NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 38, junio de 1999, páginas 33-38

Calcular con colores

Martin Kindt

La numeración decimal implica que se puede ver, inmediatamente por las cifras, si un número es divisible por 2, por 5 y claro, también, por 10. La divisibilidad por 3 no se puede ver directamente, se debe calcular un poco. El camino de menor resistencia parece ser el de la calculadora.

Pero, ¿qué tal con un número con muchos cifras?

Para introducir este problema puede servir el ejercicio siguiente:

Investigue la sucesión 11, 111, 1111, 11111, etc.

¿Qué números de la sucesión son divisibles por 3? Busque una regla.

Regla

Antes, en la básica, aprendimos una regla manejable: Un número es divisible por 3, si (y solamente si) la suma de las cifras es divisible por 3. No me acuerdo de la demostración del maestro. Me parece improbable que lo hubiera probado verdaderamente. Cuando fui profesor de secundaria he probado la regla para alumnos de 12 o 13 años. Principalmente, con el objeto de hacer experimentar a los alumnos la fuerza del álgebra.

No me acuerdo de los detalles, pero me imagino una demostración como la que sigue.

Tomemos por ejemplo un número N de cuatro cifras: de izquierda a derecha sean a, b, c, d sus cifras.

Entonces, a representa uno de los números 1, 2, 3,... , 9 y cada una de las otras cifras b, c, d representa a uno de los números 0, 1, 2,... , 9.

Así pues

$$N = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

También, el número N se puede partir así

$$(a \times 999 + b \times 99 + c \times 9) + (a + b + c + d)$$

La primera parte es divisible por 3 porque 9, 99 y 999 son, obviamente, divisibles por 3. Si sabemos que la segunda parte, es decir, $a + b + c + d$ es también divisible por 3 entonces, podemos estar seguros que el total N es divisible por 3.

Por otro lado, si la parte $a + b + c + d$ no es un triple, tampoco será divisible por 3 el número N.

Esta demostración para un número que tiene cuatro cifras es paradigmática, pues es evidentemente claro que podemos pronunciar un razonamiento análogo para un número de otra extensión.

¿Lo habrán comprendido los alumnos? Tragado sí, o quizás masticado un poco, pero digerido, no sé.

Ahora, después de casi treinta años, tengo muchas dudas sobre esto.

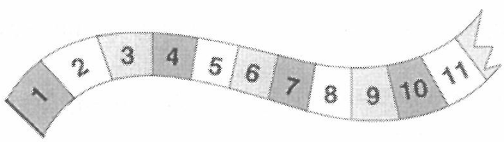
Números coloreados

Una demostración más elegante de la regla, está basada en el cálculo con congruencias (aquí módulo 3).

Este enfoque, que no voy a presentar de modo formal, me ha inspirado una demostración coloreada y, probablemente, comprensible.

La siguiente descripción no es una idea elaborada en detalle para una clase. Pero la traducción para la práctica de la enseñanza no me parece muy difícil.

Para la introducción presentaría un film de números en tres colores: rojo, blanco, azul, rojo, blanco, azul, etc.



Este patrón periódico puede dar lugar a ejercicios bonitos. La pregunta más evidente es del tipo: ¿qué color tiene 3256? Por medio de tales preguntas los alumnos pueden descubrir, y formular, que los números azules son divisibles por 3, que el resto de la división por 3 de un número rojo será 1, y que el resto será 2 para un número blanco.

Saltos de 10, 100,...

Luego, es interesante mirar que ocurre si hacemos saltos entre números en el film. Por ejemplo saltos de 10. Un salto de 10 significa un movimiento de color hacia el color siguiente.

Tenemos pues: rojo → blanco, blanco → azul, azul → rojo.

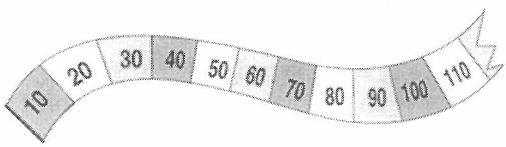
Puesto que 10 es igual a 3 periodos más 1.

El número 10 es rojo (como el número 1), luego 20 es blanco (como 2), 30 es azul (como 3), etc.

En resumen: las decenas 10, 20, 30,... tienen respectivamente el mismo color que 1, 2, 3, ...

¿Y las centenas 100, 200, 300,... ?

Hay muchas maneras de descubrir la regla. Pero prefiero la siguiente. Haga un film de decenas coloreadas y aplica la regla para los 'saltos de diez'. Queda claro que 100, 200, 300,... tienen, respectivamente, el mismo color que 10, 20, 30,... .



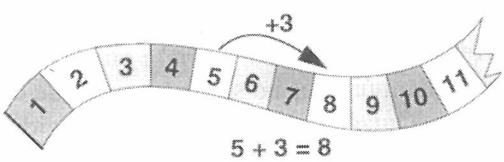
Análogamente para los millares, etc.

Obtenemos la regla I que dice: *si un número termina en unos ceros, su color es el del número que resulta de suprimir esos ceros.*

Es un gran paso en el camino hacia la demostración del criterio de divisibilidad por 3.

Como segundo paso necesitamos una regla que diga algo sobre el color de la suma de dos números coloreados.

La adición puede ser interpretada en el film de números.



Está claro que al sumar un número azul y un número con 'cierto color', el resultado es un número del mismo 'cierto color'. ¡Es por la periodicidad del film!

Esquemáticamente (R significa número rojo, etc.):

+	R	B	A
R			R
B			B
A	R	B	A

Razonando se puede llenar el resto de la tabla.
Usando las reglas: R = A + 1, B = A + 2 y A + A = A, encontramos:

$$R + R = A + 1 + A + 1 = A + 2 = B$$

$$B + R = A + 2 + A + 1 = A + 3 = A$$

$$B + B = A + 2 + A + 2 = A + 4 = R$$

Luego tenemos que

+	R	B	A
R	B	A	R
B	A	R	B
A	R	B	A

Pues vale que *el color de la suma de dos números solamente depende del color de ambos números y no del valor de los representantes*. Ésta es la regla II.

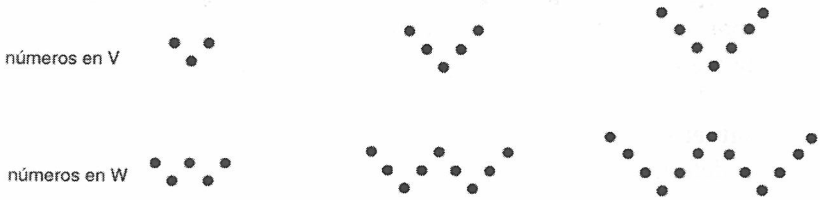
El razonamiento que he usado parece bastante formal. Hay una forma más visual de descubrir la tabla de la adición de los colores.

Patrones de puntos

Se pueden representar números no sólo por medio de cifras, sino también por patrones de puntos. Quizás los ejemplos más conocidos son los números cuadrados y los números triangulares. La idea de la representación por estructuras de puntos es muy antigua: el griego Nicomaco (final del siglo I después de Cristo) fue famoso por este enfoque.

Para los alumnos jóvenes se pueden usar patrones de puntos para visualizar la distinción entre 'par' e 'impar'.

Un ejemplo bonito de patrones de números figurados es el de las configuraciones en V y W (piense por ejemplo en un escuadrón de aviones).



Se pueden construir los números en V así: $1 + 2 \times 1$, $1 + 2 \times 2$, $1 + 2 \times 3$,...

Son exactamente los números impares (empezando en el 3).

Otra estructura visible es: $1 + 2$, $2 + 3$, $3 + 4$,...

También se pueden analizar los números en W de distintas formas. Sea lo que sea, el resultado es que son cuádruplos más 1 (empezando en el 5).

Tales patrones son muy apropiados en la enseñanza de álgebra elemental: los alumnos pueden construir fórmulas, combinar patrones, hacer 'producciones propias', etc.

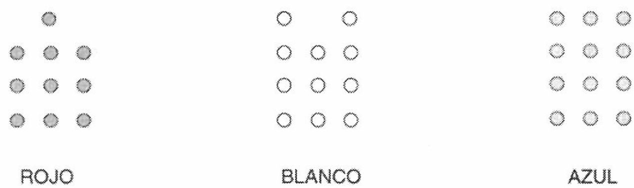
Aquí mostraré sólo un ejemplo: *un número en W es el doble de un número en V menos 1* (parece una paradoja: uve doble es doble uve menos uno).

En el idioma del álgebra: $1 + 4k = 2 \times (1 + 2k) - 1$.

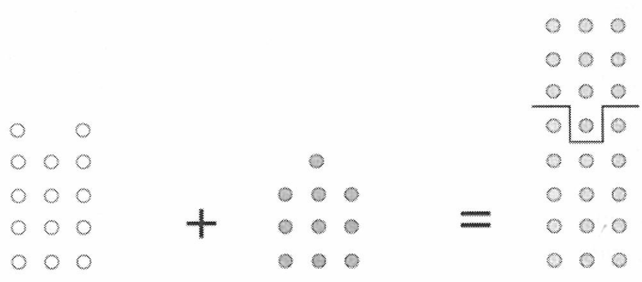
Vuelvo al asunto de este artículo.

Sumar colores por patrones de puntos

Patrones de puntos de los números rojos, blancos y azules pueden ser:



La estructura geométrica da comprensión de las leyes de la adición. Por ejemplo: 'la suma de un número blanco y un número rojo es un número azul'.



Otra vez queda claro que es indiferente qué número blanco y qué número rojo se suman: el resultado debe ser azul.

De esta manera encontramos la misma tabla para la adición de colores.

Determinar el color

¿Cómo determinamos el color de 435677?

Pues bien, 435677 = 400000 + 30000 + 5000 + 600 + 70 + 6.

Según la regla I, 400000 y 4 tienen el mismo color; también 30000 y 3, 5000 y 5, 600 y 6, 70 y 7.

Según la regla II, concluimos que 435677 tiene el mismo color que 4 + 3 + 5 + 6 + 7 + 7 = 32.

Si directamente no ve que 32 es blanco, repita la adición de las cifras: 3 + 2 = 5 y llegue hasta el principio del film de números. Conclusión: si dividimos el número 435677 por 3, obtenemos de resto 2.

Este ejemplo es significativo: ¡el color de un número (o bien el resto de la división por 3) se determina por el color de la suma de las cifras!

Se acelera el método si olvidamos las cifras 3, 6 y 9.

El número 435677 puede ser sustituido por 4577.

Como último ensayo tomo el número de mi cuenta del banco: 1188733, calculo un poco, ... , ¿tengo la cuenta en rojo? ¡Ufff que alivio!: me he equivocado en una cifra, ¡mi número es blanco!

Martin Kindt es investigador del Intituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht. Holanda