la aritmética (ver Malara, en la página 91) como vemos en el caso de una alumna (6º.29) que escribe *2=2·2=4*; *3=3·3=9* y $l=l^2$. No obstante también encontramos casos con un claro dominio de la notación algebraica, como vemos en este caso (1º.57) en el que se especifica $x=l$ antes de escribir la fórmula $A=x^2$, algunas estudiantes más utilizan la x en su fórmula, con un sentido definido como mediador entre la fórmula recuadrada y sus cálculos (1º.28) -que recuadra $A=x$, y aparte escribe $A=l^2=x$-, o simplemente como sustitución de la letra l (1º.69).

8ª pregunta

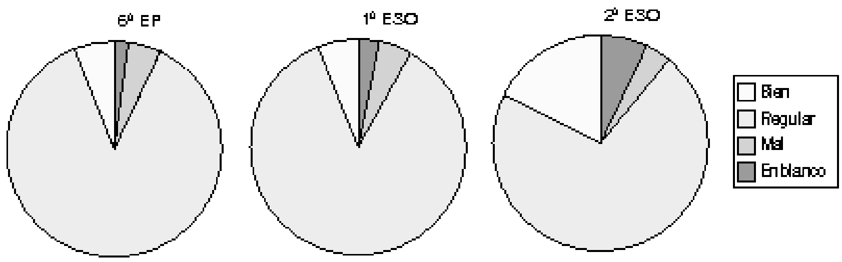


Figura 6.10: Resultados de la corrección en la 8ª cuestión

La abstención en esta pregunta no ha sido elevada, como se pronosticaba, tan sólo de un 4 %, aunque no es de las más bajas si se compara con los resultados obtenidos para otras preguntas. Sorprendentemente el curso en el que resulta más alta no es el de primaria, como se suponía, sino el superior de los de secundaria, con un 7 % frente a un 2 % y un 3 % de 6º EP y 1º ESO, respectivamente.

Si se analiza la abstención por apartados denotamos unas variaciones importantes, según cada uno. En el primero y el cuarto la abstención es bastante más alta que en los otros dos -un 16 % en el primer apartado, un 4 % en el segundo, un 9 % en el tercero y por último un 32 % en el cuarto- y en el último se duplica respecto al primero. Comparando por cursos hay ligeras diferencias en los dos centrales entre los cursos más bajos y la abstención se dispara en el curso más elevado. En cuanto a los otros dos apartados la abstención es menor en el curso de 1º ESO, manteniéndose similar en los otros dos cursos. Ninguna de estas comparativas parece significativa, pues si centramos la atención tanto en las respuestas sin contestar como

	6º EP				1º ESO				2º ESO			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
Bien	6%	89%	83%	11%	6%	90%	84%	10%	14%	87%	87%	37%
Regular	58%	6%	6%	36%	64%	1%	3%	30%	49%	2%	1%	19%
Mal	15%	3%	3%	17%	19%	6%	7%	28%	20%	2%	0%	13%
En blanco	21%	2%	8%	36%	11%	3%	6%	28%	17%	8%	12%	13%

Cuadro 6.1: Porcentajes de corrección en la pregunta 8ª.

en las incorrectas denotamos unas diferencias mínimas o variaciones en distintos sentidos sin aparente justificación. Ver cuadro 6.1.

En cuanto a la corrección de las respuestas se observa una tremenda similitud entre 6º EP y 1º ESO, superada ampliamente por el otro curso de secundaria -sobre todo en los casos de los dos apartados más difíciles-, aunque con la excepción del segundo apartado en el que los resultados son 89 %, 90 % y 87 %, respectivamente para los tres cursos. La validez de las hipótesis enunciadas se pone en entredicho si al análisis de respuestas correctas añadimos el de respuestas de corrección intermedia, pues las similitudes entre los tres cursos aumentan, destacando tan sólo la clara superioridad de las respuestas de 2º ESO en el último apartado. Lo indudable es que se manifiestan diferencias mínimas en las preguntas sencillas mientras que estas diferencias se amplían cuando la complejidad es mayor, además el rigor es el que marca las distancias entre los cursos más bajos y el superior. Ver cuadro 6.1.

Como se anunciaba, prácticamente la totalidad de las respuestas es retórica, tan sólo hay unos pocos casos -el 2 % del total- que responden aritméticamente o incluso con dibujos. Además encontramos un caso de una alumna de 2º ESO (2º.6) que responde al último apartado con un intento de formalización algebraica, escribe $x+3$, $x+5$, $x+7$, $x+9$, $x+11$.

El grueso de las respuestas se puede considerar al nivel de las operaciones concretas (ver en la página 131), pues no presenta una generalización suficiente en los apartados en los que se consideraba significativa. Se pueden observar unos resultados similares de generalización en el curso de primaria y en el primero de secundaria, un 15 %, más que duplicada por el de 2º ESO, un 39 %. Este hecho contradice los resultados de las cuestiones anteriores acerca de la generalización, en donde se concluía que las diferencias con respecto a esta capacidad eran mínimas, no así en la expresión.

En los tres cursos objeto de este estudio se aprecia una importante falta de rigor en la expresión (ver en la página 100), se advierte que un 64 % de las alumnas de primaria que manifiestan esta carencia, frente a un 69 % de las de 1º ESO y un 44 % de las de 2º ESO. Siguiendo con la tónica general apreciada en las respuestas a otras preguntas la expresión mejora considerablemente en el último curso de secundaria.

Por último la tipología de errores se presenta con las siguientes frecuencias, en cada uno de los cursos: en el curso de primaria el 69 % de los mismos -estos porcentajes están calculados sobre el número de respuestas incorrectas o de corrección intermedia- se deben a problemas en la expresión, el 30 % a errores en el análisis y el 20 % a errores en la conclusión; en 1º ESO los primeros representan un 76 %, mientras que los segundos son un 45 % y los terceros tan sólo un 18 %; en el curso superior los errores de expresión se repiten con menos frecuencia, un 59 %, mientras que los de análisis representan un 25 % y los de conclusión un 32 % (ver figura 6.11, en la que se ha mantenido la misma escala que en las figuras 6.4 y 6.6 para facilitar su comparación).

Si se cotejan estos resultados con los obtenidos para las cuestiones 3ª y 4ª se encuentra que se han reducido en gran medida los errores de conclusión, respecto a la primera de ellas, dado que la dificultad de detección de aquella relación es mayor por el entorno geométrico (ver página 182) y la multiplicidad de posibilidades que ofrece. Sin embargo, han aumentado bastante los de análisis y, sobre todo, los de expresión. Esto se debe a que, una vez detectada la relación a expresar -en el caso de esta cuestión es mayoritariamente aritmética, lo que facilita su detección-, su redacción resulta más compleja, pues no hay ninguna regla sencilla a la que hacer alusión sino que la descripción debe hacerse desde la investigación personal, sin ayuda de ningún tipo, con las propias palabras de cada alumna y salvando las imprecisiones propias del lenguaje natural.

Como ejemplo de cada uno de estos tipos de errores se pueden citar los siguientes:

La alumna 2º.59 comete un error de análisis en el último apartado en el que afirma que todos los números son pares, cuando no lo son. En la respuesta de 1º.16 encontramos un error de conclusión al responder al primer apartado con una estricta descripción del hecho que acontece pero sin realizar la correspondiente generalización:

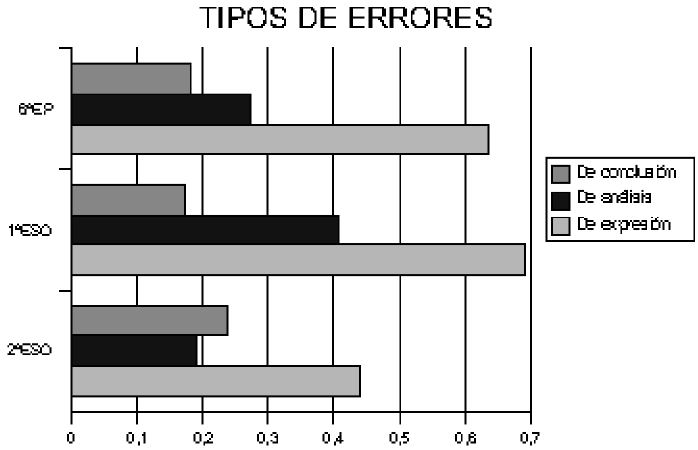
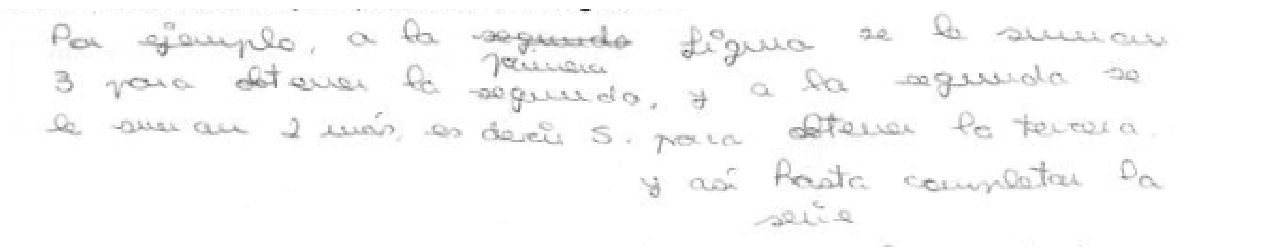


Figura 6.11: Tipos de errores en las respuestas a la 8ª cuestión, por cursos.

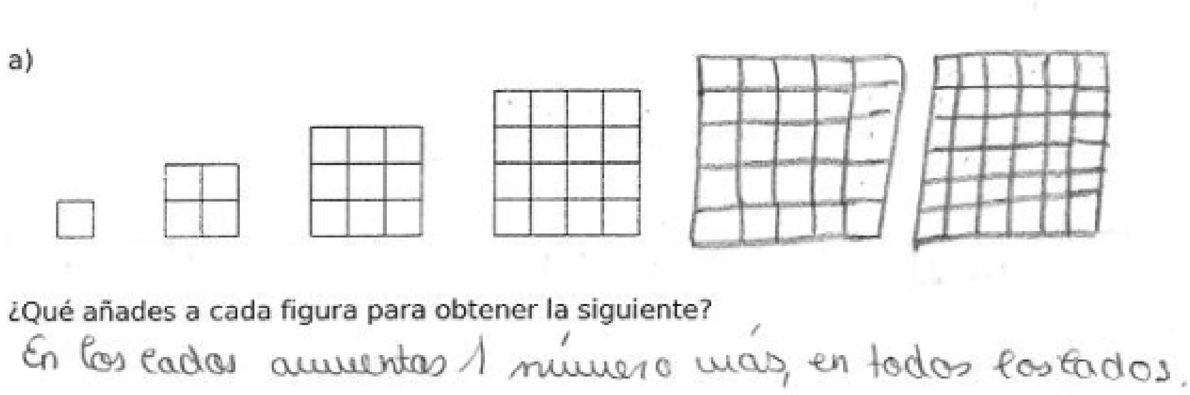


Textualmente: Por ejemplo, a la primera figura se le suman 3 para obtener la segunda, y a la segunda se le suman 2 más es decir 5, para obtener la tercera y así hasta completar la serie.[1]

Por último, se observan varios errores de expresión en las respuestas de 6º.12, 1º.40 y 2º.8. Todas se refieren a los cuadraditos que hay que añadir en las figuras del primer apartado pero la imprecisión creciente de sus respuestas hace que, prescindiendo de las figuras, sean ininteligibles.

[1]El tipo de letra se ha variado para indicar que el párrafo es transcripción literal de lo escrito por el alumno, respetando su expresión, incluso sus faltas de ortografía. En adelante se usará este tipo de letra para cada cita textual de un alumno.

Respuesta de 6º.12:

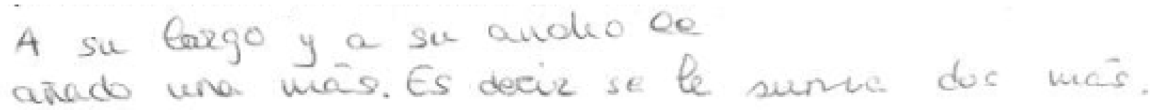

a)

¿Qué añades a cada figura para obtener la siguiente?

En los lados aumentas 1 número más, en todos los lados.

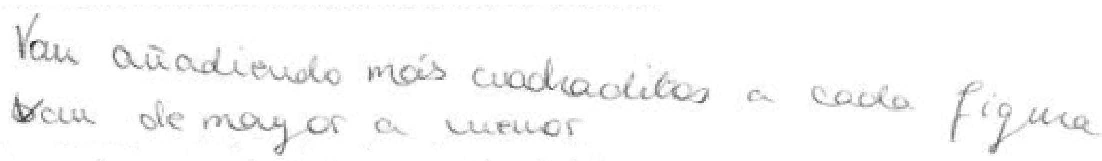
Textualmente: En los lados aumentas 1 número más en todos los lados.

Respuesta de 1º.40:


A su largo y a su ancho le añado una más. Es decir se le suma dos más.

Textualmente: A su largo y a su ancho le añado una más. Es decir se le suma dos más.

Respuesta de 2º.8:


Van añadiendo más cuadraditos a cada figura
Van de mayor a menor

Textualmente: Van añadiendo más cuadritos a cada figura van de mayor a menor.

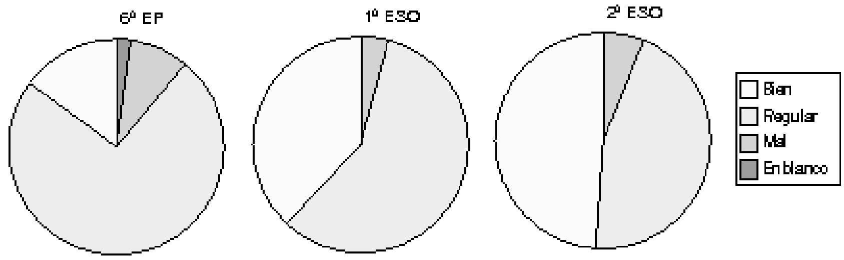


Figura 6.12: Resultados de la corrección en la 9ª cuestión

9ª pregunta

La abstención en la respuesta a esta cuestión es prácticamente inexistente. Tan sólo un 2 % de las alumnas en el curso de primaria y ninguna alumna en secundaria. Representan un despreciable 0,4 % sobre el total. Si se centra el análisis exclusivamente en la segunda parte de la pregunta los porcentajes son bastante diferentes: un 24 % en 6º EP y un 5 % y un 8 %, respectivamente, en 1º ESO y 2º ESO. Estos resultados confirman la dificultad en cuanto a la generalización en el curso de primaria, ya sea por falta de comprensión del enunciado o por deficiencias en su capacidad para realizar esta tarea. Sin embargo, las diferencias en los otros dos cursos son mínimas y no a favor del curso superior como sería de esperar.

También se observan diferencias importantes en el nivel de corrección de las respuestas obtenidas: un 15 % presenta una respuesta completamente correcta en 6º EP, un 38 % en 1º ESO y un 49 % en 2º ESO. Como se esperaba, los resultados de los cursos superiores son considerablemente mejores. Sin embargo, si consideramos también las respuestas intermedias las diferencias se suavizan, encontrando un 89 % en primaria, un 96 % en el primer curso de secundaria y un 93 % en el segundo.

La deducción que se apunta con este análisis es que las desigualdades en la detección de la relación en cuestión no son tan evidentes y sí lo es una clara disparidad en cuanto al rigor en la expresión. Dicho rigor mejora notablemente según los cursos van siendo superiores, presentando un gran salto del curso de primaria a los de secundaria debido, posiblemente, a la capacidad de formalización. Para constatar esta conclusión es necesario examinar el tipo de respuesta ofrecido en los diferentes cursos.

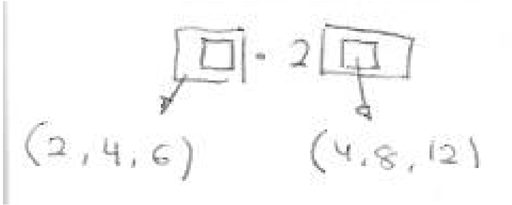
La respuesta más repetida en el curso de primaria es la que ofrece una particularización en la operatoria concreta de los números proporcionados en la tabla, con un 46 %, frente a un 17 %

y 18 % respectivamente en los cursos de secundaria. En estos dos cursos la formalización algebraica es mayoritaria, un 47 % en 1º ESO y un 50 % en 2º ESO, frente a sólo un 3 % en 6º EP. Se advierte una elevada similitud en cuanto al tipo de respuesta obtenido en los cursos de secundaria. Además, en estos dos cursos respectivamente, se observa un 12 % y un 10 % de respuesta con otro tipo de simbolización no formal (cuadros en blanco, signos de interrogación, etc...) y un 22 % y un 19 % con respuesta únicamente retórica. Esto demuestra un hábito de formalización y un cierto dominio de las relaciones funcionales por parte de estas alumnas, frente a las alumnas de primaria que no cuentan entre sus conocimientos con la expresión simbólica de las funciones (ver Anexo 1), y por ello su expresión retórica es mayor -un 21 %- que su intento de simbolización, ya sea formal -un 3 %- o informal -un 8 %.

Es importante destacar la proximidad de los resultados en los tres cursos en cuanto a la expresión retórica y a la simbolización no formal, pues son capacidades que ostentan una cierta independencia de los conocimientos de la matemática formal y, por ello, con menor correlación con el nivel académico. En cuanto a la simbolización, la escasa hallada en el curso de primaria es fundamentalmente informal, debido al desconocimiento del álgebra de las alumnas de este curso, mientras que en los otros dos cursos es formal con unas proporciones similares de ambos tipos de simbolización -formal e informal- en 1º ESO. Esto confirma lo esperado para el curso de primaria, pero contradice la progresión que se anunciaba para los cursos de secundaria, es decir, la capacidad de formalización en ambos cursos no presenta diferencias en esta cuestión.

Asimismo hay que señalar la falta de generalización detectada en el curso de primaria, pues sólo una tercera parte se despega de los ejemplos aritméticos concretos para expresar, ya sea verbal o formalmente, la relación solicitada, mientras que en secundaria superan las tres cuartas partes ampliamente. Esto coincide con lo que se había señalado como esperado a este respecto en la pregunta 9ª del apartado 5.2.3 y aclara la conclusión extraída del elevado nivel de abstención de las alumnas de 6º EP en la segunda parte de esta actividad, pues confirma que el problema se encuentra más en la falta de capacidad de generalización (ver en la página 146), que en la comprensión del enunciado.

Por último se citan algunos casos particulares que merece la pena destacar. Entre las alumnas que utilizan signos no formales para la representación de los números podemos observar uno (1º.16) que escribe dos cuadros en blanco, pero distingue sus significados mediante flechas con las que especifica qué números representa cada uno lo que muestra una dependencia elevada de la aritmética particular.



Textualmente:□·2=□

↓ ↓

(2,4,6) (4,8,12)

Otras alumnas utilizan símbolos propios para representar los números (6º.49, 1º.20 y 2º.76), independientemente de que su expresión sea correcta o incorrecta para este enunciado. Por ejemplo, 6º.49 utiliza la abreviatura de *número* y escribe la expresión nº·2, se puede entender como la simbolización primera, por ser la más evidente, como hemos visto que también ocurre en la historia del álgebra (3.1.1). Por otra parte, 2º.76 mezcla retórica y simbolización informal en su respuesta

?·2=nº par

mientras que 1º.20 escribe símbolos distintos para cada una de las variables, con toda la carga significativa de las mismas, ya que especifica con una flecha el significado del primer signo (primer número →_) y del segundo signo (segundo número →□)

Textualmente: 3·2=6

→ejemplo _·2=□

10·2=20 ↑ ↑

1^{er} *nº* *2ºnº*

Podemos concluir que las diferencias se encuentran a la hora de expresar la relación detectada más que en la detección de la misma. Esta expresión se realiza fundamentalmente de modo informal -aritmética o retóricamente- en el caso del curso de primaria y formal -a través del lenguaje algebraico- en los cursos de secundaria, sin grandes diferencias entre estos últimos.

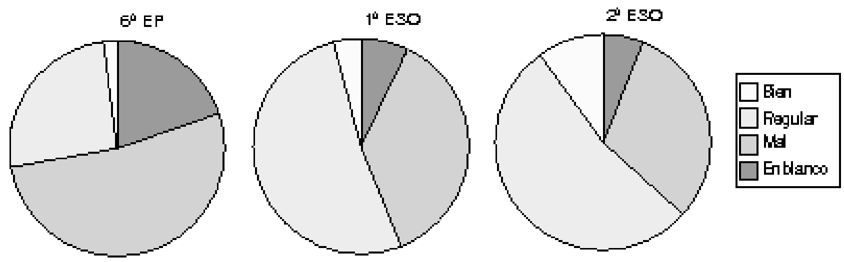


Figura 6.13: Resultados de la corrección en la 10ª cuestión

10ª pregunta

Como se esperaba la abstención total, es decir, el porcentaje de alumnas que deja en blanco todas las preguntas, es mayor en el curso más bajo -un 20 % en 6º EP, un 7 % en 1º ESO y un 6 % en 2º ESO-. Hay que destacar la similitud de los bajos resultados en los cursos de secundaria, ya que este tipo de preguntas resulta más habitual y no desconcierta en estos niveles.

Si se desglosa este rasgo por preguntas se encuentran diferencias notables: no contestan a la primera y segunda preguntas un 24 % de las alumnas de 6º EP, un 15 % de las alumnas de 1º ESO y un 18 % de las de 2º ESO; y a la tercera, un 64 % de las alumnas de 6º EP, un 49 % de las de 1º ESO y un 32 % de las de 2º ESO. Se observa que, en las primeras preguntas, la diferencia entre los cursos se reduce, incluso se presenta una abstención curiosamente superior en 2º ESO que en 1º ESO. Sin embargo, la abstención prácticamente se duplica (en 2º ESO) o triplica (en 6º EP y 1º ESO) en la tercera pregunta, respecto a las otras dos, lo que ya se había pronosticado, pues la generalización presenta una dificultad más acusada en los cursos más bajos (página 146). Este hecho pone de manifiesto unas diferencias aún mayores entre los cursos inferiores y el superior y una aproximación entre los niveles más bajos, aunque la distribución no se aleja mucho de la uniformidad.

Se puede concluir que las alumnas de 1º ESO y 2º ESO responden a una o a otra pregunta en diferentes proporciones, a pesar de que las que no contestan a ninguna de los tres representan un porcentaje similar en ambos cursos. En cuanto a las de primaria, sus diferencias comparativas con las de secundaria respecto a la abstención se reducen en el análisis por preguntas, sobre todo en las cuestiones 1ª y 2ª.

El análisis de la corrección revela un desnivel evidente en los tres cursos. En 6º EP menos de un 2 % responde adecuadamente a las preguntas, en 1º ESO un 4 % y en 2º ESO casi un 10 %. Las alumnas que contestan incorrectamente, es decir, mal al menos a dos de las tres preguntas, representan un 53 % en primaria y un 37 % y 31 %, respectivamente, en 1º ESO y 2º ESO. Además, el 26 % de las alumnas de 6º EP, así como el 52 % de las de 1º ESO y el 54 % de las de 2º ESO, responde bien tan sólo a una de las tres preguntas, generalmente a alguna de las dos primeras, como veremos a continuación. En general se evidencia una dificultad notable en comparación con las cuestiones anteriores, pues los porcentajes que representan la corrección son bastante más bajos que los obtenidos hasta ahora.

Analizando esta variable separadamente en cada pregunta se obtienen los siguientes resultados: en la primera y segunda preguntas el nivel de corrección se mantiene en los tres cursos pero, en cuanto a la tercera pregunta, el tanto por ciento de respuestas correctas aumenta significativamente en los cursos de ESO, a un 38 % y un 44 %, respectivamente, mientras que se mantiene en el de primaria.

De estos datos se puede deducir que en el primer curso estudiado resultan de una dificultad similar la segunda y tercera preguntas, obteniéndose un nivel de corrección muy bajo, casi nulo -tan sólo una alumna responde adecuadamente las tres preguntas- mientras que en los cursos de secundaria resulta más asequible la tercera pregunta que la segunda, contrariamente a lo esperado. Es decir, las alumnas de primaria tienen las mismas dificultades para encontrar la justificación teórica de la operación aritmética que para expresarla en general mientras que las de secundaria encuentran menos dificultad en este último hecho, que en la búsqueda de la razón explicativa. El conocimiento del álgebra es la herramienta que proporciona estas diferencias en cuanto a la expresión, pero dicho conocimiento no asegura la comprensión de la estructura de la operación aritmética para su generalización (en la página 91 se citan estudios que aseguran que el desarrollo del pensamiento algebraico influye en la comprensión de la aritmética a nivel estructural, pero esto implica el aprendizaje significativo del álgebra y no, únicamente, el conocimiento del lenguaje algebraico). La generalización de la aritmética depende del desarrollo madurativo de las alumnas, pues se observa una progresión importante en los tres cursos en cuanto a la corrección de las respuestas a la segunda pregunta de esta cuestión (ver en la página 131).

Como se afirmaba en el análisis previo del cuestionario la segunda pregunta debe proporcionar respuestas retóricas en su mayoría, mientras que la tercera pregunta se orienta hacia la generalización y, como consecuencia, la formalización de cualquier tipo ya que el uso del lenguaje habitual en la generalización de esta tarea concreta remite de nuevo al enunciado sin ninguna nueva aportación. Examinando los tipos de respuesta obtenidos en cada curso se puede confirmar si la formalización representa un modo más seguro de dar respuesta a una cuestión de este tipo que la retórica, en los cursos que ya conocen el álgebra, como podemos deducir del análisis precedente.

Se observa en las respuestas de las alumnas de 6º EP un elevado porcentaje de respuesta numérica, 38 %, a veces acompañada de un intento de descripción retórica muy impreciso e informal y que en ningún caso puede considerarse como generalización. Entre ellas hay un alto porcentaje de alumnas, 14 %, que no expresan estas operaciones de modo aritméticamente formal, es decir, no respetan la prioridad de operaciones o las igualdades; incluso hay un 3 % que tienen errores de cálculo. Asimismo se halla casi un 5 % de respuestas generales a través del lenguaje habitual y el mismo porcentaje de alumnas que responden con una simbología no formal, ya adoptada en las cuestiones anteriores, válida para representar cualquier número -cuadros en blanco e interrogaciones-. Tan sólo un 3 % -dos alumnas, únicamente- formalizan algebraicamente. Esto puede considerarse un gran logro puesto que, en esta etapa académica, aún no se ha tomado contacto con el lenguaje algebraico como tal, aunque las alumnas ya conocen y manejan algunas fórmulas como las del cálculo de superficies de figuras planas (ver Anexo 1).

En 1º ESO se advierte un incremento espectacular de la formalización algebraica, 42 %, y un aumento notable también en la simbolización no formal -íntegramente con cuadros en blanco-, el 9 % de las alumnas. En cuanto a las respuestas que presentan una retórica general descienden a un 3 % debido, sin duda, al aumento en la formalización -y a la mayor costumbre de ella que se tiene ya en esta etapa-. El uso de la aritmética se limita a un 28 % de las respuestas, de las cuales un 11 % corresponde a un uso informal de la aritmética y un 7 % presenta errores de cálculo. Por sí sólo este dato puede confundir ya que parece demostrar un mejor dominio de la aritmética por las alumnas de 6º EP pero, conjugado con el dato de la elevada abstención en el curso de primaria y con el bajo porcentaje de alumnas que contestan de manera formalmente superior a la aritmética, deducimos que la tipología de alumnas que yerran en las operaciones aritméticas en 1º ESO se corresponde con la que no da respuesta alguna en 6º EP, es decir, en 1º ESO contestan más alumnas y por ello contestan también alumnas más flojas que las que lo hacen en 6º EP, que son las más aventajadas.

En 2º ESO la tipología de respuesta encontrada es mayoritariamente formal, 57 %, o simbólica -en el sentido de la sección 5.2.3-, 6 %. Lo que significa que la mayor parte de las alumnas de este curso es capaz de formalizar con mayor o menor corrección. Además, un 7 % de las respuestas presentan una respuesta retórica general, lo que representa un porcentaje mayor que en los otros dos cursos. Por último se puede ver un 20 % de respuestas aritméticas, la mayoría de las cuáles presentan informalidades del tipo de las descritas anteriormente, un 12 %, o simplemente son incorrectas, un 5 %. De nuevo nos encontramos con un tanto por ciento elevado de este tipo de errores, pero con un razonamiento análogo al realizado para 1º ESO podemos deducir también que la disminución en la abstención favorece este aumento de deficiencias en las respuestas obtenidas, pues contestan alumnas con muchas más dificultades matemáticas que las que lo hacen en el curso de primaria.

Es evidente que la formalización es mucho más frecuente según los cursos van siendo superiores y además la corrección también aumenta, por lo que se puede concluir que el nivel académico adquirido en el álgebra se manifiesta en este tipo de cuestiones sin que sea necesario que se induzca a ello desde la propia pregunta, sino de forma espontánea cuando se trata de generalizar. Además, tanto las alumnas de 1º ESO como las de 2º ESO manifiestan una dependencia menor de la aritmética que las de 6º EP, lo que demuestra una mayor madurez formal.

Los errores más reiterados en las respuestas a la segunda pregunta son la falta de rigor en la expresión y la obtención de una conclusión errónea. Por cursos se observa que en 6º EP estos dos tipos de errores se presentan casi con la misma frecuencia -30 % y 33 %, respectivamente- en 1º ESO son algo más frecuentes los del segundo tipo -22 % y 28 %, respectivamente- y en 2º ESO los debidos a error de expresión se ven duplicados por los de conclusión -16 % y 31 %, respectivamente-. Es decir, en los cursos superiores desciende el porcentaje de errores debidos a la expresión, aunque prácticamente se mantenga la obtención de conclusiones erróneas -es necesario tener de nuevo en cuenta la tasa de abstención para no sacar conclusiones precipitadas de este último hecho-. Se puede afirmar que la expresión mejora notablemente en los cursos superiores.

En cuanto a los errores encontrados en las respuestas a la última pregunta se distinguen errores debidos al uso de los símbolos, como repetir el mismo signo con distinto significado (en la página 156) o sustituir un número particular por un símbolo variable, que se presentan en unos tantos por ciento de 3 %, 4 % y 7 %, en los tres cursos respectivamente; otros debidos a una mala formalización aritmética, como no respetar la prioridad de operaciones (en la página 153) o el significado de la igualdad (en la página 154), que se presentan en los porcentajes 3 %, 37 % y 33 %, respectivamente para los tres cursos, y que no han sido considerados como tales para la computación de respuestas incorrectas, como ya se ha especificado en la página 194.

Para terminar se analizan algunas respuestas de particular relevancia debido a su originalidad. Se han clasificado atendiendo a su nivel algebraico. En un primer nivel -mejor sería decir prenivel, pues aún no se manifiesta ninguna simbolización que pueda asimilarse al álgebra- las alumnas detectan la dinámica interna de la expresión algebraica a través de la inversión de operaciones como podemos ver en 1º. 20

`Todas las operaciones se contradicen`

o en 2º. 24

`(...) porque al multiplicar el número por 2 y sumar 4 y dividir entre 2 y restar el mismo número sería como si hicieras 4:2.`

No se presenta aún ningún intento de simbolización, pero el germen de la estructura algebraica ya se puede vislumbrar. Este nivel se corresponde con el primer nivel definido por Socas et al. (ver 128) en el que el trabajo con números es necesario, pero al nivel de final de las operaciones concretas (ver 131) donde el niño es capaz de adivinar la inversión de operaciones y la estructura operacional detrás de la aritmética concreta.

Otra alumna (6º. 18) incluso detecta que dicha estructura puede ser expresada mediante una fórmula -correspondería al segundo nivel de Socas et al. (1989) en caso de materializarse ésta- que es el único ejemplo de lenguaje algebraico que se conoce en el curso académico al que pertenece:

`Siempre es la misma fórmula y sirve para cualquier número.`

En un siguiente nivel se pueden encontrar diferentes intentos de formalización. En ellos las alumnas introducen signos para sustituir números de forma parcial, es decir, el signo no tiene un carácter variable, sino concreto y a veces aparece como incógnita -sin el carácter definido en la página 129- y otras como parámetro, en su nivel inferior caracterizado en la misma página. Esto ocurre, por ejemplo, en 6º. 53

`?·2=4; 4+4=8; 8:2=4; 4-2=2`

en el que el signo utilizado oculta claramente el número *2*, además, el penúltimo *dos* debería haber sido sustituido por el mismo símbolo para ser fieles al enunciado; o en 2º. 18

`x·2+4:2-3=2x+4:3-3=2`

donde ocurre lo mismo, aunque la aritmética sea más madura, lógico en una alumna de curso superior en el que las expresiones algebraicas ya resultan familiares. Se considera como un nivel intermedio entre éste y el siguiente, en el que el signo adquiere ya un significado de variabilidad aunque no bien entendido desde un punto de vista algebraico, la respuesta de una alumna de 6º EP (6º.45) que simboliza correctamente la generalización pedida en el enunciado mediante cuadros en blanco, pero no es capaz de relacionar dichos signos con las correspondientes operaciones aritméticas:

$\square \times 2;\ +4;\ :2;\ -\square=2$

El siguiente nivel presenta ya un uso de los signos con un significado de variabilidad aunque aún no sea algebraicamente correcto, es decir, se utiliza el mismo signo para representar distintos números. Este nivel se corresponde con un nivel segundo de Socas et al. donde la letra representa un número, como en una fórmula, pero aún no ha adquirido la dimensión simbólica necesaria para permitir la operatividad.

Tal es el caso de 6º.56

$x2=x;\ x+4=x;\ x:2=x;\ x-x=2$,

repetido por otras alumnas con cuadros en blanco en vez de x (6º.13;1º.65). Claramente, estas alumnas conocen el sentido del signo algebraico, pero no han comprendido el proceso de simbolización unívoca -la misma letra, en una misma expresión significa lo mismo- intrínseco a su uso en una misma expresión algebraica. Al menos en este caso la aritmética es correcta, aunque no se haya expresado con una única secuencia operativa, sin embargo en estos otros casos 1º.40

$(x\cdot 2)+(x+4):(\frac{x}{2})-x=2$

y 2º.17

$x+2x+(2x+4)+[(2x+4):2]+[[(2x+4):2]-x]$

el intento de relacionarlos con una única fórmula algebraica ha degenerado en expresiones que poco tienen que ver con el enunciado propuesto, ya sea porque cada x nueva significa el resultado anterior sin especificarlo, como en el primer caso o porque acumula la expresión de cada paso como sumando de una expresión general extremadamente compleja. En ambos casos vemos que la forma de la expresión algebraica se conoce sobradamente aunque no se comprenda en su totalidad el mecanismo de fondo de la misma, ni por supuesto la operatividad del signo algebraico que aparecerá en un último estadio.

El penúltimo nivel representa un gran avance en cuanto a la simbolización se refiere: los signos adquieren un cierto significado variable. Se utilizan varios parámetros -en el sentido de la página 129- para la misma expresión de manera que cada signo representa un número pero existe una relación de dependencia de los valores de todos ellos respecto del primero. Esto nos indica que la idea de símbolo variable ya está presente, pero aún no está desarrollada la operatividad algebraica de la expresión, que se alcanza en el siguiente nivel. Se puede relacionar este estadio con el tercer nivel de Socas et al. donde el alumno es capaz de trabajar con incógnitas y números generalizados, sin un significado completo de variabilidad.

Se puede citar la respuesta de una alumna de 2º ESO (2º. 31) que utiliza dos parámetros

$2x+4=y$

$\frac{y}{2}-x=2$

o esta otra con cuatro parámetros (2º.30)

$2x=y;\ y+4=z;\ z:2=w;\ w-x=2.$

Por último alcanzamos el nivel operativo del álgebra formal como podemos observar en la siguiente respuesta (2º. 80).

$(x\cdot 2+4):2-x$

$(2x+4):2-x$

$x+2-x$

2

Corresponde al nivel más elevado de la clasificación de Socas et al. y en él se encuentra completamente caracterizado el concepto de variable, definido en la página 129.

La operatividad del álgebra sólo es alcanzada por las alumnas cuando se establece la correspondencia necesaria entre los signos y sus significados, es decir, cuando la simbolización se alcanza en su totalidad y la estructura operatoria se comprende como la expresión de las relaciones entre los objetos que la forman y no como función limitada al cálculo de resultados de operaciones aritméticas.

Se ha declarado que el álgebra proporciona una herramienta poderosa para la expresión de la generalización de la aritmética que las alumnas de secundaria utilizan con cierta naturalidad pero que no se corresponde con el nivel madurativo de las operaciones formales de las alumnas, pues la explicación de la estructura que subyace a la operación aritmética así como la comprensión conceptual de los símbolos algebraicos no se presentan con la frecuencia que sería deseable para los cursos de secundaria.

11ª pregunta

En el análisis de las respuestas a esta pregunta se han obtenido resultados bastante sorprendentes: en contra de lo esperado el número de respuestas en blanco ha sido más bien escaso, alrededor de un 5 % en 6º EP, un 3 % en 1º ESO y algo más de un 1 % en 2º ESO. Este hecho informa de que, para estas edades, el enunciado no se presenta como inabordable, en absoluto, y por ello la mayoría de las alumnas se aventuran a responderlo. Sin embargo, si se destaca el porcentaje de alumnas que sólo cumplimentan la tabla, sin contestar a ninguna de las preguntas que se consideran clave en esta cuestión, se manifiesta una inoperancia de entre un 10 % y un 15 % en cada curso, es decir, un 9 % en 6º EP, un 11 % en 1º ESO y un 16 % en 2º ESO. Si se conjuga con estos resultados la tasa de incorrección tan elevada que se presenta - 44 %, 30 % y 13 %, respectivamente-, sobre todo en los cursos inferiores, podremos afirmar, como se suponía, que la pregunta presenta una dificultad relevante, gradualmente superada según aumenta el nivel académico.

Si se analiza la abstención por preguntas se puede afirmar que no contestan a la primera un 13 % de las alumnas de 6º EP, un 16 % de las alumnas de 1º ESO y un 21 % de las de 2º ESO. En cuanto a la segunda pregunta la tasa de respuesta se reduce ya que se queda en blanco en un 68 % de los casos de 6º EP, un 47 % de los de 1º ESO y un 57 % de los de 2º ESO. La dificultad se concentra en la formalización y aunque la abstención total no parecía significativa al principio podemos considerarla elevada para las respuestas clave de esta cuestión.

En cuanto a la corrección destaca la gran diferencia entre los porcentajes de respuestas correctas obtenidos en los cursos de secundaria y el de primaria -14 % y 12 %, respectivamente en 1º ESO y 2º ESO, y menos del 2 % en 6º EP- aunque, en contra de lo supuesto, sea mayor el de 1º ESO que el de 2º ESO. Como se esperaba las diferencias entre las alumnas que no conocen el álgebra y las que sí son muy abultadas, pero no se observa la progresión anunciada en los tres cursos. Analizando las respuestas correctas junto con las de corrección intermedia,

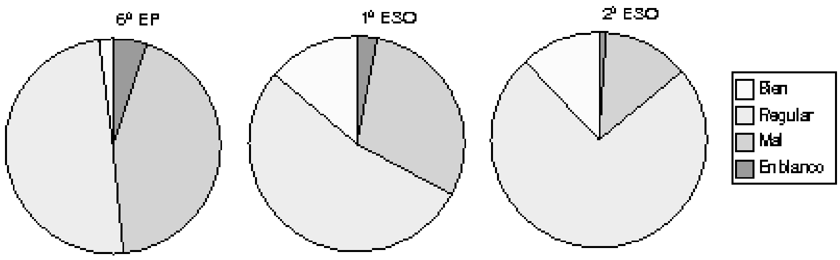


Figura 6.14: Resultados de la corrección en la 11ª cuestión

de una manera global, se obtienen unos resultados más adecuados a lo conjeturado: 52 % en 6º EP, 68 % en 1º ESO y 85 % en 2º ESO.

Sorprende el hecho de que la corrección total sea mayor en 1º ESO que en 2º ESO, aunque esto se debe más a la dificultad de encontrar la relación que a la formalización de la misma ya que los errores de análisis son mucho mayores en el primer curso que en el segundo -un 12 % de las alumnas de 1º ESO relacionan cada figura con la siguiente concluyendo que si la figura aumenta en un lado, aumenta en un triángulo, mientras en 2º ESO hay un 32 %, casi el triple que en 1º ESO-.

Analizando por tipología de respuesta se obtiene una formalización muy desigual entre el curso de primaria y los de secundaria -un 9 % frente a un 38 % y un 34 %, respectivamente para 6º EP, 1º ESO y 2º ESO- aunque se siguen obteniendo mejores resultados en 1º ESO que en 2º ESO. En cuanto a la simbolización informal, en el curso de primaria casi se presenta con la misma frecuencia que la formalización algebraica, un 6 %, mientras que en el resto de los cursos es, comparativamente, mucho menos frecuentemente -un 9 % en 1º ESO y un 4 % en 2º ESO-. Se confirma que las alumnas que conocen el álgebra utilizan con bastante naturalidad los signos formales a la hora de simbolizar mientras que para las que no lo conocen dichos signos no tienen un significado más universal que los que ellas puedan utilizar en su simbolización particular. Además las alumnas que han sido capaces de formalizar, ya sea correcta o incorrectamente, en los niveles de secundaria superan la tercera parte de cada curso lo que representa un buen dato para esta cuestión, en la que la formalización se esperaba escasa debido a la dificultad de la misma. Los porcentajes de corrección de esta formalización -25 % en 1º ESO y 20 % en 2º ESO- superan, con mucho, los de incorrección -13 % en ambos cursos-.

Los datos obtenidos en la explicación retórica parecen no tener un sentido definido por sí solos pues hay un 23 % en 6º EP, un 4 % en 1º ESO y un 17 % en 2º ESO, pero si se analiza la corrección sobre estas respuestas retóricas se observa un 9 % en el curso de primaria, un 20 % en 1º ESO y un 11 % en 2º ESO. Se advierte que también en la retórica aparecen las diferencias señaladas por niveles académicos entre primaria y secundaria, aunque de nuevo se hallan mejores resultados en 1º ESO que en 2º ESO.

Entre formalización y simbolización en el curso de primaria hay un 15 %, en 1º ESO un 47 % y en 2º ESO un 37 %, y si a estos datos añadimos las respuestas retóricas estas diferencias se reducen -38 % en 6º EP, 50 % en 1º ESO y 53 % en 2º ESO-. Las grandes diferencias entre los cursos con conocimientos algebraicos y sin ellos radican en la expresión de la generalización observada, más que en la propia capacidad de generalización. A pesar de ello, no se puede despreciar la diferencia de madurez de pensamiento matemático existente entre dichos cursos (en la página 131) pues, si nos centramos en el número de alumnas que no contestan más que la tabla -que ya se ha especificado con anterioridad- y los que contestan a un nivel particular -operaciones concretas o aritmética informal-, se obtienen un 49 % en 6º EP, un 38 % en 1º ESO y un 41 % en 2º ESO.

De entre los errores más repetidos destacan los de conclusión, como el cometido por algunas alumnas (1º.1, por ejemplo) que afirman que *"todos son triángulos"*- se repite en los dos cursos inferiores en un 12 % y un 11 %, respectivamente-; los de análisis, como el de las alumnas que expresan retóricamente la relación de cada figura con la siguiente o la anterior (por ejemplo, 1º.6) - un 18 % en primaria, un 12 % en 1º ESO y un 32 % en 2º ESO- o las que rellenan incorrectamente la tabla (como 6º.59 que cuenta el número total de lados de uno, dos, tres... triángulos) -un 32 % en 6º EP, un 17 % en 1º ESO y un 6 % en 2º ESO; y los de expresión, como las que no distinguen con distintos signos los diferentes objetos en la expresión algebraica (por ejemplo, 6º.20, que escribe *n-n=2*, *n+2=n*, de 1º.63 o *n=n-2*, de 1º.56) -un 3 % en 6º EP, un 4 % en 1º ESO y un 1 % en 2º ESO-, error que ya ha sido analizado con anterioridad (en la página 156).

Otros casos destacables son los de alumnas que utilizan una mezcla de expresión algebraica y lenguaje natural, como los siguientes:

`n-2=nº de triángulos` (que lo forman) (1º.17),
`nº de lados-2=nº de triángulos` (1º.30),
`n lados=n-2 triángulos` (6º.9)

o

n−nº de triángulos=2 (2º.66).

Asimismo se pueden citar las respuestas que no generalizan, aún detectando la regla, es decir, no completan el ciclo necesario para la abstracción explicado por Schwarz et al. (ver página 97). Por ejemplo, 6º.8, 1º.10, 1º.25 -que detecta la diferencia constante- o 2º.43.

En 6º.48 se observa cómo las alumnas van pasando del caso particular a la formalización general, pues se queda a medio camino

n−2=8,

aunque a veces se haga incorrectamente, como 2º.67, que pasa de la expresión funcional correcta -*y=x−2*-, detectada por sí misma a partir de la tabla, a una supuesta generalización para *n* lados

y=x−n

Finalmente se hallan distintos grados de simbolización en la expresión de la relación. Desde la retórica de 1º.43

suelen salir dos menos

pasando por la simbolización libre de 6º.12

□−□=2
7−5=2
8−6=2

y 6º.46

n+2=?

hasta la formalización completa de 2º.57

y=n+2

o de 2º.84

N=t+2.

En todas estas respuestas se aprecia una progresión de lo particular de la aritmética a la generalización algebraica, utilizando una simbolización cada vez más formal y dotando gradualmente a dichos símbolos del significado de variabilidad que soportan en el álgebra.

La respuesta de una alumna de 6º EP (6º.60) resulta de un interés especial pues no sólo detecta la relación sino que escribe la sucesión 3, 5, 7, 9... añadiendo *sumando dos*, pues su generalización es a partir de la tabla de triángulos y número de lados totales y no de triángulos y número de lados del polígono. Es interesante por la expresión de la sucesión y la extracción de la regla a partir de ella -aunque no llega a formalizar- que no son tareas apropiadas para este curso, lo que nos induce a pensar, de acuerdo con Novotná y Sarrazy (ver en la página 92), que existen rasgos pre-algebraicos en ciertos modelos de resolución de las alumnas.

Concluimos que, análogamente a la cuestión anterior, el álgebra facilita la expresión de la relación subyacente a la situación geométrica descrita en el enunciado pero seguimos encontrando dificultades en cuanto a la descripción de la misma, lo que manifiesta un conocimiento mecánico del álgebra, sin comprensión completa de su magnitud simbólica.

12ª pregunta

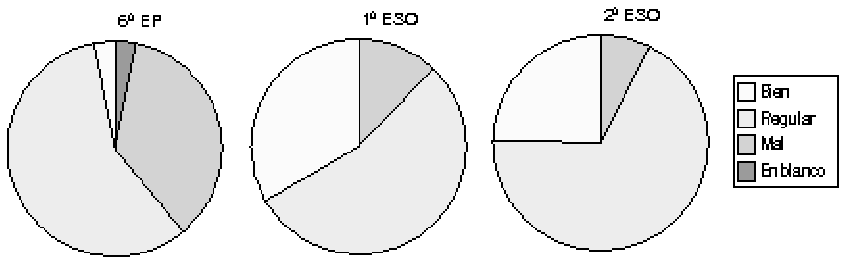


Figura 6.15: Resultados de la corrección en la 12ª cuestión

Según lo esperado la abstención total en los cursos de secundaria es más que baja, casi nula. Sin embargo no es tan elevada como se esperaba en el curso de primaria, donde tan sólo es de un 3 %. El análisis de la abstención en cada una de las tareas se distribuye según el cuadro 6.2, que nos muestra que es mayor en el curso de primaria que en los de secundaria, aunque en estos es menor en el primer curso que en el segundo, contrariamente a lo que sería de esperar. La abstención es mucho más elevada en la tercera tarea que en las otras dos, como ya habíamos supuesto.

Abstención	6º EP	1º ESO	2º ESO
1ª tarea	5 %	0 %	2 %
2ª tarea	6 %	0 %	3 %
3ª tarea	15 %	2 %	6 %

Cuadro 6.2: Porcentajes de abstención por tareas en la pregunta 12ª.

Corrección	6º EP	1º ESO	2º ESO
1ª tarea	26 %	62 %	51 %
2ª tarea	30 %	75 %	71 %
3ª tarea	21 %	43 %	45 %

Cuadro 6.3: Porcentajes de corrección por tareas en la pregunta 12ª

Se podría concluir que las dos primeras tareas plantean una dificultad similar si no fuese porque al analizar los resultados obtenidos se halla que la respuesta aritmética dada por las alumnas a la segunda tarea es bastante más elevada que en la primera. Por ello se puede afirmar que ambas son igual de abordables para las alumnas de un mismo nivel, conocedoras o no del álgebra, pero mucho más evidente de responder formalmente la primera que la segunda ya que en ella el signo se explicita. En cuanto a la tercera tarea, ésta representa un obstáculo mucho mayor, más por dificultades en la expresión rigurosa de un enunciado que por la comprensión de la expresión algebraica como se puede demostrar al observar la baja tasa de respuestas con falta de rigor sobre respuestas de intermedia corrección o correctas.

En cuanto a la corrección absoluta es mínima en el curso de primaria, un 3 %, mientras que en secundaria es más elevada y de nuevo mayor en primero que en segundo -33 % y 27 %, respectivamente-. La causa de este último resultado la encontramos en la respuesta a la primera y segunda tareas, pues en la tercera los errores de las alumnas de 1º ESO superan a las de 2º ESO. Además la corrección es más baja en la tercera tarea, aunque sorprende la similitud entre las respuestas a la tres tareas encontradas en 6º EP. Se advierte que para las alumnas con conocimientos algebraicos las tareas primera y segunda resultan notablemente más sencillas que la tercera, mientras que para las que no los tienen la dificultad se presenta casi por igual en los tres casos. Ver cuadro 6.3.

Si se analiza la incorrección simultánea en todas las tareas obtenemos la progresión esperada, un 36 % en 6º EP, un 12 % en 1º ESO y un 8 % en 2º ESO. La corrección en 2º ESO es intermedia, es decir, la mayoría de las alumnas, un 64 %, presentan respuestas adecuadas en algunas preguntas e inadecuadas en otras, aunque hay más del triple de alumnas que contestan completamente bien que alumnas que responden mal a todas. En el caso de 1º ESO también hay más alumnas con respuestas completamente correctas que con respuestas totalmente incorrectas aunque la proporción es más desfavorable, no llegan al triple. En este curso es menor el número de respuestas totalmente correctas, por lo que podemos afirmar que, globalmente, los resultados son mejores en 2º ESO que en 1º ESO. Analizando los tipos de respuesta obtenidos, así como los errores cometidos podremos detectar la razón de que los resultados parciales en 1º ESO superen a los de 2º ESO, así como ver las causas de que ni siquiera la tercera parte de las respuestas de las alumnas de primaria sean correctas en cada tarea.

En cuanto a las dos primeras tareas la formalización es mayoritaria en los dos cursos de secundaria, como se esperaba, y además notablemente mayor en el segundo que en el primero, un 89 % frente a un 74 % de las respuestas. Sin embargo en 6º EP hay una mayoría de respuesta aritmética, un 57 %. Son las dos tipologías de respuesta encontradas y se corresponden con lo que cabía esperar, dada la madurez matemática de las alumnas de los distintos cursos.

Todas las respuestas obtenidas en la tercera tarea son retóricas, como no podía ser de otra manera. Los porcentajes de rigurosidad sobre respuestas correctas o de corrección intermedia en los tres cursos son, respectivamente, 14 %, 17 % y 16 %, bastante similares en contra de los resultados obtenidos en otras preguntas en los que la diferencia entre los cursos de secundaria y el de primaria es más abultada. Estos porcentajes demuestran que la expresión rigurosa es un escollo en la redacción verbal de enunciados o propiedades para las alumnas de este nivel académico, aún cuando la corrección general pueda considerarse aceptable (en la página 100).

Los tipos de errores más frecuentes se han analizado de dos maneras diferentes obteniendo distintos resultados, todos ellos útiles para el análisis:

Tras estudiar los resultados respecto del total de respuestas obtenidas se observa que el error más frecuente es la redacción de un enunciado, en la tercera tarea, que no se corresponda con la ecuación dada -en adelante *cambio de enunciado en 3ª*-, con un 34 %, seguido de la particularización aritmética en la segunda tarea -en adelante *aritmética en 2ª*-, con un 22 %, después el olvido del resultado de la ecuación en la redacción del enunciado de la tercera tarea -en adelante *sin resultado en 3ª*-, con un 18 % y, por último, escribir $x+3=x$ como respuesta a la primera tarea -en adelante *=x en 1ª*-, con un 14 %. Los errores son fundamentalmente de redacción o aritméticos, pues sólo en cuarto lugar destaca un error de expresión algebraica. De este modo se manifiesta cuáles son los errores más frecuentes pero no sabemos qué incidencia tiene cada uno en los diferentes cursos, es decir, el análisis no tiene en cuenta el nivel académico de las

Errores	6º EP	1º ESO	2º ESO	Total
Sin resultado en 3ª	51 %	49 %	8 %	18 %
Cambio de enunciado en 3ª	29 %	32 %	38 %	34 %
Cambio de enunciado en 1ª	15 %	1 %	2 %	5 %
Aritmética en 2ª	53 %	12 %	9 %	22 %
Álgebra en 1ª	5 %	19 %	22 %	13 %
Álgebra en 2ª	3 %	0 %	14 %	5 %
=x en 1ª	11 %	14 %	11 %	14 %

Cuadro 6.4: Tipos de errores encontrados en la pregunta 12ª.

alumnas. Por ello se analizan también las frecuencias relativas a los cursos.

Tras estudiar los resultados por cursos, respecto al número de respuestas dadas a cada pregunta, el error que se presenta con más frecuencia en 6º EP es *aritmética en 2ª,* con un 53 %, seguido de *sin resultado en 3ª,* con un 51 %, de *cambio de enunciado en 3ª,* con un 29 % y, por último, *cambio de enunciado en 1ª,* con un 15 %. Los errores son fundamentalmente aritméticos -hay muchas más respuestas aritméticas que algebraicas en este curso- y de redacción. En 1º ESO se obtiene en primer lugar *sin resultado en 3ª,* con un 49 %, seguido de *cambio de enunciado en 3ª,* con un 32 %, un nuevo error no destacado anteriormente que tiene que ver con la expresión algebraica de la respuesta a la 1ª cuestión -en adelante *álgebra en 1ª*-, con un 19 % y *=x en 1ª*, con un 14 %. Y en 2º ESO, *cambio de enunciado en 3ª,* con un 38 %, seguido de *álgebra en 1ª,* con un 22 %, *álgebra en 2ª,* con un 14 % y *=x en 1ª,* con un 11 %. En los cursos superiores los errores aritméticos han perdido peso en favor de los algebraicos pues las respuestas algebraicas son una mayoría en estos cursos. Ver cuadro 6.4.

Para obtener una conclusión global de la importancia de los errores relativamente a los cursos se ponderan estos resultados según según el orden de frecuencia con que aparecen en cada uno -un 4 para el de mayor frecuencia y un 1 para el de menor frecuencia de cada curso- y se llega a la conclusión de que el más destacado es *cambio de enunciado en 3ª*, seguido de *sin resultado en 3ª*, tras él *álgebra en 1ª* y, en cuarto lugar, *aritmética en 2ª*. Los resultados son bastante similares a los obtenidos en general, pero debido al menor impacto del error aritmético en los cursos de secundaria, al bastante mayor de *sin resultado en 3ª* en los cursos 6º EP y 1º ESO y al nulo de *=x en 1ª* en el curso de primaria, estos cambian sus posiciones en orden de importancia y aparece *álgebra en 1ª* como sustituto de éste último. La dificultad de inventar un enunciado que se corresponda con una ecuación dada es más frecuente en los cursos más bajos, pues no es hasta bien adentrados en el estudio del álgebra cuando los alumnos empiezan a comprender el significado de los términos de una ecuación y su valor como relación de equivalencia entre miembros. Es la operación recíproca a la explicada en la página 117, pero implica la misma comprensión de la denotación de la expresión dada además de un dominio de la sintaxis algebraica importante (ver en la página 119). Sin embargo, la diferencia en cuanto a la particularización aritmética comienza a notarse a partir del curso de primaria, pues el uso de los signos aritméticos no requiere de una comprensión tan exhaustiva y sí del conocimiento del lenguaje algebraico que no se posee en este curso. Es lo mismo que ocurre en cuanto al *=x en 1ª*, pues el desconocimiento de los signos literales impide que las alumnas sientan la necesidad de su uso.

A continuación se destacan las respuestas de algunas alumnas en las que encontramos estos y otros errores, así como respuestas curiosas que merece la pena resaltar.

Entre las respuestas a la primera tarea se halla un importante número de alumnas que sienten la necesidad de concluir la expresión algebraica *x+3* con un *"="*, es decir, entre las alumnas menos habituadas al lenguaje algebraico una suma siempre actúa como operador y no como indicador de una relación aditiva (página 154). Por ello la necesidad de clausura (ver en la página 131) de la operación inclina a las alumnas a añadir

$$= k, k \in \mathbb{N},$$

como, por ejemplo, 6º.18, que escribe

x+3=17.

Este mismo hecho se repite en un 38 % de las alumnas que dan respuesta a la primera tarea en 6º EP y se presenta en porcentajes mucho más bajos, alrededor del 5 %, en los cursos de secundaria. Sin embargo, en estos cursos aparecen en una línea similar alumnas que escriben tras la expresión algebraica

$$= \square,$$

como es el caso de 1º.65 y, en total, un 5 % de las alumnas de 1º ESO y 2º ESO, respectivamente. Esta respuesta se diferencia de la anterior en la variabilidad que el signo utilizado supone. Es un paso más hacia la generalización de la aritmética que se culmina con el uso del álgebra formal, como en el caso de 1º.16, que escribe *x+3=y.*

No obstante éste es el único uso literal correcto pues el resto de alumnas escriben *x+3=x*, como ya hemos adelantado en el estudio de los tipos de errores (página 156).

Como casos de incorrección en la expresión algebraica podemos destacar las respuestas de 6.19,

3x,

que utiliza la yuxtaposición como adición, como analizamos en la página 155, y de 2.35,

x+x3,

cuya simbolización no corresponde con el enunciado al aparecer la incógnita dos veces.

Así como el caso de una alumna (1º.41) que tras escribir correctamente la expresión continúa intentando operar de manera incorrecta(ver en la página 157), escribiendo

1x+3; x+4; x=4,

lo que indica un deseo de resolver una expresión algebraica como si de una ecuación se tratara y denota una inmadurez manifiesta en el uso de los signos algebraicos cuya manipulación (sintaxis) ha sido aprendida despojada de su significado (semántica), como afirma Herscovics, en página 118.

Finalmente se destaca el caso de una alumna de 6º EP (6º.43) que particulariza la expresión para *x=30* sin mayor sensación de incoherencia. Es un claro ejemplo de *letra evaluada* (ver Küchemann, en la página 124) y evidencia con ello una necesidad de la aritmética que debería ir desapareciendo en el último curso de primaria y más después de ver varios ejemplos de uso del signo literal como generalización en las cuestiones anteriores.

Entre las respuestas a la segunda tarea destaca la aritmetización del enunciado, es decir, las respuestas que, como 6º.13, cambian el orden de los datos para escribir

14-3=x,

en vez de

x+3=14.

Es normal en los cursos más bajos, incluso sin escribir la incógnita, como 6º.1, que realiza la operación

14-3=11

por falta de hábito en el uso de las letras y con una necesidad de clausura evidente.

En algunas ocasiones las alumnas resuelven la ecuación, una vez planteada, ya sea de manera formal, como 2º.58, o informal, como 2º.48, que escribe

14-3=x→11.

En otras ocasiones las respuestas se corresponden con un enunciado diferente, como en el caso de 6º.45 o de 1º.64, que escriben , respectivamente,

x-3=11

y

x+3=11.

Estas alumnas tienen la capacidad de resolver el problema con métodos propios y hasta de escribir una ecuación, pero cuando intentan traducir un enunciado concreto a una ecuación no relacionan correctamente los datos (ver en la página 117). Es bastante frecuente, pues no han interiorizado la semántica del lenguaje algebraico e intentan repetir procedimientos aprendidos sin sentido completo.

Por último, como respuestas a la tercera tarea se citan dos ejemplos de cambio de enunciado cuya estructura curiosamente se repite en varios casos:

Una alumna (1º.26) escribe un enunciado que se correspondería a la expresión *17-2=x*,

> *Ella tenía 17 peras pero 2 estaban malas, ¿cuántas peras tenía?*

y otra (1º.7) redacta el correspondiente a la estructura *x+x-2=15*

> *La edad de Beatriz es 2 años menos que la de su hermana Alejandra. La suma de las dos edades da 15. ¿Cuantos años tienen?*

La primera resuelve la ecuación para escribir el enunciado sin darse cuenta de que su enunciado ya no se correspondería con la ecuación propuesta. La segunda presenta un típico error en las alumnas de estas edades pues, en problemas con dicho enunciado, es frecuente obtener resoluciones como la ecuación planteada. La traducción no resulta evidente a estos niveles, como ya se ha explicado en la página 150.

También se hallan alumnas que resuelven correctamente la ecuación que ellas mismas plantean, como 6º.52 o 2º.58. Es curioso que encontremos este tipo de respuestas en niveles tan dispares y con tal diferencia de conocimientos algebraicos, lo que demuestra que la mente de algunas alumnas avanzadas está preparada desde temprano para el álgebra, como declaran varios investigadores (Novotná y Sarrazy, en página 92, y Brizuela y Schliemann, en página 146, entre otros).

Resumiendo, las diferencias relativas a la formalización que se encuentran entre los diferentes cursos debido a los conocimientos específicos del lenguaje algebraico no aseguran una comprensión completa del mismo. Se encuentran problemas de comprensión del papel de la incógnita (ver en la página 129) que se han hallado en algunos ejemplos concretos y que se manifiestan en todos los cursos. Por lo tanto, el uso de símbolos formales no ha alcanzado el desarrollo deseado en los cursos de secundaria.

13ª pregunta

En cuanto a la abstención los resultados no han sido tal como se esperaban, en esta pregunta. En el curso de primaria es mayor que en los de secundaria pero en contra de lo esperado ésta es bastante similar a la de 1º ESO, 6 % y 4 %, respectivamente. En el caso de 2º ESO no hay ninguna alumna que renuncie a responder a la pregunta, aunque sí algunas que dejan en blanco alguna de las cadenas, en cualquier caso representan menos del 0,5 % de dicho curso. A primera vista puede parecer que la dificultad no va a ser tan similar para los dos cursos de secundaria como se suponía.

En 6º EP, analizando la corrección se advierte que, a pesar de la similitud en la abstención con el primer curso de secundaria, no se puede afirmar que la dificultad sea semejante para las alumnas de ambos cursos. En el primero de ellos se observa tan sólo un 8 % de respuestas correctas frente a un 20 % de incorrectas, mientras que en el segundo hay un 40 % de respuestas correctas y un 3 % de incorrectas; por lo que queda patente que la dificultad es bastante mayor para las alumnas de primaria que para las de secundaria, aunque haya una proporción bastante

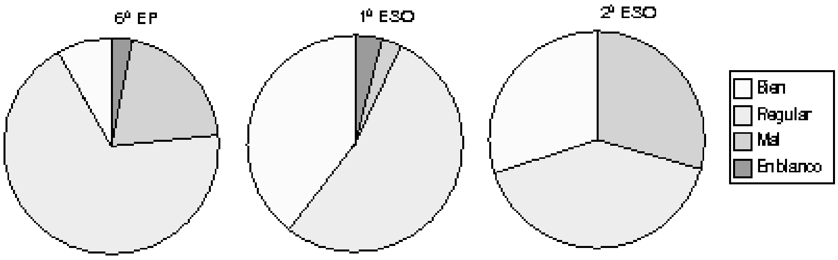


Figura 6.16: Resultados de la corrección en la 13ª cuestión

similar de ellas que se aventuren a dar una respuesta.

Si se comparan las respuestas de los dos cursos de secundaria se obtienen resultados muy similares en cuanto a la corrección: respuestas correctas 40 % y 41 %, respectivamente en 1º ESO y 2º ESO, corrección intermedia de 56 % y 55 %, respectivamente, e incorrección en un 3 % y 4 %, respectivamente. La aparente diferencia que aparentaban los resultados de ambos cursos, tras el análisis de la abstención, queda anulada por la tasa de incorrección en el segundo curso de secundaria.

La mayor parte de las alumnas responde, en los tres cursos, con una corrección intermedia según lo definido en la pregunta 13ª del apartado 5.2.3. Este hecho destaca especialmente en el curso de primaria donde más de las dos terceras partes del alumnado responden de esta manera. En los otros dos cursos la razón entre las alumnas que responden correctamente y las que lo hacen con corrección intermedia es de 3/4 aproximadamente. Por último, si la atención se centra en las dos últimas cadenas las respuestas incorrectas aumentan por lo que la incorrección queda de la siguiente manera: 33 % en 6º EP, 22 % en 1º ESO y 10 % en 2º ESO. Esto demuestra que en cuanto la tarea presenta variaciones respecto al ejemplo la dificultad aumenta, pues se hace necesaria la comprensión del enunciado, del uso del lenguaje algebraico y su operatividad para resolverlo, siendo insuficiente la respuesta exclusivamente mimética que muchas alumnas son capaces de ofrecer.

Parece que lo esperado se va comprobando a medida que se analizan los resultados: las diferencias se hacen más evidentes entre el curso de primaria y los de secundaria y entre estos dos últimos existe una cierta similitud en las respuestas.

En cuanto a la tipología de respuesta se observa una mayor parte de respuesta formal algebraica, escalonada desde el curso de primaria en adelante, respectivamente, 65 %, 91 % y 100 %. Además destaca una respuesta aritmética particular en los dos cursos inferiores aunque mucho más acusada en 6º EP que en 1º ESO, 11 % y 3 %, respectivamente. Se trata de alumnas que se inventan números para realizar las operaciones indicadas o que tan sólo atienden a las inversiones de las operaciones, en ningún caso utilizan la expresión literal, ni siquiera miméticamente. Tan sólo en primaria se presenta todavía otro tipo diferente de respuesta, en un 3 %, que se corresponde con dos alumnas (6º.24 y 6º.38) que completan la letra *n* de manera que tome la forma de la abreviatura de número y a partir de ahí formalizan con dicho signo. Es evidente que la simbolización está ya presente en estas alumnas y el desconocimiento del lenguaje formal algebraico queda superado con su imaginación.

Analizando los tipos de errores se pueden concretar aún más las características propias de cada curso. El error más frecuente respecto de las respuestas dadas en cada curso es la falta de prioridad en la escritura algebraica, pues en la segunda tarea se hace necesario el uso de un paréntesis que apenas algunas alumnas utilizan. Su frecuencia es de un 82 % en primaria, un 92 % en primero de secundaria y un 76 % en segundo. La razón de que este dato sea más favorable para las alumnas de 6º EP que para las de 1º ESO no es el mayor dominio de la prioridad de operaciones de las primeras, sino que muchas de ellas no llegan a finalizar las tareas y completan sólo, de un modo mimético, la primera parte de las mismas. A pesar de que muchas alumnas comprenden el uso del paréntesis en las operaciones aritméticas y han dado el paso de éstas a la formalización algebraica, aún no escriben con la misma naturalidad y rigor en las operaciones algebraicas. Éstas se presentan como algo extraño cuya sintaxis no es ni mucho menos evidente pues su aprendizaje se haya descontextualizado de su propio significado (ver Cohosr-Fresenborg, en la página 118) y, por lo tanto, las incorrecciones no se manifiestan ante sus ojos de la misma manera que en la aritmética.

Comparando los resultados de la prioridad de operaciones obtenidos en esta cuestión con los encontrados en las cuestiones 2ª y 10ª, en las que se presenta a través de la aritmética, se observan diferencias sobresalientes pues este error aparece en la 2ª cuestión, respectivamente en 6º EP, 1º ESO y 2º ESO, en un 16 %, 3 % y 4 % de las alumnas y en la 10ª en un 5 %, 3 % y 2 %, respectivamente en los tres cursos. Para que la comparativa sea posible es necesario relativizar los resultados de la presente cuestión respecto al total de las alumnas de cada curso, aunque las diferencias sean mínimas, un 77 % en 6º EP, un 89 % en 1º ESO y un 76 % en 2º ESO. Es decir, la prioridad de operaciones aprendida casi por la totalidad de las alumnas en cuestiones aritméticas es un escollo notable en la formalización algebraica para todas los alumnas, incluso para aquellas que tienen un mayor hábito en su utilización.

El siguiente error destacable se debe a una falta de comprensión del enunciado pues un 26 %

de las alumnas que responden -correspondientes a un 32 % en 6º EP, un 31 % en 1º ESO y un 18 % en 2º ESO- no escribe las inversiones de las operaciones requeridas, o al menos no todas, un 15 % correspondiente por cursos a 16 %, 9 % y 20 %, respectivamente. Estas alumnas no se corresponden especialmente con un bajo nivel matemático, pues muchas de ellas completan la parte algebraica lo que demuestra que la razón de este frecuente error es la incomprensión del significado de dichas flechas, quizás no suficientemente aclarado en el enunciado. A ellas hay que añadir aproximadamente un 5 % de las alumnas que, en cada curso, realizan las tareas utilizando expresiones que no se corresponden con los datos propuestos, lo que demuestra que tampoco han comprendido el enunciado en absoluto. En total, los errores por incomprensión se presentan en un 53 %, un 45 % y un 43 % de las respuestas dadas en cada curso, respectivamente.

También se encuentran errores al realizar las inversiones en un 15 % de las respuestas de 6º EP, un 1 % de las de 1º ESO y un 6 % de las de 2º ESO. Lo que evidencia unas diferencias considerables entre el curso de primaria y los de secundaria en cuanto a esta capacidad, paso previo a la generalización y formalización de la estructura aritmética (ver en la página 136).

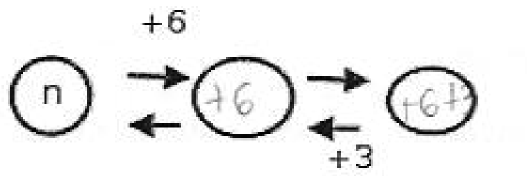
Por otra parte el error algebraico se presenta en un 16 % de las respuestas algebraicas de las alumnas de 6º EP, un 4 % de las de 1º ESO y un 5 % de las de 2º ESO. No hay que olvidar que la formalización algebraica es notablemente superior en los cursos de secundaria y que es casi total en 2º ESO, además, una parte de este tipo de respuestas -11 % del total en 6º EP, 7 % en 1º ESO y 1 % en 2º ESO- se da de un modo exclusivamente mimético pues se observa que todas ellas siguen la misma estructura que en el ejemplo independientemente de las operaciones propuestas. Estos resultados son los previsibles y, a partir de ellos, se puede concluir que la formalización algebraica es menos frecuente y menos correcta en los cursos inferiores que en los superiores.

Se citan algunas respuestas por la originalidad de las mismas, como la de una alumna (6º.7) que escribe en los eslabones de la cadena las operaciones que encuentra sobre las flechas

Textualmente:

$$n \overset{\cdot 5}{\leftrightarrows} \cdot 5 \leftrightarrows n$$

$$n \underset{-6}{\overset{+6}{\leftrightarrows}} +6 \underset{+3}{\leftrightarrows} +6+3$$



o la de otra (6º.61) que escribe siempre un número inventado por *n* y después otro número inventado

Textualmente:

-2 ·4

n ⇆ *n·5* ⇆ *12*

·2 +4

·5 +2

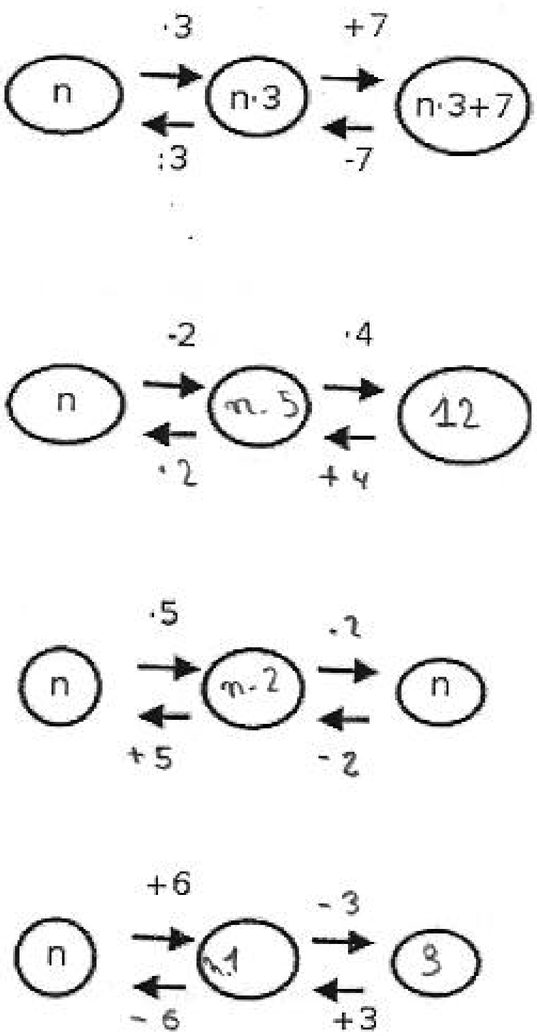
n ⇆ *n−2* ⇆ *n*

+5 -2

+6 -3

n ⇆ *n·1* ⇆ *3*

-6 +3



En ambos casos se aprecia una inmadurez matemática evidente pues no sólo no se comprende el álgebra -normal en esta etapa educativa- sino que se utiliza la aritmética sin la coherencia operativa que sería de esperar a este nivel. En estos otros casos el intento de mimetizar el ejemplo da como resultado expresiones incorrectas como

$n°2+4$ (6º.4)

o

$n \cdot 4+2$ (6º.45),

en vez de

$(n+2)\cdot 4.$

La primera de estas dos alumnas responde a la última cadena

$n6+3=9.$

Se concentran aquí dos errores repetidos en los dos cursos inferiores de nuestro estudio: confundir el sentido de la última operación dada como inversa, utilizándola como directa, e intentar operar los números de la expresión algebraica independientemente de las letras. El primero de ellos puede deberse tanto a un despiste como a una incomprensión del significado de las flechas, que ya se ha anunciado que es relativamente frecuente, el segundo denota un desconocimiento absoluto del significado del lenguaje algebraico y su operatividad, al nivel de la letra ignorada definida por Küchemann (página 124).

Por último se analiza el caso de la alumna 6º.21 que, tras escribir *n-2,* pierde el signo algebraico para continuar *-2·4*.

En todos estos casos se observa un uso del álgebra carente de sentido matemático lo que se presenta con relativa frecuencia en los niveles que estamos estudiando y no sólo en los cursos en los que las alumnas aún no conocen el álgebra sino también en las alumnas con menos madurez algebraica de los cursos más familiarizados con este lenguaje.

Para terminar, se destaca el caso de dos alumnas de 2º ESO (2º.2 y 2º.33) que realizan las operaciones algebraicas que se presentan, reduciéndolas a una expresión polinómica, lo que evidencia una madurez algebraica muy superior al resto de las alumnas del curso. Aunque se suponga que todos deberían ser capaces de realizarlo (ver página 414)-nada más lejos de la realidad- el hecho de que se haga de forma natural y sin que se requiera específicamente señala hacia una automatización de las operaciones algebraicas y un sentido completo de éstas en sí mismas, tanto a nivel semántico (página 121) como sintáctico (página 119) como simplificación mediante expresiones equivalentes.

Como conclusión, se afirma que las diferencias por cursos se manifiestan, como se suponía, tanto en la capacidad para invertir operaciones como en la formalización en lenguaje algebraico. El nivel de utilización del lenguaje algebraico es el esperado en cada curso, mimético en el curso de primaria y escalonadamente más independiente del ejemplo según los cursos son superiores. No obstante, en varias respuestas de las alumnas de secundaria se encuentran rasgos, como los citados anteriormente, que demuestran un uso precario del lenguaje algebraico y una falta de comprensión del valor de los signos que impiden que pueda afirmarse que estas alumnas alcanzan, en su mayoría, un nivel operativo del álgebra formal.

6.2. Análisis global

Para poder estudiar los resultados de un modo global se analizan por separado los resultados de la corrección y la formalización realizando un estudio previo de todos los datos obtenidos de modo que podamos establecer una escala de medida fiable que clasifique los resultados de las alumnas de modo cuantitativo.

Asimismo se buscan las correlaciones que pueda haber entre estas variables y otras posibles con el tipo de enunciado o los resultados académicos de las alumnas.

6.2.1. Análisis de la corrección

Para construir la escala de medida de modo cuantitativo se comienza realizando una ponderación de las respuestas de la siguiente manera:

Se asigna un 0 a cada respuesta en blanco, un 1 a cada respuesta incorrecta dada, un 2 a la respuesta de corrección intermedia y un 3 a la respuesta correcta. De este modo la máxima puntuación se establece en 39 puntos.

Se hallan los siguientes datos para esta variable:

Media	29’46
Mediana	30
Moda	29
Desviación típica	4’5

A partir de ellos se definen los siguientes niveles para nuestro estudio de la corrección:

Nivel 1	[10,16[
Nivel 2	[16,22[
Nivel 3	[22,28[
Nivel 4	[28,34[
Nivel 5	[34,40[

Para delimitar las competencias atribuidas a cada nivel se analizan por cada uno de ellos los porcentajes de corrección obtenidos en cada pregunta obteniéndose el siguiente cuadro, donde el sombreado oscuro indica que ha sido resuelta positivamente por menos de un 50 % de los alumnas de dicho nivel y el claro que lo ha conseguido más del 65 % de las mismas.

Preguntas	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					

Atendiendo a los objetivos correspondientes a cada pregunta (sección 5.1) podemos establecer las siguientes caracterizaciones:

Nivel 1

Las alumnas tienen dificultades en la expresión rigurosa en lenguaje natural, en la comprensión de enunciados matemáticos y su traducción a la aritmética y viceversa. En la respuesta de una alumna (6º. 43) a la primera cuestión podemos leer la siguiente descripción de la figura:

recto, Diagonal, recto, bajo, recto derecha
y luego recto izquierda, Diagonal,
ariba y lo unes.

> *Textualmente: recto, Diagonal, recto, bajo, recto derecha y lugo recto izquierda, Diagonal, ariba y lo unes.*

Resulta un claro ejemplo de las dificultades de expresión que se observan entre los alumnos de estos niveles. Dejando a un lado las faltas de ortografía que comete, su redacción es infantil, inconexa y tremendamente imprecisa. No determina ninguna referencia previa, tampoco detalla las diferentes medidas de los segmentos que componen la figura y, en la mayor parte de ellos, ni siquiera su dirección y esto hace necesaria la representación gráfica para la comprensión de su descripción. Alumnas como ésta no han alcanzado la madurez verbal suficiente para apreciar el rigor en la expresión como una necesidad. Sus respuestas pretenden ser correctas y así aparecen, a menudo, ante sus ojos pues lo que quieren decir no se corresponde con lo que realmente expresan. Su comprensión del lenguaje suele ser deficiente y ello condiciona en gran medida su rendimiento en matemáticas ya que no entienden las definiciones, los planteamientos matemáticos, los razonamientos o los enunciados de las cuestiones propuestas. La desventaja respecto a alumnos que han desarrollado más su capacidad verbal es evidente en el aprendizaje de cualquier materia, pues la comprensión es necesaria para un aprendizaje significativo (ver competencia lectora en OCDE, 2004a).

Un ejemplo de esta dificultad con la comprensión es que ninguna de las alumnas de este nivel responde a la 5ª cuestión, que pedía representar aritméticamente un enunciado matemático expresado en lenguaje natural y viceversa. Como se verá más adelante, las alumnas del siguiente nivel tan sólo realizan la primera parte pero ya demuestran una comprensión mayor del lenguaje, así como un mayor dominio de la aritmética.

Las alumnas de este nivel también tienen dificultades en la comprensión de los signos aritméticos en su dimensión relacional, es decir, la relación que establecen entre los números y no sólo su operatividad, como ya se especifica en la página 174 al definir los objetivos del cuestionario. Si se observa la respuesta de la primera alumna que citamos en este nivel (6º.43) a la pregunta 2ª se ven las dificultades que la aritmética presenta aún para algunas de estas alumnas.

> ⊏10⊐ · 2=3
>
> *a) toma el número y multiplícalo por 5.* 2 · 5=10
>
> *b) toma el número, multiplícalo por 2 y súmale 3.* 2 · 2=4+3=7
>
> *c) toma el número, multiplícalo por 2 más 3.* 2 · 2=4 · 3=12

La primera apreciación que se puede destacar es el hecho de elegir un número cualquiera para realizar las operaciones indicadas. Esta necesidad de la particularización es ya un indicador del bajo nivel de abstracción de esta alumna. Para estas alumnas una operación no tiene sentido si no se aplica a unos números, es decir, la idea de adición, sustracción, producto o cociente no ha sido interiorizada en todo su sentido estructural (Linchevski y Livneh, 1999). Como se argumentaba en el apartado 3.3.1, la enseñanza tradicional de la aritmética se fundamenta en la reiteración de procedimientos operativos que fomentan la memorización y dificultan el aprendizaje significativo de las operaciones aritméticas Kamii (1988), es decir, los alumnos aprenden a operar de manera mecánica. Esta metodología favorece la comisión de errores y no fomenta el desarrollo del pensamiento lógico, que requiere de la formación de las estructuras operatorias basadas en la conservación y la reversibilidad (en la página 132).

Por este motivo las operaciones no tienen sentido por sí mismas, sino acompañando a números que es como se presentan en la práctica, y la idea de *describir una operación dada,* implícita en el enunciado, no se comprende sin un número con el que operar para las distintas opciones de respuesta.

Por otro lado, en cuanto entra en juego más de una operación -opciones de respuesta segunda y tercera- la sintaxis de la aritmética presentada es incorrecta. Ya se ha explicado en la página 154 que la relación expresada por el signo igual es causa de frecuentes errores entre los escolares de primaria -a veces también en secundaria- ya que su utilización más frecuente es la de operador, que ofrece un resultado, en vez de símbolo de equivalencia o igualdad. De este modo la alumna escribe un signo igual cada vez que quiere evaluar un resultado, independientemente de los términos que haya delante o detrás del mismo.

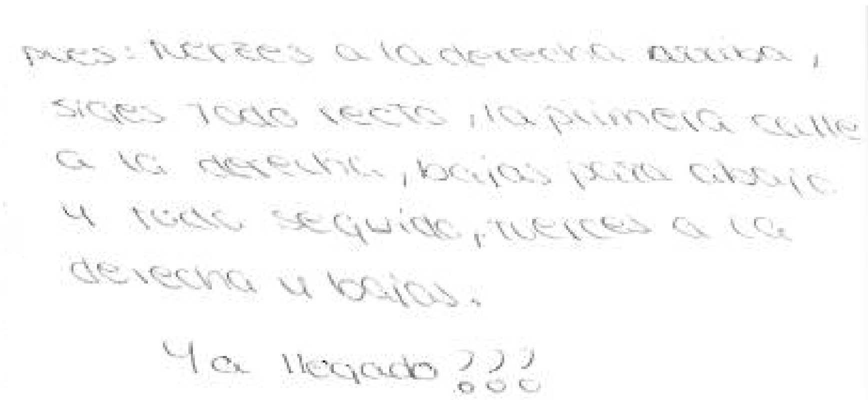
Pero lo más significativo desde el punto de vista de esta caracterización es la interpretación que esta alumna realiza de la tercera opción de respuesta. Se había apuntado en la pregunta 2ª del apartado 5.2.3 que su redacción se proponía imprecisa con el objetivo de evaluar el grado de rigor en la expresión de las alumnas. La respuesta de la alumna evidencia que la ambigüedad en la expresión no es motivo de duda o preocupación para ella y deduce que el *más* del enunciado implica otra multiplicación más y no una suma. Esto confirma que el nivel verbal de estas alumnas es muy bajo, como ya se ha apuntado, y que el rigor en la expresión no es un rasgo necesario, ni siquiera valorable positivamente para ellas.

Finalmente la alumna escoge la primera opción de respuesta como la más adecuada a la operación indicada, demostrando con ello un bajo nivel aritmético y una falta total de respeto a la prioridad de operaciones que sigue en la línea del déficit de significatividad en el aprendizaje de la aritmética. Además, escribe el resultado obtenido en el cuadro en blanco, es de suponer que la costumbre de muchos profesores de recuadrar las soluciones le habrá llevado a esa conclusión.

Sin necesidad de ilustrar con otros ejemplos diferentes se entiende fácilmente que las alumnas de este nivel no son capaces de detectar regularidades o relaciones entre números ni, por supuesto, generalizarlas o representarlas de alguna manera. Ni siquiera en el caso de una fórmula conocida, como se observa en la respuesta de la alumna 2º.1 a la cuestión 7ª, que enuncia algebraicamente el teorema de Pitágoras $h^2 = a^2 + b^2$ cuando se pedía deducir la fórmula del área de un cuadrado de lado l. La razón es que su baja madurez verbal les impide desarrollar su aprendizaje al mismo ritmo que otras estudiantes por lo que encuentran dificultades para realizar por sí solas un análisis de casos que requiere de hábitos operativos complejos, como disociar-asociar, clasificar, comparar, abstraer, etc. y, aunque consiguiesen detectar una norma común a varios casos, sus dificultades de expresión impedirían una argumentación suficiente en lenguaje natural, cuanto más con un tipo de representación de orden superior, como es el álgebra (ver página 92).

Nivel 2

Las alumnas de este nivel siguen teniendo dificultades en la expresión rigurosa en lenguaje natural aunque mejoran su uso del lenguaje con relación al nivel anterior, muestra de ello es la respuesta a la 1ª cuestión de una alumna (2º.59) que se expresa como si estuviese dando instrucciones para localizar una dirección en la calle:



`Textualmente: pues: tuerces a la derecha arriba, siges todo recto, la primera calle a la derecha, bajas para abajo y todo seguido, tuerces a la derecha y bajas.`

`Ya llegado???`

La ortografía es deficiente pero más aún lo es la orientación en el plano que demuestra con sus indicaciones: no toma referencias previas, las distancias le son indiferentes y alguna de las direcciones es confusa. Su expresión adolece de falta de rigor ya que sin la representación gráfica sería imposible saber cuál es la figura con la descripción de la alumna. Su comprensión del lenguaje se supone igualmente deficiente, para ilustrarlo veamos la respuesta que da a la cuestión 12ª. Se trata de traducir el enunciado *"María y Juan son hermanos. Juan tiene 3 años y la suma de sus edades es 14 años"* a una expresión matemática.

Evidentemente no se espera que una alumna de este nivel sea capaz de escribir la expresión correcta *x+3=14,* pero la suya ni siquiera es *14-3=11*, como veremos en alumnas del siguiente nivel (6º.1, por ejemplo), sino *14+3=17.* El enunciado ha sido malinterpretado confundiendo el resultado *"es 14 años"* con otro sumando que en ningún caso podría representar *"la suma de sus edades"*. El grado de dominio del lenguaje sigue siendo bajo para las alumnas de este nivel, ya sea en su comprensión o en su expresión. Como en el nivel anterior las alumnas tienen problemas en su aprendizaje de las matemáticas derivados de esta deficiencia lingüística.

El desarrollo aritmético de estas alumnas también es bajo. Se manifiesta, por ejemplo, a través de la respuesta de la alumna 6º.61 a la pregunta 5ª, en la que expresa la operación de *repartir* por medio de una diferencia.

Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	⊏*2*⊐+⊏*7*⊐
El cine cuesta 6€ y voy tres veces esta semana	3·6	⊏*3*⊐·⊏*6*⊐
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños	*18−6*	*18−6*
Tengo 9 chupetes y me quitan 5	9-5	*9−5*
Hay 8 patos en el lago y me traen 2	*8+2*	⊏*8*⊐+⊏*2*⊐-⊏*x*⊐

La comprensión de los signos aritméticos sigue siendo deficiente pero mejora significativamente en el sentido estructural ya definido, es decir, como relación entre números. Las alumnas de este nivel pueden operar correctamente e incluso expresar con rigor la prioridad de operaciones -6º.61 da la respuesta correcta a la 2ª pregunta-, pero aún tienen dificultades a la hora de dar sentido a una operación y entender el significado de cada uno de los términos que la componen. Análogamente al caso anterior son problemas que se originan en un aprendizaje no significativo de la aritmética y que conducen a un inevitable retraso de la madurez lógica de los alumnos, pues no se han formado las estructuras operatorias propias de la aritmética, que resultan necesarias para el razonamiento formal (Piaget, 1987).

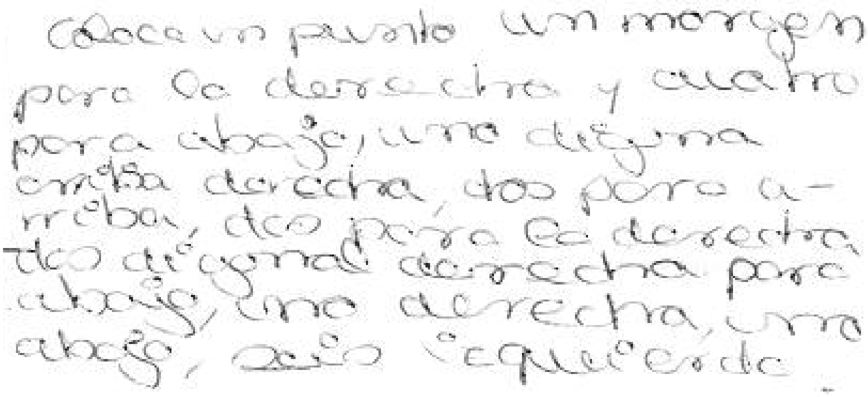
Las alumnas de este nivel son capaces de detectar regularidades con números y generalizar situaciones matemáticas que se representen mediante una fórmula matemática conocida -la misma alumna 2º.59 deduce correctamente la fórmula del área del cuadrado a partir de su lado en la cuestión 7ª respondiendo $A = l \cdot l$ y en el caso de otra alumna (1º.1) encontramos $A = l^2$- pero tienen dificultades para hacerlo en otras situaciones numéricas desconocidas como nos muestra esta misma alumna en la pregunta 4ª -concluye que la característica común de las sumas *6+2; 4+4 y 3+5* es que todos son números positivos-, o esta otra (6º.61) -comprueba aritméticamente que dan como resultado *8,* pero no expresa su conclusión-.

Como en el nivel anterior, las alumnas no son capaces de comprender de manera significativa la formalización algebraica y el papel de la incógnita y tienen problemas en la detección de regularidades y relaciones y en la generalización, debido a su baja capacidad verbal. La diferencia más significativa con ellas la encontramos, como ya se ha dicho, en el manejo de fórmulas matemáticas conocidas.

Se puede afirmar que las alumnas de este nivel comprenden y pueden deducir fórmulas matemáticas muy sencillas pero, a pesar de que emplean en cierto modo signos algebraicos, no podemos llamarlo formalización en el sentido dado en este trabajo (ver 5.2.3) pues lo hacen desde una perspectiva memorística o mimética sin dar sentido completo al signo como representante de objetos matemáticos.

Nivel 3

Las alumnas de este nivel alcanzan una mejor expresión en lenguaje natural, comenzando a apreciar el rigor y valorando la utilidad de la información. Se puede ver un ejemplo en la respuesta a la primera cuestión de la alumna 6º.29



`Textualmente: coloca un punto un margen para la derecha y cuatro para abajo, una digona arriba derecha, dos para arriba, dos para la derecha, dos digonal derecha para abajo, uno derecha, uno abajo, seis izquierda.`

Salvo algún error en la ortografía de la palabra *diagonal,* la redacción es bastante más clara en este caso que en los ejemplos anteriores. Para empezar sugiere unos ejes y un origen, aunque sin mucha precisión, -*coloca un punto y un margen para la derecha y cuatro para abajo*- que le sirvan como referencia y desde ahí describe la secuencia de instrucciones precisas para realizar la representación de la figura en cuestión, sin olvidar las distancias y determinando con suficiente claridad las direcciones y sentidos. El salto cualitativo en el rigor es importante respecto a los niveles anteriores aunque la redacción aún puede mejorar para ser más específica con los conceptos a los que se refiere en cada momento y sobre todo menos ambigua en cuanto a las acciones descritas. Detectamos muy claramente estas deficiencias en su respuesta a la pregunta 3ª en la que concluye

`que todos los resultados de los polígonos dan 180º`

para expresar que la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera es 180º.

Esta mejoría en la expresión va acompañada, como es de suponer, por una mejor comprensión del lenguaje, ya que las alumnas de este nivel han alcanzado un desarrollo aceptable de razonamiento verbal. Tienen un manejo suficiente del vocabulario y expresan las ideas con aceptable claridad. Se observa un ejemplo en la respuesta de 1º.6 a la pregunta 5ª en la que demuestra tanto dominio del lenguaje natural como de la aritmética a la hora de traducir de uno a otro.

Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	⊏2⊐+⊏5⊐
El cine cuesta 6€ y voy tres veces esta semana	3·6	⊏6⊐·⊏8⊐
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños	`18:6`	`18:3`
`Tengo 9 canicas y me quitan 5`	9-5	`9-7`
`Tengo 6 bolígrafos y me regalan 2, pero se me pierden 4`	`6+2-4`	⊏6⊐+⊏2⊐-⊏3⊐

El nivel aritmético de estas alumnas es también bastante elevado, no tienen problemas con el cálculo numérico y mejoran más aún la comprensión de las relaciones operativas aritméticas. Sin embargo la necesidad de la particularización se muestra evidente, como hemos podido ver en el ejemplo anterior, pues las alumnas de este nivel aún no son capaces de desprenderse de los números para hacer una abstracción de la estructura operatoria como ocurre en el siguiente nivel.

Estas alumnas son capaces de detectar y expresar en general relaciones y regularidades más complejas que en el nivel anterior, es decir, no basadas en fórmulas conocidas previamente. Un apoyo a esta afirmación es que la mayor parte de ellas, como por ejemplo 1º.27, generalizan correctamente en la cuestión 4ª. No obstante estas alumnas aún no son capaces de usar signos propios o algebraicos para representar estas informaciones generalizadas. Veamos la respuesta de 2º.19 a la pregunta 10ª:

> *Piensa en un número, multiplícalo por 2, súmale 4, divídelo entre 2, réstale el número que habías pensado. ¿El resultado es, siempre, 2? ¿Por qué?* `Porque lo divides y multiplicas por lo mismo, y luego le restas el número que habías pensado y como el 4 luego se divide entre 2 pues es 2.`
>
> *¿Puedes expresarlo de manera que sirva para cualquier número que pienses, sin especificar cuál?* `En el de arriba.`

Su expresión no es lo rigurosa que podría exigirse pero se puede aceptar como suficientemente clara dada la dificultad que tiene redactar una operación tan compleja en lenguaje natural. La inversión de operaciones (página 136) está especificada -*lo divides y multiplicas por lo mismo*- y la justificación del resultado final sugerida correctamente aunque sin una explicación muy precisa -*como el 4 se divide entre 2 pues es 2*.

Después, a la hora de expresar esta afirmación *"para cualquier número sin especificar cuál",* no es capaz de utilizar ninguna generalización de la aritmética sino que se contenta con su explicación como generalización suficiente. En su redacción no especifica ningún número concreto, por lo que se puede considerar válida en general, pero aún no se ha suscitado en la alumna el deseo o la necesidad de utilizar el símbolo, como veremos en alumnas de niveles superiores que sí dan respuesta a esta exigencia. Por lo tanto se considera propio de las alumnas de este nivel la dificultad para simbolizar a pesar de su capacidad para generalizar ideas y situaciones matemáticas aritméticas.

En cuanto a otras situaciones no numéricas, estas alumnas tienen serias dificultades tanto en la detección de regularidades y relaciones, como en la generalización, la simbolización y la formalización de las mismas.

Para terminar se destaca la siguiente expresión como traducción de uno de los enunciados de la 12ª cuestión. No es necesaria su especificación pues ya ha sido citado en el nivel anterior. Se trata de la respuesta *14-3=11* de la alumna 6º.1. Dicha expresión es correcta aritméticamente hablando y se corresponde con la operación implícita en el enunciado que se facilitaba, por lo tanto la traducción que la alumna hace del mismo no es, en esencia, errónea. Sin embargo la cuestión no trataba que la alumna encontrase ninguna edad desconocida ni realizase ninguna operación aritmética, sino de generar una situación de conflicto en las alumnas que deben expresar una cantidad que desconocen mediante una operación matemática. Alumnas de este nivel no tienen asimilado el valor de la incógnita (en la página 129), ya sea por desconocimiento o por falta de interiorización según el curso académico al que pertenezcan, por ello no son capaces de utilizar la x en una ecuación a pesar de que se les ofrece como anotación en el enunciado.

Resumiendo, es el hecho de que las alumnas comiencen a deducir y generalizar en casos aritméticos y su capacidad para expresar medianamente esta generalización a partir del lenguaje natural lo que caracteriza a las alumnas de este nivel.

Nivel 4

Este nivel representa un cambio importante en la expresión de informaciones en cualquier lenguaje por parte de las alumnas. En el nivel anterior se había alcanzado un cierto desarrollo del rigor que se culmina en este, eliminando las imprecisiones en el uso del vocabulario y mejorando la redacción en general. Respuestas como la que se observa en la cuestión 10ª de la alumna 2º.34 son una muestra de la madurez verbal de estas alumnas que ofrecen claridad en el fondo y concisión en la forma:

> *Porque al multiplicar el número por 2 y sumar 4 y dividir entre 2 y restar el mismo número sería como si hicieras 4:2.*

Las alumnas de este nivel han comprendido la necesidad de rigor en las informaciones y sus expresiones suelen permanecer fieles a la idea que intentan comunicar. En ellas valoran la calidad de los términos utilizados, así como la precisión de su significado. Esto no asegura la corrección de la respuesta dada, sino que dicha declaración estará bien expuesta y comunicará exactamente el sentido que pretenda darle el comunicador. Por ello no encontraremos, como en niveles anteriores, situaciones en las que la idea que las alumnas quieran expresar sea adecuada y sin embargo la respuesta sea incorrecta.

La simplificación de operaciones inversas está claramente implícita en este enunciado, aunque no de forma expresa. Estas alumnas son capaces de enunciar reglas generales independientemente de los números concretos a los que se apliquen y se atisba ya la disposición a operar con conceptos abstractos aunque aún no lo hagan de una manera formal. Para ello han tenido que alcanzar la comprensión de la operatividad necesaria para abstraer la estructura algebraica de la misma y por lo tanto son capaces de utilizar los signos matemáticos en su dimensión relacional más que con un sentido simplemente operatorio. Quiero decir con ello que la aritmética ha pasado de ser una herramienta de cálculo a ser un sistema matemático perfectamente estructurado, con sus elementos y las relaciones entre ellos bien definidas, lo que genera en las alumnas la estructura necesaria para el desarrollo del álgebra (ver 3.1.2)

Todo esto demuestra un dominio total de la aritmética que, unido a la madurez verbal alcanzada, posibilita el dominio de la traducción de enunciados entre el lenguaje natural y la aritmética, que ya venía perfilándose en los niveles anteriores.

En cuanto al análisis de situaciones matemáticas las alumnas son plenamente capaces de detectar y generalizar reglas y relaciones en casos numéricos, como ya lo eran las alumnas de niveles anteriores, pero además pueden expresarlas con cierta corrección mediante el uso de símbolos, ya sea con signos informales o tomados del álgebra formal. Podemos observar el caso de la alumna 6º.26 que utiliza el cuadro en blanco para expresar los números desconocidos tanto en la respuesta a la cuestión 9ª:

Que el de la derecha es el doble que el número de la izquierda
□:2=□

como a la 10ª:

Porque al dividir entre dos y restar el número que habías pensado siempre te dará 2
⊏?¿⊐·2+4:2−⊏?¿⊐=2.

En ambos casos se evidencia un sentido de representación del signo, que adquiere la categoría de símbolo (en la página 109), y además de variabilidad, pues dicho símbolo no se concreta en ningún número particular. Sin embargo aún no se ha adquirido el rigor que exige la formalización algebraica por dos razones. La primera es que en el segundo de estos ejemplos la alumna no respeta la prioridad de operaciones, pues le falta un paréntesis, aunque ello no se considera indicio de un peor nivel aritmético ya que la novedad de la expresión con símbolos impide que la alumna trate la misma como una operación aritmética normal y repare en detalles tan sutiles (ver en la página 194). La segunda y más significativa es que en el primer ejemplo se ha utilizado un mismo signo para representar conceptos diferentes (ver en la página 156), es decir, el mismo signo en una misma expresión adquiere valores numéricos distintos. Como ya se ha explicado, el sentido de variabilidad del signo algebraico presenta una importante dificultad dado el cambio que supone respecto al concepto de conservación adquirido con el aprendizaje del número (ver en la página 144). Entender que un mismo signo puede representar distintos números tiene cierta complejidad, pero más aún si para expresar números diferentes hay que utilizar signos diferentes. Esta relación resulta de difícil comprensión para los alumnos que se inician en el lenguaje algebraico, ya que no es una aplicación , pero una vez restringida a una expresión o desarrollo algebraico concreto se convierte en ella (ver en la página 127).

Lo mismo ocurre en el ejemplo citado en la página 238 en el que la alumna 6º.56 responde a la cuestión 10ª utilizando la x como representación de varios números diferentes y en el que resulta más chocante este error, pues el sentido del signo algebraico está mucho más definido que el del signo informal, por ello consideramos más intolerable esta última expresión que la de la pregunta 9ª de la alumna 6º.26, aunque para las alumnas no presentan ninguna diferencia en su significado. La diferencia entre estas dos respuestas es de tipo sintáctico, pues en el caso de 6º.56 se va evaluando cada operación por separado en vez de escribirlas todas seguidas y evaluarlas al final. Se puede decir que la respuesta de 6º.56, a pesar de tener signos algebraicos, adolece de un menor nivel algebraico, pues depende más de la aritmética al ser traducción directa de su ejemplo particular

16·2=32; 32+4=36; 36:2=18; 18-16=2
x2=x; x+4=x; x:2=x; x-x=2

Por otra parte las alumnas de este nivel siguen teniendo algunas dificultades en la expresión de regularidades y relaciones en casos no numéricos aunque existe una mejora significativa respecto al nivel anterior. Muestra de ello son las respuestas siguientes:

La alumna 6º.9 responde a la cuestión 3ª

Los grados de los tres ángulos de todo triángulo siempre suman 180º.

mientras que en 2º.2 se puede leer

Como en todos los triángulos, la suma de sus tres ángulos es siempre 180º.

Únicamente se diferencian en la forma de expresión en lenguaje natural, más adecuada en el segundo ejemplo que en el primero. Como ya ha sido analizado en este mismo apartado sólo se destaca el hecho de que en ambas respuestas se observa una generalización a la que alumnas de niveles anteriores no estaban habituadas. Quizás sea una sutileza que aparentemente carezca de importancia pero el hecho de que la palabra *siempre* aparezca explícitamente en el enunciado es un rasgo definitivo de la generalización de la relación. Cuando se analizan cualitativamente los avances de las alumnas en cuanto a su expresión, cualquier pequeña diferencia es digna de mención y constituye un progreso destacable en el largo camino de la construcción algebraica.

En la simbolización y la formalización de estas relaciones no numéricas se hallan los mismos problemas que se han adelantado en otros casos. Por ejemplo, la alumna 1º.34 escribe

Se le suma dos al número de triángulos y te da el número de lados, n=n-2 sin especificar el significado de cada letra, aunque podría deducirse de su propio enunciado si correspondiese de un modo literal, lo cuál tampoco ocurre. Se considera que en la expresión algebraica la primera *n* hace referencia al número de triángulos mientras la segunda se refiere al número de lados para que la información sea la adecuada. En cambio la respuesta de la alumna 1º.47 no nos plantea esta dificultad pues, a pesar de que sólo utiliza una letra, especifica junto a su expresión el significado de la misma, aunque no utiliza símbolo para el otro concepto.

> *Se forman siempre dos triángulos menos de los lados que hay*
> *n-2=triángulos*
> *n=a los lados*

Esto demuestra que para que sea significativo el aprendizaje del álgebra formal no puede partir de ejemplos ya acabados, es decir, debe ser progresivo, de dentro hacia afuera, permitiendo que sea el propio alumno el que intente expresar informaciones de modo general, aproximándose poco a poco a la expresión ideal. En caso contrario se obtienen errores, como el anterior, propios de la falta de interiorización de la función del símbolo y de un uso del mismo vacío de significado (ver Herscovics en la página 118).

Para terminar se cita la respuesta de una alumna (1º.41) al primer enunciado de la pregunta 12ª

> *x+3 → 1x+3; x+4; x=4.*

En este caso concreto la alumna entiende la expresión *1x* como yuxtaposición aditiva, es decir, *1+x*. Por lo tanto la expresión *1x+3* se convierte en *x+4*. La necesidad de resolver una expresión algebraica a modo de ecuación es relativamente frecuente entre los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra (ver en la página 157) y demuestra cuan poco natural resulta el aprendizaje de dicha materia que, en la mayor parte de las ocasiones, se enseña como reiteración de procedimientos vacíos de significado y, por lo tanto, no se interioriza como herramienta de representación sino como reglas que hay que memorizar, como afirma Herscovics. De aquí surge la conclusión *x=4* de la alumna, que está más habituada a resolver ecuaciones que a expresar algebraicamente informaciones del tipo del enunciado. Por lo tanto, a pesar de la costumbre de tratar con ecuaciones las alumnas de este nivel siguen teniendo problemas para comprender el valor de la incógnita y diferenciar dicha función de cualquier otra que pueda presentar un signo algebraico (ver en la página 129).

Respecto a las demás capacidades ya presentes en alumnas de anteriores niveles es evidente que también las poseen, es decir, son capaces de deducir y utilizar fórmulas matemáticas.

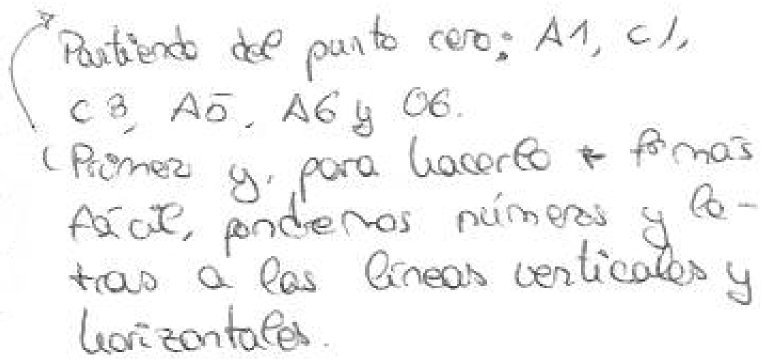
Podemos concluir que la característica principal que define a las alumnas de este nivel es que experimentan una mejora significativa respecto a las alumnas del nivel anterior muy destacable en cuanto al uso del lenguaje matemático, ya sea natural, de invención propia o formal.

Nivel 5

En este nivel las alumnas son capaces de expresarse con suficiente rigor, comprender y traducir enunciados matemáticos del lenguaje natural a la aritmética y al álgebra y viceversa, comprender los signos matemáticos en su dimensión relacional y expresar matemáticamente informaciones derivadas de regularidades o relaciones entre números.

Todas estas capacidades ya podían encontrarse entre las alumnas del nivel anterior, aún así es de destacar el hecho de que la búsqueda de rigor en la expresión, apoyada por el estudio de los sistemas de referencia cartesianos, incita a las alumnas a evolucionar su tipología de respuesta a la primera cuestión incluyendo coordenadas, bien formales o informales. Veamos dos ejemplos:

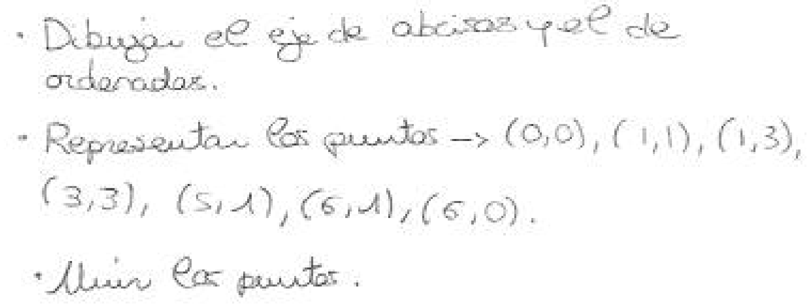
En el primero de ellos la alumna (2º.62) establece un sistema de coordenadas basado en números para las abscisas y letras para las ordenadas, como sigue:


Partiendo del punto cero: A1, C1, C3, A5, A6 y O6.
(Primero y, para hacerlo ~~+~~ más fácil, pondremos números y letras a las líneas verticales y horizontales.

`Textualmente: Primero y, para hacerlo más fácil, pondremos números y letras a las líneas verticales y horizontales.`

`Partiendo del punto cero: A1, C1, C3, A5, A6 y O6.`

No se puede negar que es un sistema formal, aunque no usual. Como ella varias alumnas más inventan sistemas de coordenadas con los que situar los puntos que une la figura. En el segundo de los ejemplos a destacar (1º.17) la alumna utiliza las coordenadas cartesianas convencionales.


· Dibujar el eje de abscisas y el de ordenadas.
· Representar los puntos -> (0,0), (1,1), (1,3), (3,3), (5,1), (6,1), (6,0).
· Unir los puntos.

Textualmente:

- Dibujar el eje de abscisas y el de ordenadas.

- Representar los puntos → (0,0), (1,1), (1,3), (3,3), (5,1), (6,1), (6,0).

- Unir los puntos.

En ambos casos se puede hablar de una formalización total por analogía con otras situaciones conocidas en las que las alumnas han empleado el sistema cartesiano para la situación de puntos en el plano.

Para el resto de las capacidades, como novedad, estas alumnas son capaces de detectar y generalizar relaciones entre objetos matemáticos en situaciones de mediana dificultad, aunque siguen teniendo algunas dificultades para hacerlo en otras más complejas. Además la simbolización y la formalización en estos casos no representa un problema, como veremos más adelante.

En el nivel anterior se había obtenido una mejora importante en cuanto a este punto, si bien el manejo de los símbolos aún presentaba serias deficiencias. A continuación se destacan algunos ejemplos que ilustran las competencias alcanzadas en este nivel.

En la respuesta de 1º.20 a la cuestión 9ª (ver página 232) se observa una expresión que utiliza signos informales para representar números de una manera evidente.

En el nivel anterior, en un ejemplo similar, se apreciaba que el signo era el mismo en el caso del primer y el segundo número y tomaba valores diferentes. Sin embargo esa ambigüedad está superada en este nivel. La propia alumna diferencia con distintos signos los dos números a representar pero, además, por si esto no quedase lo suficientemente claro, especifica mediante flechas el significado de cada uno de ellos. La relación entre el número y el signo ha superado la etapa de imprecisión y ahora se manifiesta segura en sus peculiaridades, como veíamos en el análisis del nivel anterior, según la restrinjamos o no a una expresión concreta.

La respuesta a la pregunta 11ª de 2º.77 nos ofrece otro ejemplo de estas mismas características, solo que algo más común por los signos utilizados

`n→lados        x→nº de triangulos`
`n-2=x.`

En este caso el hecho de introducir una letra nueva no sólo es valorable en el sentido antes mencionado de la relación entre el número y el signo sino que manifiesta que la alumna comprende el valor representativo de la letra como símbolo algebraico, pues es capaz de utilizar por propia iniciativa otras letras no sugeridas para este fin. Por último, en esta misma línea podemos destaca la respuesta de 2º.84 a la misma pregunta. En ella no se especifica el significado de cada uno de los signos, pero utiliza la *t* para representar el número de triángulos lo cuál es una estrategia frecuente en la resolución de problemas y denota este hábito por parte de la alumna. Digamos que sería la expresión más habitual de todas las esperadas y, por lo tanto, la más común para el matemático, salvo el hecho de que lo exprese con adición en vez de con sustracción, lo que resulta igual de correcto aunque menos frecuente para este caso particular:

`N=t+2`

La alumna 1º.20 ofrece la respuesta siguiente a la 10ª cuestión:

`el nº=x` $\frac{x2+4}{2} - x$

La diferencia fundamental entre esta expresión y las anteriores de esta misma cuestión está en el rigor y la naturalidad con la que se representan las operaciones ya sean con números o con letras. Se advierte un conato de operatividad con el signo algebraico que hasta ahora no se había manifestado en otros niveles. Esto es un indicio inequívoco del nivel de madurez que va adquiriendo el álgebra en estas alumnas que no sólo son capaces de representar simbólicamente los números u otros objetos matemáticos mediante signos sino que, sin necesidad de un referente aritmético que mimetizar, pueden usarlos en el contexto de una operación aritmética con más o menos rigor. En un ejemplo del anterior nivel pudimos observar una respuesta a esta misma cuestión en la que se faltaba a la prioridad de operaciones, la respuesta concreta de la alumna 1º.20 respeta esta prioridad gracias al uso de la fracción para representar el cociente, sin embargo otras respuestas de este mismo nivel consideran correctamente la prioridad de operaciones mediante el uso del paréntesis, como podemos ver en 2º.80

$$(x \times 2 + 4) : 2 - x.$$

En el nivel anterior se afirmaba que no se podía considerar esta falta de rigor como un síntoma de bajo desarrollo en el campo de la aritmética debido a que las alumnas están centradas en el uso de nuevos símbolos que aún no han ubicado correctamente dentro de su sistema de conocimientos matemáticos, por lo tanto no han delimitado sus funciones, ni las relaciones entre ellos, ni su operatividad. Todo esto se evidencia ahora comparativamente, pues las alumnas de este nivel son capaces de considerar el signo algebraico como símbolo completo y realizar con él las mismas operaciones que con sus referentes aritméticos. Lo vemos en la página 239, en el desarrollo que esta alumna (2º.80) hace de la expresión dada:

$$(2x + 4) : 2 - x; x + 2 - x$$

Por primera vez se nos presenta una simplificación algebraica. En 2º.34 (página 268) se observaba una especie de simplificación en la respuesta a esta misma cuestión pero expresada en lenguaje natural. Ya estaba presente esa estructura prealgebraica de la que se ha hablado (ver en la página 91), pero la dificultad que suponía para las alumnas de niveles anteriores el hecho de simbolizar y posteriormente dotar al símbolo de todas las propiedades de su referente numérico, con las diferencias propias de la notación algebraica, ha sido superada por alumnas como ésta.

Por último se analiza si se ha producido algún avance en cuanto al significado de la letra como incógnita ya que en el nivel anterior, a pesar de la familiaridad de muchas alumnas con las ecuaciones, no se encontraron indicios de su comprensión y sí errores propios de un aprendizaje no significativo de dicha función (ver en la página 148). Se citan los siguientes ejemplos:

El primero es la respuesta de la alumna 1º.30 la segunda tarea de la cuestión 12ª

```
3+x=14; x=14-3; x=11
```

Como esta alumna todas las demás de este nivel escriben correctamente la ecuación, si bien alguna transpone los términos escribiendo una ecuación equivalente. En general no la resuelven, ya que no era lo que se pedía, pero en los casos que lo hacen la resolución es correcta. Ninguna de las alumnas de este nivel comete un error similar al de 1º.41 (en la página 271), que evidenciaba la falta de comprensión de las distintas funciones del signo algebraico. Demuestran un suficiente dominio del procedimiento de resolución de las ecuaciones pero esto no nos basta para saber si el valor de la incógnita está unívocamente definido para estas alumnas.

Para profundizar en esta cuestión se analizan algunas de las respuestas al último apartado:

Se trata de escribir un enunciado que se corresponda con la expresión *x-2=15*. Las respuestas a esta tarea dan información sobre el sentido que las alumnas confieren a la letra *x* en esta expresión, es decir, el valor del signo algebraico como incógnita (ver en la página 129).

Se hallan ejemplos que especifican la letra en el enunciado, demuestran un nivel de representación menor y, por tanto, manifiestan una comprensión peor el valor de la incógnita. Algunos no respetan la sintaxis de la ecuación, como 1º.21:

> *Las edades de Gloria y María suman x años, si María tiene dos y Gloria 15, cuál es la suma de sus años.*

Sin ser un enunciado incorrecto, su redacción sugiere una resolución aritmética del tipo *2+15=17*. El uso del álgebra no está justificado para esta alumna que, a pesar de que entiende que lo que se quiere calcular es la *x,* no es capaz de llenar de significado este signo para que adquiera el valor de incógnita. Su expresión *x=2+15* se queda a nivel de la concreción operatoria y no puede considerarse algebraica a pesar de que contenga una letra.

El enunciado de la alumna 6º.12 nos muestra una expresión perfecta ya que el enunciado se corresponde fielmente con la expresión proporcionada:

> *Gonzalo tiene 2 caramelos menos que Andrea. Andrea tiene x y la resta da 15.*

La traducción es de tipo semántico (ver en la página 150) ya que se intenta representar la relación entre términos de una forma global y no como traducción literal. Sin embargo, la letra parece tomar el valor de un parámetro, pues no hay ningún indicio de que la alumna esté pensando en varios números en su representación. Más bien sigue habiendo una clara correlación entre el enunciado y la operación aritmética, apoyada por expresiones como *”tiene x”* o *”la resta da”*. Además no encontramos ninguna pregunta explícita en el enunciado, lo cuál no era necesario pero sí resulta un indicio de la comprensión del valor de la incógnita como número desconocido que debemos hallar de modo que verifique la igualdad.

En este sentido hay alumnas que preguntan específicamente por la *x* (2º.83)

> *Montse tiene x caramelos y tiene que regalar dos a su hermano, y ahora sólo tiene 15, ¿cuánto vale x?.*

Su expresión es algo más enrevesada ya que el procedimiento utilizado es la traducción literal (traducción sintáctica, en la página 150) pero también se corresponde con el enunciado, por lo tanto es correcta. Además la x aparece claramente como incógnita a pesar de que su nivel de abstracción no sea muy elevado, pues el enunciado es una traducción literal de la ecuación.

La siguiente alumna (2º.57) mantiene exactamente el mismo esquema y también es una traducción literal, pero su nivel de representación es algo mayor. La alumna no necesita especificar la letra x en el enunciado, para ella es evidente que se simbolizará de esta manera el dato desconocido que se quiere calcular por lo tanto se deduce de ello una comprensión completa del significado de la incógnita.

> *Mónica ha regalado dos caramelos, si ahora tiene 15, ¿cuántos tenía?.*

Aún se puede leer un enunciado algo más desarrollado en el siguiente caso (2º.75)

> *Ana tenía la maleta llena de camisetas. Sacó dos, al contarlas se dio cuenta de que le quedaban 15.*

A pesar de no indicar una pregunta acerca del dato desconocido es evidente que la alumna está interpretando la x como incógnita, respetando perfectamente la sintaxis de la ecuación.

Entre estas alumnas se presentan distintos niveles de abstracción del valor del signo algebraico, la representación más inmediata es la de parámetro, es decir, número concreto oculto tras de la apariencia de una letra. Evidentemente es la acepción más simple y más cercana a la aritmética. El sentido representativo que acompaña al concepto de incógnita obliga a las alumnas a una abstracción mayor, por lo que son menos las que adquieren completamente este concepto aunque se puede considerar suficiente para esta etapa el desarrollo del mismo que alcanza la mayor parte de ellas. Así pues se considera un rasgo característico de este nivel la comprensión del valor del signo algebraico como incógnita.

A modo de resumen se puede afirmar que la diferencia fundamental con las alumnas del nivel anterior, en las que ya se apreciaba un nivel incipiente del uso del álgebra, se encuentra en la profundización en la semiótica de los lenguajes matemáticos, es decir, en alcanzar un nivel de comprensión y manejo del álgebra aceptable que seguirá desarrollándose durante la etapa de las operaciones formales de la que habla Piaget (en la página 131) hacia la estabilidad de las estructuras formales de pensamiento.

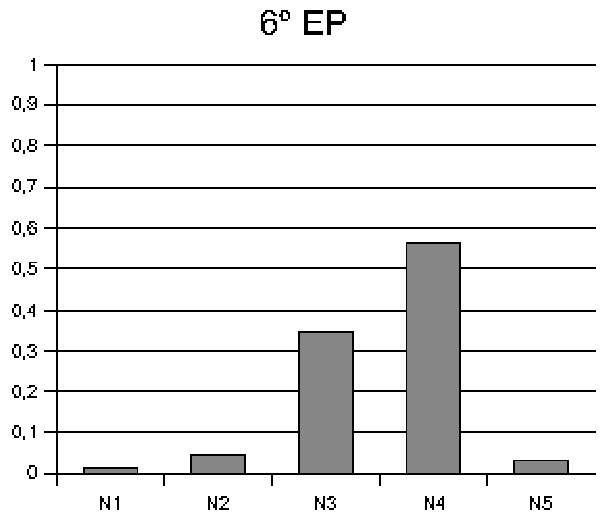


Figura 6.17: Corrección en 6º EP

Una vez definidas cualitativamente las capacidades de las alumnas de cada uno de los niveles se puede comenzar el análisis cuantitativo de los mismos.

En cuanto a la corrección, la mayor parte de las alumnas se encuentra en el nivel 4, hay un 52 % de las alumnas en este nivel. En el nivel 3 hay un 25 % y en el 5, un 18 %. En los niveles 1 y 2 apenas se hallan alumnas, un 1 % y un 4 % respectivamente. Si se analizan estos resultados por cursos se obtiene lo siguiente:

En 6º EP hay un 56 % en el nivel 4 y un 35 % en el 3. Sin embargo en el resto de niveles apenas se encuentran alumnas, hay un 2 % de ellas en el nivel 1, un 5 % en el 2 y un 3 % en el nivel 5. Las alumnas se concentran prácticamente en los niveles 3 y 4, superando las de nivel superior a las de nivel inferior en más de 20 puntos porcentuales. Ver figura 6.17.

En 1º ESO hay un 51 % de alumnas en el nivel 4, un 23 % en el nivel 3 y un 21 % en el nivel 5. En el nivel 2 hay un 2 % de alumnas y ninguna en el nivel 1. Los porcentajes de alumnas de los niveles 3 y 4 han descendido respecto a los del curso anterior en favor de las alumnas de nivel 5. De este modo casi se igualan los niveles 3 y 5, pero aún hay más alumnas de nivel 3 que de nivel 5. La diferencia entre los porcentajes de alumnas de nivel 4 y los de nivel 3 ó 5 es similar a la hallada en 6º EP. Ver figura 6.18.

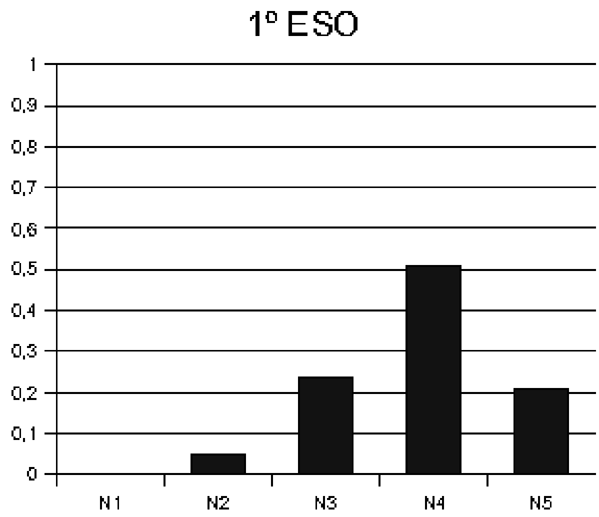


Figura 6.18: Corrección en 1º ESO

En 2º ESO hay un 50 % de alumnas en el nivel 4, un 19 % en el 3 y un 27 % en el 5. En los niveles 1 y 2 hay, respectivamente, un 2 % y un 1 %. Los porcentajes de los niveles 3 y 4 continúan descendiendo y aumentando el de nivel mayor. Por primera vez las alumnas del nivel 5 superan a las del nivel 3. La diferencia entre los niveles 3 y 4 aumenta a 30 puntos porcentuales, mientras que la distancia que en cursos anteriores había entre dichos niveles se halla entre los dos niveles superiores. Ver figura 6.19.

En los tres casos la curva de la representación de datos se asemeja a la de una normal con su máximo en el nivel 4, más desplazada a la derecha según aumenta el nivel académico de las alumnas, como era de esperar. Las diferencias entre los valores máximos de los tres cursos oscilan entre apenas 6 puntos porcentuales, lo que no es muy significativo si atendemos a lo que los distintos contenidos curriculares (en la página 401) hacen suponer. En el caso de 1º ESO y 2º de ESO la curva representada es muy similar, ligeramente más elevada en el último nivel la del mayor curso y por lo tanto algo inferior en los niveles más bajos, la diferencia vuelve a situarse en un 6 % lo cuál, al registrarse entre dos cursos consecutivos representa algo más, pero se sigue considerando poco significativo por el hecho de que corresponde apenas a 5 alumnas. Sin embargo, la curva de 6º EP es bastante diferente, se encuentra significativamente por encima en todos los niveles hasta el cuarto, incluido este, y se desploma casi hasta el 0 % el último. Las diferencias se concentran en los niveles 3 y 5. Según aumenta el nivel académico de

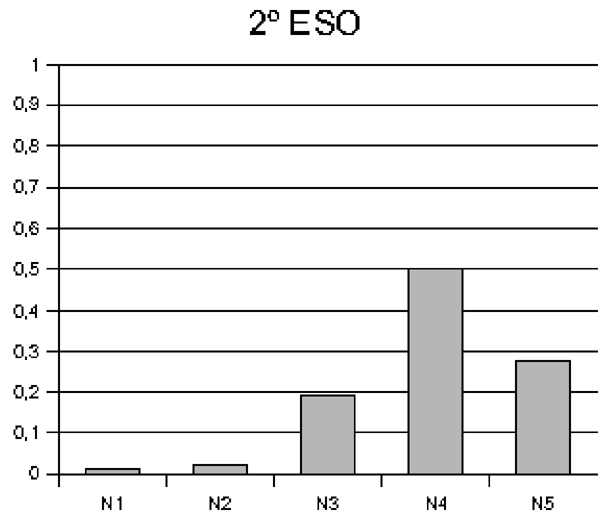


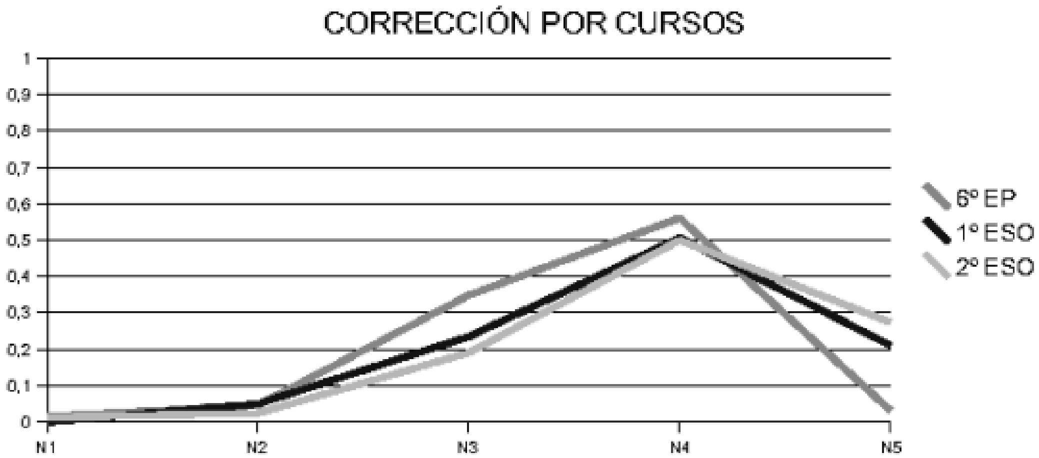
Figura 6.19: Corrección en 2º ESO

los cursos va disminuyendo el porcentaje de alumnas de tercer nivel en favor del nivel 5. El gran salto se produce entre el curso de primaria y el 1º ESO en que el nivel 3 desciende 12 puntos porcentuales y el 5º aumenta un 18 %. Ver figura 6.20

Se puede afirmar que prácticamente todas las alumnas son capaces de comprender y expresarse medianamente en lenguaje natural, comprender y deducir fórmulas matemáticas sencillas y detectar y generalizar regularidades y relaciones en situaciones aritméticas.

Cerca de las tres cuartas partes de las alumnas son capaces, además, de expresarse con suficiente rigor, comprender el valor de los signos aritméticos en su dimensión relacional, más allá de la operatividad propiamente dicha, lo que representa el paso previo a la generalización algebraica. Estas alumnas pueden también comprender y traducir enunciados matemáticos a la aritmética y al álgebra, y viceversa, ya que su nivel verbal alcanza una madurez suficiente. Y son capaces de detectar regularidades y relaciones en situaciones numéricas o no numéricas, generalizarlas y usar ciertos signos para su representación formal con una corrección intermedia.

Finalmente, tan sólo alrededor de una quinta parte de las alumnas tiene la capacidad de detectar regularidades y relaciones y generalizarlas en todos los casos, representándolas a través de símbolos, ya sean formales o informales, con un nivel de significación completo. Esto incluye la representación significativa, la comprensión del valor de los símbolos y de las relaciones entre



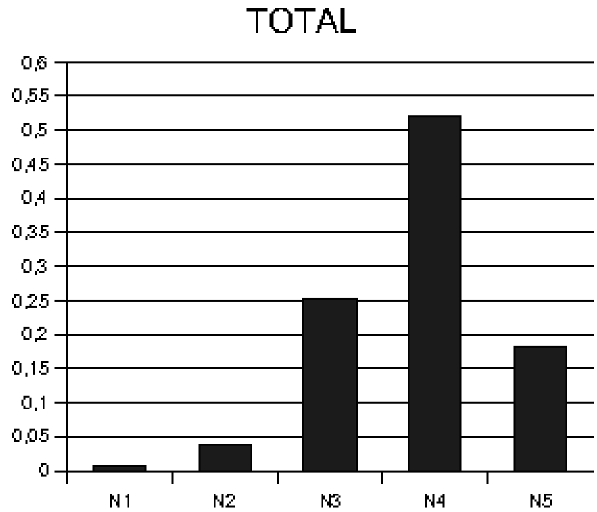


Figura 6.20: Resultados totales de la corrección

ellos dentro de una expresión algebraica, es decir, el manejo completo de los mismos con todas sus propiedades operativas.

En 6º EP prácticamente no hay ninguna alumna que muestre estas capacidades, mientras que en 1º ESO poco más de la quinta parte de alumnas la presentan y en 2º ESO algo más de la cuarta parte de ellas. Las diferencias entre los distintos cursos se manifiestan en estas capacidades más complejas y sobre todo entre primaria y secundaria debido a las diferencias curriculares en cuanto al álgebra, pues en los dos últimos cursos ya es conocido y, aunque su desarrollo se encuentre en estadios diferentes, los resultados no son tan dispares. La comprensión y el manejo del álgebra demostrado por este grupo de alumnas de los cursos de secundaria continuará su desarrollo a lo largo de los cursos siguientes para alcanzar la consistencia de la lógica formal.

6.2.2. Análisis de la formalización

Análogamente a como se construye la escala de medida en el caso de la corrección, se procede con la correspondiente a la formalización pero asignando un 0 a cada respuesta en blanco o que no presente formalización alguna, un 0’75 a cada respuesta que presente formalización aritmética, un 1’5 a la respuesta de tipo retórico, un 2’25 a la respuesta que presente alguna simbolización no formal y un 3 a la respuesta totalmente algebraica. De este modo la escala también tiene una puntuación máxima de 39 puntos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Media	21’44
Mediana	21,75
Moda	27
Desviación típica	5’7

En el caso de la formalización los niveles quedan de la siguiente manera:

Nivel 1	[4,10[
Nivel 2	[10,16[
Nivel 3	[16,22[
Nivel 4	[22,28[
Nivel 5	[28,34[

Del mismo modo que en la corrección, para delimitar las competencias atribuidas a cada uno de estos niveles se recogen los porcentajes obtenidos para cada pregunta en el siguiente cuadro -recordemos que el sombreado oscuro indica que han formalizado menos de un 50 % de las alumnas y el claro que más del 65 % de las mismas la formalizan de manera adecuada-. Dado que las preguntas 1, 2, 3, 4 y 8 no requieren el uso de ningún tipo de signo distinto de los números o del lenguaje natural, y ni siquiera plantean en el enunciado formalización alguna, se ha prescindido de su análisis para la caracterización de los niveles acordados según las competencias de las alumnas. Las respuestas obtenidas en dichas preguntas no ofrecen ninguna información relevante para el caso que nos ocupa.

Preguntas	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
5					
6					
7					
9					
10					
11					
12					
13					

Nivel 1

Las alumnas tienen dificultades en el uso de cualquier signo no aritmético como representación de números u otros objetos matemáticos.

Tan sólo se encuentran algunos ensayos por parte de las alumnas en aquellas cuestiones que no implican ningún tipo de representación simbólica, es decir, en los casos en los que es posible mimetizar la expresión a partir de un ejemplo anterior o de una fórmula previamente conocida.

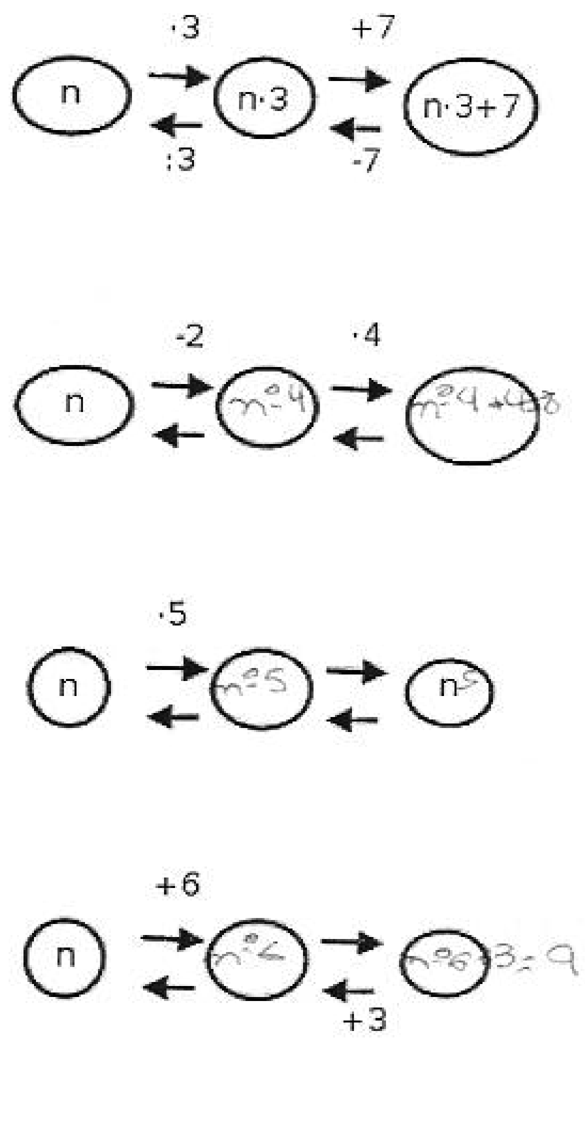
Como ejemplos de ello se citan algunas respuestas de alumnas:

El caso de una alumna (6º.47) que responde a la cuestión 7ª de la siguiente manera

$$\square\ A{=}A{\cdot}l$$
$$l$$

De su respuesta se deduce que conoce la fórmula del área del paralelogramo pero supone que los lados de este en concreto son l y A. Lo que no parece tener sentido es la expresión obtenida al final $A = A \cdot l$, que no desconcierta a la alumna. Esto demuestra su incomprensión de la función de las letras en la expresión dada, es decir, las letras aparecen vacías de significado lo que en ningún caso puede considerarse formalización en el sentido especificado en este estudio (ver 5.2.3).

En la 13ª cuestión se presentaba un ejemplo como referencia para que las alumnas completasen el resto utilizando el álgebra formal en su expresión. Esto facilitaba la reproducción del ejemplo propuesto sin ningún tipo de corrección, pero con signos algebraicos, ya sean formales o informales. En el siguiente caso, la alumna 6º.38 ni siquiera comprende la aclaración *n representa cualquier número* y relaciona dicho signo con el que abrevia la palabra número, conocido por ella, respondiendo:



Textualmente:

-2 ·4

n ⇆ *nº4* ⇆ *nº4+4=8*

·5

n ⇆ *nº5* ⇆ *n5*

+6

n ⇆ *nº6* ⇆ *nº6+3=9*

+3

No se observa ningún tipo de sustitución del número particular por el signo, sino que el mismo acompaña al número concreto en sus operaciones sin ninguna pretensión más. No podemos hablar de símbolos, pues no existe referente para estos signos en el sentido algebraico, es decir, como representación de un número o cualquier otro objeto matemático (ver página 109).

Esta otra alumna (2º.1) es capaz de utilizar la *n* gracias a la costumbre de encontrar letras en expresiones algebraicas que ya tienen los alumnos de 2º ESO, sin embargo tampoco comprende el ejercicio a nivel algebraico pues sus expresiones no se corresponden con las operaciones propuestas en las flechas, ni respetan las condiciones exigidas, a pesar de que las inversiones son correctas por lo que se esperaba que hubiese comprendido la dinámica del ejemplo. Además, en la mayor parte de los casos, utiliza los números propuestos pero no se encuentra lógica a las operaciones utilizadas ni a los resultados que parece obtener de ellas.

Textualmente:

-2 ·4

n ⇆ *n:2* ⇆ *n+2·5*

+2 -4

·5 :6

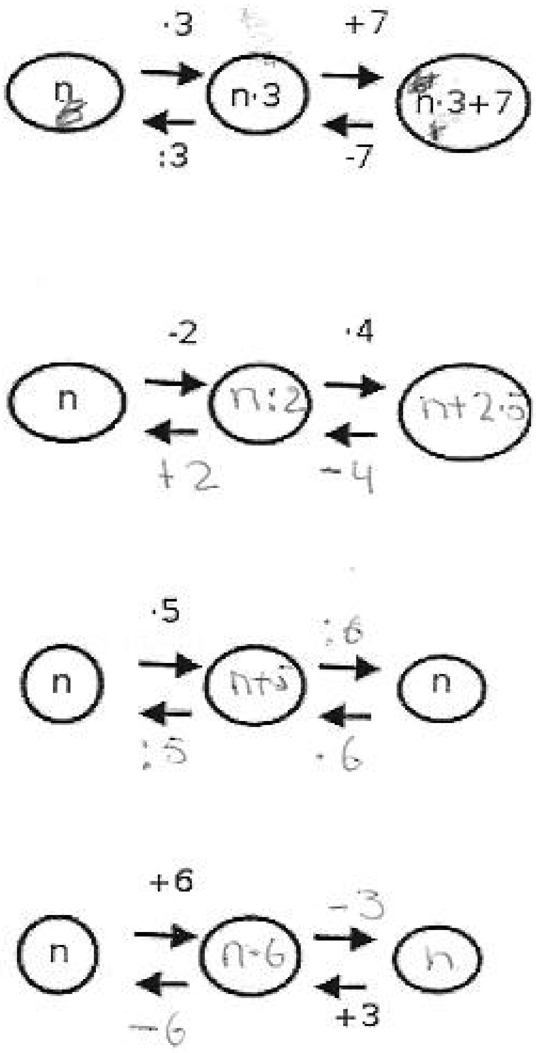
n ⇆ *n+5* ⇆ *n*

:5 ·6

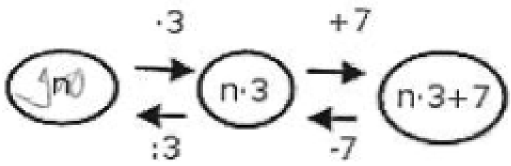
+6 -3

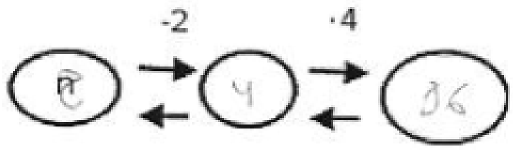
n ⇆ *n·6* ⇆ *n*

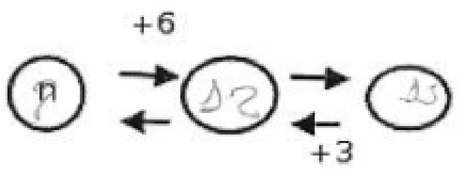
-6 +3



Por último, la alumna 1º.33 particulariza con números al no comprender lo que el enunciado le pedía realizar. Sus resultados numéricos tampoco se corresponden con las operaciones planteadas en las flechas y no se halla ninguna generalidad en la forma de proceder en cada cadena. A pesar de ello se puede llegar a comprender qué operaciones ha realizado en cada una de ellas, pero sin encontrar un mismo procedimiento para todas.







Textualmente:

$$2 \underset{}{\overset{-2}{\leftrightarrows}} 4 \overset{\cdot 4}{\leftrightarrows} 16$$

$$4 \overset{\cdot 5}{\leftrightarrows} 5 \leftrightarrows 20$$

$$2 \underset{-6}{\overset{+6}{\leftrightarrows}} 12 \underset{+3}{\leftrightarrows} 15$$

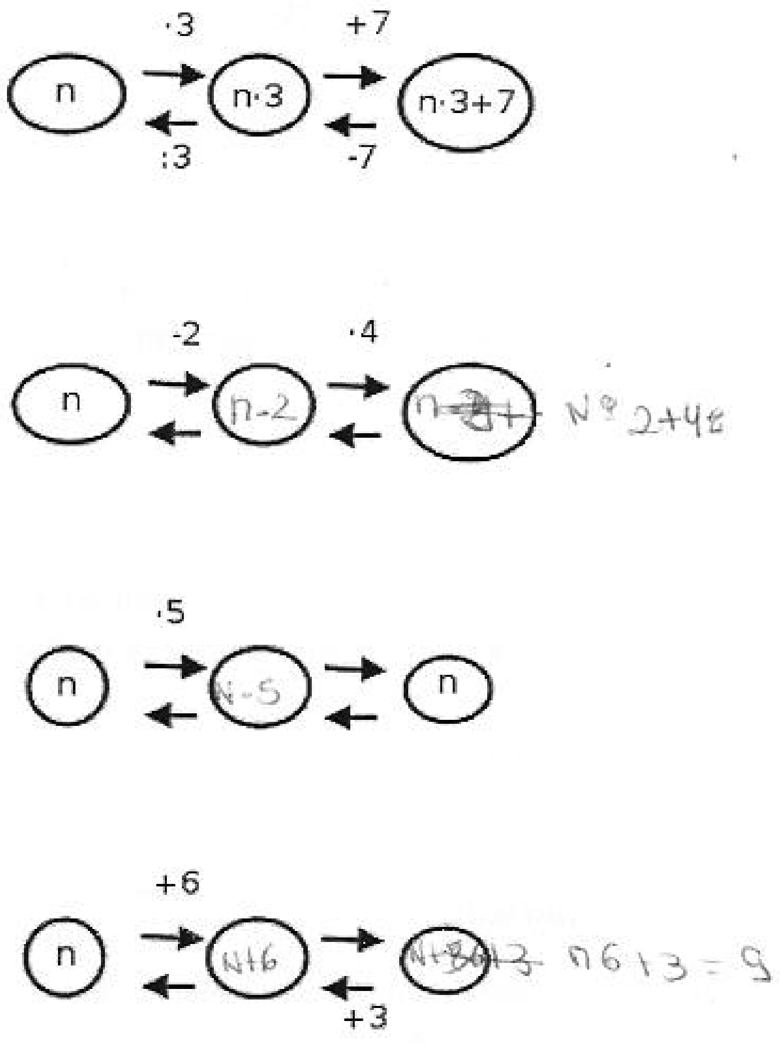
La función representativa del símbolo resulta inalcanzable para las alumnas de este nivel que, además de ser incapaces de utilizar signos no aritméticos para simbolizar números, ni siquiera comprenden una expresión que los contenga. La misma alumna 6º.38 responde en el ejercicio 6º que *2 representa la base y 3 la altura,* sin hacer referencia a la fórmula ni, por supuesto, calcular el área mediante ella. La dificultad que plantean las letras en este nivel está por encima de las posibilidades de las alumnas. Su uso de las mismas corresponde con las clases primera, segunda y tercera de las especificadas por Küchemann (en la página 124), es decir, letra no usada, letra evaluada y letra como objeto de un modo fundamentalmente incorrecto. Se puede hacer una analogía con el nivel 1 definido por Socas et al. (ver página 128) en el que los números se plantean como absolutamente necesarios para el trabajo matemático.

Nivel 2

Las alumnas de este nivel son capaces de utilizar letras para sustituir números en fórmulas matemáticas sencillas y en ejercicios que mimetizan un ejemplo dado, aunque la corrección siga siendo baja en muchos casos. En cuanto a la primera capacidad, en las respuestas de 2º.59 a las cuestiones 6ª y 7ª se observa que la corrección es total, tanto para la comprensión del papel de las letras en una fórmula conocida como para la deducción de la misma. Ya se ha explicado en la página 264 la razón de que dicho uso de las letras no se considere una formalización algebraica para este estudio, a pesar de la presencia de signos literales, pues no existe una comprensión completa del significado del símbolo sino que el signo se utiliza como repetición de procedimientos memorizados o mimetizados.

Como ejemplos de la segunda capacidad se citan las respuestas de dos alumnas (6º.6 y 6º.21) al ejercicio 13º. La primera de ellas transcribe en la segunda y última cadenas exactamente la misma secuencia que en la primera, a pesar de que no se corresponda con el caso particular de la misma y con el paso intermedio, que completa correctamente (ver figura 6.21). La segunda alumna mezcla en su respuesta signos formales y particularizaciones aritméticas (ver figura 6.22)

En cualquier caso ninguna de las tareas manifiesta una comprensión de la magnitud simbolizadora implícita en esta actividad pues, en la segunda, la alumna *arrastra* las operaciones olvidándose el signo; en la tercera, se desconcierta porque falta la segunda operación en la flecha correspondiente; y, en el último, ignora la *n* para centrarse en las operaciones aritméticas que se le ofrecen *6+3*. Es decir, el signo no tiene un valor claro todavía para las alumnas de este



Textualmente:

-2 ·4

$n \leftrightarrows n-2 \leftrightarrows n°2+4$

·5

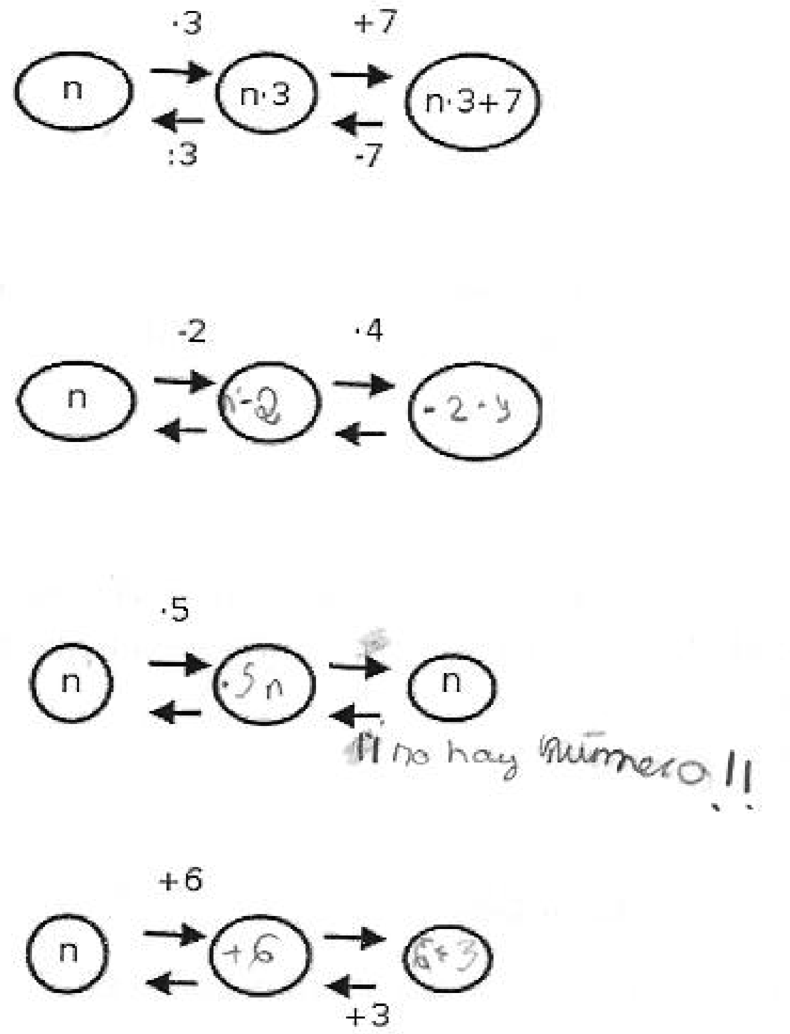
$n \leftrightarrows n \cdot 5 \leftrightarrows n$

+6

$n \leftrightarrows n+6 \leftrightarrows n6+3=9$

-6 +3

Figura 6.21: Respuesta de la alumna 6º.6 a la cuestión 13ª.



Textualmente:

$$n \overset{-2}{\leftrightarrows} n-2 \overset{\cdot 4}{\leftrightarrows} -2\cdot 4$$

$$n \underset{:5}{\overset{\cdot 5}{\leftrightarrows}} \cdot 5n \leftrightarrows n$$ ¡¡no hay número!!

$$n \underset{-6}{\overset{+6}{\leftrightarrows}} +6 \underset{+3}{\leftrightarrows} 6+3$$

Figura 6.22: Respuesta de la alumna 6º.21 a la cuestión 13ª.

Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	⊏*2*⊐+⊏*7*⊐
El cine cuesta 6€ y voy tres veces esta semana	3·6	□·□
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños	*18:6*	*3*
Tengo 9 piruletas y un niño me quita 5	9-5	*4*
Tengo 3 lápices y me encuentro 2 más pero se me pierde 1	*3+2−1*	□+□-□

Figura 6.23: Respuesta de la alumna 1º.35 a la cuestión 5ª.

Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	⊏*2*⊐+⊏*8*⊐
El cine cuesta 6€ y voy tres veces esta semana	3·6	⊏*6*⊐·⊏*5*⊐
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños	*18:6*	*18:4*
Hay 9 golondrinas y se van 5	9-5	*9-3*
Tengo 3 manzanas y me dan 4 y me quitan 2	*3+4−2*	⊏*4*⊐+⊏*3*⊐-⊏*1*⊐

Figura 6.24: Respuesta de la alumna 1º.1 a la cuestión 5ª.

nivel y por ello no se les puede adjudicar una capacidad representativa. El signo literal tan sólo cobra sentido con la sustitución de algunos números en las fórmulas conocidas.

En este nivel las alumnas siguen teniendo dificultades con el uso de signos para representar números u otros objetos matemáticos a partir de enunciados expresados en lenguaje natural. Estas alumnas no son capaces de traducir enunciados al álgebra y viceversa, ni siquiera con signos propios. De nuevo en el cuestionario de la alumna 2º.59 se halla un ejemplo de ello. La respuesta a la segunda tarea de la cuestión 12ª es completamente aritmética, *14+3=17*, además de incorrecta. También en la respuesta a la 5º pregunta de 1º.35 y 1º.1 se encuentra una particularización aritmética -el resultado de la operación, en el primer caso (ver figura 6.23), y números inventados, en el segundo (ver figura 6.24)- en lugar de la abstracción de la estructura mediante cuadros en blanco que generalizan los números.

Con todo ello se aprecia en las alumnas una nula capacidad de representar números a través de símbolos a pesar de que puedan interpretar fórmulas e incluso deducirlas. La diferencia más destacable respecto a las competencias del nivel anterior la encontramos en que las letras resultan familiares en las fórmulas, en las que sustituyen a números. Este uso corresponde a la clasificación de Küchemann (en la página 124) de la letra como evaluada o como objeto ya que la trascendencia representativa del símbolo en este caso queda limitada, pues es por repetición de un procedimiento ya adquirido por lo que se realiza esta asociación entre el número y el signo y no por un verdadero sentido de significación. En cuanto a la clasificación de Socas et al. (en la página 128) este nivel equivale a un nivel 2, pues existe un cierto uso del álgebra pero sin carga significativa como incógnitas, números generalizados o variables.

Nivel 3

En este nivel se aprecia una mejora sustancial en el uso de signos para representar enunciados matemáticos, y viceversa. Esto requiere no sólo la comprensión y el dominio del lenguaje natural sino la organización de la información y la representación de la misma mediante ciertos símbolos, lo que ya es un claro indicio de que el pensamiento algebraico (ver 3.1.2) se va gestando en el conocimiento del niño.

En la cuestión 12ª, la alumna 1º.41 traduce de la siguiente manera en la segunda tarea:

> *3+x=14;x=14-3; x=11.*

y en la tercera:

> *Alba tiene 2 años, si restamos su edad con la de su hermano da 15.*

Aunque las operaciones algebraicas correspondientes a la primera tarea (citadas en la página 271) no tienen sentido, la traducción, tanto del lenguaje natural al álgebra como del álgebra al lenguaje natural, es correcta. Se puede afirmar que, para estas alumnas, el signo ha alcanzado la categoría de símbolo, pues sirve para representar números en general.

La diferencia fundamental entre el valor que el signo ostenta para las alumnas del nivel anterior y las de este es que para las anteriores el signo sólo sustituye un número cualquiera -es una relación 1:1 (ver en la página 144), con múltiples posibilidades hasta que se fijan los números, pero sin la idea de variabilidad propia del signo algebraico- y la asociación de dicho número con el signo es simplemente un hábito, sin sentido representativo. Sin embargo, en este nivel, el signo se carga de significado, pues es un número generalizado. La relación entre el signo y su significado adquiere una consideración más compleja, que ya ha sido explicada en la página

Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	□+□
El cine cuesta 6€ y voy tres veces esta semana	3·6	□·□
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños	18:6	□:□
Tengo 9 patatas y me como 5	9-5	□-□
Tengo 3 bolígrafos y me he comprado 3 pero pierdo 2	3+3-2	□+□-□

Figura 6.25: Respuesta de la alumna 2º.4 a la cuestión 5ª.

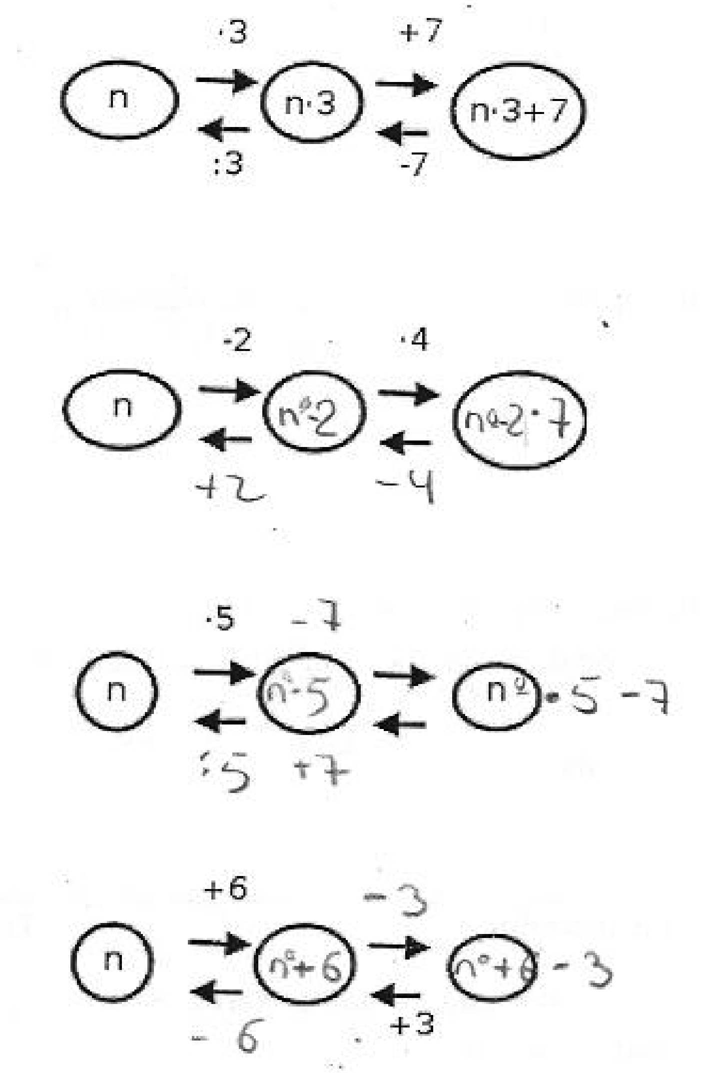
127 al analizar la variabilidad del signo y que empieza a manifestarse en las alumnas de este nivel.

El caso de la respuesta de la alumna 2º.4 a la pregunta 5ª nos muestra la capacidad de utilizar signos no formales para representar números generalizados (ver figura 6.25).

Las alumnas de este nivel comprenden el valor del signo como generalización del número aunque siguen teniendo dificultades para representar situaciones matemáticas que implican la detección y generalización de regularidades o relaciones, es decir, la representación de informaciones matemáticas -generalización y expresión de las mismas- a través de símbolos sigue siendo una actividad demasiado compleja para ellas (ver en la página 97).

Como en el nivel anterior, las alumnas son capaces de utilizar letras para representar números en fórmulas matemáticas o transcribiendo un ejemplo dado. En este último caso la diferencia la encontramos en que ahora el signo cobra sentido representativo para ellas como podemos ver en la respuesta que 6º.24 da a la cuestión 13ª (ver figura 6.26). Tanto la sintaxis como la semántica de las expresiones son correctas. Tan sólo ha encontrado dificultades a la hora de comprender que la segunda operación de la tercera cadena estaba fijada por el resultado del último eslabón. También existe un descuido en la segunda cadena, pues escribe *·7* en lugar de *·4*, como especifica la operación sobre la flecha. A pesar de que el signo utilizado no es el dado, *n*, sino la abreviatura de número, *nº*, la comprensión del valor de la letra como representación de cualquier número está implícita en todo el ejercicio. De la misma manera procede la alumna 6º.14, sólo que utilizando el signo formal *n* y sin cometer ningún error.

Destaca como característico de las alumnas de este nivel su mejora en la capacidad de simbolizar a partir de un enunciado y la capacidad de comprender el símbolo como representante de un número generalizado y usarlo en estos casos. Se puede hacer una analogía con el tercer nivel de Socas et al. (en la página 128) donde el uso de la letra como número generalizado ya



Textualmente:

-2 ·4

$n \leftrightarrows n^{o}-2 \leftrightarrows n^{o}-2\cdot 7$

+2 -4

·5 -7

$n \leftrightarrows n^{o}\cdot 5 \leftrightarrows n^{o}\cdot 5-7$

:5 +7

+6 -3

$n \leftrightarrows n^{o}+6 \leftrightarrows n^{o}+6-3$

-6 +3

Figura 6.26: Respuesta de la alumna 6º.24 a la cuestión 13ª.

está presente. En cuanto a los niveles de Küchemann (en la página 124), se considera un salto en este trabajo, pues no comparto su clasificación del uso de la incógnita como previo al de número generalizado (ver en la página 127) debido a la carga semántica que se ha definido para la incógnita (ver en la página 129).

Nivel 4

Estas alumnas tienen las mismas capacidades adquiridas que las del nivel anterior, es decir, usan signos para representar números en fórmulas matemáticas sencillas y en tareas que imitan un ejemplo dado, pero además son capaces de utilizar símbolos propios o incluso algebraicos para expresar la información extraída de un enunciado matemático dado en lenguaje natural, y viceversa.

El uso del álgebra formal para generalizar números se presenta como algo habitual para las alumnas de este nivel. Por ejemplo, 1º.18 abstrae la estructura operacional de ciertas expresiones aritméticas utilizando letras para su representación

Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	$\sqsubset x \sqsupset + \sqsubset y \sqsupset$
El cine cuesta 6€ y voy tres veces esta semana	3·6	$\sqsubset x \sqsupset \cdot \sqsubset y \sqsupset$
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños	*18:6*	$\sqsubset x \sqsupset : \sqsubset y \sqsupset$
Tengo 9 bolis y regalo 5	9-5	$\sqsubset x \sqsupset - \sqsubset y \sqsupset$
Tengo 3 canicas y me regalan 7 pero pierdo 2	*3+7-2*	$\sqsubset x \sqsupset + \sqsubset y \sqsupset - \sqsubset z \sqsupset$

Como en el nivel anterior, el sentido de variabilidad del signo ya está presente para estas alumnas aunque aún se hallan muchas deficiencias en su manifestación externa. Además, el símbolo adquiere un sentido representativo más completo. Estas alumnas mejoran significativamente la capacidad de representar regularidades y relaciones matemáticas mediante el uso de signos formales o informales, por lo que el signo ya no se limita a generalizar números sino conceptos que se encuentran relacionados entre sí, con las peculiaridades de estas relaciones. Por ello se hallan expresiones más complejas en las que se aprecian errores sintácticos y semánticos debidos a las dificultades propias de la formalización. Algunos ejemplos para ilustrarlo son los siguientes:

La respuesta de la alumna 6º.45 a la cuestión 10ª nos muestra como la sintaxis aún es un problema (ver en la página 119) para muchas de estas alumnas, a pesar de que el símbolo se utiliza como número general, con sentido representativo como muestra su explicación retórica

> *Porque, primero cuando multiplicas a un número por 2 es resultado siempre va a ser un número par, segundo porque si multiplicas 2 y divides 2 te va a das el mismo número del principio. Luego si le sumas 4 y le restas ese número va a dar siempre 2.*

$$\square \times 2;\ +4;\ :2;\ -\square = 2$$

Esta alumna comprende que la inversión de operaciones es la causa de que el enunciado se verifique para cualquier número y la expresa en general utilizando el cuadro en blanco como símbolo del número. A pesar de ello su secuencia de operaciones aparece inconexa ya que, dado el curso en el que se encuentra, aún no domina la construcción de las expresiones algebraicas a nivel sintáctico. Sin embargo la relación del signo con su significado está clara, pues utiliza el mismo signo para ambos números en el momento adecuado. La semántica es más fácil para los alumnos que la sintaxis, como se había dicho (en la página 121).

En el caso de la respuesta de 2º.66 a la pregunta 11ª,

> *n-nº de triángulos=2,*

se observa una adecuada sintaxis y una representación precisa de los objetos matemáticos del enunciado, aunque no utiliza ningún signo para simbolizar el segundo concepto. Sin embargo, la alumna 1º.34 escribe

> *n=n-2*

de manera que simboliza ambos conceptos con el mismo signo, lo que demuestra un nivel algebraico menor (en la página 156) ya que la relación específica entre el signo y su significado se ha visto corrompida.

Esto mismo ocurre con las respuestas de 6º.26 a la cuestión 9ª y 10ª, que han sido analizadas en la página 268. En ellas los símbolos utilizados no son los usuales para el álgebra pero representan, del mismo modo que ellos, la generalización de la relación entre los conceptos del enunciado. El problema en estos casos no es de orden sintáctico, sino semántico: la repetición del mismo signo con dos significados diferentes en el primer caso, lo que nos remite a la dificultad con el sentido de la variabilidad del signo, y la falta de rigor en la prioridad de operaciones en el segundo.

$$\square : 2 = \square$$

y

$$\square \cdot 2 + 4 : 2 - \square = 2.$$

Resumiendo, en este nivel se halla un uso del álgebra bastante desarrollado debido a que se enriquece la dimensión representativa de símbolo, pues no se limita a la generalización del número. Aún así su tremendo poder operativo se encuentra limitado por un deficiente manejo de los símbolos, ya sea debido a problemas sintácticos o semánticos. En la clasificación de Küchemann (en la página 124) este nivel corresponde a un uso de las letras como número generalizado y como variable, en casos sencillos, es decir, un tercer nivel de Socas et al. (en la página 128) con la excepción de la incógnita definida para este trabajo (ver en la página 129). Los problemas que persisten en este nivel se van diluyendo en el siguiente para alcanzar la formalización necesaria con las operaciones algebraicas.

Nivel 5

En este nivel las alumnas son capaces de formalizar en cualquier caso, comprendiendo la dimensión abstracta del símbolo, aunque siguen encontrando algunas dificultades en la generalización a partir de situaciones matemáticas relativamente complejas. Su conocimiento del álgebra es completo, resuelven ecuaciones y realizan operaciones algebraicas sencillas habitualmente.

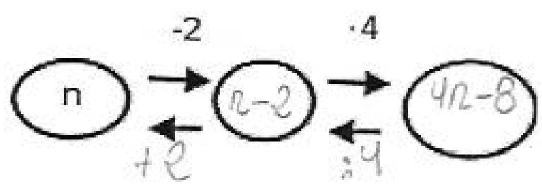
La representación se realiza ya de un modo riguroso, tanto en la sintaxis como en la semántica, es decir, las alumnas de este nivel comprenden el significado del símbolo algebraico y son capaces de utilizarlo en expresiones formales con precisión. Además, de acuerdo con Novotná et al. (2000) los alumnos que ya saben resolver ecuaciones, como los de este nivel, prefieren utilizar las estrategias algebraicas.

La respuesta de la alumna 1º.20 a la cuestión 9ª (citada en la página 232) es un claro ejemplo de como se van superando las dificultades en cuanto a la imprecisión del significado del signo y se construye la relación representativa con todas sus peculiaridades, como se explicaba en 3.3.2. En esta misma cuestión, otras alumnas utilizan una notación mucho más formal para la representación de la relación de dependencia entre números aplicando sus conocimientos sobre funciones a la expresión de la relación planteada: 2º.57 escribe y=$2x$ y 1º.40, $f(x) = 2 \cdot x$.

En esta idea funcional se encuentra recogida toda la complejidad de la representación algebraica. En primer lugar las letras ostentan el valor de variables, por lo que la dificultad de la variabilidad del signo algebraico está ya superada por estas alumnas. Por otra parte, existe una relación de dependencia entre las magnitudes representadas por estas letras que se manifiesta a través de una operación aritmética, con lo cuál estas alumnas han superado también los problemas de sintaxis propios de las expresiones algebraicas (ver en la página 119).

Otras alumnas aplican también estos conocimientos a cuestiones que implican una representación más compleja, como la 10ª y la 11ª, por ello se puede afirmar que la significación de las variables es completa ya que no se limita a sustituir un número o un conjunto de ellos sino a representar una magnitud con toda su carga conceptual. Se hace referencia con ello a que pueden simbolizar otros objetos matemáticos medibles cualesquiera y modelizar sus situaciones circunstanciales mediante una expresión.

Una vez representada algebraicamente una situación matemática entran en juego las posibilidades manipulativas de la misma. Bajo las estrictas reglas operativas que rigen en el dominio algebraico, que no son otras que las propias de la aritmética, generalizadas y restringidas por las peculiaridades de la notación, las alumnas de este nivel son capaces de transformar las expresiones para alcanzar determinados objetivos. A veces esta simplificación no tiene un referente real, como es el caso de las realizadas por las alumnas 2º.33 y 2º.2 en la pregunta 13ª:



Textualmente

$$n \underset{+2}{\overset{-2}{\leftrightarrows}} n-2 \underset{:4}{\overset{\cdot 4}{\leftrightarrows}} 4n-8$$

y

$$4(n-2)=4n-8.$$

Otras se persigue un resultado que solucione un problema concreto, como en la resolución de problemas por medio de ecuaciones. Un ejemplo de esto lo encontramos en la respuesta de la alumna 1º.30 a la segunda tarea de la cuestión 12ª (ver 275). Para que la resolución de ecuaciones tenga sentido no basta con conocer y aplicar los procedimientos de resolución correctamente, lo que resulta relativamente fácil pues son muy repetitivos y tienen una casuística muy limitada, sino que es necesario comprender significativamente el valor de la incógnita (ver en la página 129).

Se ha explicado cómo para las alumnas de este nivel el álgebra adquiere una dimensión lógica y formal que no estaba presente en niveles anteriores, es decir, al uso del signo como representación se añaden otras funciones, como la modelizadora de situaciones y la operativa, que abren al estudiante todo un mundo de posibilidades instrumentales que se irán desarrollando en el futuro.

Analizados cualitativamente los niveles y definidas las caracterizaciones de cada uno de ellos pasaremos a realizar el análisis cuantitativo de los mismos.

En cuanto a la formalización, la mayor parte de las alumnas se encuentra repartida entre los niveles 3 y 4, hay un 34 % en cada uno de ellos. En los niveles 2 y 5 se hallan, respectivamente, un 19 % y un 13 %. Las alumnas clasificadas en el nivel 1 son una clara minoría, tan sólo un 1 %. Por cursos obtenemos los siguientes resultados:

En 6º EP hay un 44 % de las alumnas en el nivel 3, seguido de un 39 % en el 2 y un 14 % en el 4. En el nivel 5 no hay ninguna alumna mientras que en el 1 hay un 3 % de ellas. Entre los niveles más frecuentes -segundo y tercero- se observa una diferencia de apenas 5 puntos, mientras que con el siguiente -nivel 4- aumenta a 25 puntos porcentuales. Los datos se hallan desplazados hacia la izquierda si los representamos comparándolos con el total. Ver figura 6.27.

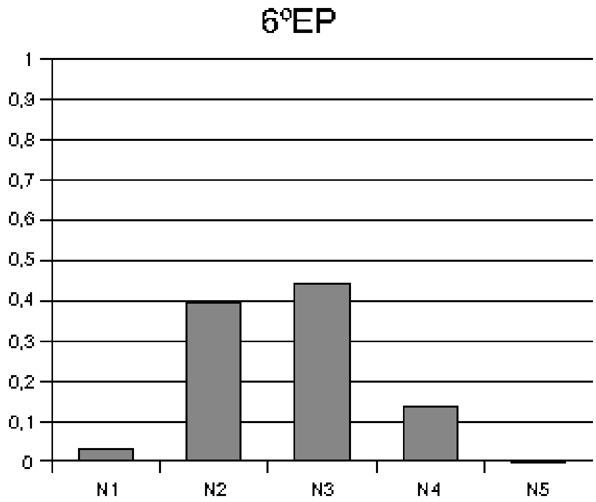


Figura 6.27: Formalización en 6º EP

En 1º ESO hay un 38 % de alumnas en el nivel 3, seguido de un 35 % en el 4. En los niveles 2 y 5 se encuentra, respectivamente, un 12 % y un 14 % y en el nivel 1 no se halla ninguna alumna. Igual que en el caso anterior la diferencia entre los niveles más frecuentes es de apenas 3 puntos porcentuales, sólo que en este caso los datos se hallan concentrados un nivel por encima -niveles 3 y 4-. En cuanto a las diferencias con los siguientes niveles -segundo y quinto- se mantienen prácticamente igual que en el curso anterior. Se observa que la distribución se aproxima bastante a la del total. Ver figura 6.28.

En 2º ESO hay un 49 % de alumnas en el nivel 4, seguido de un 21 % en el tercer y quinto nivel, un 7 % en el segundo y sólo un 1 % en el nivel 1. La mitad de las alumnas se concentran en un único nivel y la curva de representación de los datos encuentra su máximo en dicho cuarto nivel, con una diferencia de casi 30 puntos porcentuales respecto al mayor de los siguientes niveles. La distribución de datos es destacadamente diferente a la del total, la curva se asemeja más a la de una distribución normal desplazada a la derecha. Ver figura 6.29.

Si comparamos las tres curvas se observan claras diferencias entre ellas. Las correspondientes a los datos de 6º EP y 1º ESO son más suaves si las comparamos con la de 2º ESO. Entre la de 6º EP y la de 1º ESO se percibe un destacado desplazamiento a la derecha pues, aunque el máximo se encuentra en el nivel 3 para ambos, en el caso del curso de primaria el nivel 2 casi iguala al máximo, mientras que en de secundaria lo hace el 4, es decir, prácticamente existe un

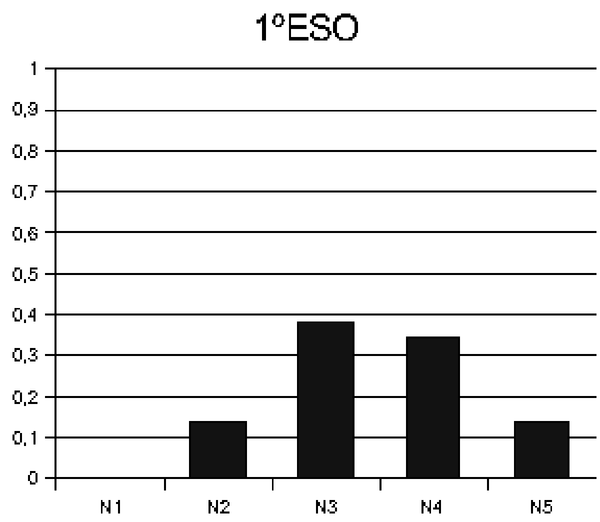


Figura 6.28: Formalización en 1º ESO

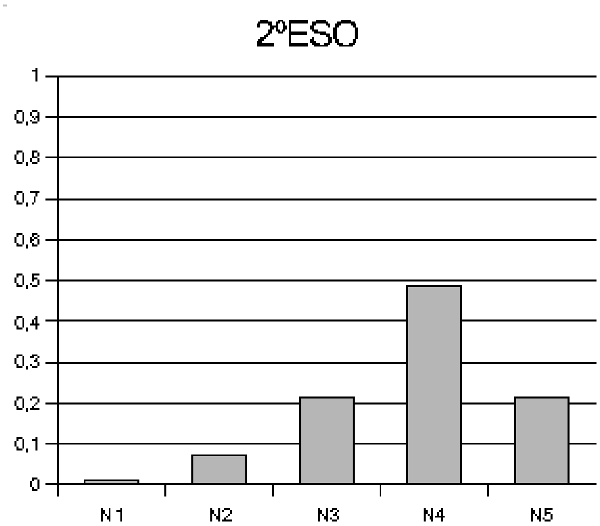


Figura 6.29: Formalización en 2º ESO

nivel de desplazamiento hacia la derecha en ambas curvas. Entre la curva de 1º ESO y la de 2º ESO, además de un desplazamiento a la derecha, se observa una diferencia significativa en la forma de la curva motivada por un pico pronunciado a favor de un único nivel que destaca sobre los demás, en la del curso superior. El máximo se halla desplazado, en este caso, al nivel 4, pero además en el siguiente nivel se encuentra un elevado porcentaje de alumnas, un aumento del 50 % respecto al curso anterior. Ver figura 6.30.

En 6º EP hay un 40 % en los niveles más bajos, mientras que en los cursos de secundaria se reduce, de media, a una cuarta parte. En los niveles superiores se halla un 14 % en el curso de primaria, que contrasta con el 49 % de 1º ESO y el 70 % de 2º ESO. Sin embargo entre los niveles 3 y 4 se encuentra un 70 % de las alumnas de 2º ESO, cantidad muy similar a la correspondiente en los mismos niveles del curso anterior. El salto que se produce entre los cursos de 6º EP y 1º ESO es significativamente mayor que el producido entre los dos cursos de secundaria, a pesar de que entre los niveles superiores de ambos cursos encontramos una diferencia de un 20 %.

Se puede afirmar que prácticamente todas las alumnas son capaces de comprender y usar las letras en fórmulas algebraicas conocidas e incluso utilizar letras imitando de un ejemplo similar pero, en este caso, con muy bajo nivel de significación, es decir, sin comprender el papel de la letra como sustitución de números. Como ya se ha explicado anteriormente, esta capacidad no puede reconocerse como formalización, en el sentido definido para este estudio, dado que la función representativa del símbolo queda limitada a un procedimiento repetitivo sin sentido completo.

Las diferencias se encuentran fundamentalmente en las capacidades representativas y formales. Más de las tres cuartas partes de las alumnas, un 81 %, es capaz de utilizar los signos algebraicos, formales o informales, como generalización del número y cerca de la mitad puede utilizar estos signos para representar informaciones que modelicen situaciones matemáticas de mayor o menor complejidad. Tan sólo una octava parte de las mismas alcanza un nivel formal suficiente como para operar sobre estos modelos utilizando el álgebra como herramienta manipulativa al servicio de la lógica. Esta diferencias se manifiestan por cursos de la siguiente manera:

En 6º EP poco más de la mitad de las alumnas es capaz de generalizar números utilizando signos no aritméticos y apenas la séptima parte de las mismas llega a representar informaciones a partir de situaciones matemáticas mediante álgebra, formal o informal.

En 1º ESO bastante más de las tres cuartas partes de las alumnas, un 87 %, puede generalizar

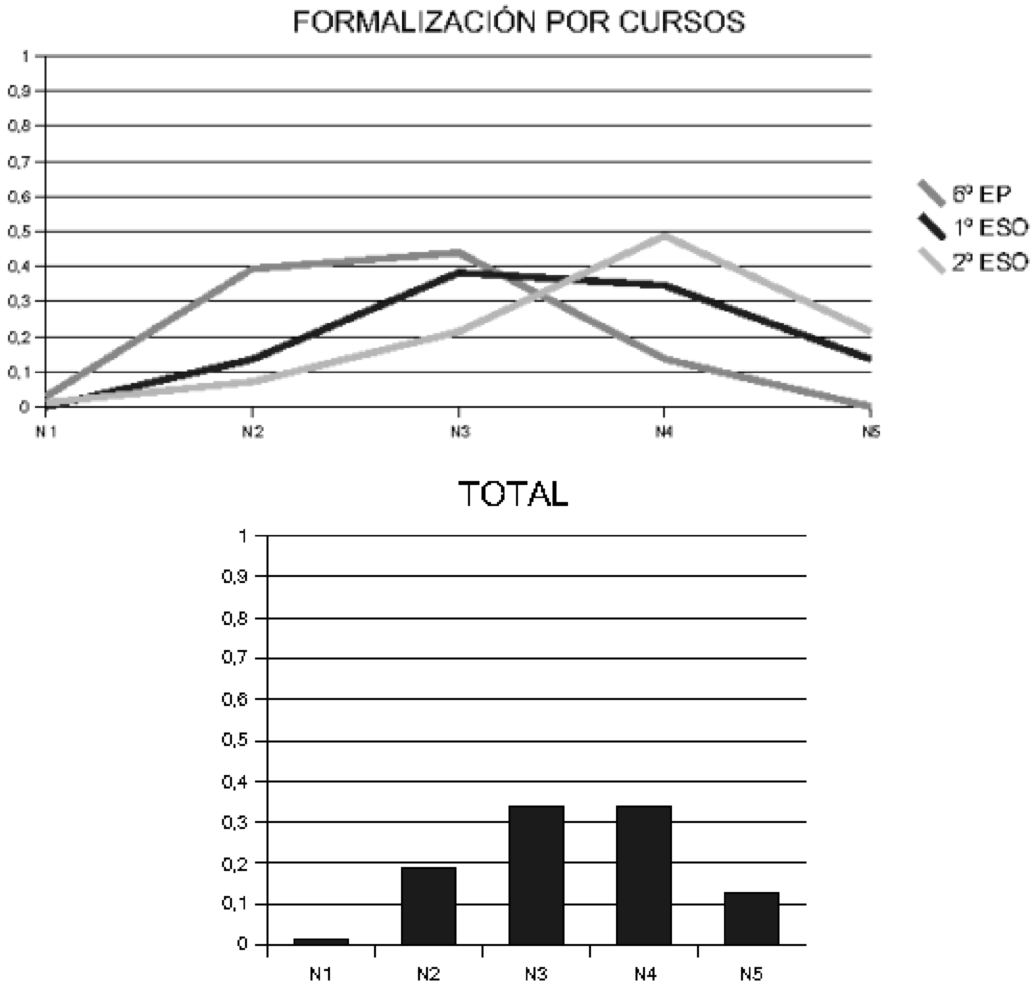


Figura 6.30: Resultados totales de la formalización

números, casi la mitad representa cualquier tipo de información a través del álgebra y una séptima parte de las mismas alcanza un nivel algebraico operativo.

En 2º ESO casi todas las alumnas pueden generalizar números utilizando signos algebraicos para representarlos, un 91 %, alrededor de las tres cuartas partes es capaz de representar informaciones para modelizar situaciones matemáticas y las alumnas que alcanzan una operatividad formal suficiente representan más de la quinta parte.

El nivel de formalización en los tres cursos es significativamente diferente y mejora a grandes saltos de un curso a otro, sobre todo de primaria, en la que pocas alumnas utilizan el álgebra significativamente a nivel formal, a secundaria, en la que la mayoría de las alumnas son capaces de manejarlo a nivel representativo, pues las que lo hacen a nivel operativo representan una minoría que irá creciendo en los cursos siguientes.

6.2.3. Análisis conjunto de la corrección y la formalización

Para examinar las posibles relaciones que entre estas dos variables puedan existir se realiza un estudio atendiendo a los datos apareados compuestos por los resultados de cada alumna en el cuestionario para la corrección y la formalización. Se analizan las distribuciones bidimensionales en los distintos cursos y en total y se comparan para obtener conclusiones válidas para este trabajo.

a) Comparación de la corrección y la formalización

Para realizar una primera comparación simple de las variables correlación y formalización se representan los datos por cursos de manera conjunta. Se observa que la formalización se encuentra por debajo de la corrección en todos los cursos y que cuanto más elevado es el curso académico mayor es la semejanza de ambas curvas. (Figura 6.31)

Así en 6º EP hay un desfase muy evidente entre los picos de la curva, la de la corrección lo alcanza en el nivel 4 a una altura del 56 % y la de la formalización a un nivel 3 y altura 44 %. Además las diferencias entre los niveles centrales son más elevadas en la corrección, por lo que la curva de la formalización es más suave.

En 1º ESO ambas curvas se acercan más y la diferencia entre sus máximos se reduce, la corrección lo alcanza en el nivel 4 a una altura de 51 % y la formalización en el nivel 3 a altura 38 %. En este caso también se observa que la curva de la formalización es más suave que la de la corrección.

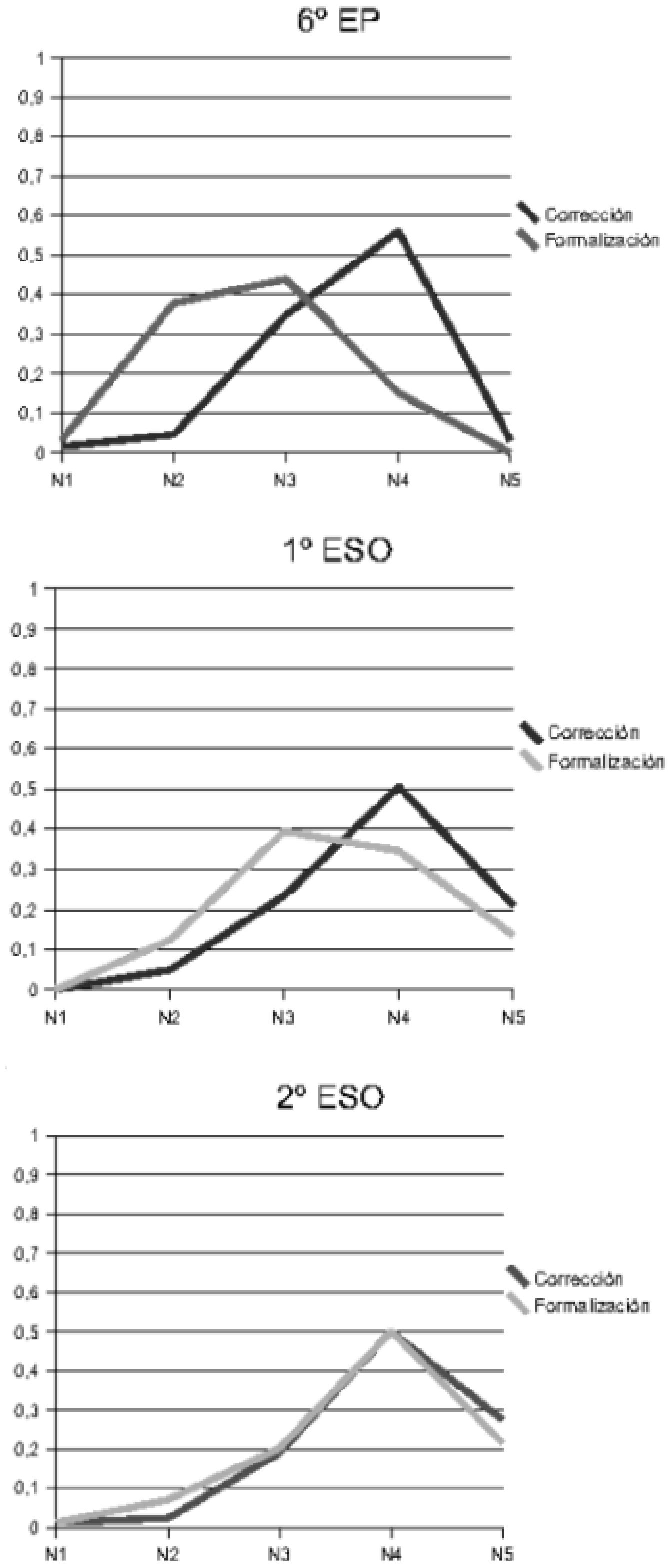


Figura 6.31: Comparación de la corrección y la formalización en cada curso

En cuanto a 2º ESO ambas curvas prácticamente coinciden en casi todos los niveles, aunque la formalización sigue apareciendo algo por debajo en el nivel superior, apenas un 6 %.

Para profundizar aún más en el análisis de las posibles relaciones existentes entre ambas variables se realiza un análisis bidimensional de las variables corrección y formalización. De esta manera se obtiene información acerca de su variación conjunta (correlación) y posible dependencia. Es importante señalar que los resultados obtenidos de esta forma no pueden ser asumidos como absolutos (Amón, 1987), sino que deben ser contrastados para extraer conclusiones válidas adaptadas a la realidad de nuestra situación.

Se resumen los datos en pares ordenados donde la primera coordenada representa la puntuación obtenida en la corrección y la segunda la puntuación correspondiente a la formalización de cada una de las alumnas cuestionadas. Representando la frecuencia de los pares de datos obtenidos en una tabla de doble entrada en la que los niveles de la correlación ocupan la primera fila y los de la formalización la primera columna se hallan los resultados siguientes:

6º E.P.

Corrección/Formalización	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Nivel 1	2 %	2 %			
Nivel 2		3 %	24 %	12 %	
Nivel 3			10 %	33 %	
Nivel 4				10 %	3 %
Nivel 5					

En 6º EP los datos se concentran en los niveles 4 de la corrección y 3 de la formalización- en adelante (N4,N3)- en un 33 % y en (N3,N2) en un 24 %. El resto de los representantes se encuentran bastante dispersos, con concentraciones de un máximo del 10 %, lo que se considera relativamente despreciable para la comparativa por grupos.

1º E.S.O.

Corrección/Formalización	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Nivel 1					
Nivel 2		5 %	9 %		
Nivel 3			12 %	26 %	
Nivel 4			2 %	23 %	9 %
Nivel 5				1 %	12 %

En 1º ESO se observa un 26 % en (N4,N3) y un 23 % en (N4,N4) mientras que en 2º ESO obtenemos un 36 % en (N4,N4) y un 18 % en (N5,N5). Al igual que en el curso de primaria se ha despreciado el resto de los niveles por considerarlos poco relevantes para caracterizar al curso en la comparación, ya que ninguno sobrepasa el 12 %.

2º E.S.O.

Corrección/Formalización	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Nivel 1	1 %				
Nivel 2		2 %	4 %	1 %	
Nivel 3			12 %	9 %	
Nivel 4			4 %	36 %	9 %
Nivel 5				4 %	18 %

Los datos se encuentran desplazados hacia niveles más bajos en primaria y más altos en secundaria, además según aumenta el curso académico se observa una mayor similitud entre la corrección y la formalización. En 2º ESO la mayoría se concentra en los niveles 4 de ambas variables, en 1º ESO prácticamente por igual en los niveles 4 de ambas variables y uno menos de formalización y en el curso de primaria en los niveles 3 y 4 de corrección y uno menos, respectivamente, de formalización, pero en mayor porcentaje en los niveles más bajos. De esto se deduce que la formalización evoluciona más lentamente que la corrección y se va igualando según los cursos van siendo superiores.

En cuanto a los datos globales, despreciando como en los casos anteriores las representaciones de un 12 % o menos, se puede centrar la atención en los niveles (N4,N4) y (N4, N3), con un 24 % y un 22 % de las alumnas, respectivamente. Los resultados extremos de 2º ESO y de 6º EP se compensan y por ello esta distribución se asemeja más a la de 1º ESO, aunque aparece ligeramente mejorada debido al mayor número de alumnas de 2º ESO sobre el de primaria. En este caso los resultados globales no ofrecen una información útil en cuanto a la distribución, sin embargo su análisis puede revelar un resumen interesante de las tendencias en otras cuestiones, como veremos en cada caso.

TOTAL

Corrección/Formalización	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Nivel 1	1 %	0'5 %			
Nivel 2		3 %	11 %	4 %	
Nivel 3			12 %	22 %	
Nivel 4			2 %	24 %	7 %
Nivel 5				2 %	11 %

A la vista de estos resultados parece que existe una alta correlación entre ambas variables, que debe ser verificada estadísticamente.

b) Estudio estadístico de la relación entre la corrección y la formalización

Como medida del grado de la relación se utiliza el coeficiente de correlación lineal de Pearson que oscila entre 0 y 1, donde el 0 corresponde a una correlación nula y el 1 a una correlación perfecta entre las variables. Algunos autores (Cohen, 1988) interpretan el grado de correlación como bajo si el coeficiente se acerca a 0'1, medio si se aproxima a 0'3 y alto si supera el 0'5 pero esta valoración es muy relativa. Sólo comparando con otros estudios sobre las mismas variables en circunstancias similares se podría realmente establecer el alcance de la medida de dicho valor. Estudios de algunos psicólogos (Oakes, 1982) demuestran que el coeficiente de correlación tiende a sobrestimarse, es decir, se cree que representa una correlación mayor de la que realmente existe. Se interpretan los valores hallados teniendo en cuenta estas limitaciones y relativamente al estudio paralelo que ya se ha hecho de los datos de un modo descriptivo.

No hay que olvidar que el coeficiente de correlación indica la gradación y el sentido de la variación lineal conjunta de las variables, luego es necesario representar los datos antes de calcularlo para ver si, en este caso, los datos se ajustan a una recta. Además, dos variables altamente correlacionadas indican que existe una cierta relación entre ellas en el conjunto de datos estudiado, es decir, cuando una varía en tal o cual sentido, la otra varía en el mismo o en sentido contrario, pero que esa relación pueda extrapolarse a otros conjuntos, o que denote una clara dependencia o causalidad no es evidente y requiere de un estudio más exahustivo (Amón, 1987). Por ello no se concluirá la dependencia de las variables únicamente a partir de este estudio.

A efectos prácticos, se calcula el coeficiente de correlación lineal de Pearson, r, como

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

donde s_{xy} es la covarianza de ambas variables y s_x y s_y las desviaciones típicas de cada una de ellas, cuyas fórmulas son las que siguen (x_i e y_i son los datos obtenidos de ambas variables, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ representan las medias respectivas de estos datos y N es el tamaño total de ambas muestras):

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{N}$$

$$s_x = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

$$s_y = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \overline{y})^2}{N}}$$

Representando los pares de datos (figuras 6.32, 6.33 y 6.34) en los ejes cartesianos se obtienen las nubes de puntos que caracterizan la muestra de cada curso lo que, como ya se ha apuntado, resultará útil antes de realizar los cálculos para evitar conclusiones precipitadas.

La relación entre estas dos variables es evidente pues en todos los cursos los puntos representados se concentran alrededor de una recta. Existe una relación lineal y la recta de regresión -a la cual los datos se ajustan- nos proporciona un modo de predecir la formalización estimada para cada puntuación de la corrección.

Los datos de 6º EP se encuentran desplazados, como ya se ha visto en el análisis de la página 307, hacia los valores medios de la corrección y medio-bajos de la formalización. En 1º ESO se concentran en los niveles medio-altos de la corrección y la formalización, mientras que en 2º ESO lo hacen en los niveles altos de la corrección y la formalización.

Para comparar mejor las tres representaciones se agrupan en la figura 6.35, de este modo, considerando las rectas de regresión como un resumen gráfico de la variación conjunta de los datos, se pueden describir las variaciones observadas en los distintos cursos.

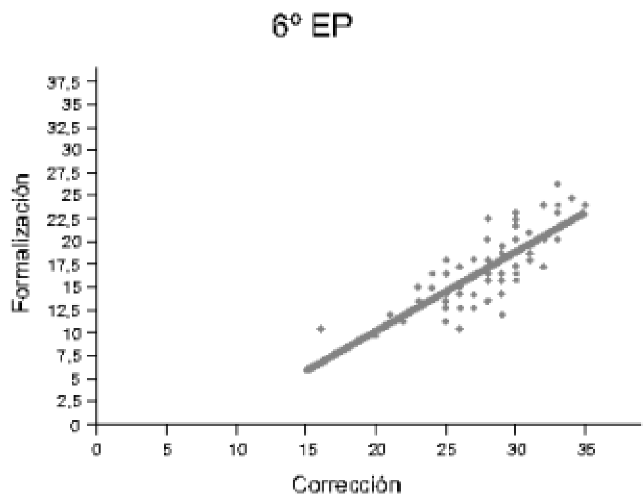


Figura 6.32: Relación entre la corrección y la formalización en 6º EP

Las rectas de regresión que representan los datos de 1º ESO y 2º ESO se encuentran muy próximas, mientras que la que representa los datos del curso de primaria aparece más alejada bajo ellas. Si se desprecia el primero de los datos de 2º ESO, pues se encuentra muy alejado del resto y está desvirtuando la distribución, las dos rectas aparecen prácticamente paralelas, sus pendientes son 1'06 para la de 1º ESO y 1'02 para la de 2º ESO -0'97 con la totalidad de los datos-. Ambas están próximas a 1 por lo que la variación en la formalización es prácticamente igual que en la corrección. No ocurre los mismo en el curso de primaria, la recta de regresión de 6º de primaria tiene una pendiente de 0'87, por lo que la variación en la formalización es más lenta que en la corrección. Se encuentra una similitud importante entre los cursos de secundaria aunque los resultados de la formalización sean algo más altos en 2º ESO, para la misma corrección.

Los coeficientes de correlación para cada una de estas distribuciones muestran unos valores muy elevados y similares en todos los cursos -0'8 en 6º EP y 0'9 en 1º ESO y 2º ESO- lo que confirma la alta correlación positiva de estas variables en cada uno de los cursos que ya se había observado, es decir, cuando la corrección alcanza valores elevados, la formalización alcanza valores también elevados, en proporciones bastante similares.

Estos resultados son altamente significativos, pues aplicando el estadístico

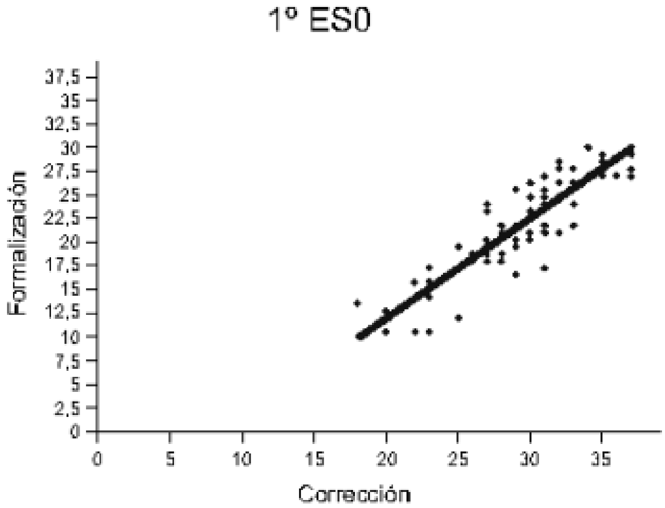


Figura 6.33: Relación entre la corrección y la formalización en 1º ESO

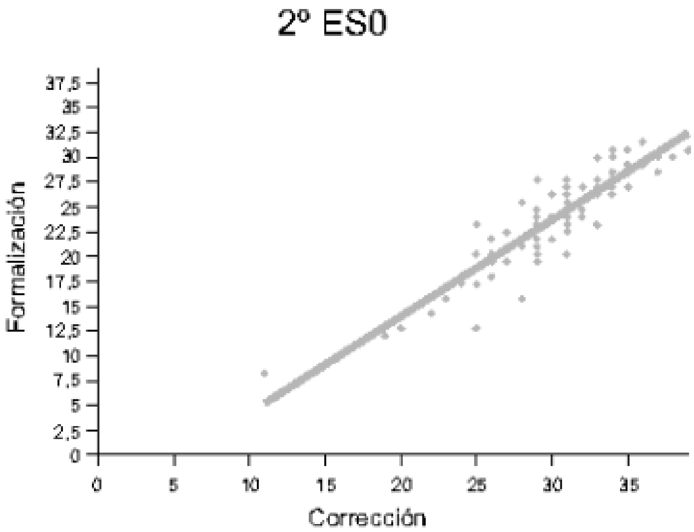


Figura 6.34: Relación entre la corrección y la formalización en 2º ESO

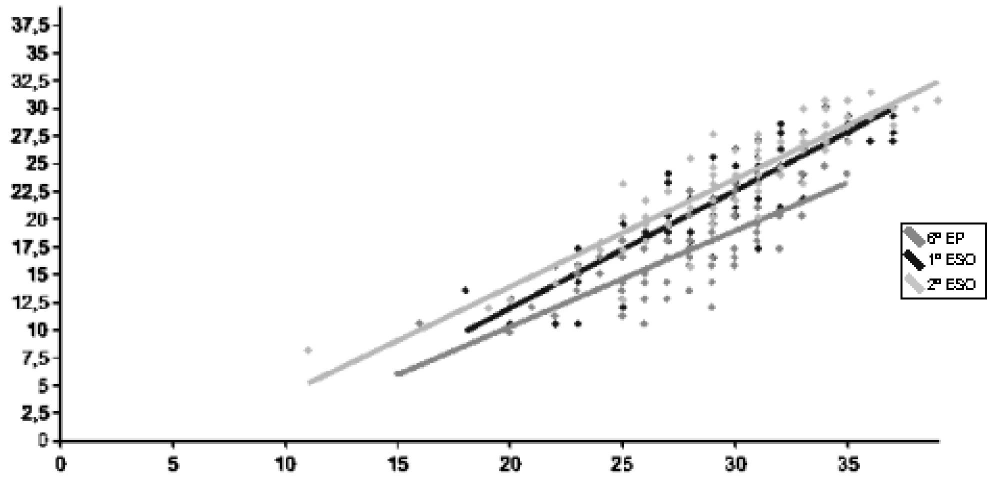


Figura 6.35: Comparación de las rectas de regresión de los tres cursos

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}}$$

hallamos los valores 10’8, para 6º EP, 18’12 para 1º ESO y 18’9 para 2º ESO, superiores a los valores críticos de una t_n de Student con n=N-2 grados de libertad, para cada curso, tanto a nivel 0’05, como 0’01.

Para analizar adecuadamente la similitud o diferencia entre las correlaciones de la corrección y la formalización en los tres grupos se utilizan los cuadrados de estos coeficientes, aceptados por la mayoría de los investigadores para la comparación de correlaciones entre sí (Aron, 2001). Para los tres cursos, los valores de r^2 son, respectivamente, 0’65, 0’81 y 0’81, lo que demuestra una diferencia estimada en casi un 20 % entre el curso de primaria y los de secundaria. Este parámetro indica el porcentaje de variabilidad de la formalización que se debe a la corrección, por lo tanto es más clara la relación entre ambas variables en los cursos de secundaria que en el de primaria, ya que los datos se ajustan mejor a la recta de regresión en estos cursos.

Esto parece indicar que la relación en este curso es algo menos lineal que la observada en los otros, es decir, los puntos se aproximan menos a la recta de regresión. Será necesario tener en cuenta la variabilidad de los datos, pues puede influir significativamente en el valor del coeficiente de correlación distorsionando la verdadera relación, ya que a mayor variabilidad mayor es el coeficiente de correlación (Amón, 1987). En este caso la variabilidad de los datos de 1º ESO y 2º ESO es muy parecida, tan sólo es menor en 6º EP, por lo tanto dicha variabilidad puede estar influyendo en la estimación de la correlación.

Por este motivo, es necesario confirmar estadísticamente la similitud de la correlación en los cursos de secundaria y sus respectivas diferencias con el curso de primaria aplicando una prueba de comparación de coeficientes de correlación mediante el estadístico

$$z = \frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{B}}$$

donde

$$Y_i = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+r_i}{1-r_i}\right), \; con\, i = 1, 2$$

y

$$B = \frac{1}{N_1 - 3} + \frac{1}{N_2 - 3}.$$

Dicho estadístico se distribuye como una N(0,1), cuyo valor crítico a nivel 0’05 es 1’96, siendo los valores hallados para el estadístico $z = 2'14$, para los cursos de 1º ESO y 6º EP, $z = 0'07$, para los cursos de 2º ESO y 1º ESO y $z = 2'22$, para los cursos de 2º ESO y 6º EP. Por lo tanto, se rechaza la igualdad de coeficientes de correlación en el primer y el último caso, pues en ambos casos $z \geq 1'96$, evidenciando claramente que la correlación en los cursos de secundaria es significativamente mejor que en el de primaria y demostrando con ello que la correlación entre la corrección y la formalización no es independiente del curso académico.

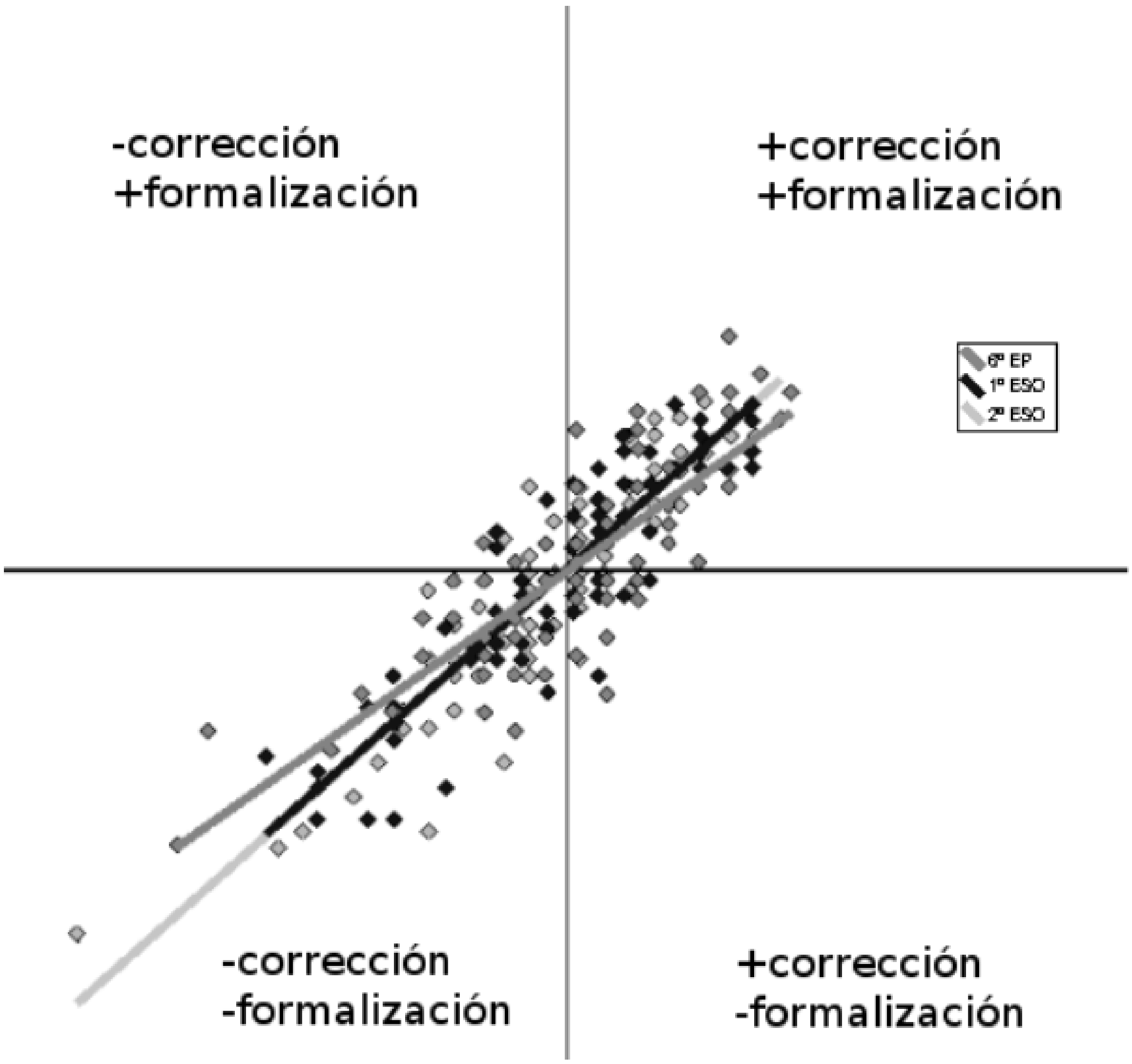


Figura 6.36: Representación de los datos normalizados

Los datos normalizados pueden ofrecer una visión más fiable de la relación entre ambas variables en cada curso por separado. Los coeficientes de correlación no varían y además, por ser datos normalizados, coinciden con las pendientes de la recta de regresión en cada curso son, respectivamente, 0’8 en 6º EP y 0’898 y 0’9 en los cursos de secundaria, respectivamente. Las representaciones gráficas están recogidas en la figura 6.36. Se observa que la relación entre las variables estudiadas no varía en los cursos de secundaria, es decir, cuanto mayor es la corrección mayor es la formalización; y tampoco la distribución de los datos respecto a la media del grupo, es decir, si despreciamos las diferencias significativas debidas al nivel académico, los dos cursos muestran una representación similar en cuanto a la relación entre estas variables. Sin embargo, en 6º EP, a pesar de que cuanto mayor es la corrección mayor es también la formalización, esta última no crece al mismo ritmo que en los cursos anteriores, es decir, a igual corrección corresponde una menor formalización comparativamente. Además el error típico en el curso de primaria, 0'6, es mayor que en los otros dos, 0'45 y 0'44, respectivamente, por lo que en 6º EP la nube de puntos se ajusta menos a la recta de regresión que en los cursos de secundaria, es decir, la relación es "menos lineal" entre ambas variables, como ya se había dicho.

Las conclusiones que se obtienen de este estudio estadístico son las siguientes:

- En los cursos estudiados la corrección y la formalización presentan una relación importante en su variación conjunta. Se puede afirmar que a medida que aumenta la corrección aumenta la formalización, y viceversa. Lo que, a priori, nos permite pensar que el nivel de formalización de las alumnas depende de su nivel de éxito en el cuestionario. Es necesario contrastar estas afirmaciones con otras pruebas -se hará una prueba de independencia y otra de homogeneidad- pues, como ya se ha advertido, es frecuente que dos variables sin ninguna relación de causalidad, ni dependencia, aparezcan altamente correlacionadas.
- Esta relación se ajusta en buena medida a una variación lineal, de forma que la recta de regresión sirve de pronóstico de resultados de formalización a partir de la corrección, con un error menor en los cursos de secundaria.
- La relación entre la corrección y la formalización se estrecha a medida que aumenta el curso académico, llegando a resultar prácticamente idéntica en los dos cursos de secundaria.
- La variación de la formalización es ligeramente más lenta que la de la corrección, sobre todo en el curso de primaria. Esta diferencia se va neutralizando en cursos superiores.

c) Pruebas de independencia y homogeneidad de la corrección y la formalización

Una vez estudiada la correlación, debido a las limitaciones apuntadas en las conclusiones del apartado anterior, se aplica una prueba de independencia que confirme si la relación hallada entre estas variables se debe o no a una dependencia entre ellas.

Dada la excesiva variedad de categorías establecidas para el estudio conjunto de la corrección y la formalización en comparación con el tamaño de la muestra de cada curso se opta por reducir el estudio a dos categorías por variable. Esta decisión se basa en las investigaciones acerca de las limitaciones de aplicación de la χ^2 de Pearson que Delucchi (1983) realizó y en las que se recomienda un tamaño de la muestra al menos cinco veces superior al número de categorías resultantes en el estudio conjunto -calculado por el producto de la cantidad de categorías de ambas variables- para evitar que unas frecuencias esperadas demasiado bajas en alguna de ellas conduzcan a resultados poco significativos estadísticamente.

En este estudio, donde las muestras por cursos oscilan entre 66 y 84 alumnas, el número de categorías máximo debe ser menor de 13, bastante inferior al resultante del cruce de los cinco niveles de cada una de las variables, es decir, 25. Después de realizar pruebas con distinto número de categorías se concluye que la opción de dos categorías para cada variable es la que menos error proporciona, es decir, la que más se ajusta a la realidad.

Se agrupan los niveles del 1 al 3 como un resultado deficiente en la variable y los niveles 4 y 5 como un buen resultado para la variable estudiada. La razón de esta desigual agrupación se halla en la propia definición de los niveles realizada en los apartados 6.2.1 y 6.2.2. Los niveles 1, 2 y 3 no reflejan un desarrollo suficiente de las capacidades evaluadas respecto de la corrección y la formalización, aunque las alumnas de nivel 3 presentan un desarrollo medio en varias de las capacidades con respecto a la corrección tampoco se ha considerado suficiente a lo largo del estudio pues, en las capacidades más significativas, siguen sin ser competentes. En los niveles 4 y 5 se aprecia un salto cualitativo importante tanto en cuanto a la corrección, como a la formalización, por tanto se agrupan bajo la calificación de buen resultado para el desarrollo de ambas variables.

La prueba se realiza aplicando la χ^2 de Pearson para establecer la dependencia o independencia, de modo que si el valor calculado con los datos de la corrección y la formalización es mayor que el valor teórico de $\chi^2(\nu, \alpha)$, siendo ν el número de grados de libertad y $1-\alpha$ el nivel de significación, se tiene suficiente evidencia estadística para rechazar la independencia y no se tiene en caso contrario, al menos a este nivel de significación. Pero la χ^2 no ofrece el grado de dependencia una vez que ésta se confirma sino que es necesario un nuevo cálculo, el coeficiente de Cramer, V, ya que es independiente del tamaño de la muestra. Dicho coeficiente informa sobre el nivel de intensidad de la dependencia entre las variables, en el caso de que la haya, de manera que el 0 corresponde a una independencia perfecta entre las variables y el 1 a una dependencia perfecta de las mismas. Como en el caso de los coeficientes de correlación la interpretación de estos también debe hacerse con prudencia y sin olvidar el tipo de estudio al que se refieren.

Se aplican las siguientes fórmulas para los cálculos, en una tabla de contingencia de n filas y m columnas donde están representadas las dos variables:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(F_{ij} - F_{ij}^t\right)^2}{F_{ij}^t}, \; {\scriptstyle 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m}$$

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{kN}}$$

donde N es el número total de datos, k el menor de los valores *i-1* y *j-1*, F_{ij} la frecuencia correspondiente a la fila i y la columna j y F_{ij}^t la frecuencia teórica para la supuesta independencia en la fila i y columna j, que se calcula

$$F_{ij}^t = \frac{F_i \cdot F_j}{N}$$

con F_i y F_j frecuencias marginales de cada fila o columna, cuyas fórmulas son

$$F_i = \sum_{j=1}^{m} F_{ij} \qquad F_j = \sum_{i=1}^{n} F_{ij} \; .$$

Además será necesario aplicar la corrección de Yates en los casos en los que alguna de las F_{ij} sea menor de 5 (López, 1997; Garrett, 1976) para evitar una subestimación de los niveles de la probabilidad de algunos resultados. Lo que este estadístico proporciona es una reducción del valor calculado de la χ^2, que ofrece resultados más fiables en el caso de frecuencias pequeñas, es decir, si χ^2es significativo el valor hallado con la corrección de Yates puede caer por debajo del umbral de significación establecido y si χ^2no es significativo, tampoco lo será el valor corregido. Su cálculo se realiza con la fórmula siguiente:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left[\left(F_{ij} - F_{ij}^t\right) - 0'5\right]^2}{F_{ij}^t}, \; {\scriptstyle 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m}$$

En este caso particular se ha obtenido una tabla de contingencia de dos filas y dos columnas, pues cada una de las variables -corrección y formalización- presentan dos categorías, que se debería distribuir como una χ^2 con un grado de libertad, ya que $(2-1) \cdot (2-1) = 1$. Se elige un nivel de significación del 95 %, por ser el más frecuente en este tipo de estudios, lo que corresponde a un $\alpha = 0'05$. Así pues, el valor crítico para realizar la prueba será el de la tabla de la distribución χ^2 para estos parámetros, es decir, $\chi^2(1,0'05) = 3'84$. Recordemos que se rechaza la independencia si $\chi^2 \geq \chi^2(1,0'05)$ y no se tiene suficiente evidencia estadística para ello en caso contrario.

Los valores encontrados, aplicando la corrección de Yates ya que en algún caso $F_{ij} < 5$, son, respectivamente en los tres cursos, $\chi^2 = 5'39$, $\chi^2 = 17'88$ y $\chi^2 = 34'8$, valores todos ellos mayores que el valor crítico del contraste, por lo que se rechaza la hipótesis de independencia y se calcula el nivel de asociación de las variables con el coeficiente de Cramer. Se obtienen los valores $V = 0'29$ $V = 0'47$y $V = 0'64$, que corresponden a una asociación media en el caso del curso de primaria y alta en el caso de los cursos de secundaria, según las tablas de Cohen (1988). Esto corrobora la asociación señalada anteriormente y las diferencias halladas entre los cursos en la variación conjunta de estas dos variables, es decir, en el curso de primaria hay menos diferencias de la formalización debidas a la corrección y en los cursos de secundaria estas diferencias se manifiestan con más intensidad, lo que significa que la corrección influye de modo más claro en la formalización, en este caso, favoreciendo una variación hacia la categoría más alta y proporcionando un mayor ajuste entre ambas variables en los cursos superiores.

Si se aplica esta misma prueba para demostrar la dependencia de cada una de estas variables y el curso académico tendremos una tabla de contingencia de doble entrada en la que la variable corrección varía en dos categorías, mala y buena, y la variable curso académico varía en tres categorías, 6º EP, 1º ESO y 2º ESO. De la misma manera se procede para la formalización.

Los resultados obtenidos en este caso son $\chi^2 = 6'82$ y $\chi^2 = 47'79$, que comparados con el de una χ^2 de dos grados de libertad a nivel de significación del 95 %, $\chi^2(2,0'05) = 5'99$, permite rechazar la independencia de las variables corrección o formalización con el curso académico, es decir, la distribución de estas variables depende del curso académico en que las analicemos. Además, para cada caso, los coeficientes de Cramer indican una asociación media-baja en el caso de la corrección, con $V = 0'17$, y alta en el de la formalización, con $V = 0'45$. Lo que confirma que las diferencias de los resultados por cursos son evidentes, sobre todo en la formalización.

Comparando por cursos, dos a dos, tan sólo se encuentra significación estadística de la dependencia de la corrección y el curso, con una asociación media-baja, a este nivel de significación entre los cursos de 6º EP y 2º ESO, pues $\chi^2 = 6'68$ y $V = 0'21$, ya que para el resto $\chi^2 < \chi^2(1,0'05)$. Sin embargo, para la formalización, se halla dependencia en todos los cursos, con una asociación media entre 6º EP y 1º ESO, pues $\chi^2 = 19'70$ y $V = 0'37$, una asociación alta entre 6º EP y 2º ESO, ya que $\chi^2 = 47'78$ y $V = 0'56$, y una asociación media-baja entre los cursos de secundaria, pues $\chi^2 = 8'34$ y $V = 0'22$. Se interpreta que las diferencias son mayores entre el curso de primaria y el último curso de secundaria, sobre todo en la formalización y son menores entre los cursos de secundaria, entre sí. Todo esto refuerza la idea de que las mayores diferencias por cursos se evidencian en la formalización, como no podía ser de otra manera, a favor de los cursos de secundaria que ya conocen el lenguaje algebraico.

Por último, se realiza una prueba de homogeneidad entre la variable y el grado de desarrollo que nos permita evidenciar las diferencias halladas en la distribución de la corrección y la formalización, por cursos. El método aplicado es el mismo que para la prueba de independencia sólo que ahora se contrasta la hipótesis de homogeneidad, es decir, la hipótesis nula es que las variables se distribuyen de forma homogénea, en cada una de las categorías. Los resultados obligan a rechazar la homogeneidad en el caso de los cursos 6º EP y 1º ESO, pues $\chi^2 \geq \chi^2(1, 0'05)$ -respectivamente, $\chi^2 = 29'46$ y $\chi^2 = 9'28$- con mayor potencia en el caso de 6º EP, con $V = 0'47$y $V = 0'25$, respectivamente para los dos cursos. No se puede rechazar la homogeneidad en el curso de 2º ESO, pues $\chi^2 = 1'53$ y $\chi^2 < \chi^2(1, 0'05)$. Esto confirma que ambas variables se aproximan más en su variación en 2º ESO, como ya se había adelantado y se distancian más en 6º EP, siendo los resultados de la formalización peores que los de la corrección.

Si aplicamos esta misma prueba comparando el curso con las variables estudiaremos el significado de estas diferencias halladas entre los cursos. En general, se rechaza la hipótesis de homogeneidad lo que evidencia las diferencias entre cursos, ya que $\chi^2 = 13'64$ y $\chi^2 \geq \chi^2(1, 0'05)$. Pero además, esto sucede también entre 6º EP y cada uno de los cursos de secundaria, $\chi^2 = 6'68$ y $\chi^2 = 11'77$, respectivamente, no encontrándose resultado significativo entre los cursos de secundaria. Todo ello refuerza la idea de que las grandes diferencias se encuentran entre el curso de primaria y los de secundaria, más que entre estos últimos entre sí.

En resumen, se puede afirmar que existe una dependencia importante entre las variables corrección y formalización en todos los cursos y que, además, esa dependencia aumenta en los cursos de secundaria. También se ha encontrado evidencia estadística de las diferencias halladas por cursos en ambas variables -sobre todo entre los más alejados en cuanto al nivel académico- mayores en la formalización que en la corrección y, diferencias entre ambas variables -corrección y formalización- más evidentes en el curso de primaria y menos en los de secundaria, llegando a la homogeneidad en el curso superior de los de secundaria. Además, estos últimos cursos presentan resultados más similares entre sí que con el curso de primaria, en cuanto a la similitud en la distribución de ambas variables. Todo esto confirma las conclusiones enunciadas en el apartado anterior.

6.2.4. Comparación con los resultados académicos

Dada la naturaleza de este estudio resulta conveniente relacionar el éxito en el cuestionario con el nivel académico que la alumna posee. Se espera una clara correlación entre ambos resultados, es decir, que las alumnas que más éxito tienen en el cuestionario tengan un mejor nivel académico, y viceversa.

La variable que mide el éxito en el cuestionario se ha llamado corrección y el nivel académico se representa por una nueva variable denominada *calificación* y que recoge las notas obtenidas por las alumnas en la convocatoria de junio del curso escolar 2004-2005, en el que se realizó esta prueba. La representatividad que puedan tener estos datos respecto del verdadero conocimiento de las alumnas es un tema que ha sido muy debatido en la comunidad escolar. La calificación de un alumno no sólo depende de factores académicos, sino de situaciones sociales, de factores psicológicos e incluso, en muchos casos, de la subjetividad del evaluador. Algunas investigaciones avalan este hecho, por ejemplo, López Puig (1997) demuestra a través de pruebas de madurez matemática aplicadas a escolares que el éxito o fracaso en dichas pruebas no manifiesta una relación de dependencia con el nivel escolar (apto- no apto) en matemáticas. También algunos estudios del CIDE: *Análisis de perfiles de madurez en las Áreas científica, lingüística y matemática al término de la E.G.B.* (1991) -concluye que la E.G.B. se plantea unos objetivos que no son alcanzables por el alumnado, ni siquiera por aquellos mejor dotados y con un selecto historial académico-; *Análisis de relaciones entre factores psicológicos, factores socio-económicos y rendimiento escolar sobre una muestra de alumnos de Bachillerato* (1984) -evidencia la importancia de las variables psicológicas investigadas en el rendimiento en Física-; o *Análisis de datos del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) desde la perspectiva del sistema educativo español* (2000) -se encuentran relaciones positivas entre el rendimiento y algunos condicionantes socio-culturales, pero afirma que no existe relación empírica con el rendimiento de muchas variables, tradicionalmente consideradas factores importantes de aprendizaje, como por ejemplo, las técnicas de evaluación.

Ignorando estas apreciaciones, pues no es el tema que ocupa a esta investigación, se acepta la calificación obtenida por las alumnas como una clasificación del nivel escolar ya que es lo convenido por la comunidad escolar como indicador del factor de éxito-fracaso.

La escala de calificación en primaria consta de dos apreciaciones: *Progresa adecuadamente* o *necesita mejorar*. En el primer caso dicha apreciación va acompañada del nivel de alcance de los objetivos en una escala convencional -*suficiente, bien, notable* y *sobresaliente*-. En secundaria se califica a las alumnas con la misma escala convencional -*insuficiente, suficiente, bien, notable* y *sobresaliente*- matizada por una nota numérica entera del 1 al 10. Dado que el modo de calificar en primaria y secundaria es diferente se ha establecido una nueva escala que nos sirva para unificar criterios. Se trata de una clasificación en 6 niveles en la que el más bajo corresponde al *muy deficiente* (en adelante, MD), el siguiente es de *insuficiente* (en adelante, IN), le sigue el *suficiente* (en adelante, SF), a continuación tenemos el *bien* (en adelante BI), luego el *notable* (en adelante, NT) y, por último, el *sobresaliente* (en adelante, SB).

El MD corresponde a la alumna que obtiene la calificación *necesita mejorar* en primaria y no promociona al curso siguiente, en secundaria corresponde a una nota por debajo de 3. Si la alumna de primaria *necesita mejorar*, pero promociona la curso siguiente se clasifica con un IN, lo que corresponde en secundaria a una nota de 3 ó 4. El SF corresponde en primaria la alumna que *progresa adecuadamente* con una consecución *suficiente* de los objetivos y en secundaria a una nota de 5. El BI agrupa a las alumnas de primaria que *progresan adecuadamente* alcanzando *bien* los objetivos del curso y en secundaria a la nota de 6. El NT se corresponde en primaria con el *progresa adecuadamente* obteniendo un nivel *notable* en los objetivos, en secundaria es un 7 o un 8. Para terminar, si la alumna de primaria *progresa adecuadamente* y alcanza los objetivos de modo *sobresaliente*, y el de secundaria obtiene una nota de 9 ó 10, se clasifica en el nivel máximo, es decir, SB.

Observemos el gráfico de la figura 6.37 que nos muestra la distribución de calificaciones por cursos. En el eje de abscisas se representa la variable calificación y en el de ordenadas las frecuencias relativas con las que se encuentra cada una de ellas.

Las diferencias son mínimas en cuanto a los resultados de cada curso, distanciándose poco más de un 5 % por debajo el número de suficientes en 6º EP respecto a los cursos de secundaria. La nota media del curso de primaria es un 6’48 -se ha obtenido escogiendo como marcas de clase los valores MD=1, IN=3, SF=5, BI=6, NT=8, SB=10-, en 1º ESO un 6’22 y en 2º ESO un 6’06, que corresponden con el BI, en los tres cursos. Esta media va descendiendo según aumenta el curso académico lo que puede corresponder bien al aumento de la dificultad de la materia respecto al nivel de desarrollo de las alumnas o bien al proceso de trasformación psicosocial que comienza con la pubertad de las mismas.

Para poder comparar los datos de los tres cursos sin atender a las diferencias particulares se procede a una normalización de los datos y se observa una reducción de las desigualdades en

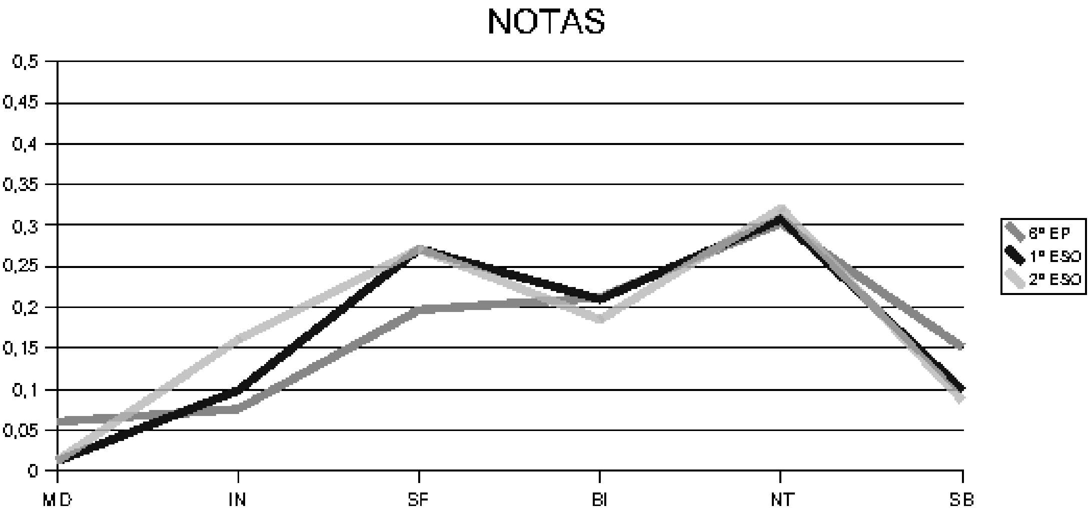


Figura 6.37: Comparación de la calificación en los tres cursos

cuanto a los dos cursos de secundaria se refiere, sin embargo éstas se acentúan con el curso de primaria pues en este último las calificaciones están menos dispersas al ser su rango menor con la misma media y varianza (figura 6.38).

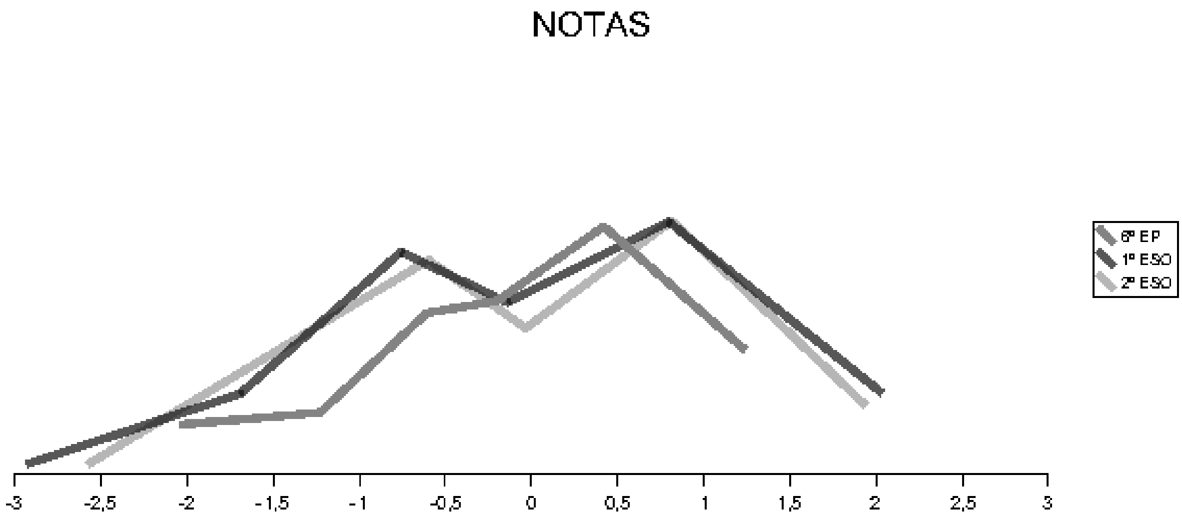


Figura 6.38: Comparación de la calificación normalizada en los tres cursos

a) Comparación de los resultados académicos con la corrección

Para comparar la variable calificación con la corrección se representan en un mismo gráfico (figura 6.39) los resultados de cada curso para ambas variables. El eje de abscisas corresponde con los niveles de corrección y de calificación y en el de ordenadas se sitúan las frecuencias relativas con que se presentan cada uno de ellos.

Las distribuciones de alumnas no son iguales, ni tienen similitudes concluyentes, para estas dos variables. En la mayor parte de los niveles al aumentar una de las variables aumenta también la otra aunque no se mantienen las proporciones, pero se observan algunas excepciones como el BI de los cursos 1º ESO y 2º ESO, que experimenta un descenso y sin embargo el nivel de corrección sigue en aumento.

De los gráficos (figura 6.39) se extrae la conclusión de que la distribución de alumnas por calificaciones es mucho más equitativa que la que atiende a su nivel de corrección en el cuestionario. Se atribuye este hecho a que alcanzar los niveles más bajos de la variable corrección es demasiado asequible para las alumnas de estos cursos y, sin embargo, los niveles más altos son suficientemente complicados para ellas. Es decir, las alumnas se concentran más en los niveles centrales de la corrección, por lo que se piensa que se establecería un resultado más parecido si se anulasen los niveles extremos, el 1 y el 5.

En el curso de primaria hay un mayor número de alumnas en los niveles más bajos y más altos de la calificación que en los de la corrección, sin embargo en un nivel medio-alto de ambas variables se encuentra una mayor concentración de alumnas en la corrección que en la calificación. En los cursos de secundaria se obtienen resultados algo diferentes a estos, aunque muy similares entre sí -más acentuados en 2º ESO-. A partir de los niveles centrales y hasta los más elevados de ambas variables la concentración de alumnas es gradualmente más alta en la corrección que en la calificación, lo que implica que hay muchas menos alumnas en los niveles más bajos de la primera que de la segunda.

Los resultados parecen confirmar que la variación conjunta no es significativa y que las diferencias entre ambas variables se encuentran en unos mejores resultados en el cuestionario que en las calificaciones escolares, superiores cuanto mayor es el curso académico.

Para profundizar en la relación que pueda existir entre estas variables hay que analizar la variación conjunta mediante el estudio de la correlación entre ambas variables. Se consideran los datos por pares ordenados, en los que la abscisa representa la calificación académica y la ordenada la puntuación obtenida en la corrección del cuestionario para cada una de las alumnas.

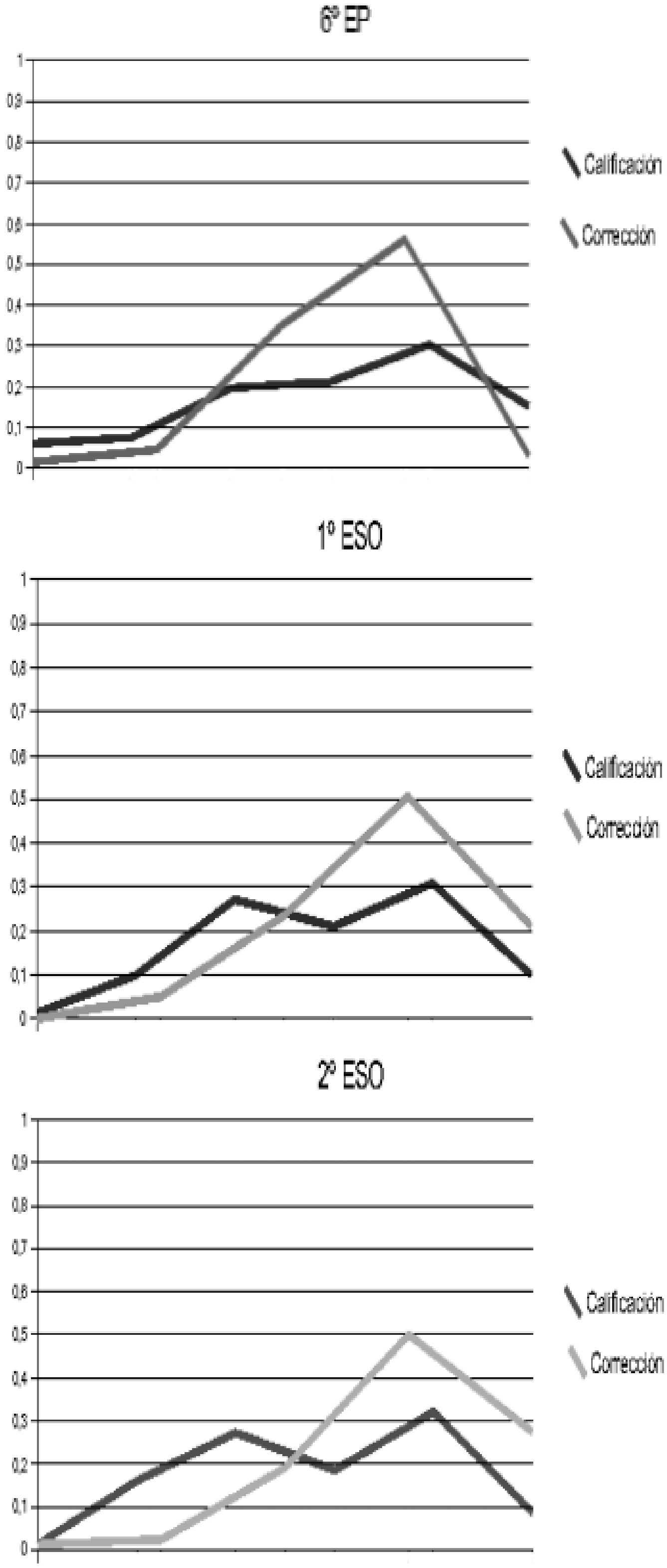


Figura 6.39: Comparación de la calificación y la corrección en cada curso

Se presentan los resultados en tablas, como resumen de los datos.

TOTAL

Calificación/Corrección	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1		0’5 %	0’5 %			
Nivel 2	0’5 %	2 %	1 %		0’5 %	
Nivel 3	1 %	5 %	9 %	5 %	5 %	
Nivel 4	1 %	3 %	10 %	14 %	18 %	5 %
Nivel 5			4 %	1 %	7 %	6 %

Las alumnas están bastante distribuidas entre los niveles y las calificaciones centrales, destacando el 18 % de (NT,N4) -ver página 306 para notación- seguido de un 14 % en (BI,N4), un 10 % en (SF,N4) y un 9 % en (SF,N3). A continuación se observa un descenso escalonado de las concentraciones hacia un nivel más alto de la corrección y las calificaciones y, después, hacia los niveles más bajo de ambas variables. No se especifican estos niveles por considerarlo menos significativo de cara a la caracterización general de la distribución.

6º E.P.

Calificación/Corrección	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1		2 %				
Nivel 2	2 %	3 %				
Nivel 3	2 %		15 %	9 %	9 %	
Nivel 4	3 %	3 %	4 %	12 %	21 %	12 %
Nivel 5						3 %

Esta distribución aparece menos dispersa en el curso de primaria pues el nivel superior se encuentra casi vacío y los porcentajes de los niveles más concurridos son superiores -21 % en (NT,N4), 15 % en (SF,N3), 12 % en (BI,N4) y (SB,N4) y 9 % en (BI,N3) y (NT, N3). En los cursos de secundaria la dispersión aumenta gradualmente.

1º E.S.O.

Calificación/Corrección	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1						
Nivel 2		1 %	2 %		1 %	
Nivel 3	1 %	7 %	9 %	5 %	1 %	
Nivel 4		1 %	12 %	15 %	19 %	4 %
Nivel 5			4 %	1 %	10 %	6 %

En 1º ESO se encuentra un 19 % de las alumnas en (NT,N4), un 15 % en (BI,N4), un 12 % en (SF,N4), un 10 % en (NT,N5) y un 9 % en (SF,N3). Se observa como descienden los niveles más bajos de la corrección y aumentan los más altos, manteniéndose los niveles o incluso descendiendo las calificaciones para dichos niveles.

2º E.S.O.

Calificación/Corrección	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1			1 %			
Nivel 2		2 %				
Nivel 3		7 %	5 %	1 %	6 %	
Nivel 4	1 %	6 %	12 %	15 %	15 %	
Nivel 5			9 %	1 %	10 %	9 %

En 2º ESO hay un 15 % en (BI,N4) y en (NT,N4), un 12 % en (SF,N4), un 10 % en (NT,N5) y un 9 % en (SF,N5) y (SB,N5), por lo que sigue aumentando la corrección, manteniéndose los mismos niveles que en primaria en las calificaciones. Los porcentajes de concentración son menores en 1º ESO que en el curso de primaria y en 2º ESO que en 1º ESO, encontrándose una mayor diferencia entre el curso de primaria y los de secundaria, que entre estos últimos entre sí. Sin embargo, se observa una clara mejora en cuanto a la corrección para una mismo nivel de calificación según avanzamos en los cursos académicos.

Se representan estos datos en gráficas, como nubes de puntos, para poder compararlos de un modo más global (figura 6.40).

Los datos de 6º EP se encuentran más dispersos en cuanto a la variable calificación pero más concentrados en cuanto a la corrección, justo lo contrario que ocurre con los otros dos cursos, en los que la variable corrección tiene una alta variabilidad. Los datos más dispersos son los de 2º ESO.

La nube de puntos resultante de la representación de datos de 6º EP se ajusta más a la recta de regresión que en los otros dos cursos dentro de que, en general, se adaptan más bien poco a una recta. La dependencia de estas variables se encuentra lejos de ser lineal, sobre todo en los cursos de secundaria. Las pendientes de la recta de regresión son muy dispares, 0'92 en 6º EP, 1'57 en 1º ESO y 1,12 en 2º ESO[2]. El cálculo de las pendientes de las rectas ofrece información

[2] Gráficamente las pendientes de las rectas representadas no se corresponden con las pendientes calculadas numéricamente, la razón es que las unidades tomadas en los ejes de coordenadas para representar las dos variables no guardan las proporciones adecuadas. Si se hubiese tomado la misma unidad en ambos ejes se vería con precisión la pendiente de la recta, pero dejarían de percibirse con claridad los puntos que representan los datos pues se acumularían en un espacio muy pequeño a la izquierda del gráfico.

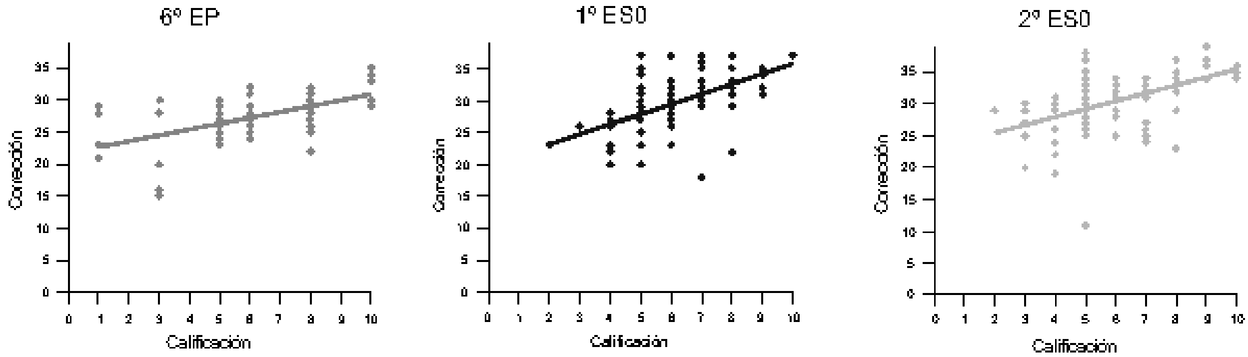


Figura 6.40: Relación entre la calificación y la corrección por cursos

sobre la variación conjunta de las variables en cuestión. La de 6º EP evidencia que la variación de la calificación y la variación de la corrección son bastante similares, pues la pendiente se aproxima a 1. En los otros dos casos la pendiente es mayor que 1, lo que quiere decir que la variable corrección aumenta más rápidamente que la calificación, sobre todo en 1º ESO. Pero la recta de 2º ESO está por encima de la de 1º ESO, de lo que se deduce que la corrección de aquel es mejor que la de éste para la misma calificación. Las alumnas de 1º ESO con un bajo nivel de éxito escolar se aproximan en su corrección a las del curso de primaria de calificaciones bajas, mientras que las de una calificación elevada prácticamente se igualan a las de las mismas calificaciones en 2º ESO (figura 6.41).

En cuanto a los coeficientes de correlación hayan los siguientes valores: 0’59 para los datos de 6º EP, 0’56 en 1º ESO y 0’48 en 2º ESO, hay que tener en cuenta que la variabilidad de datos influye en la correlación, por lo que es necesario cerciorarse de que no estamos en este caso. Observando los datos se llega a la conclusión de que más que la variabilidad, el problema es la mayor dispersión en los cursos de secundaria, ya que el error típico, que muestra la distancia de los puntos a la recta de regresión al calcular la diferencia de la variable corrección respecto a la estimación realizada con la recta de regresión, es mayor según aumenta el curso académico -3’1 en 6º EP, 3’78 en 1º ESO y 4,07 en 2º ESO-. Aún así, la variabilidad en 6º EP, inferior en los cursos de secundaria, ha podido influenciar en la diferencia de ambos coeficientes. Calculando la correlación independientemente en dos subgrupos de cada curso caracterizados por la similitud en los resultados de la calificación se obtiene una reducción importante de la correlación en el caso de 1º ESO, ya que los coeficientes para este curso son 0’42 para las alumnas de notas bajas y 0’22 para las alumnas de notas altas, mientras que en 6º EP y en 2º ESO son, respectivamente, 0’39 y 0’35 para los resultados bajos y 0’63 y 0’53 para los altos. Por lo que parece

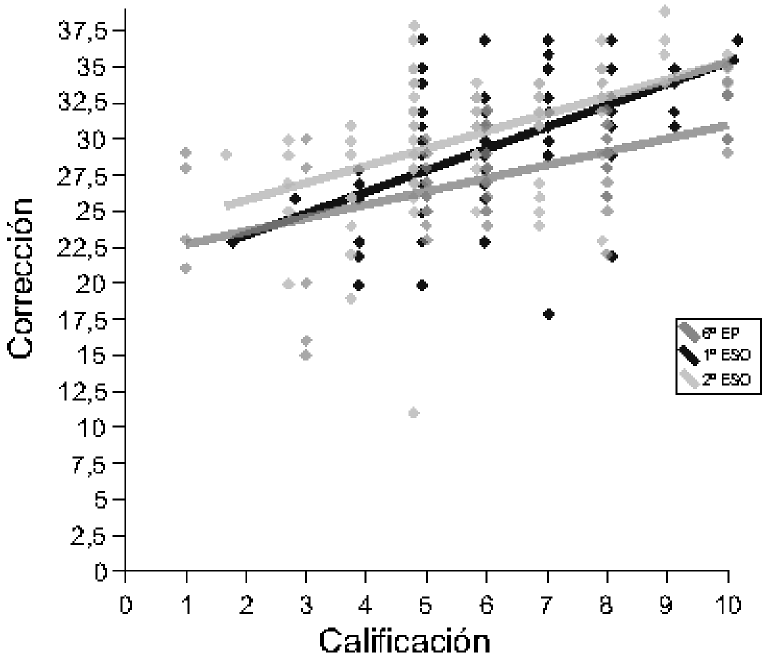


Figura 6.41: Comparación de las rectas de regresión de los tres cursos

que la variabilidad afecta más en el curso de 1º ESO, que en el de 6º EP, por lo que es necesario relativizar aún más el valor alcanzado en este curso. En cuanto a los otros cursos la correlación es más clara en las alumnas de mejores resultados que en las de resultados medio-bajos.

Según Cohen (1988) estos niveles de correlación podrían considerarse elevados, pero en nuestro caso particular resultan muy poco reveladores de una variación conjunta importante. La primera razón para ello es la excesiva dispersión que se ha destacado en todos los casos para los datos conjuntos de ambas variables. La segunda es la comparación con los resultados hallados en la correlación entre la formalización y la calificación, mayores como se verá en 6.2.4, cuando sería más evidente pensar en una mayor correlación de los resultados académicos con la corrección que con la formalización, ya que ésta presenta más peculiaridades debidas a cada curso escolar (ver 6.2.2). La tercera es la comparación con la correlación hallada en el caso de la corrección y la formalización. Evidentemente no se esperaban unos resultados similares pues la corrección en el test y la formalización del mismo varían de una forma muy similar, con una elevada correlación, pero sí resultados algo mejores pues la corrección en el test no puede ser independiente de los resultados académicos, al menos en alguno de los cursos, lo que indicaría mayor idoneidad para dicho nivel curricular.

En todos los cursos estos coeficientes resultan significativos, pues procediendo como en la prueba de significación de los coeficientes de correlación de la página 310, se obtienen unos valores de t que lo son, 5'85 en 6º EP, 6'01 en 1º ESO y 4'95 en 2º ESO, tanto a nivel 95 % como a 99 %.

Para compararlos se utiliza el parámetro r^2, que da una idea más real de las diferencias entre ellos. Para este caso son, respectivamente para los tres cursos, 0'34, 0'31 y 0'23. Se observan unas diferencias muy pequeñas entre 6º EP y 1º ESO que se amplían en un 10 % con 2º ESO. Se puede concluir que las variables parecen tener una mejor correlación en el curso de primaria y 1º ESO y peor en el último curso de secundaria, ya que el porcentaje de variabilidad de la corrección que se debe a la calificación es menor este curso. Aunque en los tres casos es tan escaso que no se pueden sacar conclusiones directas, sino que habrá que aplicar otras pruebas para profundizar en esta relación.

Mediante una comparación de diferencias de correlación análoga a la realizada en la página 313 no se obtiene evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis de igualdad de los coeficientes de correlación, a nivel de significación del 95 %, entre ninguno de los cursos. Por lo que tampoco en este caso se hallan diferencias significativas en la correlación de los distintos cursos.

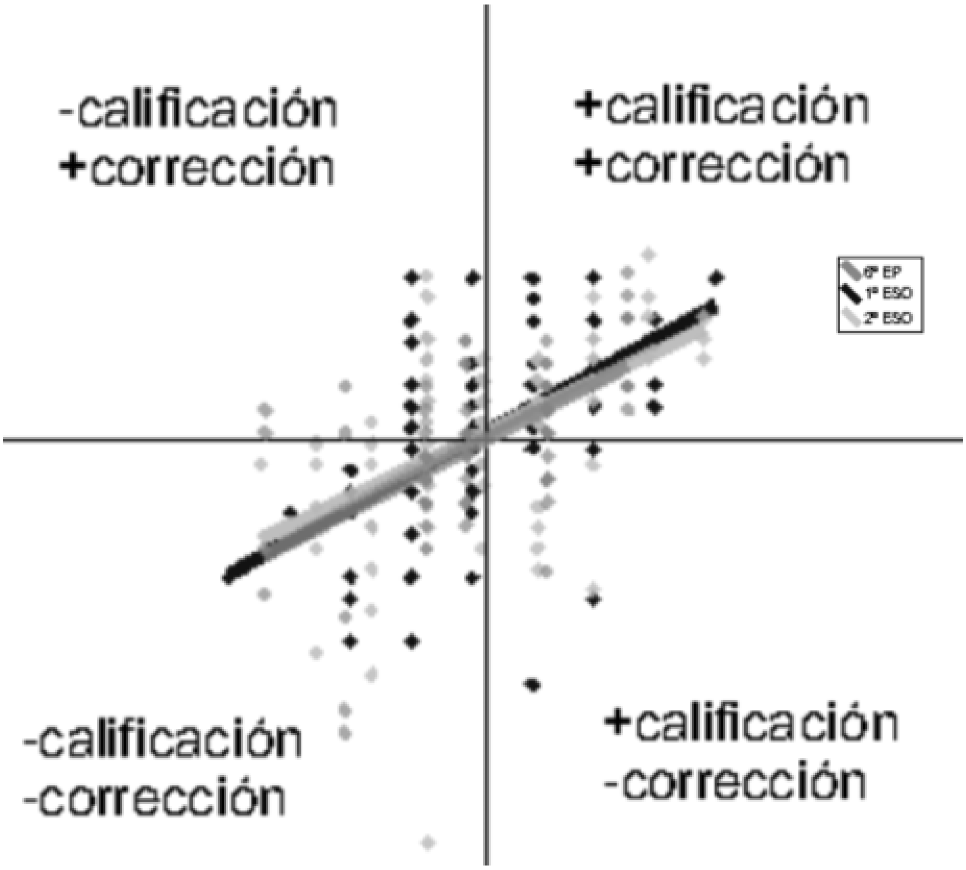


Figura 6.42: Representación de los datos normalizados

Representando los datos normalizados (figura 6.42) se observa que las tres rectas prácticamente coinciden. Con los datos normalizados la pendiente de la recta de regresión es idéntica al coeficiente de correlación y estos tan sólo difieren en unas centésimas. Al despreciar las diferencias significativas por curso y analizar la relación entre estas dos variables, independientemente de las características propias de cada uno, se observa que aumenta la similitud de la relación entre la calificación y la corrección en cada curso, tan sólo difiere la dispersión que es mayor en 2º ESO y menor en 6º EP. Esta dispersión de los datos sigue siendo la característica más destacada en todos los cursos pues encontramos un elevado porcentaje de ellos en los cuadrantes II y IV, correspondientes a una calificación por debajo de la media con una corrección por encima de la media y a una calificación por encima de la media con una corrección por debajo de la media, sobre todo a la primera.

Las consecuencias que se extraen de todo este análisis se resumen en lo siguiente:

- La relación entre la variable calificación y la variable corrección no se puede considerar destacable a pesar de que la correlación sea positiva. En la mayoría de las alumnas la corrección en el cuestionario corresponde a unos resultados académicos similares, pero existe un elevado porcentaje de alumnas en los que esto no se verifica. Es necesario contrastar estos resultados para determinar si el nivel de correlación hallado es determinante para caracterizar esta relación, dado que analizado por sí sólo no es posible afirmarlo (Amón, 1987).
- Esta relación, aunque débil, es más evidente en 6º EP y en 1º ESO y que en el curso de 2º ESO. En general estas diferencias son mínimas y no se pueden considerar significativas.
- La corrección experimenta un incremento ligeramente más rápido que la calificación, más acusado en los cursos de secundaria que en el de primaria.

b) Pruebas de independencia y homogeneidad de la calificación y la corrección

Para realizar un análisis definitivo de la relación entre la calificación y la corrección se realiza una prueba de independencia basada en la distribución χ^2 de Pearson de un grado de libertad, ya que se establecen dos categorías para cada una de estas variables. Para la corrección, como ya se hizo en 6.2.3, estas serán: mala corrección, para los niveles del 1 al 3, y buena corrección, para el resto de niveles. Para la calificación establecemos las categorías atendiendo al suspenso o aprobado en el curso, de este modo corresponden a un suspenso las calificaciones de MD y IN y a un aprobado las calificaciones de SF, BI, NT y SB. Puede parecer muy desigual el reparto de niveles realizado, pero atendiendo al significado real de los resultados escolares se considera el más adecuado, pues el aprobado es el punto crítico que señala el suficiente desarrollo de los objetivos de un curso para promocionar al siguiente.

Se procede como en el apartado 6.2.3, atendiendo a un nivel de significación del 95 % y, por lo tanto, tomando como valor crítico de contraste $\chi^2(1,0'05) = 3'84$.

La hipótesis nula es la siguiente: La corrección en el cuestionario es independiente de las calificaciones escolares obtenidas. Y se toma como hipótesis alternativa su negación: La corrección en el cuestionario depende de las calificaciones escolares obtenidas.

Los valores obtenidos para cada curso son: $\chi^2 = 0'36$ en 6º EP, $\chi^2 = 15'03$ y $V = 0'43$ en 1º ESO -ambos calculados con la corrección de Yates para frecuencias pequeñas- y $\chi^2 = 11'44$

y $V = 0'37$ en 2º ESO. En los cursos de secundaria se observa una dependencia media-alta, ya que $\chi^2 \geq \chi^2\,(1, 0'05)$, y mejor en 1º ESO que en 2º ESO debido a los valores de los coeficientes de Cramer aunque las diferencias no son importantes. Sin embargo, los datos del curso de primaria no ofrecen evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula a este nivel de significación.

Analizando todos los datos se obtiene una dependencia media, pues $\chi^2 \geq \chi^2\,(1, 0'05)$, ya que $\chi^2 = 22'67$ y $V = 0'31$.

Se afirma que la corrección del cuestionario depende de las calificaciones escolares obtenidas, aunque por cursos sólo se encuentra evidencia de ello en secundaria. Parece que, al contrario de lo que se había adelantado, la dependencia es más significativa en los cursos de secundaria que en el de primaria, aunque las observaciones anteriores nos obligan a aceptar con reservas los coeficientes de Cramer como absolutos, en este caso. Se relativizan, por lo tanto, estos valores a este estudio concreto, con las particularidades observadas descritas en el apartado anterior y se acepta la dependencia aunque sin considerarla determinante.

Las pequeñas diferencias halladas entre los distintos cursos se deben, en gran medida, a la corrección (ver en la página 318) pues los resultados académicos son independientes del curso escolar. Para intentar evidenciarlo estadísticamente se realiza una prueba de independencia entre la corrección y los cursos, obteniendo resultados no significativos en las comparativas, tanto general, como por cursos, dos a dos . Tampoco resulta significativa una prueba de homogeneidad entre las dos variables y los cursos, por lo que no se puede afirmar que existan diferencias significativas entre los resultados hallados en los distintos cursos para la relación de la corrección y la calificación.

Las diferencias encontradas entre la variación de la corrección y de la calificación, en cada curso, pueden ser analizadas mediante una prueba de homogeneidad en la que la hipótesis nula sea: las variables calificación y corrección se distribuyen en la misma proporción para cada categoría. De nuevo utilizaremos una χ^2 para realizar el contraste al 95 % y con un grado de libertad.

Por cursos se obtienen los resultados siguientes: $\chi^2 = 12'38$ en 6º EP, $\chi^2 = 7'63$ y $V = 0'22$ en 1º ESO y $\chi^2 = 0'62$ en 2º ESO. Excepto en 2º ESO, que no es posible rechazar la hipótesis de homogeneidad, sin asumir un elevado riesgo de cometer error, se puede afirmar que las diferencias entre la corrección y la calificación son significativas en cada curso, pues la distribución de ambas variables es muy diferente. En el caso de primaria las diferencias se hacen más evidentes, pues en los valores altos y bajos de la corrección y la calificación se encuentra mayor concentración de estos últimos, mientras que en los niveles centrales la proporción de la corrección supera a la calificación. En los cursos de secundaria la proporción de la corrección es siempre superior a la de la calificación, excepto en los valores más bajos donde este orden se invierte, siendo las diferencias más constantes durante todo el recorrido (figura 6.39).

c) Comparación de los resultados académicos con la formalización

Para comparar las calificaciones obtenidas por las alumnas en su curso escolar y los resultados hallados en el cuestionario en cuanto a las capacidades de formalización de los mismos representaremos en gráficos (ver figura 6.43) los resultados de cada curso análogamente a como se procedió en el caso de la corrección, haciendo corresponder con el eje de abscisas los niveles de corrección y calificación y situando en el de ordenadas sus frecuencias relativas correspondientes.

Las distribuciones presentan grandes diferencias en todos los cursos. En 6º EP y en 1º ESO, aunque la variación de las frecuencias es del mismo signo en la mayor parte de los casos -exceptuando el N3 y el BI de 1º ESO-, el nivel mayor es el central de la formalización, N3, mientras que en la calificación está desplazado hacia la derecha, NT; además las variaciones son más suaves en la calificación, en la que las alumnas se distribuyen de un modo más uniforme entre todos los niveles de la variable. En 2º ESO se halla una similitud mayor en cuanto a que el máximo lo alcanzan ambas curvas en el penúltimo nivel, N4 y NT, respectivamente, pero la formalización aumenta más suavemente en los primeros niveles y supera a la calificación en los últimos. Además hay una variación de distinto signo en el N3 y BI, como en el curso anterior.

En general, se observan unos mejores resultados en la calificación en 6º EP y en la formalización en los cursos de secundaria, ya que en primaria hay más alumnas con buenas notas que con altos niveles de formalización y menos alumnas con bajas notas que con bajos niveles de formalización. Sin embargo en 1º ESO la concentración de alumnas de bajos y altos niveles es similar en ambas variables, mientras que en los niveles medios hay más alumnas que formalizan en grado intermedio que con calificaciones medias. Por último, en 2º ESO las diferencias son más evidentes y las alumnas que formalizan correctamente superan a las alumnas de buenas notas, lo que conlleva que hay más alumnas con bajas calificaciones que con bajo desarrollo de las capacidades de formalización algebraica.

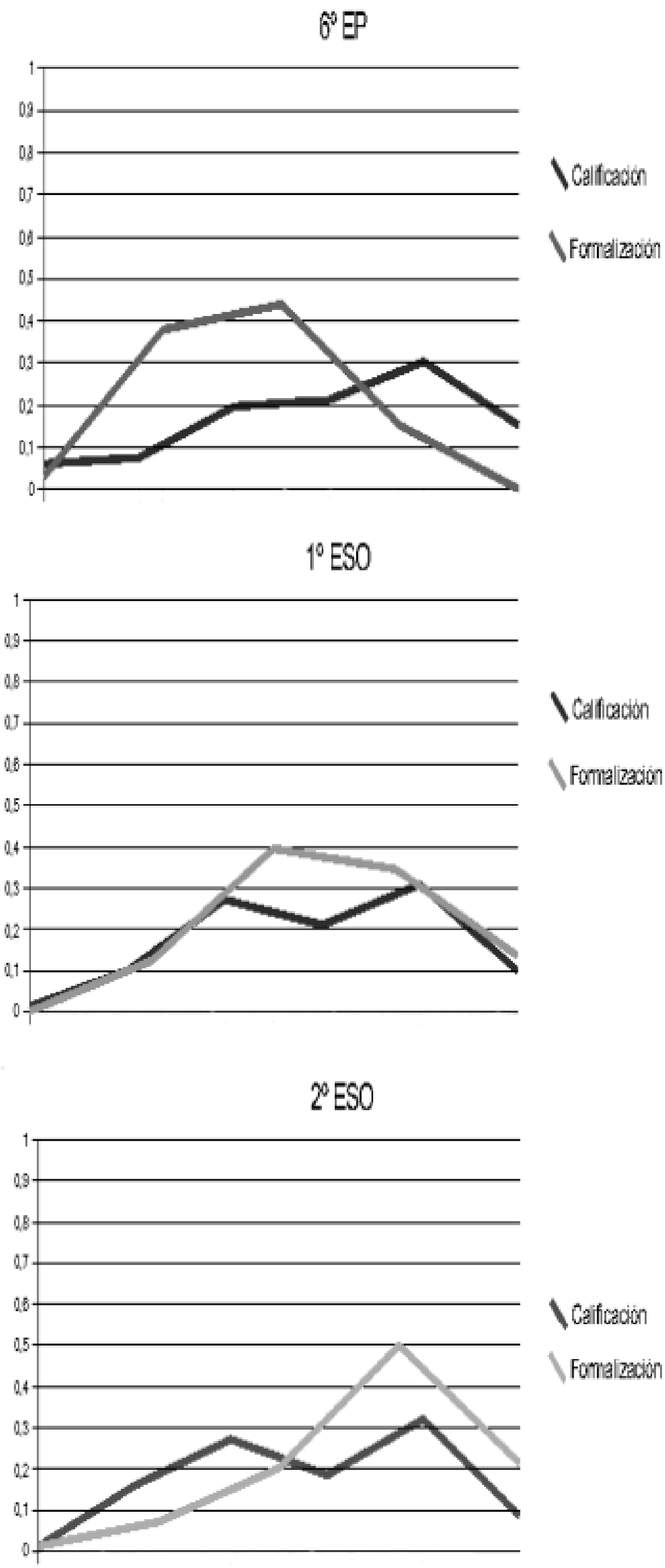


Figura 6.43: Comparación de la calificación y la formalización en cada curso

Para profundizar en la relación establecida entre estas variables se estudia la correlación entre ellas, como se ha hecho en casos anteriores. Se establecen pares ordenados para cada alumna, de manera que la primera coordenada corresponda a la calificación obtenida en el curso escolar y la segunda al resultado de la formalización en el cuestionario. Resumimos en tablas los datos de los tres cursos:

TOTAL

Calificación/Formalización	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1		1 %	0'5 %			
Nivel 2	2 %	4 %	5 %	3 %	5 %	0'5 %
Nivel 3	1 %	5 %	10 %	8 %	9 %	1 %
Nivel 4		1 %	7 %	9 %	12 %	4 %
Nivel 5			2 %	0'5 %	5 %	5 %

Análogamente a los casos anteriores nos centramos en las concentraciones más significativas despreciando las menores de un 8 % para simplificar el análisis global. Se observa un 12 % en (NT,N4) -ver página 306 para notación- seguido de un 10 % en (SF,N3), y un 9 % respectivamente en (NT,N3) y (BI,N4). Las alumnas se concentran en los niveles centrales de ambas variables sin destacar ninguno de ellos de manera reveladora, desplazándose ligeramente hacia los más altos.

6º E.P.

Calificación/Formalización	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1		3 %				
Nivel 2	5 %	3 %	10 %	8 %	12 %	2 %
Nivel 3	2 %	2 %	9 %	10 %	18 %	3 %
Nivel 4				3 %		10 %
Nivel 5						

En el curso de primaria esta distribución se concentra aún más en los mismos niveles de la calificación y hacia uno menos de la formalización. Destaca el porcentaje de alumnas en (NT,N3) -un 18 %- que casi duplica a cualquiera de los siguientes -12 % en (NT,N2), 10 % en (SF,N2), (BI,N3) y (SB,N4), respectivamente, y 9 % en (SF,N3).

1º E.S.O.

Calificación/Formalización	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1						
Nivel 2	1 %	4 %	5 %	1 %	2 %	
Nivel 3		6 %	14 %	12 %	6 %	
Nivel 4			8 %	8 %	16 %	4 %
Nivel 5			1 %		6 %	6 %

En 1º ESO la distribución se asemeja más al global aunque aumentan los porcentajes de concentración en los niveles citados -16 % en (NT, N4), 14 % en (SF,N3) y 12 % en (BI,N3). Es la distribución más esperada pues los niveles más frecuentes en cada variable se corresponden con la misma dificultad relativa en cada escala. Respecto al curso anterior es de destacar el aumento de un nivel en la formalización. Esto se debe a que las diferencias fundamentales se encuentran en la formalización, pues la calificación no presenta diferencias importantes por curso, según se ha apuntado en 6.2.4.

2º E.S.O.

Calificación/Formalización	MD	IN	SF	BI	NT	SB
Nivel 1			1 %			
Nivel 2		5 %	1 %		1 %	
Nivel 3	1 %	7 %	6 %	2 %	5 %	
Nivel 4		4 %	13 %	14 %	19 %	
Nivel 5			5 %	1 %	7 %	8 %

En 2º ESO los niveles de la formalización aumentan aún más. Aunque se observa que la mayor concentración se sigue hallando en (NT, N4), ésta aumenta de un modo importante alcanzando un 19 %. El resto de alumnas se desplaza a los niveles más altos de la formalización, llegando a un 14 % en (BI,N4) y un 13 % en (SF,N4). Por primera vez el nivel superior de ambas variables presenta una concentración importante, 8 % en (SB,N5).

La dispersión en los tres cursos es bastante importante por lo que hay una gran cantidad de combinaciones de los distintos niveles de la calificación y la formalización. Esto nos indica que la relación entre ambas variables no está muy definida, a pesar de ello se puede afirmar que la variación conjunta de las mismas se desplaza hacia los niveles superiores de ambas según aumenta el nivel académico. Representando estos pares de datos por cursos, como nubes de puntos, se obtienen los gráficos de la figura 6.44.

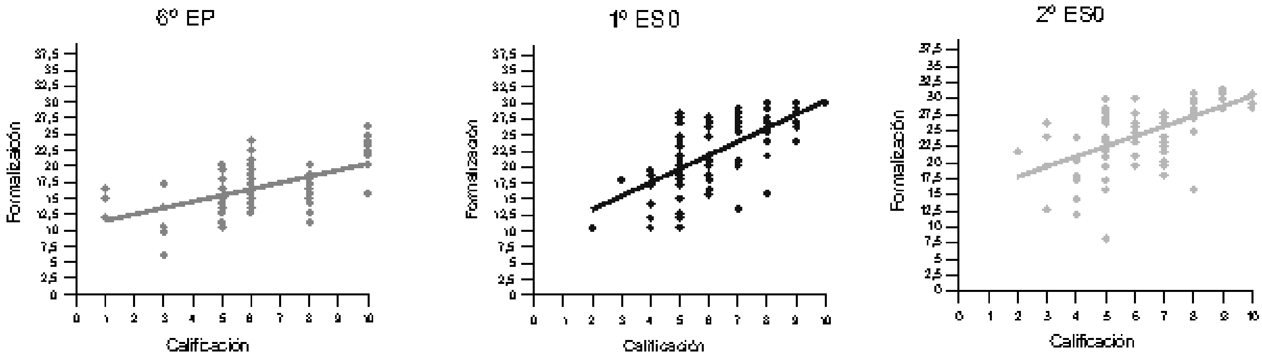


Figura 6.44: Relación entre la calificación y la formalización por cursos

Los datos no se ajustan a las rectas de regresión en ninguno de los cursos, si bien en 6º EP se observa una dispersión menor que en los otros dos cursos en cuanto a la formalización aunque haya una variación mayor en la calificación. Esto confirma que la relación entre las variables correladas no se aproxima a un modelo lineal, por lo que las rectas representadas no ofrecen una estimación adecuada de la formalización dependiendo de la calificación. Aún así, las pendientes de las rectas son, respectivamente para los tres cursos, 0’99, 2’12 y 1’57. En el caso de primaria es prácticamente 1, por lo tanto se puede decir que la variación de la calificación y la formalización es bastante similar. En 2º ESO la pendiente en mayor que 1, por lo que la calificación varía de un modo más rápido que la formalización, lo que se agudiza en el caso de 1º ESO. En este curso la pendiente es aún mayor y ocurre que a un aumento dado en la corrección corresponde un aumento del doble en la formalización.

Comparando las tres rectas (figura 6.45) se encuentra que los datos de 6º EP se sitúan hacia niveles más bajos de la calificación y la formalización comparativamente en los tres cursos y los de 2º ESO hacia los más altos de ambas variables. En el caso de 1º ESO las alumnas de menor nivel académico obtienen unos resultados en la formalización próximos a los de las alumnas de 6º EP de la misma calificación y las de mayor nivel académico obtienen resultados similares a las de la misma calificación en 2º ESO, como ya ocurría en la corrección (página 327).

Los coeficientes de correlación de los tres cursos son 0’58 para 6º EP, 0’64 en 1º ESO y 0’56 en 2º ESO. Se detecta una variabilidad muy alta por lo que se debe considerar si ello ha influido positivamente en la correlación, sobre todo en 1º ESO. Dividiendo en grupos medio-bajo y medio-alto los resultados se puede concluir si esta influencia es significativa o no. Los resultados obtenidos en las correlaciones restringidas a un subgrupo de datos muestran que esta influencia es importante pues, para los alumnos con resultados medio-bajos, se obtiene,

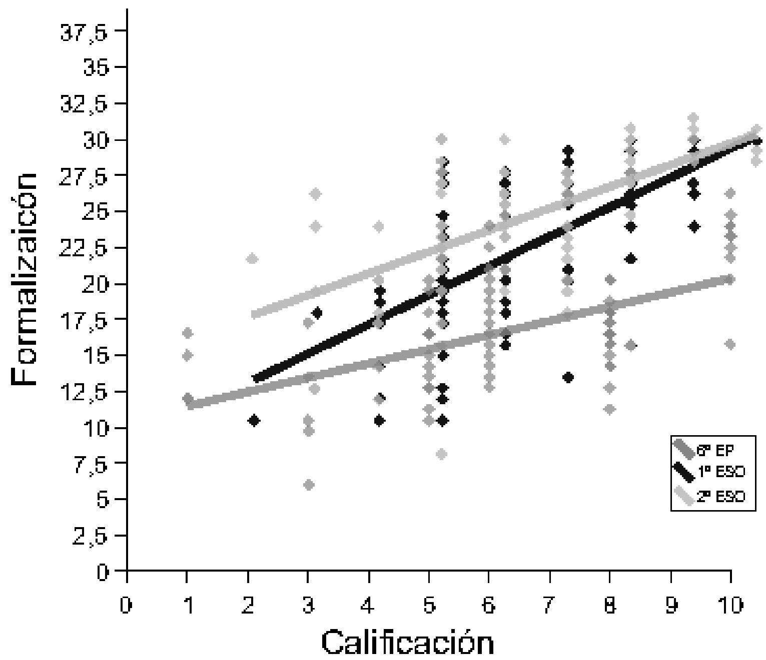


Figura 6.45: Comparación de las rectas de regresión de los tres cursos

respectivamente en los tres cursos, 0'45, 0'46 y 0'44, y para los del grupo medio-alto, 0'76, 0'31 y 0'54, respectivamente. Los valores de la correlación para 1º ESO se han reducido respecto al dato global, por lo que no podemos considerar que la correlación sea mucho mejor que en los otros dos cursos. Sin embargo, se observa que la variabilidad es mayor en 6º EP por lo que el coeficiente de correlación estará engordado en este curso.

Para evidenciar estadísticamente la significación de los coeficientes de cada curso se realiza una prueba de significación como en la página 310. Se obtiene significación en todos los casos, pues los valores de t calculados -5'7, 7'4 y 6'12, respectivamente- son mayores que el valor crítico de la distribución t_n de Student para n=N-2 grados de libertad, siendo N el número de alumnas en cada curso.

Se comparan mejor calculando el porcentaje de variabilidad de la formalización que se debe a la calificación, es decir, r^2. Los valores de este parámetro son 0'34, 0'41 y 0'31, respectivamente para 6º EP, 1º ESO y 2º ESO. Las diferencias son mínimas entre los cursos extremos y algo mayores con 1º ESO, aunque no se considera significativo por la razón explicada más arriba.

En cualquier caso, hay más correlación de los resultados académicos con la formalización que con la corrección, aunque los coeficientes sigan siendo poco determinantes para poder afirmar que existe una elevada correlación entre las dos variables en los tres cursos. Los errores típicos son mayores en secundaria que en primaria -3'34, frente a 4'13 y 4'15, respectivamente- lo que confirma el hecho de que la relación se ajusta más a una recta en el curso de primaria -recordemos que en 1º ESO el valor del coeficiente de correlación está bastante influenciado por la variabilidad.

Para confirmar que las diferencias entre las correlaciones de los distintos cursos no son significativas realizamos una prueba comparativa como en la página 313. Los datos obtenidos no nos permiten rechazar la similitud de los coeficientes de correlación de los distintos cursos. Por ello se afirma que las diferencias no son importantes por cursos y en todos los casos señalan una correlación no muy elevada.

Los datos normalizados (ver figura 6.46) muestran unas diferencias menores entre los tres cursos. La dispersión vuelve a ser la tónica general en los tres cursos aunque si comparamos con el gráfico de la figura 6.42 encontramos que ésta es algo menor que en la relación entre la calificación y la corrección.

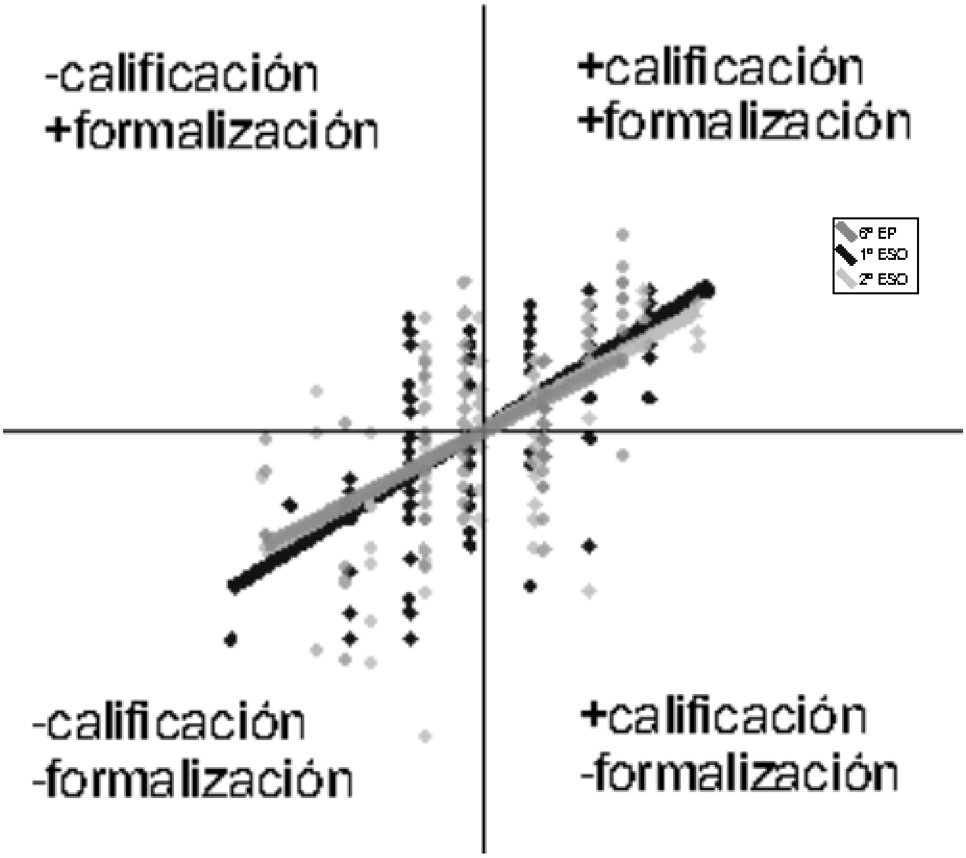


Figura 6.46: Representación de los datos normalizados

Como conclusiones se afirma lo siguiente:

- Las variables calificación y formalización no se ajustan bien a un modelo de correlación lineal. Los coeficientes de correlación no son tan determinantes como para poder sacar conclusiones directas de esta relación. Aún así esta correlación es mejor en el curso de primaria.

- La variación conjunta de dichas variables se aproxima en los valores superiores de ambas cuando aumentan los cursos académicos. Además, es más equitativa para ambas variables, es decir, las dos varían en proporciones más parecidas, en 6º EP y menos en 1º ESO, pues tiende a una variación mayor de la formalización que de la calificación.

- La dispersión de los datos es una característica importante en los tres cursos, sobre todo en 1º ESO, en 6º EP es menor.

- En 6º EP los resultados de la calificación son mejores que los de la formalización mientras que en los cursos de secundaria las diferencias se invierten, destacando en 2º ESO.

d) Pruebas de independencia y homogeneidad de la calificación y la formalización

Para realizar un análisis exhaustivo de la naturaleza de la relación entre la calificación y la formalización se utiliza una prueba de independencia basada en la distribución χ^2 de Pearson, análogamente a como se ha hecho en el caso de la corrección.

Las categorías se establecen de la misma manera, de modo que obtenemos una tabla de contingencia de dos filas y dos columnas, con los cruces de categorías: aprobado-buena formalización, suspenso-buena formalización, aprobado-mala formalización y suspenso-mala formalización. Es decir se toma como valor crítico de contraste el teórico correspondiente a una χ^2 con un grado de libertad y nivel de significación 95 %, es decir, $\chi^2(1,0'05) = 3'84$. Se procede para los cálculos del mismo modo que en la página 316.

La hipótesis nula, en este caso, es: La formalización en el cuestionario es independiente de las calificaciones escolares obtenidas. Y se toma como hipótesis alternativa su negación: La formalización en el cuestionario depende de las calificaciones escolares obtenidas.

Los valores obtenidos son los siguientes: $\chi^2 = 0'58$ en 6º EP, $\chi^2 = 7'36$ y $V = 0'3$ en 1º ESO y $\chi^2 = 16'45$ y $V = 0'44$ en 2º ESO -todos calculados con la corrección de Yates para frecuencias pequeñas-. En los cursos de secundaria se observa una dependencia media-alta, ya que $\chi^2 \geq \chi^2(1,0'05)$, mejor en 2º ESO que en 1º ESO. Las diferencias en este caso son algo mayores que en el caso de la corrección, aunque no muy significativas, debido a los valores de los coeficientes de Cramer. Los datos del curso de primaria no nos ofrecen evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula a este nivel de significación. En cuanto a la dependencia de la totalidad de los datos se obtiene $\chi^2 = 18'70$ y $V = 0'28$, con la corrección de Yates, lo que nos indica una dependencia con una asociación media-baja.

Como ocurrió en el caso de la corrección, la dependencia de la formalización respecto de la calificación se manifiesta claramente en los cursos de secundaria a un nivel significativo.

En general, análogamente al caso de la corrección, la formalización del cuestionario depende de las calificaciones escolares obtenidas, en niveles muy similares a los hallados entonces, aunque ligeramente superiores.

De nuevo las diferencias por cursos, se deben más a la formalización que a la calificación, ya que las calificaciones resultan independientes del curso académico, como se ha comprobado en la página 332. Estas diferencias no son importantes, menos aún entre los cursos de secundaria.

Para comprobarlo se aplica una prueba de homogeneidad entre las dos variables y los cursos, obteniendo una significación media, en general, y un resultado no significativo entre los dos cursos de secundaria. Los valores hallados son: $\chi^2 = 22'98$ y $V = 0'31$, comparando los tres cursos a la vez mediante una $\chi^2(2, 0'05)$; $\chi^2 = 9'68$ y $\chi^2 = 19'81$, entre 6º EP y cada uno de los cursos de secundaria, respectivamente, y $\chi^2 = 2'78$ entre los cursos de secundaria, obtenidos estos últimos con una $\chi^2(1, 0'05)$. Las diferencias entre la calificación y la formalización resultan significativas, en general, pero con un efecto no muy elevado y con mayores diferencias entre el curso de primaria y los de secundaria que entre estos últimos entre sí.

Por último, los resultados de la prueba de homogeneidad realizada por cursos entre la formalización y la calificación y respecto al grado alcanzado proporciona información acerca de las distribuciones de ambas variables, sus semejanzas y diferencias. Se puede rechazar, en todos los casos, la hipótesis de homogeneidad y admitir que las diferencias entre las variables son evidentes en cada curso, ya que lo valores de la χ^2 para cada curso son, respectivamente, $\chi^2 = 69'82$, $\chi^2 = 31'16$ y $\chi^2 = 4'04$ y, en todos ellos, $\chi^2 \geq \chi^2\,(1, 0'05)$. Por lo tanto se aceptan las conclusiones del apartado anterior acerca de la homogeneización de la distribución de las dos variables según los cursos van siendo superiores, aunque con menor ajuste que en el caso de la corrección.

6.2.5. Comparación con el tipo de enunciado

El objetivo de este nuevo análisis es ver si el tipo de enunciado tiene alguna influencia en la respuesta de las alumnas, si añade o resta dificultad o si hay diferencias significativas por cursos.

Para estudiarlo se han clasificado las preguntas del cuestionario en tres tipos: de enunciado aritmético, de enunciado geométrico y de enunciado formal. Todas las preguntas del cuestionario están expresadas en lenguaje natural, por ello no se ha considerado un nivel de clasificación en sí mismo, ya que se asume que las alumnas pueden comprender el lenguaje natural, a pesar de las dificultades encontradas entre algunas de ellas (ver Nivel 1 en 6.2.1).

Las preguntas de enunciado aritmético presentan una información sobre números o a través de ellos. Son de este tipo los enunciados de las preguntas 2ª, 4ª, 5ª, 9ª, 10ª y los apartados segundo, tercero y cuarto de la 8ª. Su respuesta requiere una suficiente comprensión de la aritmética, tanto a nivel conceptual como operativo, es decir, un dominio del uso de los números y los signos de operaciones para expresar informaciones y de las relaciones que estos establecen entre los números.

Son preguntas de enunciado geométrico aquellas que se acompañan de figuras o de algún tipo de representación geométrica. Están dentro de esta clasificación los enunciados de las preguntas 1ª, 3ª, 6ª, 7ª, el primer apartado de la 8ª y la pregunta 11ª. Su respuesta requiere de un hábito de manipulación de estos elementos geométricos del que a menudo carecen nuestras alumnas. La geometría aparece con frecuencia al final de los programas escolares y es la materia más sacrificada por la falta de tiempo para impartir toda la programación. Además, en general, nuestros profesores prefieren hacer hincapié en los procedimientos operativos de la matemática que descubrir con sus alumnos las formas y relaciones geométricas presentes en la naturaleza, como denuncian Castelnuovo (1983) o Alsina, reivindicando el valor de la intuición (ver página 64).

Por último, las preguntas de enunciado formal son aquellas que contienen expresiones formales algebraicas. Para responderlas es necesario comprender mínimamente el lenguaje algebraico, es decir, entender lo que significa el signo literal en una fórmula o en una expresión dada, al menos como sustitución de números concretos (ver Nivel 2 en 6.2.2). Son de este tipo las preguntas 12ª y 13ª del cuestionario.

Es necesario aclarar la razón de la clasificación del enunciado de la pregunta 6ª como geométrico y no como formal. La dificultad de este enunciado no estriba en la comprensión del lenguaje algebraico sino en la capacidad de manipular figuras geométricas para calcular su área a través de una fórmula, bien conocida por las alumnas de cualquiera de estos cursos. Por ello este enunciado no presenta las características exigidas a los enunciados formales a pesar de que contenga una expresión algebraica.

En la figura 6.47 se hallan resumidos los resultados de la corrección y la formalización según el tipo de enunciado de la pregunta. Estos porcentajes se han obtenido como media de los encontrados en las distintas cuestiones en cada una de las variables.

a) Estudio de la relación entre el tipo de enunciado y la corrección

Se observa en la figura 6.47 una aparente similitud del nivel de corrección de las respuestas a los enunciados aritméticos y los geométricos, aunque es necesario hacer una aclaración. Tanto en los primeros como en los segundos hay una coincidencia general en los porcentajes que se ve corrompida por algunos datos tremendamente dispersos.

Tipo de enunciado/ Corrección	Aritmético			Geométrico			Formal		
	6º EP	1º ESO	2º ESO	6º EP	1º ESO	2º ESO	6º EP	1º ESO	2º ESO
Bien	48,86%	56,64%	63,99%	51,26%	48,56%	50,00%	5,30%	36,42%	33,93%
Regular	25,95%	22,07%	18,45%	28,79%	34,07%	34,29%	62,12%	54,32%	60,12%
Mal	15,91%	14,04%	9,67%	19,19%	19,55%	14,88%	28,03%	7,41%	5,95%
En blanco	9,28%	7,25%	7,89%	5,56%	3,50%	6,55%	4,55%	1,85%	0,00%

Tipo de enunciado/ Formalización	Aritmético			Geométrico			Formal		
	6º EP	1º ESO	2º ESO	6º EP	1º ESO	2º ESO	6º EP	1º ESO	2º ESO
Formal	2,02%	31,28%	38,49%	57,07%	74,07%	73,81%	53,79%	82,72%	94,64%
Simbólico	20,71%	30,45%	28,17%	6,06%	8,64%	1,79%	1,52%	0,00%	0,60%
Retórico	12,88%	12,35%	13,10%	11,36%	2,47%	16,67%			
Aritmético	35,86%	16,05%	13,89%	13,13%	9,88%	13,89%	32,58%	14,20%	4,76%
Informal	11,36%	6,17%	5,95%	15,91%	8,02%	2,38%			

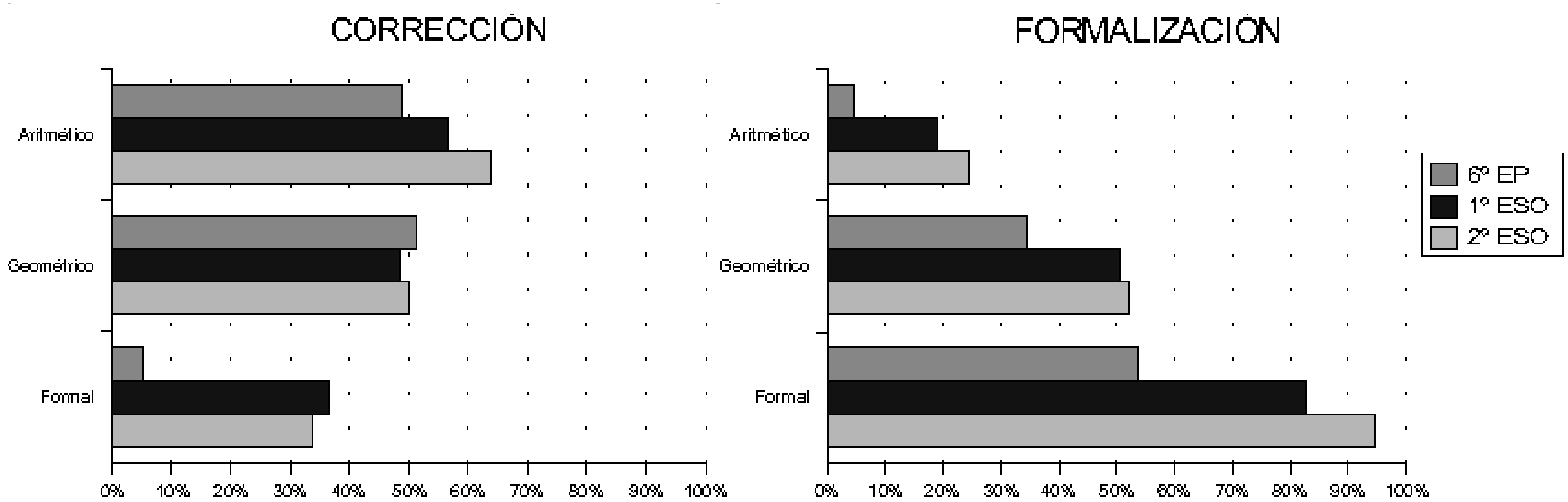


Figura 6.47: Resultados de la corrección y la formalización según el tipo de enunciado

En el caso de los aritméticos las respuestas correctas oscilan, en todas las cuestiones, entre el 50 % y el 90 % en el curso de primaria y el 75 % y el 90 % en los de secundaria, excepto en las cuestiones 9ª, 10ª y el último apartado de la 8ª, por las que desciende considerablemente la media al encontrarse porcentajes a distancias de hasta 50 puntos porcentuales del menor de ellos. Sin estos datos la media de la corrección en los enunciados aritméticos sería de un 73 % en 6º EP, un 80 % en 1º ESO y un 83 % en 2º ESO. En cuanto a las cuestiones despreciadas la dificultad de la respuesta estriba en el nivel de complejidad, suficiente para las alumnas de estos niveles, que ostenta la necesaria abstracción previa de la relación subyacente a los ejemplos del enunciado. Se puede ver que las cuestiones que implican el análisis directo de una expresión aritmética o varias sencillas no suponen una dificultad en esta edad, pero en cuanto entran en juego otras tareas superiores o la relación presentada es compleja los porcentajes se asemejan a los de las cuestiones con enunciado geométrico.

En el caso de los geométricos los porcentajes de corrección son menores del 80 %, en el curso de primaria, y del 50 %, en secundaria, para todas las respuestas excepto en la 6ª y la 7ª, en las que tienen alrededor de un 90 %, lo que perturba la media sobre todo en los últimos cursos. Ésta sería de un 32 % en 6º EP, un 27 % en 1º ESO y 29 % en 2º ESO, si prescindiésemos de los resultados de estas dos cuestiones. Las cuestiones 6ª y 7ª no implican un dominio de las figuras geométricas, ni del análisis de relaciones entre ellas o sus elementos, sino el conocimiento de las fórmulas matemáticas para el cálculo de áreas elementales, que ya se ha estudiado en cualquiera de los cursos cuestionados (ver Anexo 1). Por lo tanto los resultados de la corrección para los enunciados aritméticos son mucho mejores que para los geométricos, en general, siempre que no impliquen el análisis de una relación compleja.

Por cursos se hallan los datos escalonados en cuanto a los enunciados aritméticos, lo cual resulta comprensible por la diferencia de niveles académicos. Sin embargo en el caso de los geométricos se observa una ligera superioridad en la corrección de 6º EP que no se esperaba. Esto se debe a una respuesta masivamente correcta a la cuestión 1ª que ya ha sido analizada en la página 205 y en la que las alumnas se limitan a dar una respuesta descriptiva de la tarea en cuestión, en lenguaje natural, sin utilizar ningún tipo de coordenadas como intentan hacer las alumnas de secundaria. Despreciando esta diferencia aparece la progresión esperada por cursos, es decir, las medias serían de 46 % en 6º EP, 49 % en 1º ESO y 50 % en 2º ESO.

Los altos niveles de abstención también se hallan condicionados por los elevados porcentajes obtenidos en unas pocas preguntas. En este caso las diferencias se mantienen, en general, entre los enunciados de ambos tipos, a favor de una mayor abstención en las preguntas con enunciados aritméticos que en las de geométricos y sin diferencias muy destacadas entre los distintos cursos. Esto parece demostrar que las figuras geométricas ofrecen una falsa seguridad a las alumnas a la hora de aventurarse a dar una respuesta, pues son elementos conocidos. La razón de que la incorrección en las cuestiones con enunciados geométricos sea mayor que las de aritméticos dice el resto, pues las alumnas ofrecen más respuestas pero de peor calidad en cuanto a la corrección debido a la mayor dificultad ya comentada anteriormente ante las tareas geométricas (en la página 182).

Los enunciados formales presentan un panorama radicalmente distinto. Los porcentajes de corrección son mucho menores que en los otros dos cursos y con una abultada diferencia entre los cursos de primaria y secundaria, un 5 % en 6º EP, un 36 % en 1º ESO y un 34 % en 2º ESO. No sorprende esta diferencia entre 6º EP y los cursos de secundaria debido a que la formalización algebraica aún no se ha estudiado en el ámbito escolar en el primero y sí en los otros dos (ver Anexo 1). La mínima diferencia hallada entre los cursos de secundaria a favor del inferior de ellos no es significativa, ya que si consideramos la corrección intermedia junto a la total se observan los porcentajes 91 % para 1º ESO y 94 % para 2º ESO. La abstención también sigue esta generalidad siendo notablemente mayor en primaria que en secundaria, 5 % en 6º EP y 2 % en 1º ESO, ya que en 2º ESO no hay. En comparación con los otros tipos de enunciados, la abstención en los enunciados formales es menor que la hallada en los aritméticos y en los geométricos, lo que no deja de ser sorprendente y por ello se estudiará en cada uno de los cursos.

Los siguientes gráficos (figura 6.48) muestran la comparación de estas situaciones por cursos:

En 6º EP la corrección es ligeramente superior en los enunciados geométricos que en los aritméticos, sin embargo la diferencia con la obtenida en las preguntas con enunciado formal es muy abultada, pues las alumnas de este curso no han estudiado el álgebra formal. Ni siquiera considerando también los resultados de corrección intermedia se igualaría pues se obtendría un 75 % para los enunciados aritméticos, un 80 % para los geométricos y un 68 % para los formales. En cuanto a la superioridad de los resultados geométricos ya se ha citado que los resultados obtenidos en las cuestiones 6ª y 7ª distorsionan la media hacia valores mucho más elevados, por lo que, despreciando estos datos para la media, el porcentaje de corrección en los enunciados geométricos se quedaría casi 20 puntos porcentuales por debajo del aritmético.

En cuanto a las respuestas incorrectas siguen la progresión esperada, pues hay menos incorrección entre las de enunciados aritméticos que entre los geométricos y menos en éstas que entre las de enunciado formal. La abstención en este curso es superior en los enunciados arit-

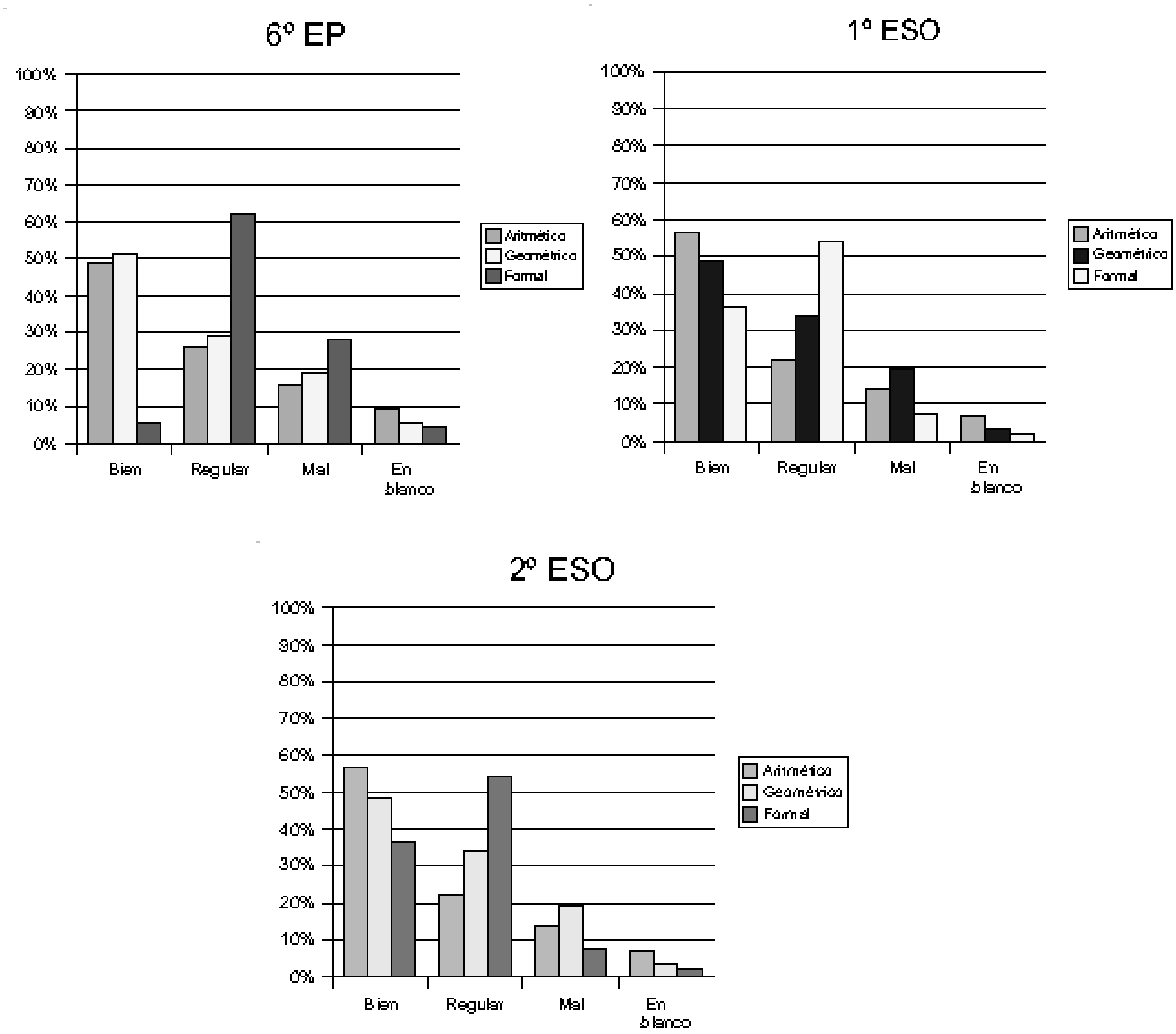


Figura 6.48: Representación de la corrección según el tipo de enunciado por cursos

méticos e inferior en los formales, como ocurre en el resto de los cursos. El hecho de que sea mayor en los aritméticos que en los geométricos ya ha sido analizado en general. Sin embargo no se ha hallado una característica general que explique la inferioridad de la abstención formal. La incorrección general, es decir, el resultado total de abstención y respuestas incorrectas está casi un 10 % por debajo, en este curso, en los enunciados aritméticos y geométricos que en los formales. Esto demuestra que las alumnas dan más respuestas a las cuestiones de enunciado formal, pero con mayor incorrección. Tan sólo se puede afirmar que no se ha encontrado el rechazo esperado como primera reacción en las alumnas de este curso ante la desconocida formalización algebraica.

En los dos cursos de secundaria la distribución es bastante similar. La corrección total es superior en los enunciados aritméticos que en los geométricos y en estos últimos que en los formales. Sin embargo, si se tienen en cuenta también las respuestas de corrección intermedia esta progresión se invierte obteniendo un 80 % en los aritméticos, poco más en los geométricos y más de un 90 % en los formales. Esto significa que, una vez aprendido el lenguaje algebraico, los enunciados formales son comprendidos de manera suficiente y la corrección no depende del tipo de enunciado sino de la dificultad de la tarea planteada.

Hasta ahora se ha realizado un análisis descriptivo de los datos que debe ser corroborado estadísticamente. Es necesario contrastar de algún modo fiable la dependencia o independencia de estas variables para poder sacar conclusiones definitivas. Como se trata de variables cualitativas no se puede estudiar la correlación del modo que se ha hecho en los casos anteriores (página 309) sino que vamos a utilizar la χ^2 de Pearson como se ha hecho en las pruebas de independencia (página 316).

En este caso concreto se trabaja con los tres tipos de enunciados: aritmético, geométrico y formal; y dos únicas subdivisiones -para evitar demasiadas categorías, como se explicaba en la página citada anteriormente- en la variable corrección: buena corrección, que engloba los resultados totalmente correctos y de corrección intermedia, y mala corrección, que engloba los resultados erróneos y las abstenciones. Por ello los datos se resumen en una tabla de contingencia de dos filas por tres columnas que se debería distribuir como una χ^2 de dos grados de libertad, pues $(2-1)\cdot(3-1)=2$. El nivel de significación elegido es el 95 %, que corresponde a $\alpha = 0'05$, ya que es el que se ha venido utilizando en todo este estudio. Se comparan los resultados obtenidos con el valor que nos da la tabla de distribución de la χ^2 para estos parámetros, esto es, $\chi^2(2,0'05) = 5'99$.

Para los datos de 6º EP y 1º ESO se obtiene, respectivamente, $\chi^2 = 1'56$ y $\chi^2 = 5'71$ lo que implica que no existe suficiente evidencia estadística para negar la independencia entre las variables corrección y tipo de enunciado, pues $\chi^2 \leq \chi^2\,(2,0'05)$. En el caso de 2º ESO, aplicando la corrección de Yates, $\chi^2 = 6'57$ y $V = 0'16$ lo que implica un valor suficiente para evidenciar la dependencia, ya que $\chi^2 \geq \chi^2\,(2,0'05)$, pero con un bajo nivel de asociación, pues el valor del coeficiente de Cramer es pequeño. Sin embargo, con la totalidad de los datos no se encuentra evidencia estadística suficiente para afirmar la dependencia de las variables corrección y tipo de enunciado, pues $\chi^2 = 4'54$ y $\chi^2 \leq \chi^2\,(2,0'05)$. Este hecho muestra un nivel de asociación muy bajo entre el tipo de enunciado y la corrección de manera que no se puede aceptar la dependencia de estas variables, en general, a pesar de que en el último curso de secundaria se hallen pruebas favorables. Se afirma, en este curso, que las diferencias en la corrección que se deben al tipo de enunciado se manifiestan, aunque en una pequeña proporción.

Por último, se estudia si esta relación es independiente del curso académico. Para ello se realiza un prueba de independencia entre los cursos y la corrección según el tipo de enunciado. Se obtiene una tabla de contingencia de tres filas y tres columnas, por lo que el estadístico de contraste elegido es una χ^2 con 4 grados de libertad (ver en la página 316). Se halla un valor de $\chi^2 = 1'59$, menor que $\chi^2(4,0'05) = 9'49$, y por lo tanto el resultado no es significativo, en general. Por cursos, dos a dos, el valor crítico utilizado es $\chi^2(2,0'05) = 5'99$, y de nuevo todos los valores de χ^2 calculados son menores que él, por lo que no se encuentra significación estadística a este nivel. Se puede afirmar que no existen diferencias significativas por cursos con una probabilidad de 0'95, con lo cual se admite la independencia del curso académico con cierta seguridad.

b) Estudio de la relación entre el tipo de enunciado y la formalización

En la figura 6.47 se aprecian los resultados de la formalización según el tipo de enunciado de las preguntas del cuestionario. La obtención de los mismos se ha realizado mediante media de los resultados de las preguntas para cada estadio de la formalización, asumiendo que en algunas de ellas no cabían respuestas de todas las clases. Por este motivo se hace mucho más difícil la interpretación de los resultados teniendo en cuenta las variaciones particulares de cada pregunta, tal como hicimos en el caso de la corrección. Se analizarán los resultados de una forma global, ya que para la comparativa por cursos es igual de útil pues las respuestas utilizadas son para todos las mismas, y sólo en algunos casos particularizaremos en las variaciones de alguna cuestión en concreto.

En general se observa que la formalización es mayor en las respuestas a enunciados de tipo formal pues es la forma más obvia de contestar al existir signos algebraicos en la pregunta. Por cursos la proporción de este tipo de respuestas aumenta según los cursos van siendo superiores. En las respuestas a enunciados formales no se han considerado las respuestas retóricas ni informales. La razón es que en el caso de la pregunta 12ª la única respuesta retórica que cabía era la de la tercera cuestión y esta se realiza en unos porcentajes muy elevados - entre el 85 % de 6ºEP y el 98 % de 1º ESO- mientras que en la 13ª no cabía ningún tipo de respuesta retórica. Lo mismo pasa con la respuesta informal que casi desaparece en la cuestión 12ª - entre 6 % en 6º EP y 2 % en 2º ESO- y no se encuentra en la 13ª. Como las medias no iban a resultar significativas se decide excluirlas del análisis global. En el caso de las respuestas de tipo aritmético se encuentra una inferioridad razonable frente a los otros enunciados, por la misma causa que en el caso anterior, ya que la respuesta aritmética es la más evidente a la pregunta aritmética. Los porcentajes que se encuentran en este caso se deben al desarrollo de las capacidades de formalización algebraica de las alumnas más que al tipo de enunciado, encontrándose diferencias significativas entre los tres cursos ya que el nivel de desarrollo es necesariamente distinto -33 % en 6º EP, 14 % en 1º ESO y 5 % en 2º ESO.

En los enunciados aritméticos se observa una formalización notablemente más baja que en los geométricos, 2 %, 31 % y 38 % frente a 57 %, 74 % y 74 %, respectivamente en los tres cursos. Estas diferencias se reducen si añadimos las respuestas que utilizan una simbolización no algebraica. En este caso las respuestas a enunciados geométricos casi igualan a las de los formales en cuanto a la formalización, superándolas incluso en el curso de primaria, mientras que entre los enunciados aritméticos y geométricos las diferencias se mantienen entre unos 10 y 20 puntos porcentuales en 2º ESO y 1º ESO y en unos 40, en el caso de 6º EP.

Estas diferencias por cursos se mantienen muy por debajo en el curso de primaria que en los de secundaria, debido a su nivel de conocimientos en esta materia (ver Anexo 1), y se invierten, como era de esperar, en cuanto a las respuestas de tipo aritmético o informal. Los resultados confirman la esperada progresión por cursos en todos los casos, con mayores diferencias en el caso de los formales, en los cuales se observa una reducción de más del 50 % entre cada curso y su superior, y menor en los geométricos. Si se realiza la comparación por tipos de enunciados, se halla un mayor uso de la aritmética en los enunciados aritméticos y un menor en los formales, en general, aunque hay una excepción en el curso de primaria que presenta mayor uso en los enunciados formales que en los geométricos y cuya diferencia -de un 33 % a un 29 %- no parece significativa en este análisis ya que responde a la falta de hábito en el uso de los signos algebraicos como generalización de la aritmética, por lo que se contentan con el uso concreto de la misma como respuesta suficiente a las cuestiones de enunciados formales.

Luego se concluye que, a pesar de que la formalización algebraica es mayor en los enunciados formales que en los geométricos y aritméticos, la capacidad de simbolizar informaciones se manifiesta con una frecuencia similar en los primeros que en los segundos y las diferencias se hallan con los enunciados aritméticos, pues la respuesta evidente no implica ninguna formalización al no presentarla en el enunciado.

En la figura 6.49 se encuentra representada la situación de la formalización de cada curso según el tipo de enunciado de la pregunta.

Las diferencias entre los tipos de enunciado se mantienen como se ha comentado en las clases más elevadas de la formalización de los cursos de secundaria, mientras que varían en las más bajas. Los resultados de las respuestas retórica e informal se invierten en 1º y 2º ESO y la aritmética también experimenta ligeras variaciones, detalles que no aportan información relevante para nuestro análisis. En 6º EP los resultados se asemejan a los de 1º ESO, salvando las distancias, y destacando la poca formalización en el mayor nivel de las respuestas a preguntas aritméticas, como veremos con más detalle a continuación.

En los tres cursos destaca un evidente desplazamiento hacia las clases más altas de la formalización, sobre todo en los enunciados geométricos y formales, que aumenta según sea mayor el nivel del curso académico:

En 6º EP la respuesta a los enunciados formales es fundamentalmente simbólica -entendiendo bajo esta denominación cualquier uso de símbolos, ya sean formales o informales-, en un 56 %, y aritmética, en un 23 %. En los enunciados geométricos observamos una mayor uniformidad en la distribución en las clases menores de la formalización que contrasta con la concentración en la mayor de éstas, con un 63 % -57 % en formalización y 6 % en simbolización-. En cuanto a los aritméticos no se encuentra la misma tendencia a la formalización, las alumnas ofrecen fundamentalmente respuestas aritméticas para este tipo de cuestiones encontrando los siguiente porcentajes: 47 % de respuesta aritmética e informal, 13 % de respuesta retórica y 23 % de respuesta simbólica, de la cuál sólo un 2 % corresponde a una formalización algebraica, pues aún no se conoce para este curso. Se deduce que la formalización encontrada para los otros dos tipos de enunciados está condicionada por la pregunta debido a que, a pesar de no conocerse el álgebra formal, se responde formalmente en mayor medida que informalmente.

En los cursos de secundaria las diferencias se acentúan más a favor de un mayor uso de la formalización algebraica y menor de la aritmética según se va avanzando en los cursos. Para los

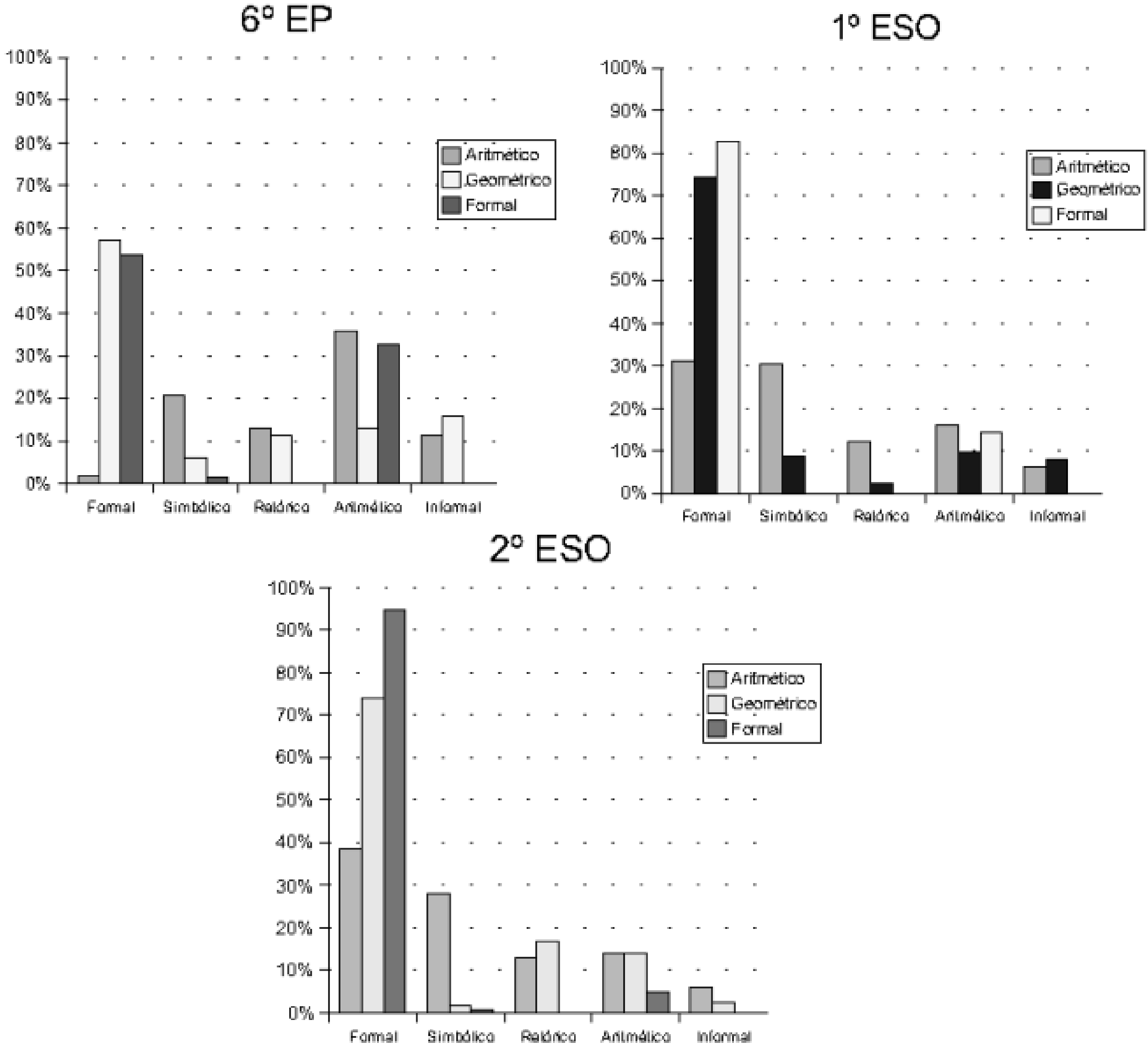


Figura 6.49: Representación de la formalización según el tipo de enunciado por cursos

enunciados formales los porcentajes son 83 % de respuesta simbólica y 14 % de respuesta aritmética, en 1º ESO, y 96 % de respuesta simbólica y 5 % de respuesta aritmética, en 2º ESO. Para los geométricos encontramos diferencias a favor del curso más bajo, 83 % y 18 %, en 1º ESO, y 76 % y 16 %, en 2º ESO, de respuesta simbólica y aritmética, respectivamente. Por último los enunciados aritméticos también presentan el mismo desplazamiento hacia la formalización que el resto, a diferencia del curso de primaria, aunque en una proporción mucho menor que en los otras dos clases -61 % de respuesta simbólica y 22 % de respuesta aritmética, en 1º ESO, y 66 % de respuesta simbólica y 20 % de respuesta aritmética, en 2º ESO.

A la hora de analizar el tipo de relación que se establece entre las variables formalización y tipo de enunciado se procede como en el apartado anterior para establecer la independencia o la dependencia a un nivel de significación del 95 %. Recordemos que $\chi^2\,(2,0'05) = 5'99$ y que tendremos evidencia estadística suficiente a este nivel de significación para rechazar la independencia en el caso de que $\chi^2 \geq \chi^2\,(2,0'05)$ y no la tendremos en el caso contrario.

Para el global de los datos se obtiene la dependencia de las variables formalización y tipo de enunciado, pues $\chi^2 = 21'46$ y $V = 0'19$, y $\chi^2 \geq \chi^2\,(2,0'05)$. El nivel de dependencia señalado por el coeficiente V es bastante pequeño, por lo que no es suficiente para afirmar que exista una buena asociación entre las variables. Por cursos se manifiesta esta dependencia en 6º EP, $\chi^2 = 15'36$, y en 2º ESO, $\chi^2 = 9'5$ -en este último curso ha sido necesario aplicar la corrección de Yates, ya que había frecuencias menores de 5 en la tabla de contingencia- , y en ambos casos $\chi^2 \geq \chi^2\,(2,0'05)$. Las diferencias se hallan en el nivel de la dependencia encontrada. En 6º EP se obtiene $V = 0'31$, lo que implica que las variables corrección y tipo de enunciado son dependientes con un nivel medio. En 2º ESO se observa que la dependencia es algo menor, ya que $V = 0'2$, aunque sigue siendo de mayor grado que la hallada en el caso de la corrección con el tipo de enunciado en este curso. Esto demuestra que existen más diferencias en la formalización de las alumnas de 6º EP que se deben al tipo de enunciado que en 2º ESO, lo que manifiesta una menor madurez formal, como era de esperar. Sin embargo, en 1º ESO $\chi^2 = 3'45$, es decir, $\chi^2 \leq \chi^2\,(2,0'05)$, por lo que no tenemos evidencia estadística suficiente a este nivel de significación para rechazar la independencia de las variables formalización y tipo de enunciado.

Se realiza una prueba de independencia para estudiar el alcance de la influencia del curso académico en las variaciones que presenta esta relación, al igual que se ha hecho en el apartado anterior. Los resultados, en contra de lo ocurrido en el caso de la corrección, manifiestan una dependencia de bajo nivel de la relación entre la formalización y el tipo de enunciado en alguno de los cursos. En general, $\chi^2 = 7'24$ y $\chi^2 \leq \chi^2\,(2,0'05)$, por lo que no podemos rechazar la hipótesis de independencia, es decir, el resultado no es significativo a este nivel. En las comparativas por cursos, dos a dos, con una χ^2 con dos grados de libertad, se observan los resultados siguientes: $\chi^2 = 6'53$, entre 6º EP y 1º ESO, $\chi^2 = 7'4$, entre 6º EP y 2º ESO, y $V = 0'16$, en los ambos casos. Esto confirma la dependencia, con una deficiente asociación, excepto entre 1º ESO y 2º ESO, en el que el resultado es no significativo a este nivel de significación, pues $\chi^2 = 2'62$. Se concluye que las diferencias por cursos son significativas -aunque no muy importantes- entre el curso de primaria y los de secundaria y no lo son entre los de secundaria, entre sí.

En general, en ninguno de los casos, ya sea en la corrección o en la formalización, se encuentran unos niveles de dependencia elevados con el tipo de enunciado de las cuestiones, aunque esta dependencia es mayor en la formalización que en la corrección. Se afirma que no existen evidencias concluyentes para rechazar la independencia de la corrección y el tipo de enunciado y éstas sí se hallan, aunque con una asociación baja, en el caso de la formalización y el tipo de enunciado. El tipo de enunciado influye más en la formalización que en la corrección y sólo se encuentran diferencias significativas entre los distintos cursos en este último caso, entre el curso de primaria y los de secundaria.

7 Conclusiones

7.1. Conclusiones del análisis de los resultados obtenidos en cada pregunta

7.1.1. Por preguntas

1ª pregunta

Como hemos podido observar, prácticamente la totalidad de las alumnas de más bajo nivel académico utilizan el lenguaje natural en su expresión, pues no requiere de conocimientos específicos como el formal. El uso de las coordenadas es minoritario también en los cursos de secundaria con resultados ligeramente favorables al curso superior, que supera la tercera parte de las alumnas.

No podemos afirmar que exista una dependencia clara entre la corrección y el tipo de respuesta, pues esta sólo se ha podido verificar estadísticamente para el curso de 2º ESO. Lo que sí es claro es que el rigor en la expresión es mayor en los cursos de mayor nivel académico, pues el uso de coordenadas ofrece mayor precisión que el lenguaje natural, a pesar de los errores en su uso. Aún así, debemos aceptar que el hábito tiene un peso específico importante en las respuestas obtenidas en cada curso.

2ª pregunta

Analizados los datos concluimos que las alumnas de menos nivel académico tienen una mayor dependencia de la aritmética a la hora de resolver cuestiones matemáticas. Son menos capaces de pensar en otros términos que no sean los exclusivamente numéricos, por falta de costumbre.

No obstante la comprensión de la aritmética como sistema formal y no como simples reglas operativas no es muy elevada en general, tampoco en los cursos de secundaria aunque mejor que en primaria. Esto demuestra que la preparación aritmética de las alumnas no es la deseable para las necesidades del álgebra y que ésta se va desarrollando a medida que se avanza en los conocimientos algebraicos y no previamente, como sería preferible.

3ª y 4ª preguntas

En cuanto a la generalización no se han encontrado excesivas diferencias entre los tres cursos, en general. Esta capacidad se presenta como poco necesaria en estas etapas y presenta una dificultad notable ya que se trata de realizar un análisis de casos al que las alumnas no están acostumbradas y de extraer una conclusión que caracterice a todos ellos.

Se aprecian diferencias significativas en la expresión de esta generalización en los diferentes cursos, ya que mejora con el nivel académico.

5ª pregunta

Hemos visto que la práctica totalidad de las alumnas de estos cursos son capaces de traducir un enunciado a su expresión aritmética, y viceversa, y sólo se establecen diferencias significativas por cursos en cuanto a la traducción a su estructura formal.

Para estas alumnas la necesidad de la referencia continua a la aritmética disminuye a medida que va aumentando el conocimiento de conceptos algebraicos. A pesar de ello sigue estando muy presente en las alumnas de mayor curso académico.

6ª y 7ª preguntas

No se han encontrado diferencias significativas en la comprensión y el uso de fórmulas algebraicas, independientemente del conocimiento que las alumnas tengan del lenguaje formal.

Las diferencias se han manifestado en la expresión de la respuesta, ya sea debido al grado de formalización o a la dependencia de la aritmética de las alumnas de niveles académicos inferiores.

A la vista de todo ello se detecta una importante deficiencia en nuestro sistema educativo que fomenta un aprendizaje de las matemáticas basado en reglas aisladas, en vez de en procedimientos con sentido para la resolución de situaciones problemáticas.

8ª pregunta

La corrección de este tipo de respuestas, que conllevan una generalización, no sólo depende de la propia capacidad de las alumnas para extraer y formular la característica común, sino también de la dificultad de la relación planteada. Por ello se manifiestan más diferencias en las preguntas más complejas.

En cuanto a la generalización, no se presenta como suficiente en esta etapa pues la mayor parte de las respuestas se encuentra al nivel de las operaciones concretas. Hay mayores diferencias entre los dos cursos de secundaria que entre el de primaria y el inferior de los de secundaria.

En todos los cursos se observa una falta de rigor en la expresión, aunque mejora considerablemente en el último curso de secundaria.

9ª pregunta

Como en preguntas anteriores que evalúan estas mismas capacidades observamos una dificultad similar para generalizar en los tres cursos, debido a la detección de la relación a partir de un análisis de casos.

Las diferencias vuelven a presentarse en cuanto a la expresión de la misma, con creciente rigor formal y con una menor dependencia de la aritmética según aumenta el nivel académico. Las diferencias son más evidentes entre el curso de primaria y los de secundaria que entre estos entre sí.

10ª pregunta

En cuanto a las diferencias en la generalización se encuentran, como en la cuestión 8ª, entre los cursos inferiores y el superior, más que entre el de primaria y los de secundaria.

La búsqueda de la justificación teórica del enunciado presenta una dificultad notable para todas las alumnas, aunque existe una mejoría importante según aumenta el nivel académico.

En los cursos de secundaria las alumnas encuentran menos dificultad en la expresión general de la operación mediante algún tipo de simbolización que en la explicación de las relaciones subyacentes. Esto demuestra que el uso del lenguaje algebraico no conlleva la comprensión de la estructura de la operación aritmética, más relacionada con la madurez de las alumnas que con los conocimientos y hábitos puntuales.

Se observa una dependencia mayor de la aritmética en el curso de primaria que en los de secundaria, que evidencia una mayor madurez formal en estos últimos.

Como en los casos anteriores la expresión mejora significativamente según los cursos van siendo superiores. El uso del álgebra como generalización se presenta de forma cada vez más necesaria para las alumnas que lo conocen, pero más por hábito que por comprensión de la magnitud simbolizadora de dicha herramienta.

11ª pregunta

Las alumnas formalizan con bastante naturalidad en los cursos de secundaria, una vez que detectan la relación en cuestión, mientras que para las alumnas de primaria esta formalización es muy compleja y se presenta en proporciones similares con signos informales y formales.

La dificultad de la generalización estriba en la detección de la relación y ello se manifiesta de forma similar en los tres cursos. Sin embargo, las grandes diferencias se encuentran en la expresión rigurosa de la relación detectada, ya sea a través del lenguaje natural o de una simbolización adecuada, entre el curso de primaria y los de secundaria.

12ª pregunta

En el análisis de las respuestas a esta cuestión hemos concluido que gran parte de la formalización algebraica hallada en los cursos de secundaria no está relacionada con el desarrollo madurativo de las capacidades de las alumnas en cuanto a simbolización y generalización de la aritmética. Por ello el papel de la incógnita (en el sentido de la página 129) no llega a comprenderse por la mayor parte de las alumnas de estos cursos.

Para todas ellas la expresión rigurosa de un enunciado resulta una dificultad importante, a pesar de que mejore dependiendo del nivel académico. También mejora en gran medida la independencia de la aritmética en los cursos de secundaria, lo que refuerza las conclusiones de Mutschler (página 93) ya que es un indicio de que el hábito algebraico favorece la aritmética.

13ª pregunta

Se ha demostrado que, a pesar de que la mayor parte de las alumnas de secundaria ofrezcan una respuesta formal algebraica, el valor de los signos no ha sido comprendido. Esto quiere decir que el lenguaje algebraico es aprendido como reglas memorísticas que nos sirven para resolver problemas y cuestiones planteados en la clase de matemáticas sin un sentido completo dentro del marco conceptual de la aritmética y las estructuras matemáticas, en general, como afirma Herscovics (página 118).

En cuanto a capacidad de las alumnas de inversión de operaciones se observan diferencias considerables entre el curso de primaria y los de secundaria.

7.1.2. Por objetivos

En cuanto a la capacidad de las alumnas de expresarse con rigor a través de la escritura en lenguaje natural, se ha comprobado que aumenta según el nivel académico de los cursos es mayor, con diferencias mayores entre el curso de primaria y los de secundaria que entre estos entre sí (pregunta 1ª y 9ª), aunque continúa representando una dificultad importante en general (pregunta 12ª).

La capacidad de comprensión de un enunciado matemático en lenguaje natural, con un correcto análisis de la problemática planteada y la detección de datos facilitados para su posible resolución como problema no parece el mayor inconveniente a la hora de responder al cuestionario, excepto en algunas cuestiones como la 10ª, en las que se observan mayores dificultades para todas las alumnas o en la 13ª, sobre todo para las de menor nivel académico. La traducción de enunciados a la aritmética, y viceversa, no representa un problema para estas alumnas (pregunta 5ª)

En cuanto al dominio de la aritmética en el aspecto operativo, no se advierten dificultades significativas en ningún curso, la expresión de informaciones a través de ella se realiza con facilidad y confianza (pregunta 10ª). Sin embargo a la hora de valorar la comprensión de la estructura subyacente se observan importantes diferencias por cursos (preguntas 5ª y 13ª), además de un nivel deficiente en general (pregunta 2ª). Podemos afirmar que la dependencia de la aritmética va disminuyendo según aumenta el nivel académico (pregunta 2ª) -con mayores diferencias entre el curso de primaria y los de secundaria (preguntas 9ª, 10ª y 12ª), pues van aumentando los conocimientos algebraicos (preguntas 5ª y 12ª)- a pesar de que ésta sea todavía importante en algunas cuestiones (preguntas 8ª, 5ª y 12ª).

La generalización presenta una importante dificultad ya que resulta poco necesaria para los alumnos de estos niveles (preguntas 3ª y 4ª), con pocas diferencias entre los diferentes cursos (preguntas 9ª y 11ª) debido al enorme obstáculo que supone detectar regularidades y relaciones entre objetos a través de un análisis de casos (preguntas 9ª, 10ª y 11ª). Las diferencias por cursos aumentan en algunas cuestiones (preguntas 8ª y 10ª) a favor del mayor curso de los de secundaria y sin grandes distancias entre el resto.

Las grandes diferencias se manifiestan a la hora de expresar dicha generalización entre el curso de primaria y los de secundaria, ya que en estos últimos la expresión es más rigurosa (pregunta 11ª), más independiente de la aritmética (preguntas 7ª y 9ª) y con un mayor uso de algún tipo de simbolización (pregunta 9ª y 11ª).

Un hecho similar se halla en cuanto al grado de comprensión de la formalización algebraica como representante de una magnitud conocida -sin exigir un conocimiento profundo del lenguaje algebraico y sus peculiaridades, sino simplemente el conocimiento del uso de fórmulas matemáticas y el significado de sus términos. En este caso las diferencias por cursos no se hallan en la comprensión y el uso de las mismas sino en la expresión de la respuesta debido a la mejora de los niveles de formalización e independencia de la aritmética en los cursos superiores (preguntas 6ª y 7ª).

Sin embargo no se puede afirmar, en general, la comprensión del valor completo del símbolo (preguntas 10ª, 12ª y 13ª), pues el signo aún no está cargado del significado que le proporciona la madurez de la operativa formal (ver en la página 109), alcanzada por muy pocas alumnas de los cursos superiores. Por ello, a pesar de que en los cursos superiores el manejo de la incógnita es suficientemente correcto, su magnitud simbólica queda fuera del alcance de la mayor parte de estas alumnas (pregunta 12ª).

En cuanto a la capacidad de expresarse algebraicamente, ya sea mediante signos informales o a través del álgebra formal, encontramos una mayoría de alumnas de secundaria que la utilizan (preguntas 9ª a 13ª), pero con un bajo nivel de significación entre los cursos de secundaria -en primaria es prácticamente nulo- como se acaba de apuntar en el párrafo anterior. En las preguntas en las que se especifica algún ejemplo con un signo literal en el enunciado (preguntas 12ª y 13ª) el uso del álgebra formal aumenta radicalmente, hasta la mitad de las alumnas de primaria y prácticamente la totalidad de los de secundaria. En el resto puede apreciarse un cierto uso de símbolos propios, informales, que en el curso de primaria puede incluso superar a los formales (pregunta 9ª). Todo esto demuestra que el hábito formal ha sido interiorizado por la mayor parte de las alumnas de secundaria, pero como reglas memorísticas sin significación (ver en la página 118) dentro del marco conceptual del álgebra (pregunta 13ª).

7.2. Conclusiones del análisis global

7.2.1. Conclusiones del análisis de la corrección y la formalización

La práctica totalidad de las alumnas alcanza un nivel de desarrollo verbal suficiente para expresarse con una rigurosidad media. Su dominio de la aritmética les permite detectar y generalizar regularidades y relaciones planteadas a través de ella y su representación formal se limita al uso de fórmulas matemáticas de modo mecánico e incluso a la utilización de letras imitando un ejemplo dado pero, en este caso, sin una comprensión significativa del signo como sustitución del número. Como ya se ha afirmado en varias ocasiones no se puede considerar este hecho como una formalización algebraica, ya que la función representativa del símbolo se encuentra claramente sesgada.

La mayor parte de estas alumnas -más de la mitad de las de primaria y las tres cuartas partes de las de secundaria-, además, es capaz de expresarse con rigurosidad en lenguaje natural. Su nivel aritmético va más allá de la operatividad, es decir, comprenden las estructuras aritméticas y el valor de los signos de operaciones, independientemente de los casos particulares. En cuanto a la representación formal son capaces de detectar relaciones y regularidades en distintas situaciones de generalización aritmética, utilizando signos algebraicos o informales como representantes de números. Sin embargo, sólo la mitad de ellas -con evidentes diferencias entre los tres cursos, una séptima parte de primaria, la mitad de 1º ESO y las tres cuartas partes de 2º ESO- utiliza estos signos para representar informaciones que modelicen situaciones matemáticas de mayor o menor complejidad.

Encontramos diferencias importantes por cursos tanto en la corrección como en la formalización, sobre todo en los cursos más alejados académicamente. Estas diferencias son mayores en la formalización que en la corrección, lo que no es sorprendente, pues en 6º EP no conocen el lenguaje algebraico formal (ver Anexo 1).

Finalmente, son una minoría las alumnas que dominan el lenguaje algebraico en toda su magnitud simbolizadora y operativa. La proporción de ellas en el curso de primaria es despreciable mientras que, en los cursos de secundaria, representan un grupo destacable -alrededor de la cuarta parte-, mayor según el nivel del curso académico y sin grandes diferencias en sus proporciones.

La corrección y la formalización presentan una relación importante en su variación conjunta.

A medida que aumenta la corrección aumenta la formalización, y viceversa, aunque la formalización va ligeramente por detrás de la corrección, sobre todo en el curso de primaria. Esta relación de dependencia entre la corrección y la formalización se estrecha a medida que aumenta el curso académico, llegando a resultar prácticamente homogéneas las distribuciones de las dos en el último curso de secundaria.

7.2.2. Conclusiones del análisis comparativo con los resultados académicos

La variación conjunta de la calificación escolar con las variables corrección y formalización en el cuestionario, respectivamente, no parece determinante a pesar de haber encontrado evidencias de que es destacable en alguno de los análisis realizados.

En el estudio descriptivo se ha hallado que esta relación se ajusta más a un modelo lineal en el curso de primaria y menos según los cursos son superiores. Sin embargo, la prueba de independencia no confirmó esta diferencia, al ofrecer un resultado no significativo para el curso de primaria. En cuanto a los cursos de secundaria los resultados obtenidos fueron de una cierta relevancia, pero se relativizaron a la vista del estudio descriptivo y la observación directa de los datos.

Se puede afirmar que existe una cierta dependencia de las variables corrección y la formalización del cuestionario con la calificación académica de las alumnas, ligeramente más acusada en el caso de la formalización que en el de la corrección y en los cursos de secundaria que en el de primaria, aunque éstas últimas diferencias no resultan muy significativas.

En general, tanto la corrección como la formalización, experimentan un incremento ligeramente más rápido que la calificación, más destacado en los cursos de secundaria que en el de primaria. En este último curso las distribuciones de estas variables presentan más diferencias en su distribución, mientras que en el curso de 2º ESO son más homogéneas.

Resumiendo, la corrección y la formalización en el cuestionario dependen de las calificaciones escolares obtenidas, aunque con un nivel de asociación no tan elevado como sería de esperar. Se suponía una relación mayor, pues el cuestionario estaba diseñado para respetar los distintos niveles de las alumnas de cada curso y por lo tanto se esperaba encontrar unas distribuciones similares de la calificación con cualquiera de las dos variables, corrección o formalización, en cada curso.

Asimismo es esperaban unas diferencias mayores entre ellas en 6º EP y menores en 2º ESO, debido al distinto desarrollo de la madurez matemática de las alumnas de estos cursos y a los distintos conocimientos que poseen. Sin embargo, estas diferencias de la corrección y la formalización debidas a las calificaciones son pocas. En cuanto a la homogeneidad, se concluye que la corrección se ajusta mejor a la calificación que la formalización y se respeta la diferencia anunciada entre el curso de primaria y los de secundaria, pero en ningún caso hay un ajuste muy significativo.

7.2.3. Conclusiones del análisis comparativo con el tipo de enunciado

En general, los resultados de la corrección para los enunciados aritméticos son mejores que para los geométricos, siempre que no impliquen el análisis de una relación compleja. En cuanto a los formales, en 6º EP se advierte una elevada diferencia en su corrección con respecto a los otros dos tipos de enunciados que se reduce según los cursos son de un nivel académico superior -aunque no se ha podido probar estadísticamente-. Se puede afirmar que una vez aprendido el lenguaje algebraico, en los cursos de secundaria, los enunciados formales son comprendidos de manera suficiente y la corrección no depende del tipo de enunciado sino de la dificultad de la tarea planteada. Por lo tanto se admite la independencia de la corrección en los distintos tipos de enunciado respecto del curso académico.

En cuanto a la formalización se concluye que, a pesar de que el uso del álgebra es mayor en los enunciados formales que en los geométricos y aritméticos, la capacidad de simbolizar se manifiesta con una frecuencia similar en los primeros que en los segundos y las diferencias se hallan respecto a los enunciados aritméticos, pues la respuesta evidente no implica ninguna simbolización al no presentarse ésta en el enunciado.

El análisis evidencia que existen más diferencias en la formalización de las alumnas de 6º EP que se deben al tipo de enunciado que en 2º ESO, lo que demuestra una menor madurez formal y se corresponde con la característica no corroborada de una menor corrección en los enunciados formales de 6º EP.

Las diferencias se acentúan más a favor de un mayor uso de la formalización algebraica y menor de la aritmética según se va avanzando en los cursos. Estas diferencias se deben al desarrollo de las capacidades de formalización algebraica de las alumnas más que al tipo de enunciado de que se trate. Por ello se encuentran, como en casos anteriores, diferencias más significativas entre el curso de primaria y los de secundaria, que entre los de secundaria entre sí.

Se ha hallado un bajo nivel de dependencia de la formalización con el tipo de enunciado, el cual ni siquiera ha podido ser comprobado estadísticamente para la corrección. No es sorprendente, pues es en la formalización donde se vienen observando las mayores diferencias debido a la especificidad de los conocimientos que requiere.

7.2.4. Conclusiones del análisis global por objetivos

En general, con este cuestionario se han conseguido los objetivos definidos en 5.1, hallándose un grado de desarrollo medio de las capacidades evaluadas. La correlación de estos resultados con los resultados escolares no es destacable y resulta más fuerte en el curso de primaria que en los de secundaria, ya que en estos últimos las capacidades evaluadas se encuentran desarrolladas por un mayor número de alumnas, que superan en proporción a las que obtienen buenos resultados escolares. Esto parece indicar que el cuestionario ha resultado sencillo para estas alumnas, sin embargo, los resultados del análisis de las respuestas particulares nos alertan de que la formalización no es tan significativa como hubiera sido deseable. Se especifica a continuación por capacidades evaluadas:

En cuanto la capacidad de las alumnas de comprender el lenguaje natural y expresarse de un modo adecuado a través de él se ha encontrado que la práctica totalidad de las alumnas alcanza un nivel de desarrollo verbal suficiente para expresarse con una rigurosidad media y una mayoría -con diferencias evidentes entre primaria y secundaria- lo hace con un nivel de rigurosidad adecuado.

Para la totalidad de las alumnas de estos niveles, el dominio de la aritmética se limita a un modo estrictamente operativo, aunque la mayor parte de ellas -con diferencias notables entre primaria y secundaria- alcanza un nivel formal, es decir, comprende las estructuras aritméticas y el valor de los signos de operaciones, independientemente de los casos particulares.

Para la detección y generalización de regularidades y relaciones entre objetos a través de un análisis de casos particulares, casi todas las alumnas son capaces de formar un concepto general adecuadamente en situaciones aritméticas sencillas, sin embargo, sólo una quinta parte -sobre todo alumnas de secundaria- consigue generalizar en diversas situaciones matemáticas de mediana complejidad, expresando adecuadamente sus conclusiones.

Prácticamente todas las alumnas, incluso las de primaria, que no han sido instruidas en el lenguaje algebraico, manejan los signos literales a nivel de fórmulas matemáticas conocidas y son capaces de escribirlos en cierto tipo de situaciones, a partir de un ejemplo dado y sin comprender el valor del signo como representación del número. Una gran parte de ellas es capaz de alcanzar esta comprensión, sin embargo, sólo la mitad de las alumnas -con evidentes diferencias entre los tres cursos, sobre todo entre el de primaria y el primero de secundaria- utiliza estos signos para representar informaciones que modelicen situaciones matemáticas de mayor o menor complejidad, con todo el sentido de la simbolización que se ha señalado en este trabajo.

Son una minoría las alumnas que dominan el lenguaje algebraico en toda su magnitud simbolizadora y operativa. En el curso de primaria hay un grupo de alumnas prácticamente inapreciable que lo hacen, mientras que en secundaria este grupo representa una parte importante -alrededor de la cuarta parte-, mayor según el nivel del curso académico y sin grandes diferencias entre ambos cursos.

Según el tipo de enunciado se observa que esta formalización es mayor en las preguntas de enunciado formal que en las de enunciado geométrico -aunque en un sentido estricto la capacidad de simbolizar informaciones se manifiesta con una frecuencia similar en los enunciados formales que en los geométricos, ya que en estos últimos aparecen en mayor medida signos informales para la expresión general- y aritméticos, ya que la respuesta formal es más evidente en enunciados que presentan signos literales como ejemplo y la respuesta aritmética lo es para los enunciados que presentan números. Sin embargo, la corrección en los enunciados aritméticos y en los geométricos es mayor que en los formales, con mayores diferencias en el curso de primaria que en los de secundaria, lo que demuestra que la corrección de esta formalización no es muy alta, sobre todo en los cursos de menor nivel académico. A pesar de todo esto la asociación encontrada entre el tipo de enunciado y la formalización es muy débil.

Resumiendo, en general los objetivos de la formalización se alcanzan en menor medida que los generales, aunque en los cursos de secundaria su correlación es muy elevada, ya que la formalización forma parte del currículo (Anexo 1). Al igual que en los objetivos generales, la relación con los resultados escolares es muy baja, ya que en primaria estos son mayores que la formalización y en secundaria las diferencias se invierten.

7.3. Conclusiones generales

El desarrollo de las capacidades que se querían evaluar como objetivos definidos para este cuestionario ha sido medio en los cursos de secundaria y medio-bajo en el curso de primaria.

Las diferencias son puntuales entre estos cursos en cuanto a la corrección de las preguntas del cuestionario sin grandes diferencias globales, sobre todo en los cursos de secundaria. Sin embargo, estas diferencias aumentan en cuanto a la expresión de las respuestas de un modo formal, abriéndose una gran brecha entre el curso de primaria, cuyas alumnas no conocen el lenguaje algebraico, y los cursos de secundaria, cuyas alumnas han comenzado a estudiar estos conceptos.

El lenguaje natural es dominado a este nivel por la mayor parte de las alumnas, con las diferencias especificadas anteriormente entre los cursos de primaria y secundaria y ciertas dificultades específicas en algunas cuestiones. Sería deseable que este rigor aumentase para las alumnas del curso de primaria que deben alcanzar la predisposición a la formalización necesaria para el álgebra.

Las operaciones aritméticas no representan dificultad alguna en su operatividad para cualquiera de los cursos evaluados. Sin embargo, la madurez formal que estas operaciones deben alcanzar para hacer posible la generalización al álgebra se observa en distintas proporciones según el curso académico. En primaria tan sólo poco más de la mitad de las alumnas se encontrarían en disposición para aprender el álgebra, mientras que en secundaria observamos que aproximadamente las tres cuartas partes de las alumnas son capaces de evaluar la aritmética a nivel estructural. Las diferencias nos advierten de que la maduración aritmética se está procurando al mismo tiempo que los conocimientos algebraicos, lo que podría obstaculizar la comprensión significativa del lenguaje algebraico, como veremos que ocurre.

Se observa que las grandes dificultades se encuentran en las capacidades superiores evaluadas, es decir, la detección y la generalización de regularidades y relaciones entre objetos. Para ellas las diferencias entre el curso de primaria y los de secundaria se acentúan, ya que sólo alrededor de la cuarta parte de las alumnas de secundaria son capaces de generalizar en situaciones de mediana complejidad. Esto indica que el desarrollo del pensamiento formal no se ha adquirido antes de introducir los conceptos del álgebra, lo que resulta necesario para una adecuada asimilación del lenguaje algebraico. Evidentemente, dicho desarrollo no se pretende en su totalidad a edades tan tempranas, pero sí una predisposición al nivel de la aritmética que nos asegure un tránsito al álgebra con sentido para el alumno.

En cuanto a la expresión y comprensión formal encontramos una amplia jerarquía en su utilización:

- Prácticamente todas las alumnas, incluidas las de primaria que no tienen conocimientos de lenguaje algebraico, son capaces de manejar signos literales en fórmulas, sin pleno sentido representativo, sobre todo si el signo es sugerido de alguna manera en el enunciado (ver 6.2.2). El valor del signo se limita en ellas a la representación de un único número, es decir, carece del sentido de variabilidad propio del signo algebraico. En expresiones desconocidas favorece el error, pues las alumnas no saben qué significa, ni las reglas de su manipulación. Se trata de un conocimiento informal proporcionado, tanto en las aulas como en el entorno extraescolar de las alumnas, sin un adecuado rigor y sin esperar al desarrollo madurativo del alumno para su comprensión.

- Gran parte de las alumnas de secundaria y tan sólo la mitad de las de primaria comprenden el valor del signo como representación de números, con sentido variable y con las características propias de dicha simbolización, que han sido analizadas con detalle en esta investigación (en la página 129). La falta de hábito en el curso de primaria es la razón fundamental de tales diferencias.

- La capacidad de expresar informaciones matemáticas a través de símbolos se encuentra en distintas proporciones para los distintos cursos (ver 6.2.2). En primaria hay una mínima parte de las alumnas que la presenta, mientras que en 1º ESO son la mitad de ellas y en 2º ESO las tres cuartas partes de las mismas, las que utilizan algún tipo de simbolización en su expresión. Esta representación se manifiesta a su vez en dos niveles: uno que presenta signos propios informales en su expresión -más frecuente en el curso de primaria, debido al desconocimiento del álgebra formal- y otro que utiliza los signos del álgebra formal y que requiere del previo conocimiento del lenguaje algebraico. En mi opinión se debe fomentar la representación informal antes de dar el paso de la aritmética al álgebra formal para favorecer un adecuado aprendizaje del mismo.

- Por último, las alumnas que dominan el lenguaje algebraico en toda su magnitud representativa y formal son una minoría, correspondiente, sobre todo, a los cursos de secundaria y con diferencias significativas entre ambos cursos. Las alumnas de primaria se ven privadas de alcanzar este estadio de la formalización debido a la falta de conocimientos formales al respecto (ver Anexo 1). A pesar de ello se ha hallado alguna alumna aventajada que podría clasificarse en este nivel.

En general se halla una presencia del álgebra formal suficiente en los cursos de secundaria, pero a un nivel significativo muy elemental. Esto demuestra que el aprendizaje del lenguaje algebraico se realiza independientemente del proceso madurativo de las alumnas, que no han construido estructuras mentales de referencia para dicho aprendizaje y por lo tanto está vacío de significado. El álgebra se aprende, de este modo, como un cúmulo de reglas que se memorizan con el objetivo de dar solución a las cuestiones planteadas por el profesor.

El objetivo del profesor debe ser conseguir situar al alumno en la mejor predisposición para comprender estos conocimientos algebraicos y evitar, así, el fracaso escolar que acompaña normalmente a esta disciplina de la matemática.

La comparativa de los resultados del cuestionario con las calificaciones obtenidas en la escuela ha servido para detectar un desajuste importante entre los contenidos estudiados y las respuestas que las alumnas son capaces de ofrecer en entornos no típicamente académicos. Se ha evidenciado un menor ajuste del esperado entre los resultados del cuestionario y las calificaciones pero, sobre todo, se han encontrado multitud de pruebas, en el análisis detallado de las respuestas particulares de las alumnas, que manifiestan un uso de la formalización sin valor algebraico, lo que hace suponer un nivel de madurez real de las alumnas muy por debajo del nivel esperado de desarrollo matemático, según el curso académico.

La didáctica del profesor debe tratar de minimizar estos efectos y adecuarse a las alumnas y a sus características particulares para favorecer el aprendizaje significativo, que es el único que proporciona el desarrollo del conocimiento.

«La forma de los planes de estudio está actualmente especificada, "enseñar álgebra" es como enseñar a la gente a hablar haciéndolos mover la boca de cierta manera una y otra vez. ¡Ridículo! No enseñamos a la gente a caminar moviendo sus piernas, u obligándolos a poner los pies en ciertas posiciones: caminar es una expresión de la necesidad de estar en otra parte. (The way curricula are currently specified, 'teaching algebra' is like teaching people to speak by making them move their mouths in certain positions over and over. Ridiculous! We don't teach people to walk by moving their legs for them, or forcing them to put their feet into certain positions: walking is an expression of the urge to be elsewhere).» John Mason

Parte III

Aplicación a la práctica docente

8 Propuestas para la aplicación al proceso de comunicación didáctica: la didáctica del lenguaje algebraico

En 2.4 se ha hablado del objetivo de formación que se pretende como competencia matemática y que requiere la búsqueda del desarrollo de la persona en su relación con las matemáticas. Además, en un momento de cambio en la ley de educación hacia un enfoque por competencias, no podemos olvidar la contribución de la didáctica de esta materia al desarrollo del resto de competencias definidas.

Las necesidades en la educación matemática se han ampliado por estas razones y no se limitan a la teoría y la práctica de los conocimientos técnicos matemáticos. Sin embargo se ha puesto de manifiesto en esta sección la preferencia, por una parte importante de la comunidad educativa, de una didáctica de la matemática fundamentalmente mecanicista que empobrece el fin último de la educación matemática y dificulta el aprendizaje constructivo de esta materia. Las alumnas estudiadas han presentado rasgos en su conocimiento atribuibles a una didáctica de este tipo.

Atendiendo a estas razones y a las conclusiones obtenidas en el capítulo anterior sería necesario introducir ciertos cambios en la didáctica del álgebra para conseguir que las alumnas sean capaces de construir su conocimiento algebraico de una manera significativa.

Ya se ha dicho en general (páginas 49 y 51) que un aspecto fundamental a mejorar en el estudio de las matemáticas es la enseñanza de esta materia en la educación primaria. El álgebra no es impartida como tal hasta la educación secundaria, pero se puede encontrar la raíz de algunos problemas en la etapa primaria. Se ha detectado que gran parte de las dificultades de aprendizaje del álgebra de estas alumnas se encuentran arraigados en el aprendizaje de la aritmética. Esta afirmación es fácilmente generalizable a otros centros, como se ha analizado en 3.4. Sería necesaria una revisión de los enfoques que la enseñanza de la aritmética recibe en la educación actual para asegurar la construcción significativa del conocimiento que se viene señalando como objetivo fundamental.

La enseñanza tradicional de la aritmética lleva asociado un aprendizaje de las reglas operativas de forma mecánica sin comprensión conceptual de las operaciones, lo que dificulta la construcción de estructuras matemáticas necesarias para el desarrollo posterior del álgebra. La enseñanza activa de la aritmética, como se puede ver en las experiencias de Kamii (1988) y Kamii y De Vries (1985), favorece esta construcción e impide errores posteriores de cálculo aritmético o incluso de comprensión de las operaciones para la aplicación algebraica.

En 3.3.1 se ha explicado como debe ser esta construcción de la aritmética para que sea significativa y no se aprenda a dar respuestas aisladas a las operaciones concretas sin comprender la relación subyacente. El tipo de actividades que favorecen este aprendizaje son las que conectan con el entorno cercano del niño y sus necesidades e intereses. De este modo el niño abstraerá el concepto de adición sumando y el concepto de número con experiencia de éstos, como se puede ver en Kamii (1988). Los juegos de la carta más alta (ordenación) o incluso con varias cartas (adición) son adecuados para esta construcción. Preguntas como *cuántas tienes ahora* o *cuántas te faltan para tener...* obligan al alumno a la realización de operaciones sin necesidad de lápiz y papel, ni de colecciones interminables de ejercicios repetitivos. Una vez afianzados los conocimientos aritméticos a nivel significativo es el momento de introducir los algoritmos que convierten la aritmética en herramienta realmente útil para la vida. La consolidación y automatización de estos algoritmos es necesaria y debe ser alcanzada desde distintos tipos de actividades, algunas de ellas reiterativas, pero buscando la diversidad que asegure el desarrollo de todos los objetivos definidos y no sólo los estrictamente matemáticos.

La paciencia es lo más importante en este tipo de aprendizaje, pues a menudo la comunidad educativa exige resultados inmediatos independientemente de la capacidad de comprensión de cada alumno lo que lleva al maestro a atajar con una enseñanza por transmisión y repetición que tiene más éxito a corto plazo pero que, al no asegurar el desarrollo de las estructuras aritméticas en el niño, puede ser peligrosa para el aprendizaje de las matemáticas a medio y largo plazo.

Esta enseñanza activa de la aritmética se presta a la introducción gradual de los conceptos algebraicos de manera informal, desarrollando los conceptos de generalización, variabilidad y representación propios del álgebra de una forma natural, sin necesidad de símbolos formales. A partir de experiencias en el aula, de actividades geométricas o aritméticas, estos conceptos pueden desarrollarse como se ha visto en las investigaciones sobre el álgebra temprana citadas (Carraher y Schliemann, 2002; Brizuela y Schliemann, 2003; Schliemann et al., 2003; Mutschler, 2005; Tabach y Hershkowitz, 2002).

No se debe confundir esta didáctica del álgebra a edades tempranas con un adelantamiento de la enseñanza tradicional del álgebra, lo que sería claramente un fracaso como ha puesto de manifiesto la matemática moderna (Kline, 1976). La formalización algebraica debe ser introducida sólo después de que el desarrollo madurativo de los alumnos lo permita y esto no ocurre hasta la educación secundaria, como han puesto de manifiesto estudios como los de Piaget y Collis (ver 3.3.1). Además las ideas algebraicas deben estar en la mente del niño previamente al aprendizaje de los signos formales, como afirmaba Kamii en la página 138. La adaptación al ritmo individual de aprendizaje de cada uno de los alumnos -no sólo al ritmo sino a su situación personal concreta, su conocimiento previo, su personalidad y sus intereses particulares-, parafraseando a Rousseau *saber perder el tiempo a menudo es la mejor forma de ganarlo*, es fundamental para el normal desarrollo y aprovechamiento de la enseñanza algebraica.

> *«La pedagogía no podrá ser eficaz realmente más que cuando pueda actuar a la vez sobre las coordenadas de la edad y las de la personalidad»*. (Mialaret, 1986)

Es importante tener en cuenta que el álgebra también va a favorecer el desarrollo del alumno, es decir, la formalización algebraica facilita la madurez de pensamiento y, al tiempo, necesita de dicha madurez para su construcción. Por ello ambos desarrollos deben ir de la mano y beneficiarse mutuamente para provecho del alumno.

Otra dificultad que ha manifestado su influencia en el desarrollo del álgebra de estas alumnas es la capacidad lingüística. El álgebra formal, introducido como lenguaje, provee al alumno de una herramienta útil para su aprendizaje, como se ha puesto de manifiesto en 3.4.1. En general, la capacidad lingüística de los alumnos en edad de aprender álgebra es bastante limitada, incluso se puede afirmar que las competencias lingüísticas van reduciéndose más en los últimos años para los alumnos de la misma edad -pruebas PISA (INECSE, 2004c) y pruebas de diagnóstico de la Comunidad de Madrid (www.educa.madrid.org)-. El paso de la subjetividad del pensamiento a la objetividad del lenguaje presenta una dificultad añadida a la comunicación y, a estas edades, la expresión oral o escrita, pero sobre todo esta última, se realiza con rigor deficiente aún cuando el pensamiento aparezca con cierta claridad en el alumno. Esto repercute negativamente en el desarrollo del lenguaje algebraico, ya que se traduce en unas mayores dificultades de comprensión y expresión en lenguaje natural, cuando es necesario partir de un cierto rigor y precisión.

La didáctica de la educación primaria en este centro debe tratar de minimizar estos problemas lingüísticos y fomentar métodos informales de comunicación del pensamiento. Para ello es necesario el diálogo constante ya sea con otros alumnos (Skemp, 1993) o con el mismo profesor (Kamii, 1988), que debe procurar que los intentos de formalización se realicen a tiempo, adaptándose al ritmo de aprendizaje del alumno y proporcionando las ayudas necesarias para conseguirlo. Si no se consigue una expresión correcta en lenguaje natural no será posible una simbolización algebraica, pues ello representaría traducir a un lenguaje nuevo pensamientos que no se logran expresar en lenguaje natural conocido.

Con una buena base lingüística -necesaria para cualquier aprendizaje-, aritmética y prealgebraica en la educación primaria el alumno llegará a la educación secundaria con la mejor predisposición para la formalización del lenguaje algebraico. Los conceptos de variabilidad y generalización no serán completamente nuevos para él y la generalización de la aritmética se hará posible a través de los símbolos algebraicos que incorporará sin dificultad, asociándolos a ideas informales desarrolladas previamente. De esta manera el álgebra no se aprenderá como un conjunto de reglas sintácticas vacías de sentido, ni el lenguaje algebraico como un cúmulo de signos con significados aleatorios, sino que será una herramienta eficaz, con valor por sí misma ya sea como lenguaje para expresar informaciones o como medio para la resolución de problemas.

Bajo mi punto de vista los cimientos de la didáctica del álgebra no deben ser distintos de los de la matemática en general, como ya se han definido en 2.4.3: la construcción de los conocimientos algebraicos por parte del alumno, acompañado del profesor que sabe aprovechar las oportunidades didácticas para fomentar y dirigir esta construcción de manera que se desarrolle a partir del conocimiento informal, con grandes dosis de intuición, y se institucionalice como un aprendizaje significativo sobre el que poder seguir construyendo.

El carácter activo de este aprendizaje del álgebra no debe confundirse con un enfoque empirista, que Mialaret (1986) señala como peligroso en las aulas

> *«el contacto de las matemáticas en la vida no debe traducirse en una sustitución de las matemáticas por la tecnología»,*

sino que debe acercarse a un compartir del profesor y el alumno que no sólo hacen álgebra juntos, sino que *se hacen* mutuamente (en el sentido de 2.4.4) a través de la relación educativa y de los conocimientos de los que participan. Esta idea refuerza la ampliación del objetivo de la formación matemática definido más arriba.

Para ello es necesario *destruir* -este concepto se aclarará más adelante- los programas en favor de situaciones concretas de la realidad que nos lleven a los conceptos algebraicos que se quieren introducir, sin olvidar el aspecto especulativo y estético de la matemática sino ligándolos con el activo para conseguir este objetivo común.

Desde este trabajo, frente a las perspectivas de otros muchos investigadores que explicitan actividades concretas para enseñar álgebra, se propone reivindicar la importancia del profesor que sepa seleccionar o inventar materiales adecuados para cada situación y cada alumno, materiales que formen parte del entorno cercano del alumno y que se acerquen a sus propios intereses. Para ello el profesor tiene que estar en posesión de un amplio abanico de conocimientos pero, sobre todo, tiene que ser buen observador para percatarse de las necesidades del alumno en cada momento particular, en este sentido le corresponde al profesor reconocerse como investigador en su aula, como lo afirman Kamii y De Vries (1985) en las siguientes líneas.

> *«Un profesor tiene que experimentar sus ideas, pensar en las reacciones de los niños y poco a poco modificar sus sistemas de evaluar y de enseñar».*

Ahora se puede comprender en toda su amplitud la *destrucción* de los programas proclamada anteriormente, pues sólo supeditándolos a la práctica educativa concreta de cada aula y cada niño, en cada momento, podremos ir adaptándonos por completo a cada uno en este compartir que representa la didáctica de la matemática. Con ello no pretendo la *anarquía* educativa, ni la libertad total de currículo, sino promover la competencia del profesor para elegir los contenidos más adecuados para que los alumnos alcancen los objetivos definidos en el currículo, pues él es el experto y el que conoce y comparte su misión educativa con sus alumnos.

Será responsabilidad del profesor proponer actividades que proporcionen a los alumnos momentos de debate, investigación, experimentación e incluso sensaciones confrontadas para fomentar en ellos el razonamiento, la discusión y el afán de superación, además de decidir la necesidad de intervenir o no en cada caso particular.

La enseñanza activa del álgebra en educación secundaria debe ir en esta línea para favorecer la construcción del lenguaje algebraico. Ya se ha dicho que el diálogo abierto entre los alumnos acerca de sus métodos propios de representación puede ser enriquecedor a la hora de construir el lenguaje formal algebraico de un modo participativo y, por supuesto, significativo. Además las actividades en las que los alumnos participan de un modo directo proporcionan

> *«la posibilidad de tener un feed-back que venga del objeto (que) es lo que hace que el niño se empeñe en un proceso de razonamiento por la anticipación, la acción, la evaluación (comparación) y recapitulación»* (Kamii y De Vries, 1985);

Las autoras se refieren al objeto físico concreto y a la educación infantil pero es fácilmente ampliable al símbolo, como objeto manipulable del pensamiento propio de alumnos mayores. El feed-back obtenido no será una experiencia física, sino de tipo conceptual y debe ser analizada por los propios alumnos para estudiar su conformidad con la realidad y su adecuación a la lógica. Será este análisis el que convenza a los alumnos de la oportunidad de los procedimientos algebraicos aplicados y no la opinión, mejor o peor considerada, del profesor.

Algunas actividades adecuadas para la introducción algebraica son aquellas que generalizan la aritmética. Expresar propiedades conocidas para todos los números representando éstos con signos no convencionales, utilizar signos para números desconocidos, etc. es fundamental para la iniciación en el lenguaje algebraico. Pero no debemos olvidar que paralelamente el alumno debe construir los conceptos algebraicos fundamentales: variabilidad, representación, etc. Para ello es necesario trabajar con actividades que incluyan estos conceptos, como pueden ser las funciones o las ecuaciones. Es necesario un tiempo extenso de manipulación -desde la primaria, como se ha justificado más arriba- de este tipo de tareas a nivel informal para que la construcción sea posible de forma significativa antes de la formalización algebraica. Los problemas verbales contextualizados son una estupenda manera de plantear este tipo de tareas (en la página 150) .

La formación del profesorado es clave para que este tipo de comunicación didáctica sea posible, como se ha evidenciado en 2.4.4.

Los profesores de primaria adolecen de un conocimiento profundo de los mecanismos de aprendizaje del álgebra y de la propia epistemología algebraica. Aunque de ellos no dependa la introducción del álgebra propiamente dicha son los que ponen al alumno en disposición de construirla a través del aprendizaje aritmético y del desarrollo del pensamiento prealgebraico, del que se viene hablando. Este tipo de formación debe formar parte de los programas de formación inicial, pero también de los de formación permanente para mantener un profesorado competente y actualizado en la enseñanza del álgebra.

Los profesores de secundaria poseen un conocimiento más profundo del álgebra, aunque a veces no de sus fundamentos sino de sus aplicaciones más complejas y abstractas. Se presenta con frecuencia la imagen de que el álgebra debe ser de esta manera y presentarse como algo difícil y distante de los alumnos. Los conocimientos pedagógicos y las didácticas contextualizadas pueden ayudar en la formación inicial y permanente de este tipo de profesionales.

Para terminar quisiera reconocer las limitaciones de esta investigación, tanto en el trabajo de campo como en sus aplicaciones. En el capítulo 6 se ha expuesto la razón de la escasez del tamaño de la muestra. Las conclusiones obtenidas se circunscriben a una población muy determinada, aunque se han señalado algunas generalizaciones posibles. Sería importante ampliar este estudio a poblaciones más amplias para obtener resultados generales y, de este modo, poder analizar las dificultades que se encuentran los alumnos en la generalización y la formalización algebraica para obtener una línea didáctica efectiva en el aprendizaje del álgebra.

Bibliografía

- Ainley, J.; Bills, L.; Wilson, K. (2003). Designing tasks for purposeful algebra. *Proceedings of the Third Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional*, in Bellaria, Italy. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_cerme3.html

- Aczel, J. (1998). Learning algebraic strategies using a computerised balance model, in A. Olivier; K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) International Conference*, 2, 1-8.

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Graó.

- Alsina, C. (2004). *Si Enrique VIII tuvo seis esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? el realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes*. Ponencia para el XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática en el Nivel Medio. [Soporte audiovisual] obtenido el 2 de Noviembre de 2006 en http://www.iberomat.uji.es/carpeta/ponenciaspres.htm

- Amón, J. (1987). *Estadística para Psicólogos*, vol. 1. Madrid: Pirámide.

- Andradas, C.; Zuazua, E (?). *Informe sobre la investigación matemática en el periodo 1990-1999*. [Versión electrónica] obtenido el 11 de julio de 2004 en http://defalla.upc.es/umi/report.pdf

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 14 (3), 24-35.

- Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno*, 44, 59-75.

- Aron, A.; Aron, E. N. (2001). *Estadística para psicología.* Buenos Aires: Pearson Education.

- Arzarello, F.; Bazzini, L.; Chiappini, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: Towards a socio-cultural theory and practice, in L. Meira; D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 1, 199-206.

- Arzarello, F.; Bazzini, L.; Chiappini, G. (2000). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking, in Sutherland, R. *Perpectives on School Algebra*. Hingham, MA, USA: Kluwer Academic Publishers.

- Balacheff, N.; Fischbein, F. (1990). Future perspectives for research in the psychology of Mathematics Education, in Nesher, P. y Killpatrick, J. (eds.), *Mathematicas and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Bazzini, L.; Boero, P.; Garuti, R. (2001). Algebric expressions and the activation of senses. *Proceedings of the Second Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional*, in Mariánské Lázne, Czech Republic . [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://ermeweb.free.fr/doc/CERME2_proceedings

- Balbuena, L. (2000). La enseñanza de las Matemáticas en España, en Díaz J.I. et al. (eds.). *Jornada Matemática*. Madrid: Cogreso de los Diputados.

- Ball, L.; Pierce, R.; Stacey, K. (2003). Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS, in N. A. Pateman; B. J. Dougherty; J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 15-22.

- Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor, Ministerio de Educación y Ciencia.

- Bergsten, C. (1998). From sense to symbol sense. *Proceedings of the First Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Osnabrueck-Haus Ohrbeck, Germany. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1- proceedings.html

- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós, D. L.

- Blanco, L. J. (2001). La Educación Matemática en los Planes de Estudio de Formación de Profesores de Primaria. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 4 (2), 411-414. Madrid.

- Blanco, L. J. (2002). Posición del Área de conocimiento Didáctica de la Matemática ante la Formación del Profesorado de Matemáticas en Educación Secundaria. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 43, 173-184. Universidad de Zaragoza.

- Bloedy-Vinner, H. (2000). Beyond Unknows and Variables- Parametres in High School Algebra, in Sutherland, R. et al. (eds.) *Perspectives on School Algebra*. Hingham, MA. USA: Kluwer Academic Publishers.

- Boyer, C. B. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

- Bolea P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

- Bolea, P.; Bosch, M.; Gascón, J. (1998). The role of algebraisation in the study of a mathematical organisation. *Proceedings of the First Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Osnabrueck - Haus Ohrbeck, Germany. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

- Bolea, P.; Bosch, M.; Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 21 (3), 247-304.

- Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors.* NFER-Nelson. Windsor.

- Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra, in A.F. Coxford and A.P. Shulte (Eds.) *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Brizuela,B.M.; Schliemann, A.D. (2003). Fourth graders solving equations. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.*, in Honolulu, HI. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.earlyalgebra.terc.edu/publications.htm

- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, *Trabajos de Matemática*, 19 (versión castellana 1993).

- Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique des mathématiques pour un professeur de collège. *Petit X,* 21, 47-68.

- Brunet, P. (1976). Ojeadas sobre el pensamiento matemático de newton, en Le Lionnais, F. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires: EUDEBA.

- Brunschvicg, L. (1976). Doble aspecto de la filosofía matemática, en Le Lionnais, F. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires: EUDEBA.

- Bujanda, M.P. (1991). Pasado, presente y futuro de la especialidad de Metodología y Didáctica de las Matemáticas, en Bujanda, M.P. et al. *Debate sobre la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Centro Madrileño de Investigaciones Pedagógicas.

- Callejo, M.L. (1991) La investigación en los problemas de Educación Matemática, en Bujanda, M.P. et al. *Debate sobre la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Centro Madrileño de Investigaciones Pedagógicas.

- Carraher, D.; Schliemann, A.D. (2002). Empirical and Logical truth in Early Algebra activities: From guessing amounts to representing variables. *Symposium paper National Council of Teachers of Mathematics 2002 Research Presession*, in Las Vegas, Nevada. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.earlyalgebra.terc.edu/publications.htm

- Castelnuovo, E.; Barra, M. (1983). *La matematica nella realta*. Boringhieri, Torino.

- Castelnuovo, E. (2004). *Ideas de matemática*. Madrid: SUMA.

- Cerulli M. (2002), Introducing pupils to theoretical thinking: the case of algebra. *Proceedings of the Second Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Mariánské Lázne, Czech Republic . [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://ermeweb.free.fr/doc/CERME2_proceedings

- Cedillo, T. E. A. (1997). Algebra as a language in use: A study with 11-12 year olds using graphing calculators, in E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 2, 137-144.

- Cerulli M.; Mariotti M.A. (2002), L'Algebrista: un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. *Sciences et techniques éducatives*, 9 (1-2). Lavoisier.

- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit X,* 5, 51-94

- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. *Petit X,* 19, 43-72.

- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

- Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Cuadernos de Educación (I. C. E. Universitat Barcelona), Horsori.

- Chomsky, N.; Piaget, J. (1983). *Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje: el debate entre Jean Piaget*, Noam Chomsky. Piattelli-Palmarini, M. (ed.). Barcelona: Crítica.

- Clement, J., Lochhead, J.; Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, 88, 287-290.

- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Cohors-Fresenborg, E. (2001). Individual differences in the mental representation of term rewriting. *Proceedings of the Second Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Mariánské Lázne, Czech Republic. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://ermeweb.free.fr/doc/CERME2_proceedings

- Cortés, A.; Vergnaud, G.; Kavafian, N. (1990). From Arithmetic to Algebra : negociating a Jump in the learning process. *Proceedings of the l4th PME International Conference*, 2, 27-34.

- Collis, K. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

- Courant, R.; Robbins, H. (1967). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid: Aguilar.

- Davis, P. J.; Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Labor, Ministerio de Educación y Ciencia.

- Davydov, V. V. (1990): Types of Generalisation in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula, en J. Kilpatrick (ed.). *Soviet Studies in Mathematics (2)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?*. Madrid: Alianza.

- Delucchi, K. L. (1983). *The use and misuse of chi-square:Lewis and Burke revisited.* Psychological Bulletin, 94, 166-176. Washinton D, C. : American Psychological Association.

- Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo.* Barcelona: Paidós.

- Diennes, Z. P. (1971). *Construcción de las matemáticas*. Vicens Vives, Madrid.

- Díez, M. (1995). *Sobre la simbolización en el álgebra. Aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en educación secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. These d'Etat, Université de Paris VII. [También en: Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2), 5-31, 1986]

- Drijvers, P. (2001). Reaction to "A meta study on IC technologies in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration", in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 1, 123-130.

- Drouhard, J.P.; Léonard, F.; Maurel, M.; Pécal, M.; Sackur, C. (1995). Calculateurs aveugles, dénotation des écritures algébriques et entretiens "faire faux". *Journal de la commission inter-IREM didactique*, IREM de Clermont-Ferrand.
- Dugas, R. (1976). La matemática, objeto de cultura y herramienta de trabajo, en Le Lionnais, F. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires: EUDEBA.
- Eccles, J. (1992). *La evolución del cerebro: creación de la conciencia*. Barcelona: Labor.
- Eco, U. (1994). *Signo.* Barcelona: Labor.
- Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno*, 23, 9-28.
- Escudero Escorza, T. (1991). *Análisis de perfiles de madurez en las Áreas científica, lingüística y matemática al término de la E.G.B.* Catálogo de investigaciones educativas del CIDE.
- Falcade, R. (2003). Instruments of semiotic mediation in Cabri for the notion of function. *Proceedings of the Third Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Bellaria, Italy. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_ cerme3.html
- Falcade, R.; Mariotti, M.A.; Laborde, C. (2004). *Towards a definition of function*. Proceeding of the 28th PME Internaional Conference, in Norway.
- Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (2), 160-166.
- Filloy, E.; Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.
- Fortuny, J. M. (1990). Información y control en Educación Matemática, en Llinares; Sánchez (eds.). *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.
- Fortuny, J. M.; Meavilla, V. (1998). *Análisis de la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental*. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.blues.uab.es/~ipdm4/pCoboU/MEAVILLA.doc

- Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- Garrett, H. E. (1976). *Estadística en Psicología y Educación*. Buenos Aires: Paidós.
- Gattegno, C. (1964). La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático, en Gattegno, C. el al. *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.
- Gattegno, C. (1968). La pedagogía de las matemáticas, en Piaget et al. *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.
- Germain, P. (1976). Las grandes líneas de la evolución de las matemáticas, en Le Lionnais, F. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires: EUDEBA.
- Goodson-Espy, T. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: Transitions from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 36 (3), 219-245. Springer Netherlands.
- Gómez, P.; Gómez, C. (1995). *Sistemas formales, informalmente*. México, D.F. :Grupo Editorial Iberoamérica
- González, F.E. (1990). Sobre la situación y el significado de la Didáctica. *Revista Complutense de Educación,* 1 (1), 31-54. Universidad Complutense de Madrid.
- González, F.E. (2001). Generación del conocimiento y actividad educativa. *Revista Complutense de Educación,* 12 (2), 427- 484. Universidad Complutense de Madrid.
- González, F.E.; Díez, M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. *Revista Complutense de Educación,* 13 (1), 281-302. Universidad Complutense de Madrid.
- Guzmán, M. De (1996). Madurez de la investigación en educación matemática. El papel del ICMI. En L. Puig; J. Calderón (Eds.), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: CIDE.
- Guzmán, M. De (2000). El sentido de la educación matemática y la orientación actual de nuestro sistema educativo, en Díaz J.I. et al. (eds.). *Jornada Matemática*. Madrid: Cogreso de los Diputados.
- Guzman, M. De (2000). Matemáticas y estructura de la naturaleza, *Ábaco,* vol. 25-26.

- Guzmán, M. De (2001). Tendencias actuales en Educación Matemática. *Sigma,* 19, 5-25. Gobierno Vasco.

- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa Calpe.

- Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 40 (1), 71-90. Springer Netherlands.

- Hegedus, S. J.; Kaput, J. (2003). The effect of SimCalc connected classrooms on students? algebraic thinking, in N. A. Pateman; B. J. Dougherty; J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 47-54.

- Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra, in S. Wagner; C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Herscovics, N.; Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

- Hershkowitz, R.; Kieran, C. (2001). Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: An experience with graphing calculators, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 1, 96-107.

- Hiebert, J.; Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis, en Hiebert, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* New York: Lawrence Erlbaum Associates.

- INCE (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: un nuevo marco para la evaluación*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

- INCE (2001). *Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000: datos básicos.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

- INCE (2002). Sistema Estatal de Indicadores de la Educación 2002. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

- INECSE(2003). *Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000: informe final.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- INECSE (2004a). *Evaluación de la Educación Primaria 2003 : datos básicos.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- INECSE (2004b). *Sistema Estatal de Indicadores de la Educación* 2004. [Versión electrónica] obtenido el 17 de Noviembre de 2006 en http://www.ince.mec.es

- INECSE (2004c). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España.* [Versión electrónica] obtenido el 9 de Noviembre de 2006 en http://www.ince.mec.es

- INECSE (2005a). *Evaluación de la Educación Primaria 2003.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- INECSE (2005b). *Pisa 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- Joseph, G.G. (1996). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid: Pirámide.

- Kamii, C.; De Vries, R. (1983). *El conocimiento físico en la edad preescolar. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Siglo XXI

- Kamii, C. (1988). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid: Visor.

- Kamii, C.; De Vries, R. (1985). *La teoría de Piaget y la educación preescolar*. Madrid: Visor.

- Kaput, J. J. (1995). Long term algebra reform: Democratizing access to big ideas, in C. Lacampagne, J. Kaput; W. Blair (Eds.) *The algebra initiative colloquium* (1, 33-49).

Washington, DC: Department of Education, Office of Research. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.eric.ed.gov/sitemap/html_0900000b80148 acc.html

- Kaput, J.; Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I, in H. Chick, K. Stacey; J. Vincent; J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (1, 344-350). The University of Melbourne, Australia.

- Kaput, J.; Hegedus, S. J. (2002). Exploiting classroom connectivity by aggregating student constructions to create new learning opportunities, in A. D. Cockburn; E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 3, 177-184.

- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

- Kieran, C.; Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7 (3), 229- 240.

- Kilpatrick, J.; Sierpinska, A. (1993). What is research in mathematics education and what are its results?. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13 (1.2), 191-204.

- Kilpatrick, J.; Swafford, J.; Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

- Kline, M. (1974). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza.

- Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*. Madrid: Siglo veintiuno.

- Küchemann, D. (1981). Algebra, en Hart K. (ed.). *Children's understanding of Mathematics 11-16.* London: Jonh Murray.

- Lappan, G.; Fey, J. T.; Fitzgerald, W.; Friel, S. N.; Phillips, E. D. (2002). *Connected Mathematics series.* Glenview, IL: Prentice Hall.

- Lee, L. (1996). An initation into algebraic culture through generalitation activities, in Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (eds). *Approaches to algebra*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

- Lee, L.; Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics,* 20 (1), 41-54. Springer Netherlands.

- Linchevski, L.; Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics,* 40 (2), 173-196.

- Llinares, S.; Sánchez, V. (1994). Matemáticas, profesores y aprendices, en Gª Hoz, V. (dir.). *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*. Madrid: Rialp S.A.

- López Puig, A. (1997). *Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas: un enfoque constructivista*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Fundación Colegio Los Pinos.

- López Rupérez, F. (1984). *Análisis de relaciones entre factores psicológicos, factores socio-económicos y rendimiento escolar sobre una muestra de alumnos de Bachillerato*. Catálogo de investigaciones educativas del CIDE.

- Luelmo, M. J. (2000). Retos actuales de la Educación Matemática en Secundaria, en Díaz J.I. et al. (eds.). *Jornada Matemática*. Madrid: Congreso de los Diputados.

- MacGregor, M. (2001). Does learning algebra benefit most people?, in H. Chick; K. Stacey; J. Vincent; J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (2, 405-411). University of Melbourne, Australia.

- MacGregor, M.; Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), 217-232.

- Mahoney, M. (1980) The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century, in S. Gankroger (Ed.) *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*. Sussex, England: Harvester Press.

- Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en*

Ciencias de la Educación, 13, 105-132 [Versión electrónica] obtenido el 2 de Enero de 2007 en http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6. htm

- Malisani, E. (2002). The notion of variable in different semiotic contexts. *Proceedings of the International Conference The Humanistic Renaissance in Mathematics Education*, in Palermo. [Versión electrónica] obtenido el 2 de Enero de 2007 en http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ 21project. htm
- Margilues, S. (1993). Algebraic A-S. *Mathematics Teacher*, 86, 40-41.
- Mariotti M.A.; Cerulli M. (2001). Semiotic mediation for algebra teaching and learning, *Proceedings of the 25th PME Internarional Conference*, The Nederlands.
- Martínez, M. (1991). Los orígenes del método axiomático-deductivo en la matemática griega, en *Seminario de Historia de la Matemática I*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra, in Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (eds), *Approaches to algebra*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Labor, Ministerio de Educación y Ciencia.
- Meyerson, E. (1931). *Du cheminement de la pensée*. Paris: Librairie Félix Alcan.
- Mialaret, G. (1986). *Las matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Madrid: Visor.
- Mora, P. (2000). Aproximación a la inteligencia colectiva. *Espéculo*, 16. Universidad Complutense de Madrid. [Versión electrónica] obtenido el 4 de febrero de 2007 en http://www.ucm.es/info/especulo/numero16/int_cole.html
- Mutschler, B. J. (2005). Early algebra- Processes and concepts of fourth graders solving algebraic problems. *Proceedings of the Fourth Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Sant Feliu de Guíxols, Spain. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://cerme4.crm.es/Papers %20definitius/6/wg6 listofpapers.htm

- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM,1991). *Professional Standards for Mathematics Teachers.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- National Research Council (2001). *Knowing and learning mathematics for teaching: Proceedings of a workshop*. Washington, DC: National Academy Press.

- Nesher, P.; Greeno, J.J.; Riley, M.S. (1982). The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

- Norton, S.; Cooper, T. J. (2001). Students' responses to a new generation ILS algebra tutor, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 3, 439-446.

- Novotná, J.; Hershkovitz, S.; Nesher, P. (2000). Cognitive factors affecting problem solving at the pre-algebraic level. *Proceedings of the Third Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional*, in Bellaria, Italy. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_cerme3.html

- Novotná, J.; Sarrazy, B. (2005). Model of a professor's didactical action in mathematics education Professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems. *Proceedings of the Fourth Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional*, in Sant Feliu de Guíxols, Spain. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://cerme4.crm.es/Papers %20definitius/6/wg6listofpapers.htm

- Nuffield Mathematics Project (1978). *Mathematics: from Primary to Secondary*. Jonh Murray, Londres.

- Oakes, M. (1982). *Intuiting strength of association from a correlation coefficient*. British Journal of Psychollogy, 73, 51-56. Leicester : British Psychological Society

- OCDE (2004a). *Marcos teóricos de Pisa 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- OCDE (2004b). *El aprendizaje para el mundo de mañana: primeros resultados del Programa PISA 2003*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata, Ministerio de Educación y Ciencia.

- Panizza, M.; Sadovsky, P.; Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 453-461. Universidad de Barcelona.

- Panizza M.; Sadovsky P.; Sessa C. (1995). *Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha*, trabajo presentado en la Reunión de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina, Río Cuarto, octubre de 1995. [Versión electrónica] obtenido el 17 de noviembre de 2007 en http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/mat_inv.htm

- Parish, C. R.; Ludwig, H. J. (1994). Language, intellectual structures and common mathematical errors: a call for research. *School Science and Mathematics*, 94(5), 235- 238.

- Peirce, C. S. (1967). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Charles Hartshorne and Paul Weiss (eds.). Cambridge,Mass.: Harvard University Press.

- Peirce, C. S. (1986). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Nueva visión.

- Peirce, C. S. (1988). *Escritos lógicos*. Madrid : Alianza, D.L.

- Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño.* México: Fondo de Cultura Económica.

- Piaget, J. et al. (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Universidad.

- Piaget, J.; García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: s.XXI.

- Piaget, J. (1987). *Introducción a la epistemología genética. Vol.I. El pensamiento matemático*. México: Biblioteca de Psicología Evolutiva, Paidós.

- Poincaré, H. (1964). *El valor de la ciencia*. Madrid: Espasa Calpe.
- Puig Adam, P. (1964). Modelos preparados y modelos hechos, en *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.
- Puig, L.; Calderón, P. (1996). *Investigación y didáctica de la matemática.* Madrid: Centro de Publicaciones del MEC.
- Polya, G. (1987). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization, in Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (eds), *Approaches to algebra*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning,* 5 (1), 37-70. Mahwah, NJ : L. Erlbaum Associates
- Radford, L.; Bardini, C.; Sabena, C. (2005). Perceptual semiosis and semiosis and the microgenesis of algebraic generalitations. *Proceedings of the Fourth Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Sant Feliu de Guíxols, Spain. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://cerme4.crm.es/Papers %20 definitius/6/wg6listofpapers.htm
- Rogers, L. (2001). From icons to symbols: reflections on the historical development of the languaje of algebra. *Proceedings of the Second Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Mariánské Lázne, Czech Republic. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://ermeweb.free.fr/doc/CERME2_proceedings
- RSME (2002). *Debate sobre la enseñanza de las matemáticas en España*. Documento básico elaborado por la Comisión de Educación de la RSME. [Versión electrónica] obtenido el 12 de Noviembre de 2006 en http://www.rsme.es/comis/educ/comision.pdf
- Rubia, F.J. (2000). *El cerebro nos engaña*. Bilbao: Temas de hoy.
- Russell, B. (1967). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa Calpe.
- Russell, B. (1968). *El conocimiento humano: su alcance y sus límites.* Madrid: Taurus.

- Russell, B. (1981). *Lógica y conocimiento*. Madrid: Taurus.
- Russell, B. (1983). *Significado y verdad.* Barcelona: Ariel.
- Russell, B.(1988). *Introducción a la filosofía matemática*. Barcelona: Paidós.
- Sánchez, M. V. (2000). La enseñanza de la Matemáticas y la formación de los profesores, en Díaz J.I. et al. (eds.). *Jornada Matemática*. Madrid: Cogreso de los Diputados.
- Santaló, L. A. (1994). La enseñanza de la matemática en la educación intermedia, en Gª Hoz, V. (dir.). *La enseñanza de la matemática en la educación intermedia*. Madrid: Rialp S.A.
- Schliemann, A.D.; Carraher, D.; Brizuela, B.; Earnest, D.; Goodrow, A.; Lara-Roth, S.; Peled, I. (2003). Algebra in Elementary School. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* in Honolulu, HI. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.earlyalgebra.terc.edu/publications.htm
- Schwarz, B.; Bruckheimer, M. (1988). Representations of functions and analogies, in A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the 12th PME International Conference*, 2, 552-559.
- Schwarz, B.; Hershkowitz, R.; Dreyfus, T. (2001). Emerging Knowledge structures in and with algebra. *Proceedings of the Second Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Mariánské Lázne, Czech Republic. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://ermeweb.free.fr/doc/CERME2_proceedings
- Searle, J.R. (2000). *El misterio de la conciencia*. Barcelona: Paidós.
- Seeley, C. (1993). *Algebra for all. En Algebra for the 21st century*. Proceedings of the August 1992 conference: National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.
- Servais, W. (1964). Concreto- Abstracto, en Gattegno, C. et al.: *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y Perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

- Sinitsky, I. (2003). Pre-algebra combinatorial problems and algorithms in Primary School Mathematics. *Proceedings of the Third Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional*, in Bellaria, Italy. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_cerme3.html

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

- Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

- Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M.; Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

- Sweet, A. (1972). Children Need Talk. *Mathematics Teaching,* 58, 40-43.

- Tabach, M.; Hershkowitz, R. (2002). Construction of knowledge and its consolidation: A case study from the early-algebra classroom, in A. D. Cockburn; E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference*, 4, 265-272.

- Tabach, M.; Friedlander, A. (2003). The role of context in learning beginning algebra. *Proceedings of the Third Conference of European Society for Research In Mathematics Educacional,* in Bellaria, Italy. [Versión electrónica] obtenido el 2 de enero de 2007 en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_cerme3.html

- Trigueros, M.; Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable, in Selden, A.; Dubinsky, E.; Harel, G.; Hitt, F. (eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education*, *V,* 1-29.

- Usiskin, Z. (1988) Conceptions of school algebra and uses of variables, en Coxford A.F. (ed.). *The ideas of Algebra K-12 Yearbook*. Reston. Virginia. National Council of Teachers of Mathematics.

- Vázquez Alonso, A. (2000). *Análisis de datos del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) desde la perspectiva del sistema educativo español.* Catálogo de investigaciones educativas del CIDE.

- Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level, in A. Bell; B. Low; J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research & Practice in Mathematical Education*. University of Nottingham, UK: Shell Center for Mathematical Education.

- Vergnaud, G., Cortés, A.; Favre Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sevres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-279.

- Xambó, S. (2000). El desarrollo de la sociedad y las Matemáticas en la Universidad, en Díaz J.I. et al. (eds.). *Jornada Matemática*. Madrid: Cogreso de los Diputados.

- Yerushalmy, M. (1997). Emergence for new schemes for solving algebra word problems: The impact of technology and the function approach, in E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 1, 165-172.

- Yerushalmy, M.; Bohr, M. (1995). Between equations and solutions: An odyssey in 3D, in L. Meira; D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 2, 218-225.

Anexos

Anexo 1: Contenidos curriculares de los cursos estudiados

Extracto del Anexo del Real Decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria (BOE de 13 de septiembre de 1991).

OBJETIVOS GENERALES

La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Primaria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades de:

1. Utilizar el conocimiento matemático para interpretar, valorar y producir informaciones y mensajes sobre fenómenos conocidos.

2. Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante formas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes.

3. Utilizar instrumentos sencillos de cálculo y medida decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.

4. Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación espacial para la resolución de problemas sencillos, modificándolas si fuera necesario.

5. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción en dicho entorno.

6. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

7. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Identificar en la vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión y resolución de dichos problemas.

CONTENIDOS

I. NÚMEROS Y OPERACIONES

Conceptos

1. Números naturales, fraccionarios y decimales.

   a) Necesidad y funciones: contar, medir, ordenar, expresar cantidades o particiones, etc.

   b) Relaciones entre números (mayor que, menor que, igual a, diferente de, mayor o igual que, menor o igual que, aproximadamente igual) y símbolos para expresarlas.

   c) Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales.

   d) El tanto por ciento de una cantidad.

2. Números positivos y negativos.

3. Números cardinales y ordinales.

4. Sistema de Numeración Decimal.

   a) Base, valor de posición y reglas de formación de los números.

5. Numeración romana.

6. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

   a) Situaciones en las que intervienen estas operaciones.

   b) La identificación de las operaciones inversas (suma y resta; multiplicación y división).

   c) Cuadrados y cubos.

7. Algoritmos de las operaciones.

8. Reglas de uso de la calculadora de cuatro operaciones.

9. Correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica.

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

2. Comparación entre números naturales, decimales (de dos cifras decimales) y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros.

3. Utilización del Sistema de Numeración Decimal.

   a) Lectura y escritura de números en diferentes contextos.

   b) Composición y descomposición de números.

4. lnterpretación, cálculo y comparación de tantos por ciento.

5. Formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números y construcción de series y clasificaciones de acuerdo con una regla establecida.

6. Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, etc.).

7. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.

8. Representación matemática de un situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.

9. Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones.

10. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.

11. Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.

12. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones sencillas.

13. Utilización de la composición y descomposición de números para elaborar estrategias de cálculo mental.

    a) Suma, resta, multiplicación y división con números de dos cifras en casos sencillos.

    b) Porcentajes sencillos.

14. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.

15. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla.

Actitudes

1. Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.

2. Sensibilidad e interés por las internaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.

3. Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración.

4. Interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.

5. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.

6. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

7. Confianza en el uso de la calculadora.

8. Perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.

II. LA MEDIDA
Conceptos

1. Necesidad y funciones de la medición.
   a) Identificación de magnitudes.
   b) Comparación de magnitudes.

2. Unidad de referencia. Unidades no convencionales.

3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal.
   a) Longitud.
   b) Superficie.
   c) Capacidad.
   d) Masa.

4. Las unidades de medida de uso local.

5. Las unidades de medida de tiempo.

6. La unidad de medida de ángulos: el grado.

7. Unidades monetarias.

Procedimientos

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.

2. Utilización de instrumentos de medida convencionales y construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones.

3. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones cotidianas.

4. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición.

5. Transformación de las unidades de medida de la misma magnitud.

6. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

7. Utilización del sistema monetario aplicando las equivalencias y operaciones correspondientes.

Actitudes

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimación en la vida cotidiana.

2. Interés por utilizar con cuidado diferentes instrumentos de medida y emplear unidades adecuadas.

3. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.

4. Curiosidad e interés por averiguar la medida de algunos objetos y tiempos familiares.

5. Valoración del Sistema Métrico Decimal como sistema de medida aceptado internacionalmente.

6. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

III. FORMAS GEOMÉTRICAS Y SITUACIÓN EN EL ESPACIO

Conceptos

1. Puntos y sistemas de referencia.
    a) La situación de un objeto en el espacio.
    b) Distancias, desplazamientos, ángulos y giros como elementos de referencia.
    c) Sistemas de coordenadas cartesianas.
2. Los elementos geométricos.
    a) Relaciones entre elementos geométricos: paralelismo y perpendicularidad.
3. Formas planas.
    a) Las figuras y sus elementos.
    b) Relaciones entre figuras.
    c) Regularidades y simetrías.
4. Formas espaciales.
    a) Los cuerpos geométricos y sus elementos
    b) Relaciones entre cuerpos geométricos.
    c) Regularidades y simetrías.
5. La representación elemental del espacio.
    a) Planos, mapas, maquetas.
    b) Escalas: doble, mitad, triple, tercio, etc.
    c) Escalas gráficas.
6. Los instrumentos de dibujo (regla, compás, escuadra, cartabón, círculo graduado).

Procedimientos

1. Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio con relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.

2. Representación y lectura de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas.
3. Elaboración, interpretación y descripción verbal de croquis e itinerarios.
4. Lectura, interpretación y construcción de planos y maquetas utilizando una escala gráfica.
5. Lectura, interpretación y reproducción de mapas.
6. Utilización de los instrumentos de dibujo habituales para la construcción y exploración de formas geométricas.
7. Utilización adecuada del vocabulario geométrico básico en la descripción de objetos familiares.
8. Construcción de formas geométricas a partir de datos previamente establecidos.
9. Comparación y clasificación de figuras planas y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
10. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
11. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.
12. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones y estimaciones de perímetros y áreas.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad de los sistemas de referencia y de la representación espacial en actividades cotidianas.
2. Sensibilidad y gusto por la elaboración y por la presentación cuidadosa de las construcciones geométricas.
3. Precisión y cuidado en el uso de instrumentos de dibujo y disposición favorable para la búsqueda de instrumentos alternativos.
4. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas relacionas con la organización y utilización del espacio.

5. Gusto por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.

IV. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Conceptos

1. La representación gráfica.
   a) Características y funciones (presentación global de la información, lectura rápida, realce de sus aspectos más importantes, etc).
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficas estadísticas: bloques de barras, pictogramas, diagramas lineales, etc.
4. La media aritmética y la moda.
5. Carácter aleatorio de una experiencia.

Procedimientos

1. Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficas sencillas relativas a fenómenos familiares.
2. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
3. Interpretación de tablas numéricas y alfanuméricas (de operaciones, horarios, precios, facturas, etc.) presentes en el entorno habitual.
4. Elaboración y utilización de códigos numéricos y alfanuméricos para representar objetos, situaciones, acontecimientos y acciones.
5. Utilización de estrategias eficaces de recuento de datos.
6. Elaboración de tablas de frecuencia a partir de los datos obtenidos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares.
7. Elaboración de gráficas estadísticas con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.

8. Obtención e interpretación de la media aritmética y de la moda en situaciones familiares concretas.

9. Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso.

Actitudes

1. Disposición favorable para la interpretación y producción de informaciones y mensajes que utilizan una forma gráfica de representación.

2. Tendencia a explorar todos los elementos significativos de una representación gráfica evitando interpretaciones parciales y precipitadas.

3. Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.

4. Apreciación de la limpieza, el orden y la precisión en la elaboración y presentación de gráficas y tablas.

5. Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

6. Sensibilidad por la precisión y veracidad en el uso de las técnicas elementales de recogida y recuento de datos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución.
   Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad del alumno o la alumna en la resolución de problemas, atendiendo al proceso que ha seguido. Se trata de verificar que el alumnado trata de resolver un problema de forma lógica y reflexiva.

2. Resolver problemas sencillos del entorno aplicando las cuatro operaciones con números naturales y utilizando estrategias personales de resolución.

Con este criterio se pretende evaluar que el alumnado sabe seleccionar y aplicar debidamente las operaciones de cálculo en situaciones reales. Se deberá atender a que sean capaces de transferir los aprendizajes sobre los problemas propuestos en el aula a situaciones fuera de ella.

3. Leer, escribir y ordenar números naturales y decimales, interpretando el valor de cada una de sus cifras (hasta las centésimas), y realizar operaciones sencillas con estos números.
   Con este criterio se pretende comprobar que el alumnado maneja los números naturales y decimales; igualmente, se trata de ver que sabe operar con estos números y que, en situaciones de la vida cotidiana, interpreta su valor.

4. Realizar cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos (algoritmos, uso de la calculadora, cálculo mental y tanteo), utilizando el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal.
   Este criterio trata de comprobar que los alumnos y las alumnas conocen las relaciones existentes en el sistema de numeración y que realizan cálculos numéricos eligiendo alguno de los diferentes procedimientos. Igualmente, se pretende detectar que saben usar la calculadora de cuatro operaciones.

5. Realizar estimaciones y mediciones escogiendo entre las unidades e instrumentos de medida más usuales, los que se ajusten mejor al tamaño y naturaleza del objeto a medir. Con este criterio se trata de que alumnos y alumnas demuestren su conocimiento sobre las unidades más usuales del Sistema Métrico Decimal y sobre los instrumentos de medida más comunes. También se pretende detectar si saben escoger los más pertinentes en cada caso, y si saben estimar la medida de magnitudes de longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo. En cuanto a las estimaciones, se pretende que hagan previsiones razonables.

6. Expresar con precisión medidas de longitud, superficie, masa, capacidad y tiempo, utilizando los múltiplos y submúltiplos usuales y convirtiendo unas unidades en otras cuando sea necesario.
   Con este criterio se pretende detectar que alumnos y alumnas saben utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, que saben convertir unas unidades en otras (de la misma magnitud), y que los resultados de las mediciones que realizan los expresan en las unidades de medida más adecuadas y utilizadas.

7. Realizar e interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano, maqueta), tomando como referencia elementos familiares y estableciendo relaciones entre ellos.
   Este criterio pretende evaluar el desarrollo de las capacidades espaciales topológicas en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y ejes de coordenadas. La evaluación deberá llevarse a cabo mediante representaciones de espacios conocidos o mediante juegos.

8. Reconocer y describir formas y cuerpos geométricos del entorno próximo, clasificarlos y dar razones del modo de clasificación.
   Este criterio pretende comprobar que el alumno o la alumna conoce algunas propiedades básicas de los cuerpos y formas geométricas, que elige alguna de esas propiedades para clasificarlos y que explica y justifica la elección.

9. Utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.
   En este criterio es importante detectar que los alumnos han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información.

10. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
    Este criterio trata de comprobar que el alumno o la alumna es capaz de recoger una información que se pueda cuantificar, y saber utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica, tablas de datos, bloques de diagramas lineales, etcétera, y que entienda y comunique la información así expresada.

11. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado.
    Se trata de comprobar que los alumnos empiezan a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en su experiencia.

12. Expresar de forma ordenada y clara los datos y las operaciones realizadas en la resolución de problemas sencillos.
    Este criterio trata de comprobar que el alumno o la alumna comprende la importancia que el orden y la claridad tienen en la presentación de los datos de un problema, para

la búsqueda de una buena solución, para detectar los posibles errores y para explicar el razonamiento seguido. Igualmente, trata de verificar que comprende la importancia que tiene el cuidado en la disposición correcta de las cifras al realizar los algoritmos de las operaciones propuestas.

13. Perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas en la formulación y la resolución de un problema.
    Se trata de ver si el alumno valora la precisión en los datos que recoge y en los resultados que obtiene y si persiste en su búsqueda, en relación con la medida de las distintas magnitudes, con los datos recogidos para hacer una representación gráfica y con la lectura de representaciones.

Extracto del Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria (BOE de 16 de enero de 2001).

OBJETIVOS

1. Utilizar las formas de pensamiento lógico en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.
3. Usar correctamente el lenguaje matemático con las fracciones y los decimales para recibir y producir el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa.
4. Utilizar con soltura y sentido crítico los distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos) de forma que supongan una ayuda en el aprendizaje y en las aplicaciones instrumentales de las Matemáticas.
5. Resolver problemas matemáticos utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la intuición hasta los algoritmos.

6. Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea.

7. Emplear los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para obtener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.

8. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que el alumno debe adquirir a lo largo de la educación secundaria obligatoria.

CONTENIDOS

Primer curso

1. Aritmética y álgebra. Números naturales. El sistema de numeración decimal. Divisibilidad. Fracciones y decimales. Operaciones elementales. Redondeos. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas exactas. Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal. El euro. Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes.

2. Geometría. Elementos básicos de la geometría del plano. Descripción, construcción, clasificación y propiedades características de las figuras planas elementales. Cálculo de áreas y perímetros de las figuras planas elementales.

3. Tablas y gráficas. Construcción e interpretación de tablas de valores. Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.

Segundo curso

1. Aritmética y álgebra. Relación de divisibilidad. M.C.D. y m.c.m. de dos números naturales. Operaciones elementales con fracciones, decimales y números enteros. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Raíces cuadradas aproximadas. Medida del tiempo y los ángulos. Precisión y estimación en las medidas. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Porcentajes. Interpretación de fórmulas y expresiones algebraicas. Ecuaciones de primer grado.

2. Geometría. Elementos básicos de la geometría del espacio. Descripción y propiedades características de los cuerpos geométricos elementales. Cálculo de áreas y volúmenes. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza. Teorema de Tales. Razón de semejanza. Escalas.

3. Funciones y gráficas. Coordenadas cartesianas. Tablas de valores y gráficas cartesianas. Relaciones funcionales entre magnitudes directamente proporcionales. Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.

4. Estadística. Estadística unidimensional. Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias y diagramas de barras. Media aritmética y moda.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Utilizar de forma adecuada los números enteros, información en actividades relacionadas con la vida cotidiana.

2. Elegir, al resolver un determinado problema, el tipo de cálculo adecuado (mental o manual) y dar significado a las operaciones y resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado.

3. Estimar y calcular expresiones numéricas sencillas de números enteros y fraccionarios (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente natural que involucren, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicando correctamente las reglas de prioridad y haciendo un uso adecuado de signos y paréntesis.

4. Utilizar las aproximaciones numéricas, por defecto y por exceso, eligiéndolas y valorándolas de forma conveniente en la resolución de problemas, desde la toma de datos hasta la solución.

5. Resolver problemas sencillos utilizando métodos numéricos, gráficos o algebraicos, cuando se basen en la aplicación de fórmulas conocidas o en el planteamiento y resolución de ecuaciones sencillas de primer grado.

6. Utilizar las unidades angulares, temporales, monetarias y del sistema métrico decimal para estimar y efectuar medidas, directas e indirectas, en actividades relacionadas con la vida cotidiana o en la resolución de problemas y valorar convenientemente el grado de precisión.

7. Utilizar los procedimientos básicos de la proporcionalidad numérica (como la regla de tres o el cálculo de porcentajes) para obtener cantidades proporcionales a otras, en un contexto de resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana.

8. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos elementales y sus configuraciones geométricas a través de ilustraciones, de ejemplos tomados de la vida real o en un contexto de resolución de problemas geométricos.

9. Emplear el Teorema de Pitágoras y las fórmulas adecuadas para obtener longitudes, áreas y volúmenes de las figuras planas y los cuerpos elementales, en un contexto de resolución de problemas geométricos.

10. Utilizar el Teorema de Tales y los criterios de semejanza para interpretar relaciones de proporcionalidad geométrica entre segmentos y figuras planas y para construir triángulos o cuadriláteros semejantes a otros, en una razón dada.

11. Interpretar las dimensiones reales de figuras representadas en mapas o planos, haciendo un uso adecuado de las escalas, numéricas o gráficas.

12. Representar e interpretar puntos y gráficas cartesianas de relaciones funcionales sencillas, basadas en la proporcionalidad directa, que vengan dadas a través de tablas de valores e intercambiar información entre tablas de valores y gráficas.

13. Obtener información práctica de gráficas sencillas (de trazo continuo) en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos naturales y la vida cotidiana.

14. Obtener e interpretar la tabla de frecuencias y el diagrama de barras así como la moda y la media aritmética de una distribución discreta sencilla, con pocos datos, utilizando, si es preciso, una calculadora de operaciones básicas.

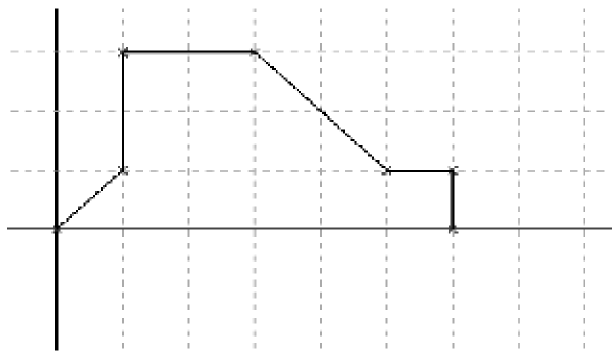
Anexo 2: Primer cuestionario

PRESENTACIÓN:

El objetivo de este cuestionario es detectar el grado de desarrollo que los conocimientos matemáticos han alcanzado en la mente del niño cuando llega a la situación previa al aprendizaje del álgebra formal y su predisposición para el estudio de la misma. Para ello se pretende analizar la capacidad de comprensión, generalización, formalización y abstracción de alumnos que aún no han recibido ninguna enseñanza algebraica formal en la escuela y compararla con la de otros alumnos ya iniciados en el estudio del álgebra. El grupo objeto de este estudio es de 6º de primaria y se utilizará un grupo de 1º de ESO y de 2º de ESO para analizar comparativamente los resultados de los alumnos de primaria.

ENUNCIADOS:

1.- Imagina que quieres dictar a tu compañero el siguiente dibujo. Describe de forma lo más clara posible todos los pasos que tendría que seguir para dibujarlo igual.



2.- En la operación siguiente el cuadro en blanco representa un número cualquiera. Elige, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debes realizar con dicho número:

□·2+3

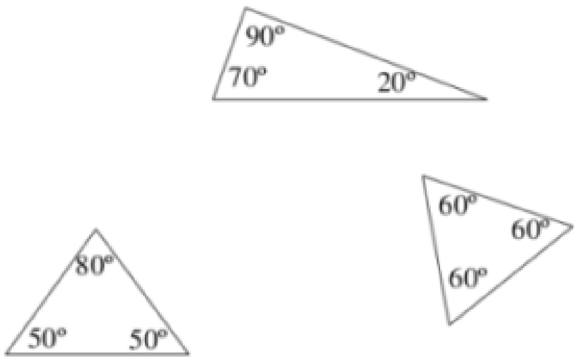
a) toma el número y multiplícalo por 5.

b) toma el número, multiplícalo por 2 y súmale 3.

c) toma el número, multiplícalo por 2 más 3.

3.- En los tres ejemplos de cada apartado hay una característica común. Descúbrela y redáctala de forma clara:

a)

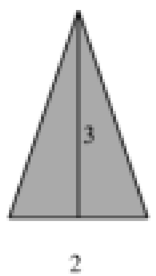


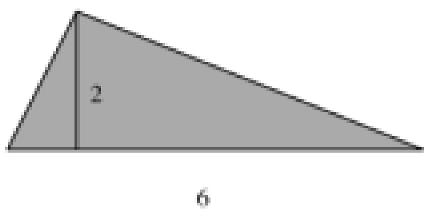
b) 6+2; 4+4; 3+5.

4-. La siguiente tabla muestra tres columnas. La primera de ellas da una información matemática que debe corresponderse con la operación de la segunda. La tercera columna expresa la misma operación, pero en general, de manera que los cuadros en blanco representan cualquier número. Completa las casillas sombreadas según los ejemplos:

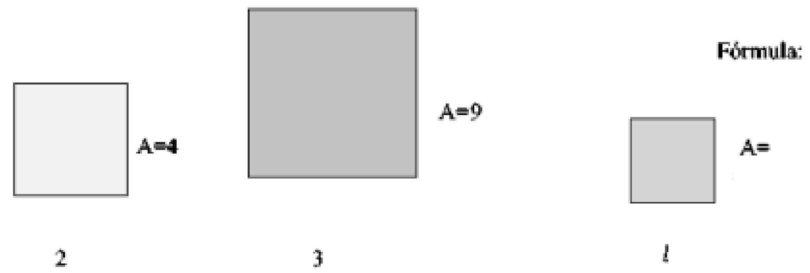
Enunciado	**Operación aritmética**	**Estructura operacional**
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	□ + □
El cine cuesta 6 € y voy tres veces esta semana	3·6	□ · □
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños		
	9-5	
		□ + □ − □

5.- El área de un triángulo es $A = \frac{a \cdot b}{2}$, donde b representa la base y a representa la altura. Calcula las áreas en los siguientes casos:



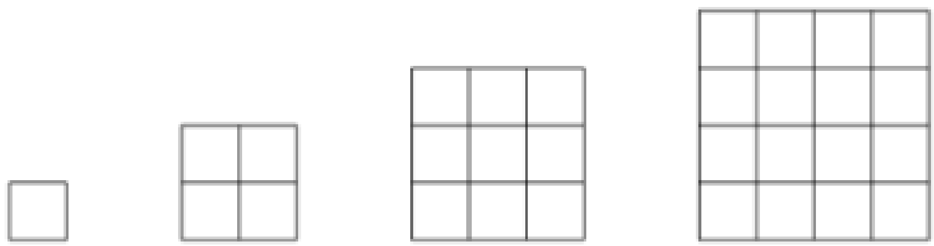


6.- Escribe la fórmula del área del cuadrado observando los siguientes casos:
(Nota: *A* significa área y *l* significa lado)



7.- En cada apartado se presenta una serie con una característica concreta, descúbrela y añade un par de elementos más a cada una. Después contesta las preguntas propuestas:

a)



¿Qué añades a cada figura para obtener la siguiente?

b) 2, 4, 6, 8, ... ¿Cómo sigue la serie y por qué?

c) 1, 2, 3, 4, ... ¿Cómo se forma cada nuevo número a partir del anterior?

d) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿Cuál es la característica que define esta serie?

8.- Explica qué relación existe entre los números de la izquierda y la derecha de esta tabla:

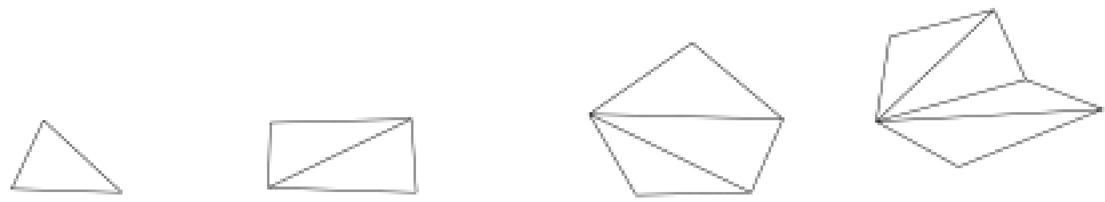
3	6
10	20
7	14
4	8

¿Puedes expresarla mediante una operación de manera que sirva para cualquier número?

9.- Piensa un número, multiplícalo por 2, súmale 4, divídelo entre 2, réstale el número que habías pensado. ¿El resultado es, siempre, 2? ¿Por qué?

¿Puedes expresarlo de manera que sirva para cualquier número?

10.- Observa las figuras y explica qué relación encuentras entre el número de lados del polígono y el número de triángulos que se forman en cada uno de ellos:

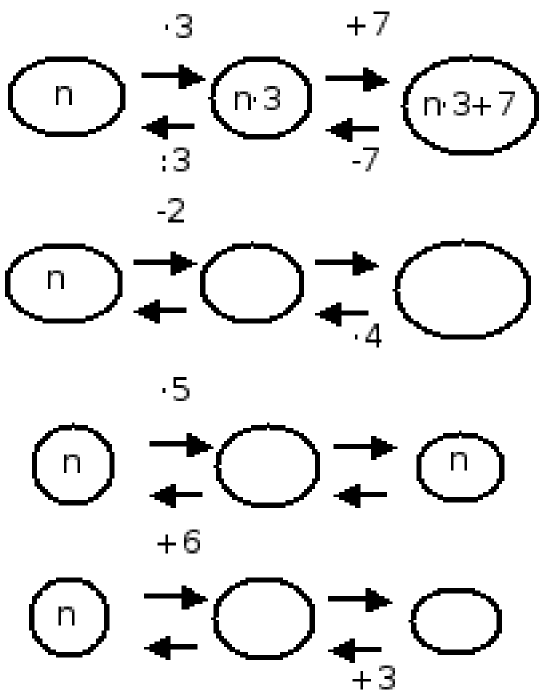


¿Puedes expresar con una operación esta relación de manera que sirva para un polígono de n lados? (Nota: n representa cualquier número)

11.- En la siguiente tabla cada enunciado debe corresponderse con la operación que está a su derecha. Completa las casillas en blanco: (Nota: x representa cualquier número)

Enunciado	**Traducción**
Lola tiene una amiga 3 años mayor que se llama Marta. Si la edad de Lola es x años, ¿cuántos tiene Marta?	
María y Juan son hermanos. Juan tiene 3 años y la suma de sus edades es 14 años.	
	x-2=15

12.- Fíjate en la primera de estas figuras que está completa, a modo de ejemplo. Completa las siguientes de la misma manera: (Nota: n representa cualquier número)



Muchas gracias por tu colaboración

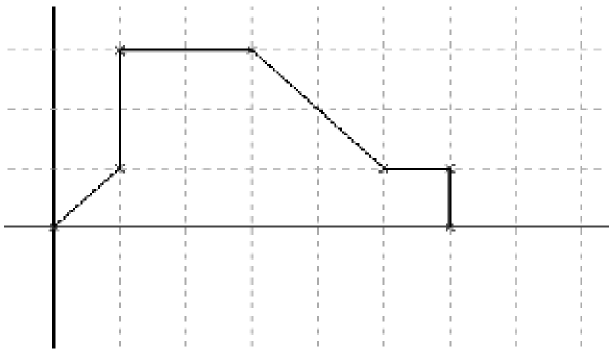
Anexo 3: Cuestionario definitivo

NOMBRE:____ CURSO:____

Lee antes de empezar:

El cuestionario que tienes a continuación **no** es un examen. Se trata de algunas preguntas para profundizar en tu modo de pensar y expresarte en matemáticas. Contesta de forma tranquila después de leer atentamente cada uno de los enunciados. Es importante que escribas todo lo que se te ocurra lo más claramente posible, no escatimes en explicaciones. ¡Adelante!

1.- Imagina que quieres dictar a tu compañero el siguiente dibujo. Describe de forma lo más clara posible todos los pasos que tendría que seguir para dibujarlo igual.

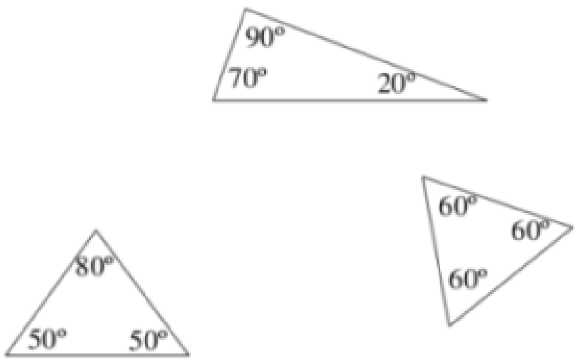


2.- En la operación siguiente el cuadro en blanco representa un número cualquiera. Elige, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debes realizar con dicho número:

$\square \cdot 2+3$

a) toma el número y multiplícalo por 5.
b) toma el número, multiplícalo por 2 y súmale 3.
c) toma el número, multiplícalo por 2 más 3.

3.- En los tres ejemplos hay una característica común. Descúbrela y redáctala de forma clara:



4.- Redacta de forma clara la característica común de estas tres expresiones aritméticas:

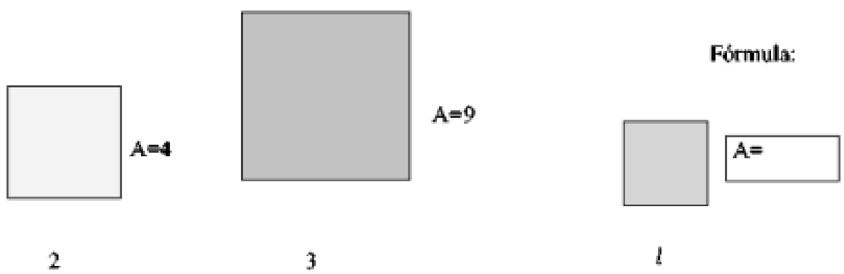
6+2; 4+4; 3+5.

5-. La siguiente tabla muestra tres columnas. La primera de ellas da una información matemática que debe corresponderse con la operación de la segunda. La tercera columna expresa la misma operación pero sin números, es decir, en general, de manera que los cuadros en blanco puedan representar cualquier número. Completa las casillas sombreadas según los ejemplos:

Enunciado	Operación aritmética	Estructura operacional
Tengo 2 manzanas y me dan 7 más	2+7	□ + □
El cine cuesta 6 € y voy tres veces esta semana	3·6	□ · □
Tengo 18 caramelos y los reparto entre 6 niños		
	9-5	
		□ + □ − □

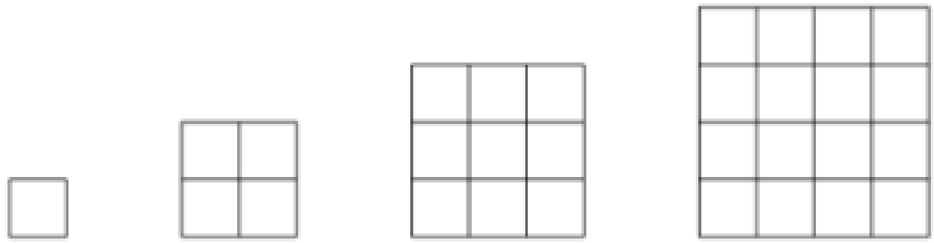
6.- El área de un triángulo es $A = \frac{a \cdot b}{2}$, donde b representa la base y a representa la altura. Calcula las áreas en los siguientes casos:

7.- Escribe la fórmula del área del cuadrado observando los siguientes casos:
(Nota: A significa área y l significa lado)



8.- En cada apartado se presenta una serie con una característica concreta, descúbrela y añade un par de elementos más a cada serie. Después contesta las preguntas propuestas:

a)



¿Qué añades a cada figura para obtener la siguiente?

b) 2, 4, 6, 8, ... ¿Cómo sigue la serie y por qué?

c) 1, 2, 3, 4, ... ¿Cómo se forma cada nuevo número a partir del anterior?

d) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿Cuál es la característica que define esta serie?

9.- Explica qué relación existe entre cada pareja de números de esta tabla:

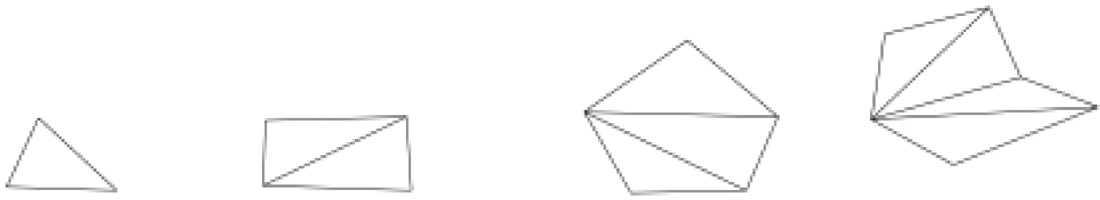
3	6
10	20
7	14
4	8

¿Puedes expresarla mediante una operación de manera que sirva para todos estos ejemplos y otros que sigan la misma relación?

10.- Piensa un número, multiplícalo por 2, súmale 4, divídelo entre 2, réstale el número que habías pensado. ¿El resultado es, siempre, 2? ¿Por qué?

¿Puedes expresarlo de manera que sirva para cualquier número que pienses, sin especificar cuál?

11.- Observa las figuras y explica qué relación encuentras en cada una entre el número de lados de polígono y el número de triángulos formados:



Nota: Para ayudarte puedes hacer una tabla como en el ejercicio 9:

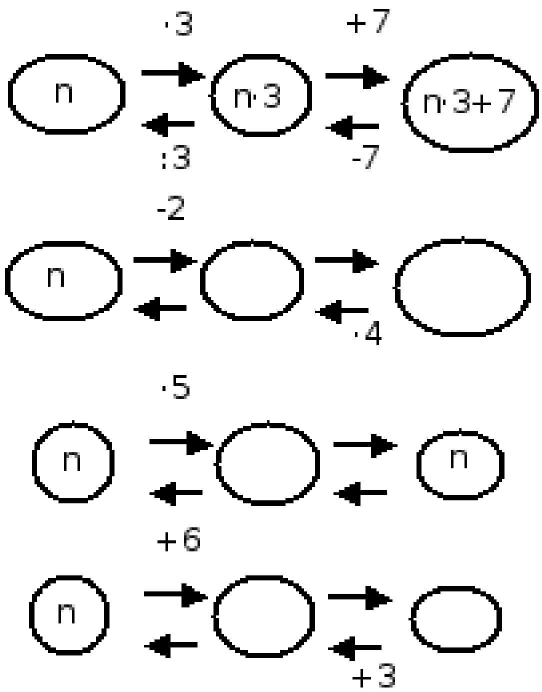
Número de lados	***Número de triángulos***

¿Puedes expresar con una operación esta relación de manera que sirva para un polígono de n lados? (Nota: n representa cualquier número)

12.- En la siguiente tabla cada enunciado debe corresponderse con la expresión matemática que está a su derecha, en la columna titulada traducción. Completa las casillas en blanco: (Nota: x representa cualquier número)

Enunciado	**Traducción**
Lola tiene una amiga 3 años mayor que se llama Marta. Si la edad de Lola es x años, ¿cuántos tiene Marta?	
María y Juan son hermanos. Juan tiene 3 años y la suma de sus edades es 14 años.	
	x-2=15

13.- Fíjate en la primera de estas figuras que está completa, a modo de ejemplo. Completa las siguientes de la misma manera: (Nota: n representa cualquier número)



Muchas gracias por tu colaboración

Anexo 4: Tablas de porcentajes

Corrección

1ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	52	78,8%	39	48,1%	40	47,6%	131	56,7%
Regular	13	19,7%	34	42,0%	30	35,7%	77	33,3%
Mal	1	1,5%	8	9,9%	10	11,9%	19	8,2%
En blanco	0	0,0%	0	0,0%	4	4,8%	4	1,7%

2ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien b)	38	57,6%	63	77,8%	64	76,2%	165	71,4%
Regular c)	4	6,1%	10	12,3%	5	6,0%	19	8,2%
Mal	23	34,8%	7	8,6%	13	15,5%	43	18,6%
En blanco	1	1,5%	1	1,2%	2	2,4%	4	1,7%

3ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	27	40,9%	32	39,5%	36	42,9%	95	41,1%
Regular	6	9,1%	7	8,6%	7	8,3%	20	8,7%
Mal	31	47,0%	38	46,9%	31	36,9%	100	43,3%
En blanco	2	3,0%	4	4,9%	10	11,9%	16	6,9%

4ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	56	84,8%	61	75,3%	76	90,5%	193	83,5%
Regular	2	3,0%	1	1,2%	0	0,0%	3	1,3%
Mal	5	7,6%	15	18,5%	6	7,1%	26	11,3%
En blanco	3	4,5%	4	4,9%	2	2,4%	9	3,9%

5ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	32	48,5%	60	74,1%	64	76,2%	156	67,5%
Regular	33	50,0%	16	19,8%	17	20,2%	66	28,6%
Mal	0	0,0%	2	2,5%	2	2,4%	4	1,7%
En blanco	1	1,5%	3	3,7%	1	1,2%	5	2,2%

6ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	59	89,4%	75	92,6%	75	89,3%	209	90,5%
Regular	5	7,6%	1	1,2%	4	4,8%	10	4,3%
Mal	1	1,5%	5	6,2%	1	1,2%	7	3,0%
En blanco	1	1,5%	0	0,0%	4	4,8%	5	2,2%

7ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	60	90,9%	74	91,4%	79	94,0%	213	92,2%
Mal	4	6,1%	5	6,2%	5	6,0%	14	6,1%
En blanco	2	3,0%	2	2,5%	0	0,0%	4	1,7%

8ª Pregunta		6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien		4	6,1%	5	6,2%	15	17,9%	24	10,4%
	A	4	6,1%	5	6,2%	12	14,3%	21	9,1%
	B	59	89,4%	73	90,1%	73	86,9%	205	88,7%
	C	55	83,3%	68	84,0%	73	86,9%	196	84,8%
	D	7	10,6%	8	9,9%	31	36,9%	46	19,9%
Regular		58	87,9%	70	86,4%	60	71,4%	188	81,4%
	A	38	57,6%	52	64,2%	41	48,8%	131	56,7%
	B	4	6,1%	1	1,2%	2	2,4%	7	3,0%
	C	4	6,1%	2	2,5%	1	1,2%	7	3,0%
	D	24	36,4%	24	29,6%	16	19,0%	64	27,7%
Mal		3	4,5%	4	4,9%	3	3,6%	10	4,3%
	A	10	15,2%	15	18,5%	17	20,2%	42	18,2%
	B	2	3,0%	5	6,2%	2	2,4%	9	3,9%
	C	2	3,0%	6	7,4%	0	0,0%	8	3,5%
	D	11	16,7%	23	28,4%	11	13,1%	45	19,5%
En blanco		1	1,5%	2	2,5%	6	7,1%	9	3,9%
	A	14	21,2%	9	11,1%	14	16,7%	37	16,0%
	B	1	1,5%	2	2,5%	7	8,3%	10	4,3%
	C	5	7,6%	5	6,2%	10	11,9%	20	8,7%
	D	24	36,4%	26	32,1%	26	31,0%	76	32,9%

9ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	10	15,2%	31	38,3%	41	48,8%	82	35,5%
Regular	49	74,2%	47	58,0%	38	45,2%	134	58,0%
Mal	6	9,1%	3	3,7%	5	6,0%	14	6,1%
En blanco	1	1,5%	0	0,0%	0	0,0%	1	0,4%

10ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	1	1,5%	3	3,7%	8	9,5%	12	5,2%
Regular	17	25,8%	42	51,9%	45	53,6%	104	45,0%
Mal	35	53,0%	30	37,0%	26	31,0%	91	39,4%
En blanco	13	19,7%	6	7,4%	5	6,0%	24	10,4%

11ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	1	1,5%	11	13,6%	10	11,9%	22	9,5%
Regular	33	50,0%	44	54,3%	62	73,8%	139	60,2%
Mal	29	43,9%	24	29,6%	11	13,1%	64	27,7%
En blanco	3	4,5%	2	2,5%	1	1,2%	6	2,6%

12ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	2	3,0%	27	33,3%	23	27,4%	52	22,5%
Regular	38	57,6%	44	54,3%	54	64,3%	136	58,9%
Mal	24	36,4%	10	12,3%	7	8,3%	41	17,7%
En blanco	2	3,0%	0	0,0%	0	0,0%	2	0,9%

13ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien	5	7,6%	32	39,5%	34	40,5%	71	30,7%
Regular	44	66,7%	44	54,3%	47	56,0%	135	58,4%
Mal	13	19,7%	2	2,5%	3	3,6%	18	7,8%
En blanco	4	6,1%	3	3,7%	0	0,0%	7	3,0%

Formalización

1ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Coordenadas	1	1,5%	25	30,9%	32	38,1%	58	25,1%
Coord. inventadas	0	0,0%	7	8,6%	15	17,9%	22	9,5%
Retórica	65	98,5%	43	53,1%	32	38,1%	140	60,6%

2ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien con letra	11	16,7%	1	1,2%	4	4,8%	16	6,9%
Bien con cuadro	9	13,6%	58	71,6%	54	64,3%	121	52,4%
Bien con nº	18	27,3%	4	4,9%	6	7,1%	28	12,1%
Arit. informal a)	11	16,7%	2	2,5%	3	3,6%	16	6,9%

3ª Pregunta (B+R)	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Ret. general (todos)	11	16,7%	10	12,3%	4	4,8%	25	10,8%
Retórica particular	21	31,8%	29	35,8%	39	46,4%	89	38,5%
Aritmética	1	1,5%	0	0,0%	0	0,0%	1	0,4%

4ª Pregunta (B+R)	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Retórica particular	0	0,0%	1	1,2%	0	0,0%	1	0,4%
Retórica	57	86,4%	61	75,3%	75	89,3%	193	83,5%
Aritmética	1	1,5%	0	0,0%	1	1,2%	2	0,9%

5ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	0	0,0%	4	4,9%	7	8,3%	11	4,8%
Simbolización	33	50,0%	57	70,4%	58	69,0%	148	64,1%
Aritmética	32	48,5%	17	21,0%	17	20,2%	66	28,6%

6ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Por sustitución	45	68,2%	72	88,9%	77	91,7%	194	84,0%
Sin sustitución	13	19,7%	2	2,5%	2	2,4%	17	7,4%
Informal	6	9,1%	2	2,5%	0	0,0%	8	3,5%

7ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	62	93,9%	77	95,1%	81	96,4%	220	95,2%
Retórica general	0	0,0%	1	1,2%	0	0,0%	1	0,4%
Oper. concretas	2	3,0%	2	2,5%	3	3,6%	7	3,0%

8ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	0	0,0%	0	0,0%	1	1,2%	1	0,4%
Retórica general	10	15,2%	12	14,8%	33	39,3%	55	23,8%
Oper. concretas	53	80,3%	65	80,2%	40	47,6%	158	68,4%
Informal	0	0,0%	0	0,0%	2	2,4%	2	0,9%

9ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	2	3,0%	38	46,9%	42	50,0%	82	35,5%
Simbolización	5	7,6%	10	12,3%	8	9,5%	23	10,0%
Retórica general	14	21,2%	18	22,2%	16	19,0%	48	20,8%
Oper. concretas	30	45,5%	14	17,3%	15	17,9%	59	25,5%
Informal	1	1,5%	1	1,2%	0	0,0%	2	0,9%

10ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	2	3,0%	34	42,0%	48	57,1%	84	36,4%
Simbolización	3	4,5%	7	8,6%	5	6,0%	15	6,5%
Retórica general	3	4,5%	2	2,5%	6	7,1%	11	4,8%
Oper. concretas	9	13,6%	8	9,9%	3	3,6%	20	8,7%
Informal	14	21,2%	9	11,1%	10	11,9%	33	14,3%

11ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	6	9,1%	31	38,3%	28	33,3%	65	28,1%
Simbolización	4	6,1%	7	8,6%	3	3,6%	14	6,1%
Retórica general	15	22,7%	3	3,7%	14	16,7%	32	13,9%
Oper. concretas	11	16,7%	20	24,7%	30	35,7%	61	26,4%
Informal	21	31,8%	11	13,6%	4	4,8%	36	15,6%

12ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	28	42,4%	60	74,1%	75	89,3%	163	70,6%
Simbolización	0	0,0%	0	0,0%	1	1,2%	1	0,4%
Oper. concretas	36	54,5%	21	25,9%	8	9,5%	65	28,1%

13ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formalización	43	65,2%	74	91,4%	84	100,0%	201	87,0%
Simbolización	2	3,0%	0	0,0%	0	0,0%	2	0,9%
Oper. concretas	7	10,6%	2	2,5%	0	0,0%	9	3,9%

Otras características

1ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Retórica ejes	6	9,1%	10	12,3%	2	2,4%	18	7,8%
Retórica origen	21	31,8%	13	16,0%	3	3,6%	37	16,0%
Ret. origen en dibujo	6	9,1%	1	1,2%	0	0,0%	7	3,0%
Ret. origen sin definir	4	6,1%	13	16,0%	7	8,3%	24	10,4%
Ret. letra-nº	0	0,0%	0	0,0%	1	1,2%	1	0,4%
Coord. ejes	0	0,0%	3	3,7%	7	8,3%	10	4,3%
Coord. origen	0	0,0%	2	2,5%	0	0,0%	2	0,9%
Coord. letra-nº	0	0,0%	1	1,2%	10	11,9%	11	4,8%
Coord. izq-dcha.	1	1,5%	0	0,0%	0	0,0%	1	0,4%
Coord. ord-abs	0	0,0%	1	1,2%	1	1,2%	2	0,9%
Coords. Propias	0	0,0%	2	2,5%	1	1,2%	3	1,3%
Coord. sin unir	0	0,0%	9	11,1%	14	16,7%	23	10,0%
Ret. Bien	51	77,3%	19	23,5%	15	17,9%	85	36,8%
Ret. Regular	13	19,7%	21	25,9%	8	9,5%	42	18,2%
Ret. Mal	13	19,7%	21	25,9%	8	9,5%	42	18,2%
Coord. Bien	1	1,5%	21	25,9%	25	29,8%	47	20,3%
Coord. Regular	0	0,0%	12	14,8%	22	26,2%	34	14,7%
Coord. Mal	0	0,0%	12	14,8%	22	26,2%	34	14,7%

2ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Sólo nº en cuadro	2	3,0%	2	2,5%	2	2,4%	6	2,6%
Nº en cuadro a) c)	5	7,6%	3	3,7%	2	2,4%	10	4,3%
Sólo letra en cuadro	10	15,2%	3	3,7%	8	9,5%	21	9,1%
Letra en cuadro a) c)	1	1,5%	1	1,2%	0	0,0%	2	0,9%
Opera	5	7,6%	1	1,2%	2	2,4%	8	3,5%

3ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Errores análisis	6	9,1%	7	8,6%	8	9,5%	21	9,1%
Errores conclusión	20	30,3%	26	32,1%	23	27,4%	69	29,9%
Errores expresión	5	7,6%	5	6,2%	0	0,0%	10	4,3%
Mal: No comparan	3	4,5%	5	6,2%	2	2,4%	10	4,3%
Mal: Triángulos	15	22,7%	25	30,9%	19	22,6%	59	25,5%
Mal: Tipos áng/lados	8	12,1%	7	8,6%	9	10,7%	24	10,4%
Lados suman 180º	3	4,5%	4	4,9%	0	0,0%	7	3,0%

4ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Errores análisis	0	0,0%	0	0,0%	2	2,4%	2	0,9%
Errores conclusión	3	4,5%	13	16,0%	3	3,6%	19	8,2%
Errores expresión	2	3,0%	2	2,5%	1	1,2%	5	2,2%
Mal: Sumas	3	4,5%	10	12,3%	3	3,6%	16	6,9%
Mal: todos>0	0	0,0%	3	3,7%	0	0,0%	3	1,3%
Mal: Ret. particular	1	1,5%	2	2,5%	1	1,2%	4	1,7%
Sólo aritmética	1	1,5%	0	0,0%	0	0,0%	1	0,4%
Error aritmético	0	0,0%	0	0,0%	2	2,4%	2	0,9%

5ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Enunciado	1	1,5%	2	2,5%	4	4,8%	7	3,0%
Arit. a partir de estr.	0	0,0%	2	2,5%	2	2,4%	4	1,7%
No estructura	0	0,0%	3	3,7%	3	3,6%	6	2,6%
Opera	3	4,5%	0	0,0%	0	0,0%	3	1,3%
Cambia orden en nºs	3	4,5%	0	0,0%	0	0,0%	3	1,3%
Números inventados	3	4,5%	6	7,4%	2	2,4%	11	4,8%

7ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Fórmula A=l·l	48	72,7%	24	29,6%	13	15,5%	85	36,8%
Fórmula A=l²	12	18,2%	50	61,7%	66	78,6%	128	55,4%
Fórmula mal	2	3,0%	3	3,7%	2	2,4%	7	3,0%
Nº mal	0	0,0%	2	2,5%	0	0,0%	2	0,9%

8ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
No relación	18	27,3%	33	40,7%	16	19,0%	67	29,0%
Expresión imprecisa	24	36,4%	24	29,6%	10	11,9%	58	25,1%
Faltan cuadros	18	27,3%	32	39,5%	27	32,1%	77	33,3%
Dibujo	1	1,5%	1	1,2%	1	1,2%	3	1,3%
Particular	12	18,2%	14	17,3%	20	23,8%	46	19,9%

9ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formal blanco	16	24,2%	4	4,9%	7	8,3%	27	11,7%
No expresa el significado de cada letra (g)	0	0,0%	8	9,9%	18	21,4%	26	11,3%
Falta otro lado de = (d)	2	3,0%	18	22,2%	24	28,6%	44	19,0%
Por adición del mismo nº	9	13,6%	5	6,2%	6	7,1%	20	8,7%
Mismo símbolo o letra	1	1,5%	7	8,6%	3	3,6%	11	4,8%

10ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formal (3ª) blanco	42	63,6%	40	49,4%	27	32,1%	109	47,2%
1ª y 2ª blanco	16	24,2%	12	14,8%	15	17,9%	43	18,6%
mal 1ª y 2ª	26	39,4%	27	33,3%	27	32,1%	80	34,6%
bien 1ª y 2ª	1	1,5%	3	3,7%	8	9,5%	12	5,2%
mal 3ª	2	3,0%	3	3,7%	9	10,7%	14	6,1%
bien 3ª	1	1,5%	31	38,3%	37	44,0%	69	29,9%
Sólo aritmética	7	10,6%	7	8,6%	12	14,3%	26	11,3%
Error aritmético (2ª)	2	3,0%	6	7,4%	4	4,8%	12	5,2%
Error conclusión (2ª)	22	33,3%	23	28,4%	26	31,0%	71	30,7%
Error expresión (2ª)	20	30,3%	18	22,2%	13	15,5%	51	22,1%
Error símbolos (3ª)	2	3,0%	3	3,7%	6	7,1%	11	4,8%
Error expresión aritmética (3ª)	2	3,0%	30	37,0%	28	33,3%	60	26,0%

11ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Formal bien	2	3,0%	20	24,7%	17	20,2%	39	16,9%
No formal	45	68,2%	38	46,9%	45	53,6%	128	55,4%
Letras sin distinguir	2	3,0%	3	3,7%	1	1,2%	6	2,6%
Sólo tabla	6	9,1%	9	11,1%	13	15,5%	28	12,1%
Tabla mal	21	31,8%	14	17,3%	5	6,0%	40	17,3%
Relación bien	6	9,1%	16	19,8%	9	10,7%	31	13,4%
No relación	9	13,6%	13	16,0%	18	21,4%	40	17,3%
Todos triángulos	8	12,1%	9	11,1%	0	0,0%	17	7,4%
Relación (+1,+t)	12	18,2%	10	12,3%	27	32,1%	49	21,2%

12ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Bien 1ª	17	25,8%	50	61,7%	43	51,2%	110	47,6%
Bien 2ª	20	30,3%	61	75,3%	60	71,4%	141	61,0%
bien 3ª	14	21,2%	35	43,2%	38	45,2%	87	37,7%
no 1ª	3	4,5%	0	0,0%	2	2,4%	5	2,2%
no 2ª	4	6,1%	0	0,0%	3	3,6%	7	3,0%
no 3ª	10	15,2%	2	2,5%	6	7,1%	18	7,8%
1ª =nº	23	34,8%	3	3,7%	5	6,0%	31	13,4%
1ª =x	7	10,6%	11	13,6%	9	10,7%	27	11,7%
1ª =otro signo	0	0,0%	4	4,9%	4	4,8%	8	3,5%
Error expr. alg. 1ª	2	3,0%	12	14,8%	15	17,9%	29	12,6%
Error expr. alg. 2ª	1	1,5%	0	0,0%	9	10,7%	10	4,3%
Arit. particular 1ª	5	7,6%	1	1,2%	0	0,0%	6	2,6%
Arit. particular 2ª	32	48,5%	10	12,3%	7	8,3%	49	21,2%
Error aritmético 2ª	4	6,1%	2	2,5%	2	2,4%	8	3,5%
3ª sin rigor	2	3,0%	6	7,4%	6	7,1%	14	6,1%
3ª sin resultado	26	39,4%	9	11,1%	6	7,1%	41	17,7%
3ª mal	41	62,1%	39	48,1%	40	47,6%	120	51,9%
Cambia enunciado 1ª	9	13,6%	1	1,2%	2	2,4%	12	5,2%
Cambia enunciado 2ª	5	7,6%	0	0,0%	0	0,0%	5	2,2%
Cambia enunciado 3ª	15	22,7%	25	30,9%	30	35,7%	70	30,3%

13ª Pregunta	6º EP		1ºESO		2ºESO		TOTAL	
Sin prioridad	51	77,3%	72	88,9%	64	76,2%	187	81,0%
Sin inversiones	20	30,3%	24	29,6%	15	17,9%	59	25,5%
Faltan inversiones	10	15,2%	7	8,6%	17	20,2%	34	14,7%
Error en inversiones	9	13,6%	1	1,2%	5	6,0%	15	6,5%
Mimetiza	7	10,6%	5	6,2%	1	1,2%	13	5,6%
Error en álgebra	7	10,6%	3	3,7%	4	4,8%	14	6,1%
Modifica lo dado	4	6,1%	3	3,7%	4	4,8%	11	4,8%
Mal última (inv= dir)	7	10,6%	14	17,3%	0	0,0%	21	9,1%
Hace operaciones algebraicas	0	0,0%	0	0,0%	2	2,4%	2	0,9%

Anexo 5: Pruebas estadísticas

Prueba de independencia del tipo de respuesta con la corrección en la pregunta 1ª

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	0,2539	0,0624	0,0039	0,6143
1º ESO	1,8836	1,1597	0,0262	0,1699
2º ESO	0,3299	0,0680	0,0046	0,5657
TOTAL	1,5708	0,0866	0,0076	0,2101

Prueba de independencia de la corrección y la formalización

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	5,3881 (Y)*	0,2857(Y)	0,0816(Y)	0,0072
1º ESO	17,8797 (Y)	0,4698(Y)	0,2207(Y)	$7{,}64\cdot10^{-6}$
2º ESO	34,7977(Y)	0,6434(Y)	0,4143(Y)	$6{,}96\cdot10^{-10}$
TOTAL	61,0931(Y)	0,5143(Y)	0,2645(Y)	$6{,}79\cdot10^{-11}$

*El símbolo (Y), en adelante, significará que los cálculos están hechos con la corrección de Yates. Ver en la página 317.

Prueba de independencia de la corrección y el curso académico

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP - 1º ESO	2,5375	0,1314	0,0173	0,1112
1º ESO - 2º ESO	1,0717	0,0806	0,0065	0,3006
6º EP - 2º ESO	6,6790	0,2110	0,0445	0,0098
TOTAL	6,8177	0,1718	0,0295	0,0331

Prueba de independencia de la formalización y el curso académico

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP - 1º ESO	19,6972	0,3661	0,1340	$9{,}07 \cdot 10^{-6}$
1º ESO - 2º ESO	8,3433	0,2249	0,0506	0,0039
6º EP - 2º ESO	47,7806	0,5644	0,3185	$4{,}19 \cdot 10^{-11}$
TOTAL	47,7899	0,4548	0,2069	$1{,}03 \cdot 10^{-10}$

Prueba de homogeneidad de las variables corrección y formalización en cada curso

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	29,4643	0,4725	0,2232	$5{,}69 \cdot 10^{-8}$
1º ESO	9,2755	0,2493	0,0573	0,0023
2º ESO	1,5315	0,0955	0,0091	0,2159
TOTAL	27,9481	0,2460	0,0605	$1{,}25 \cdot 10^{-7}$

Prueba de homogeneidad de los buenos resultados en las variables corrección y formalización con los cursos

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP - 2º ESO	11,7669	0,2608	0,0680	$6{,}03 \cdot 10^{-4}$
6º EP - 1º ESO	6,6753	0,2146	0,0460	0,0098
1º ESO - 2º ESO	1,0835	0,0699	0,0049	0,2979
TOTAL	13,6370	0,2478	0,0614	0,0011

Prueba de independencia de la corrección y la calificación

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	0,3563(Y)	0,0735(Y)	0,0054(Y)	0,3362
1º ESO	15,0300(Y)	0,4308(Y)	0,1856(Y)	$1{,}96 \cdot 10^{-5}$
2º ESO	11,4403	0,3690	0,1362	$7{,}19 \cdot 10^{-4}$
TOTAL	22,6694	0,3133	0,0981	$1{,}92 \cdot 10^{-6}$

Prueba de independencia de la formalización y la calificación

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	0,5778(Y)	0,0936(Y)	$8{,}75\cdot10^{-3}$(Y)	0,1996
1º ESO	7,3573(Y)	0,3014(Y)	0,0908(Y)	0,0022
2º ESO	16,4469(Y)	0,4425(Y)	0,1958Y)	$1{,}21\cdot10^{-5}$
TOTAL	18,7031(Y)	0,2845(Y)	0,0810(Y)	$6{,}31\cdot10^{-6}$

Prueba de homogeneidad de las variables corrección y calificación en cada curso

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	12,3750	0,3062	0,0938	$4{,}35\cdot10^{-4}$
1º ESO	7,6327	0,2171	0,0471	0,0057
2º ESO	0,6176	0,0606	$3{,}68\cdot10^{-3}$	0,4319
TOTAL	16,5401	0,1892	0,0358	$4{,}76\cdot10^{-5}$

Prueba de homogeneidad de las variables formalización y calificación en cada curso

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	69,8182	0,7273	0,5289	$6{,}99\cdot10^{-11}$
1º ESO	31,1638	0,4386	0,1924	$2{,}38\cdot10^{-8}$
2º ESO	4,0405	0,1551	0,0241	0,0444
TOTAL	81,9165	0,4211	0,1773	$8{,}40\cdot10^{-11}$

Prueba de homogeneidad de los buenos resultados en las variables corrección y calificación con los cursos

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP - 1º ESO	0,3589	0,0399	0,0016	0,5491
1º ESO - 2º ESO	0,4092	0,0392	0,0015	0,5224
6º EP - 2º ESO	1,42192	0,0782	0,0061	0,2335
TOTAL	4,4069	0,1287	0,0166	0,4078

Prueba de homogeneidad de los buenos resultados en las variables formalización y calificación con los cursos

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP - 1º ESO	22,9820	0,3094	0,0958	$1{,}02{\cdot}10^{-5}$
1º ESO - 2º ESO	9,6791	0,2338	0,0547	$1{,}86{\cdot}10^{-3}$
6º EP - 2º ESO	2,7754	0,1075	0,0116	0,0957
TOTAL	19,8092	0,3187	0,1016	$8{,}56{\cdot}10^{-6}$

Prueba de independencia de la corrección y el tipo de enunciado

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	1,5560	0,0880	0,0077	0,4593
1º ESO	5,7108	0,1519	0,0231	0,0575
2º ESO	6,5713(Y)	0,1600(Y)	0,0256(Y)	0,0195
TOTAL	4,5363	0,0802	0,0064	0,1035

Prueba de independencia de la formalización y el tipo de enunciado

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP	15,3610	0,3051	0,0931	0,0005
1º ESO	3,4541	0,1231	0,0151	0,1778
2º ESO	9,5002(Y)	0,2016(Y)	0,0406(Y)	0,0039
TOTAL	21,4595	0,1850	0,0342	$2{,}19{\cdot}10^{-5}$

Prueba de homogeneidad de los buenos resultados en las variables corrección y tipo de enunciado con los cursos

CURSO	χ^2	C	C²	p-valor
6º EP - 1º ESO	1,2293	0,0592	0,0035	0,5408
1º ESO - 2º ESO	0,0121	0,0053	$2{,}86{\cdot}10^{-5}$	0,9940
6º EP - 2º ESO	1,3180	0,0600	$3{,}60{\cdot}10^{-3}$	0,5174
TOTAL	1,5927	0,0374	0,0028	0,8101

Prueba de homogeneidad de los buenos resultados en las variables formalización y tipo de enunciado con los cursos

CURSO	χ^2	C	C^2	p-valor
6º EP - 1º ESO	6,5317	0,1581	0,0250	0,0382
1º ESO - 2º ESO	2,6202	0,0846	0,0072	0,2698
6º EP - 2º ESO	7,4006	0,1585	0,0251	0,0247
TOTAL	7,2447	0,1224	0,0152	0,1235