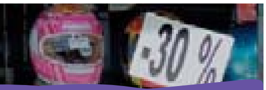
Unidad didáctica

Proporcionalidad y porcentajes

José Mª Sorando Muzás



MATERIAL PARA EL PROFESORADO

1. Relación con los elementos del currículo

a) *Contenidos del currículo.*

El Currículo de Aragón (Orden de 9 de mayo de 2007) incluye entre los contenidos de Matemáticas en 1º de ESO:

> Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Utilización de técnicas escritas o con calculadora para hallar aumentos y disminuciones porcentuales. Aplicación de la proporcionalidad.

Y entre los contenidos de Matemáticas de 2º de ESO:

> Magnitudes directamente e inversamente proporcionales. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Reducción a la unidad. Porcentajes. Uso de las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana, tales como intereses, tasas, descuentos, etc., en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.

La presente Unidad Didáctica incluye todos los contenidos precitados y de esa forma, en una aplicación directa del Currículo de Aragón, corresponde a 2º de ESO. No obstante, entendemos que el Currículo no es una guía estricta y cerrada, sino una garantía de los contenidos mínimos que debe incluir la enseñanza en cada nivel. Cada profesor en cada caso los puede ampliar, si la situación lo hace aconsejable y sin olvidar la prioridad de los contenidos curriculares frente a esas ampliaciones. Esta unidad (excepto en lo relativo a medios de comunicación y salvo algunas modificaciones posteriores) ha sido puesta en práctica durante el curso 2008-09 con dos grupos de alumnos de 1º de ESO a lo largo de 10 clases, sin que ninguno de sus contenidos se revelara excesivo o inadecuado para ellos. Esos mismos alumnos, cuando vuelvan a estudiar proporcionalidad y porcentajes en 2º de ESO, podrán repasar todos estos contenidos en situaciones más complejas y ampliarlos con los repartos proporcionales y, en su caso, con la proporcionalidad compuesta.

b) *Criterios de evaluación.*

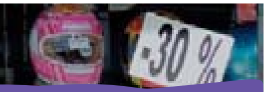
- Identificar las magnitudes presentes en una situación, así como su independencia o la relación entre ellas.
- Reconocer en casos prácticos las relaciones de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa, distinguiéndolas de otras relaciones directas o inversas pero no proporcionales,
- Resolver problemas en situaciones de proporcionalidad: aplicando de forma inmediata la definición de proporcionalidad, o por reducción a la unidad, o por regla de tres. Elegir en cada caso el método más adecuado a los datos conocidos.

- Tener el concepto de las constantes de proporcionalidad directa e inversa y resolver a partir de ellos las reglas de tres.
- Hacer estimaciones en base a razonamientos de proporcionalidad.
- Aproximar los resultados cuando sea necesario; en especial, aplicar correctamente el redondeo del euro.
- Ser capaces de calcular distancias no indicadas sobre un plano, aplicando la escala.
- Interpretar la información bancaria y comercial basada en porcentajes; en particular, los conceptos de interés, IVA y descuento.
- Calcular porcentajes por varios métodos (como fracciones, producto por un decimal, cálculo mental cuando sea factible, calculadora y regla de tres).
- Resolver los diversos problemas de porcentajes: cálculo del total, expresión de una parte como porcentaje, aumentos y disminuciones porcentuales.
- Usar los porcentajes para comparar cantidades que corresponden a escalas varias, sabiendo cuándo es o no es adecuado hacerlo.
- Razonar correctamente en los casos de acumulación de porcentajes.
- Particularizar y generalizar.
- Buscar datos en la red o tomarlos directamente; elaborarlos matemáticamente y presentar un informe de conclusiones.
- Trabajar en grupo.
- Aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones en contextos variados, distinguiendo cuál es la información relevante.
- Reconocer la aportación de la competencia matemática al análisis y mejora de situaciones con un alcance ético y social.
- Analizar la información comercial (ofertas y etiquetas) para ser capaces de elegir con criterios racionales lo más conveniente para el consumidor.
- Analizar con sentido crítico y desde criterios racionales los titulares y noticias de prensa donde se manejan conceptos de proporcionalidad.

c) Contribución de la unidad a la adquisición de las competencias básicas.

En la *Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente* (18 de diciembre de 2006), se incluye entre éstas la competencia matemática, que se define como:

> *"la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña —en distintos grados– la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas)".*



En el marco de esas recomendaciones, el Currículo de Aragón (Orden 9 de mayo de 2007) incluye la competencia matemática entre las ocho competencias básicas que se han de desarrollar en esa etapa educativa.

Según el Informe PISA: *"La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo"*. Y desglosa esta *competencia matemática* en las siguientes subcompetencias:

CM1 Pensar y razonar.
CM2 Argumentar.
CM3 Comunicar.
CM4 Modelizar.
CM5 Plantear y resolver problemas.
CM6 Representar.
CM7 Utilizar operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico.
CM8 Emplear material y herramientas de apoyo.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas en su Seminario *"Análisis y desarrollo de la competencia matemática"* (Córdoba, octubre 2008) elaboró un documento de conclusiones (se puede consultar en www.fespm.es) donde se enumeran las *Aportaciones del área de Matemáticas al resto de competencias básicas*. De esa extensa relación, cuya lectura recomendamos, en esta unidad didáctica se potencian las siguientes, a través de las metodologías y aprendizajes que se indican:

Competencia lingüística.

CL1 Realizar actividades de comprensión lectora.
CL2 Asociar a cada actividad o tarea la expresión oral y escrita.
CL3 Matematizar textos (en este caso de prensa).

Competencia conocimiento e interacción con el mundo físico.

CMF1 Conjeturar y refutar. Comprobar. Generalizar. Probar.
CMF2 Utilizar conocimientos matemáticos para analizar, interpretar de forma crítica y ética información de hechos reales (consumo, etc).
CMF3 Usar contextos que partan de la realidad física y natural adecuados a todos los bloques de contenidos.
CMF4 Hacer estimaciones, medidas, valoración de las soluciones de problemas desde el punto de vista de la realidad.
CMF5 Planificar y resolver problemas del mundo físico y natural.

Competencia digital y tratamiento de la información.

CTI1 Fomentar la búsqueda de información contextualizada en cualquier medio como punto de partida para la realización de tareas.
CTI2 Producir e interpretar información contextualizada.
CTI3 Realizar actividades de comunicación de la información.
CTI4 Uso de las matemáticas para valorar críticamente la información.
CTI5 Uso eficiente y crítico de la calculadora y software matemático que incida en el aprendizaje de los procesos matemáticos, en el desarrollo de las actividades y resolución de problemas, usando el más adecuado.

Competencia social y ciudadana.

CSC1 Uso de una metodología participativa y crítica.

CSC2 Realizar proyectos relacionados con la realidad social y el entorno más cercano al alumnado, con tratamiento interdisciplinar.

CSC3 Usar técnicas matemáticas para capacitar al alumnado a entender los mensajes de la publicidad.

CSC4 Utilizar las matemáticas para interpretar y comprender los sistemas electorales y prácticas democráticas.

CSC5 Aprovechar los criterios científicos de la estadística y la probabilidad para predecir y tomar decisiones en contextos sociales.

CSC6 Desarrollar capacidades, tales como pensar, argumentar, razonar, etc., como herramienta básica para la toma de decisiones como ciudadano.

CSC7 Usar herramientas matemáticas para interpretar, modelizar, resolver problemas, etc., que partan de realidades y problemáticas sociales.

Competencia de aprender a aprender.

CAA1 Hacer explícitos los procesos de resolución de problemas o tareas.

CAA2 Fomentar el hábito de autopreguntarse y reflexión, y de todo aquello que ayude al alumnado a conseguir la autorregulación.

CAA3 Diferenciar los conocimientos matemáticos tales como convenios, hechos, algoritmos, procedimientos, etc, y asociarles el tipo de aprendizaje (memorización, procesos, etc).

CAA4 Generar confianza, perseverancia y motivación de cara al propio aprendizaje.

Competencia autonomía e iniciativa personal.

CAI1 Proponer la realización de trabajos y su posterior exposición cumpliendo el plazo de entrega.

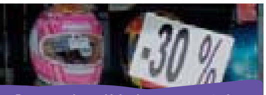
En las enumeraciones anteriores, los códigos se han añadido para poder abreviar las referencias en el cuadro adjunto de comentarios a las actividades.

2. Análisis de la unidad "Proporcionalidad y porcentajes"

a) *Antecedentes y criterios.*

Este es un tema clásico y sobre él se han asentado a lo largo del tiempo una serie de equívocos conceptuales, como decir que *"dos magnitudes son directamente proporcionales cuando a mayor valor de una, mayor de la otra; y a menor, menor"*; y también de rutinas no razonadas, como los cálculos por Regla de Tres multiplicando y dividiendo los datos en un orden determinado *"porque sí"*. Esos equívocos y esas rutinas se transmiten a los alumnos fuera de la clase de Matemáticas, en otras áreas e incluso en la familia; más grave es el caso de su reproducción en algunos libros de texto.

El tratamiento de este tema en los textos, por lo general, adolece de una presentación fragmentada y simplificadora que no acostumbra al alumno a la lectura ni a la reflexión. Es bastante común que tras una definición de *proporcionalidad directa* siga una lista de situaciones en las que reconocer su ausencia o su presencia, pero sin casos de relación directa no proporcional



ni, mucho menos, de proporcionalidad inversa. Ante un abanico tan mermado de posibilidades (o la proporcionalidad directa o la ausencia total de relación), la respuesta viene inducida por el contexto. Después, tras la explicación de un método de resolución de problemas de proporcionalidad directa, sigue habitualmente una lista de “problemas” que son todos de ese mismo tipo. De esa forma, ya no son problemas, sino ejercicios de repetición mimética. El alumno sabe que las actividades de esa página corresponden al título de la misma y que le basta con copiar/repetir los pasos del ejemplo que la encabeza. Además, los enunciados suelen ser muy concisos y los datos números naturales pequeños. Lo primero desemboca en que, ante enunciados más extensos, y cualquier información escrita cotidiana lo es, se ponga el grito en el cielo o se abandone; asimismo, se falsea la realidad, donde las medidas enteras son ocasionales y lo habitual son los números decimales y la necesidad de aproximarlos.

Algunas definiciones (constantes de proporcionalidad, porcentaje) se suelen dar “de golpe” o razonando sobre tablas de valores sin un significado. Pensamos que antes de definir conceptos debe verse su necesidad y que ello sólo se puede hacer desde situaciones y contextos prácticos.

Educar con simplificaciones conceptuales, definiciones súbitas y rutinas inexplicadas es algo que nada tiene que ver con el desarrollo de la competencia matemática que pretendemos. Partimos de una premisa: el principal legado que la formación matemática puede dejar a cada individuo es la capacidad para resolver problemas. Por ello buscamos la precisión conceptual como principio y el razonamiento como método. Entendemos que en este tema ambos objetivos son accesibles a la edad de los alumnos, sin exceder en absoluto su desarrollo cognitivo, y que posponerlos *“para después, cuando sean más mayores”* sólo crea una serie de ideas equivocadas muy difíciles de enmendar más tarde.

En consecuencia con todo lo anterior, en el desarrollo de esta unidad se han tomado las siguientes decisiones.

b) *Decisiones didácticas y metodológicas.*

i) Cada concepto y su definición vienen justificados por ser necesarios en situaciones y problemas de contexto que se han planteado antes.

ii) Se parte de dos situaciones, en cada una de las cuales están presentes varias magnitudes. En la primera (*En el supermercado*), se plantean simultáneamente la proporcionalidad directa, la relación directa no proporcional y la ausencia de relación. En la segunda (*Progreso atlético*) se plantean simultáneamente la proporcionalidad inversa, la relación inversa no proporcional y la ausencia de relación. Desde el principio se utilizan datos con dos decimales, cuando corresponde a la realidad de las magnitudes en cuestión (precios y marcas de atletismo).

iii) Tras distinguir unas relaciones de otras se enuncian las definiciones y se proponen varias actividades (nº 1 a 5). En sus enunciados no hay datos, queriendo así estimular la capacidad de razonamiento abstracto; aunque es adecuado orientar a los alumnos para que particularicen en casos concretos, como apoyo para inducir desde ellos respuestas generales. Además, se mezclan todos los tipos de relaciones comentados para que el alumno deba razonar cada respuesta y no responda llevado por el contexto.

iv) Los enunciados incluyen algunas frases cortas sin información práctica para el problema, pero pertinentes para dar sentido a la situación, que vayan acostumbrando a una lectura comprensiva y la posterior síntesis.

v) En cuanto a la elección de las situaciones propuestas, se ha intentado que tengan credibilidad y/o proximidad a los alumnos, con datos reales. Si el objetivo es desarrollar su competencia para matematizar la realidad, es sobre ella sobre la que, cuando sea posible, deben adiestrarse.

vi) Se ha procurado que la educación en valores no se centre en moralejas explícitas, sino que impregne las situaciones mismas: superación de los estereotipos de género, actitud responsable, cuidado del medio ambiente, igualdad, solidaridad, ayuda al desarrollo, consumo responsable, actitud crítica ante la publicidad y la información, etc.

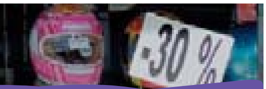
vii) Al abordar los problemas de proporcionalidad, se presentan inicialmente dos métodos (aplicación inmediata de la definición y reducción a la unidad) y se mezclan los dos tipos de proporcionalidad. Esto provoca que ya en las primeras actividades (nº 6 a 9) los alumnos deban reflexionar y decidir qué tipo de problema es y qué método seguir.

viii) La escritura de las tablas de valores en esos dos métodos puede hacerse en vertical o en horizontal. Se ha optado por lo primero para que dicha presentación formal coincida con la que luego se hace en la regla de tres.

ix) Damos la máxima importancia a la adquisición de los conceptos de las constantes de proporcionalidad. La esencia de la proporcionalidad directa e inversa está, respectivamente, en la constancia del cociente y del producto de valores correspondientes. Las rutinas para resolver problemas son formas de aplicar en la práctica ambas propiedades. Pero esas rutinas no deben anteponerse a los conceptos, pues, si se hace, se pasa de una matemática razonada a una matemática "mágica" o arbitraria.

x) Por el motivo precedente, las reglas de tres se resuelven planteando la conservación de esas constantes, lo cual actúa como recordatorio permanente de la propiedad esencial.

En la proporcionalidad directa, a buen seguro ocurrirá que donde hayamos planteado (p. ej: *Chinchetas*) la proporción $\frac{50}{40} = \frac{x}{3.500}$ los alumnos con ayuda externa plantearán esta otra: $\frac{40}{3.500} = \frac{50}{x}$, que



tiene la ventaja mnemotécnica de que los datos están espacialmente colocados al igual que en el planteamiento de la regla de tres.

En la proporcionalidad inversa, también ocurrirá (p. ej: *Fórmula I*) que donde hemos planteado $78{,}343 \cdot x = 75{,}650 \cdot 210{,}72$ esos alumnos "ayudados" plantearán $\dfrac{75{,}650}{78{,}343} = \dfrac{x}{210{,}72}$

En ambos casos, si les preguntamos *"por qué"* lo hacen así, se encogen de hombros diciendo que *"funciona y basta"*. Es éste un punto en el que los profesores de Matemáticas debemos optar por un modelo de enseñanza.

xi) Los problemas de proporcionalidad restantes (actividades nº 10 a 20) siguen la misma pauta de los anteriores: se mezclan sin orden alguno los dos tipos de proporcionalidad y los casos donde conviene usar cada uno de los tres métodos, haciendo así necesario discriminar y elegir entre seis tipos de situaciones (que en algunas actividades se combinan).

xii) El concepto de porcentaje podría ser definido sin más, como se hace en algunos textos. Pero, en coherencia con todo lo precedente, se plantean dos situaciones cotidianas (*Interés* y *Descuento*), se resuelven razonadamente y luego se reflexiona sobre los cálculos a que se ha llegado. De la generalización de esos cálculos surge la definición más simple del porcentaje: como fracción de una cantidad. Es más laborioso, pero así se recrea el proceso real y natural que da lugar a los conceptos matemáticos:

resolución de situaciones concretas ➔ análisis
➔ generalización ➔ definición

xiii) Se ofrecen hasta cinco métodos para el cálculo de porcentajes (regla de tres, fracción, producto por un decimal, cálculo mental en ciertos casos y método propio de la calculadora). Con ello, nuevamente se pretende (actividad 21) que el alumno analice cada caso y elija el método más adecuado. De igual forma se actúa en los siguientes problemas de porcentajes (actividades nº 22 a 42), donde nuevamente se combinan problemas de 5 clases y se debe elegir entre varios métodos.

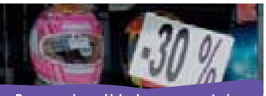
xiv) En la Actividad 35, *Ricos y pobres*, se indica la realización de gráficos de sectores aclarando: *"Debéis justificar la obtención de los grados de amplitud de cada sector circular y dibujarlos con compás y transportador; no se admiten gráficos de ordenador"*. En este caso, la realización manual de los gráficos pretende la puesta en práctica de la proporcionalidad en un nuevo contexto; otras ocasiones habrá, en especial en el tema de Estadística, para que los alumnos ejerciten su competencia digital y de tratamiento de la información haciendo los gráficos con la hoja de cálculo.

xv) Este tema ofrece unas claras oportunidades para realizar en clase de Matemáticas actividades de educación del consumidor y de lectura crítica de los medios de comunicación. Sin salirnos de los contenidos del tema, podemos dar cabida a la publicidad, a la observación de etiquetas, precios y ofertas, así como a la lectura de la prensa (con textos de extensión progresiva). Oportunidades que no debiéramos desaprovechar y que contribuyen a la creación de una imagen positiva de la utilidad de las Matemáticas para mejorar la calidad de vida de ciudadanos conscientes.

c) *Actividades*

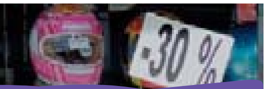
A continuación se presentan unos cuadros donde, para cada una de las actividades propuestas a los alumnos, se detallan: tipo de problema, soluciones, observaciones o notas para el profesor y cuáles son las competencias básicas a cuyo desarrollo contribuyen (indicadas con las claves antes enumeradas en el apartado 1.c)

Actividad	Tipo de problema	Soluciones	Observaciones	Competencias
1. Bebés	Reconocer magnitudes y relaciones de proporcionalidad	*a)* edad *b)* peso c) estatura *d)* pañales *a)* y *d)* directamente proporcionales *a)* y *b)* relación directa no proporcional *a)* y *c)* relación directa no proporcional	Confusión típica: citar la edad en años y la edad en meses como dos magnitudes diferentes.	CM: 1, 2, 3 CL: 1, 2 CMF: 1, 3 CTI2 CAA: 2, 4
2. De viaje	Reconocer relaciones de proporcionalidad	Directamente proporc: *a)* y *b)* Inversamente proporcionales: *a)* y *c)*; *b)* y *c)*; *e)* y *f)*	Valores: responsabilidad y conducción	CM: 1, 2, 3 CL: 1, 2 CTI2 CMF: 1, 2 CAA: 2, 4
3. La piscina	Reconocer relaciones de proporcionalidad	Directamente proporc: *a)* y *b)* Inversamente proporcionales: *a)* y *d)*; *b)* y *d)*		CM: 1, 2, 3 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 2, 4
4. Vacas	Reconocer relaciones de proporcionalidad	Directamente proporcionales: *a)* y *c)*; *b)* y *c)*; *d)* y *e)* Inversamente proporcionales: *a)* y *e)*; *b)* y *e)*; *c)* y *e)*	Valores: responsabilidad y planificación.	CM: 1, 2, 3 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 2, 4
5. Busca magnitudes	Búsqueda de magnitudes y reconocer relaciones de proporcionalidad	*a)* directamente proporcional con el precio de mano de obra *b)* inversamente proporcional con el tiempo que tardan *c)* inversamente proporcional con el dinero que aporta cada uno *d)* directamente proporc. con el gasto *e)* directamente proporcional con la distancia recorrida en una vuelta e inversamente proporcional con el número de vueltas necesario para cubrir una distancia		CM: 1, 2, 3 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 2, 4
6. Gasolina	Proporcionalidad directa Reducción a la unidad	47,50 €		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4



Actividad	Tipo de problema	Soluciones	Observaciones	Competencias
7. Traslado	Proporcionalidad inversa Aplicación inmediata de la definición	12 personas: 14 minutos 2 personas: 84 minutos	Valores: responsabilidad ante los compromisos	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CSC6 CAA: 1, 2, 3, 4
8. Como un flan	Proporcionalidad directa múltiple Aplicación inmediata de la definición	Para 3 personas: 10 h, 3 v. y 12 c.a. Para 9 personas: 15 h, 4,5 v. y 18 c.a. Para 12 personas: 20 h, 6 v. y 24 c.a.		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
9. Vaciado	Proporcionalidad inversa Reducción a la unidad	2 h. 15 min.		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
10. Cortinas	Proporcionalidad directa Regla de Tres	72,08 €	Redondeo del euro	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
11. VoluntaRíos	Proporcionalidad inversa Aplicación inmediata de la definición	21 personas	Valores: defensa del medio ambiente	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 1, 2, 3, 5 CTI2 CSC6 CAA: 1, 2, 3, 4
12. Plátanos	Proporcionalidad directa Reducción a la unidad o Regla de Tres	2,64 €/kg 2,19 €	Redondeo del euro	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
13. La merienda	Proporcionalidad inversa Reducción a la unidad o Regla de Tres	3,41 €	Presencia de un dato innecesario (2 pizzas) Redondeo del euro	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
14. Mapa	Proporcionalidad directa Regla de Tres	27 km escala 1: 1.000.000	Asegurar la coordinación con CC. Sociales	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CTI: 1, 2 CMF: 1, 3, 4, 5 CAA: 1, 2, 3, 4
15. Gallinas	Proporcionalidad inversa Regla de Tres	Puedo comprar 488 gallinas	Enunciado no lineal, más elaborado	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
16. Expedición	Proporcionalidad directa Reducción a la unidad + Proporcionalidad inversa Regla de Tres	Para 11 personas: 60,5 l. diarios 5,5 l. por persona y día Para 13 personas: 4,3 l. por persona y día	Enunciado no lineal, más elaborado	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 1, 3, 5 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
17. Buzoneo	Proporcionalidad directa Regla de Tres	350 € para Marta y 200 € para Omar	Se pueden hacer dos reglas de tres o una regla de tres y restar del total	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF1 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4

Actividad	Tipo de problema	Soluciones	Observaciones	Competencias
18. Estanque	Proporcionalidad inversa Regla de Tres	1 h. 16 min. 40 seg.	Paso de medidas complejas a incomplejas en el sistema sexagesimal	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 1, 5 CTI2 CAA: 1, 2, 3, 4
19. Ciudad accesible	Proporcionalidad directa Regla de Tres	17.000 personas en sillas de ruedas, aproximadamente	Valores: igualdad Estimación, azar, representatividad de la muestra	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 1, 2, 4, 5 CTI2 CSC: 5, 6, 7 CAA: 1, 2, 3, 4
20. La cosecha	Proporcionalidad directa Regla de Tres	22 t. 841,5 kg ≈ 23 t. aprox.	Estimación, azar, representatividad de la muestra, redondeo	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CTI: 2, 5 CMF: 1, 2, 3, 4, 5 CAA: 1, 2, 3, 4
21. Calcula porcentajes	Cálculo de porcentajes	14,7 1.350 48,36 416 70 2.072 92 30 1.000 139,57 888,48 365,72 479,57 439,37 124,62 64,39 527,1 462,6	Insistir en que se siga el método propuesto	CM7
22. Gafas	Expresar como porcentaje	26,92%		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CAA1
23. Reciclado de basuras	Cálculo del total	En 2008, 525 kg de basura por habitante En 2003 se reciclaban 39,375 kg de basura por habitante	Valores: cuidado del medio ambiente	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2, 4 CSC6 CMF: 2, 3, 4, 5 CAA: 1, 2
24. El 0,7%	Cálculo de porcentaje	Al año 191,73 €. Al día 0,53 €	Valores: solidaridad	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CAA: 1, 2 CMF: 2, 3, 4, 5 CTI: 2, 4 CSC: 5, 6, 7
25. Piel de tiburón	Disminución porcentual	Podría hacer un tiempo de 1:02.18		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CAA: 1, 2 CMF: 3, 4, 5 CTI2
26. Votos	Cálculo del total	131.150 votos	Necesidad del redondeo a un número natural.	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CSC4 CMF: 2, 4 CTI2 CAA: 1, 2
27. Población mundial	Aumento porcentual	7.276.200.000 habitantes aprox.		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CAA: 1, 2 CMF: 2, 3, 4, 5 CTI: 2, 4 CSC: 5, 7



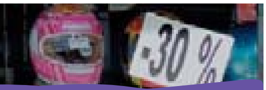
Actividad	Tipo de problema	Soluciones	Observaciones	Competencias
28. Liga 2008-09	Expresar como porcentaje	71% de victorias; 15,8% de empates; 13,2% de derrotas		CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF2 CTI2 CAA: 1, 2
29. Aprobados y suspensos	Comparaciones mediante %	En Economía: 31,8% de suspensos. En Latín: 29,7% de suspensos. En Filosofía: 26,7% de suspensos.	Se dan datos de aprobados. Se pregunta por suspensos.	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CTI2 CAA: 1, 2
30. Planta acuática	Aumentos porcentuales	Mañana: 7/20 del estanque. Pasado mañana: 147/400 del estanque	Cálculo con fracciones y simplificación.	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 3, 4, 5
31. La mejor oferta	Comparaciones mediante %	Sólo por porcentajes: *3 x 2* (-33,3%); *-30%; -25%; 2ª unidad a mitad de precio* (-25%); *4x3* (-25%); *-20%.* Además, considerar número de unidades que necesitamos, que altera ese orden	Educación del consumidor. Combinar Matemáticas y sentido común.	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2, 3 CMF: 1, 2, 4 CTI: 2, 3, 4 CSC: 3, 6 CAA: 1, 2, 3, 4
32. El precio del viaje	Disminución porcentual	Antes del 1 de junio, 1.971,60 €. A partir del 1 de junio, 2.120 €.	Educación del consumidor.	CM: 1, 2, 3, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 2, 4, 5 CTI2 CSC: 3, 6 CAA: 1, 2
33. Rebajas rebajadas	Porcentajes acumulados	No es correcto, porque: precio · 0,80 · 0,70 = precio · 0,56 es diferente de precio · 0,50 El segundo porcentaje se calcula sobre una cantidad diferente que el primero.	Educación del consumidor.	CM: 1, 2, 3, 4, 5, 7 CL: 1, 2 CMF: 1, 2, 4 CTI: 2, 3 CSC: 3, 6 CAA: 1, 2, 3, 4
34. IVA ¿antes o después?	Porcentajes acumulados	Es indiferente antes o después, ya que: precio· 0,70 · 1,16 = precio· 1,16 · 0,70 ya que el producto es conmutativo	Educación del consumidor.	CM: 1, 2, 3, 4, 5, 7 CL: 1, 2, 3 CTI: 2, 3 CMF: 1, 2, 4 CSC: 3, 6 CAA: 1, 2, 3, 4
35. Ricos y pobres	Cálculo de porcentajes Representación gráfica		Trabajo en grupo. Valores: solidaridad. Verbalizar conclusiones	CM: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 CL: 1, 2 CMF: 1, 2, 4, 5 CTI: 1, 2, 3, 4 CSC: 1, 2, 5, 7 CAA: 1, 2, 3, 4 CAI1
36. Investigando en el "súper"	Cálculo de porcentajes Control de variables		Trabajo en grupo. Educación del consumidor. Verbalizar conclusiones	CM: 1, 2, 3, 5, 7, 8 CL: 1, 2 CMF: 1, 2, 4 CTI: 1, 2, 3, 4 CSC: 1, 2 CSC: 3, 6 CAA: 1, 2, 3, 4 CAI1

Actividad	Tipo de problema	Soluciones	Observaciones	Competencias
37. Anuncio en TV	Comparaciones mediante %	Los descuentos han evolucionado a peor	Educación del consumidor. Medios de comunicación.	CM: 1, 2, 3, 5, 7, 8 CL: 1, 2, 3 CMF: 1, 2, 4 CTI: 2, 3, 4 CSC: 3, 6 CAA: 1, 2, 3, 4
38. Muchos diabéticos	Concepto de porcentaje	Se confunde 7% con *siete de cada diez*	Medios de comunicación.	CM: 1, 2, 3, 8 CL: 1, 2, 3 CMF: 2, 4 CTI: 2, 3, 4 CSC5 CAA: 1, 2, 4
39. Gran caída	Concepto de porcentaje	Porcentaje imposible. La caída máxima es del 100% (llegar al valor cero).	Medios de comunicación.	CM: 1, 2, 3, 8 CL: 1, 2, 3 CMF: 2, 4 CTI: 2, 3, 4 CAA: 1, 2, 4
40. NBA	Concepto de porcentaje y su pertinencia	Nacional Basket Asociation. . En España, la ACB Magnificación de la noticia en los medios de comunicación. Calderón tiene mayor porcentaje. Quien hubiera encestado 15 de 15 no merece ser comparado y liderar esa clasificación. No está claro, pues son porcentajes próximos y Allen ha realizado casi el doble de tiros.	Medios de comunicación.	CM: 1, 2, 3, 5, 7, 8 CL: 1, 2, 3 CMF:1, 2, 4 CTI: 2, 3, 4 CSC5 CAA: 1, 2, 3, 4
41. Precio de la vivienda	Porcentajes acumulados	El cálculo es incorrecto pues se suman porcentajes sobre cantidades diferentes. Cálculo correcto: $1{,}034 \cdot 1{,}051 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}125 = 1{,}33$ Es decir, una subida del 33% en cuatro años, no del 30%.	Medios de comunicación	CM: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 CL: 1, 2, 3 CMF:1, 2, 4 CTI: 2, 3, 4 CSC: 5, 7 CAA: 1, 2, 3, 4
42. Asesores para las rebajas	Lectura y síntesis		Educación del consumidor. Relevancia social de la cultura matemática y los porcentajes. Medios de comunicación.	CL: 1, 2 CTI: 2, 3 CSC: 6, 7 CAA2

3. Para saber más

Bibliografía

Seminario de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Córdoba, octubre 2008): *Documento "Análisis y desarrollo de la competencia matemática"*. Se obtiene en www.fespm.es



Fiol, M.ª L./Fortuny, J. Mª**:** *Proporcionalidad Directa; la forma y el número.* Colección *Matemáticas, cultura y aprendizaje* nº 20. Ed. Síntesis 1990.

Nortes Checa, A.: *Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas.* Revista SUMA 36 (Febrero 2001), pp. 43-49.

Rapetti, M.: *Proporcionalidad. Razones internas y razones externas.* Revista SUMA 44 (Noviembre 2003), pp. 65-70.

Hernández, B: *Dietética y Matemática.* Revista SUMA 46 (Junio 2004), pp. 83-86.

En Internet

Actividad 11. *Voluntarios*: http://www.voluntarrios.org/

Actividad 23. *Reciclado de basuras*:
http://escuelas.consumer.es/web/es/reciclaje/index.php

Actividad 24. *El 0, 7%:*
http://www.fespinal.com/espinal/realitat/pap/pap128.htm

Actividad 25. *Piel de tiburón*:
http://mediablog.eitb24.com/periodismociudadano/tag/banadores/
http://lilip-fisica.blogspot.com/2008/08/la-fsica-de-los-juegos-olmpicos.html

Actividad 27. *Población mundial:*
World Urbanization Prospects: 2007 revision. United Nations. New York 28-02-08.
http://www.un.org/esa/population/publications/wup2007/2007WUP_Highlights_web.pdf

Actividad 28. *Ricos y pobres:*
http://indexmundi.com/g/r.aspx?v=65&l=es
http://indexmundi.com/g/r.aspx?v=21&l=es
http://es.wikipedia.org/wiki/PIB
http://es.wikipedia.org/wiki/Lista_de_pa%C3%ADses_por_poblaci%C3%B3n

Actividad 29. *Investigando en el "súper":*
http://www.aspec.org.pe/campanas/chocolate/documentos/no_todo_lo_que_parece_chocolate.pdf
http://www.eroj.org/entero02/item12.htm

Actividad 40. *NBA:*
http://www.nba.com/history/records/

Unidad didáctica en el Proyecto Descartes:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Proporcionalidad_lbc/indice.htm

Web *Matemáticas en tu mundo*: http://catedu.es/matematicas_mundo/

Unidad didáctica
Proporcionalidad y porcentajes

José Mª Sorando Muzás

MATERIAL PARA EL ALUMNADO

ANTES DE EMPEZAR

Qué vamos a estudiar

Las expresiones *proporción* y *proporcional* se pueden escuchar cuando se habla de cualquier tema. Oímos en las noticias que *"las grandes ciudades piden que se reparta la subvención entre los municipios de forma directamente proporcional a su población"*. Incluso en un episodio de *Los Simpson,* Martin, el amigo de Bart al que le chiflan las Matemáticas, dice: *"la capacidad de hacer travesuras que tiene un alumno es inversamente proporcional a lo cerca que esté del profesor"*. Esperamos que al terminar esta unidad comprendas el significado de esas frases.

Los *tantos por ciento* son la forma corriente de expresar hechos muy variados: las pérdidas de la Bolsa, los aciertos en tiros a canasta de un jugador de baloncesto, los votos conseguidos por un partido político, la incidencia de la última gripe, etc.

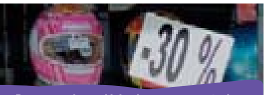
En esta unidad aprenderás a distinguir cuándo existe proporcionalidad y, en tal caso, si es directa o inversa, siendo capaz de resolver problemas en esas situaciones. Un tipo especial de la proporcionalidad directa son los porcentajes. Dedicaremos especial atención a conocer su aplicación práctica: saber calcularlos, saber cuándo son útiles y cuándo son inadecuados, así como resolver problemas donde intervienen. También veremos qué uso se hace de ellos en la publicidad y la prensa. Debemos ser capaces de analizar esas informaciones para así, con ayuda de los números, tener opinión propia y tomar nuestras propias decisiones; especialmente, saber cuándo y cómo comprar.

Recuerda

A continuación, te recordamos algunos conceptos que ya has estudiado en los cursos o en los temas anteriores. Los vas a utilizar en esta unidad. Si no los recuerdas bien, repásalos ahora.

- Al estudiar el Sistema Métrico Decimal, aprendiste que:

  Magnitud: *es una cualidad que se puede medir y cuantificar con un número.*



Ejemplo. En una persona, son magnitudes: su peso, su estatura, el número que calza o su edad; todas ellas se pueden conocer mediante un número. Pero no son magnitudes: el color de sus ojos, su nombre o su lugar de nacimiento.
Cualquier objeto o situación en que nos fijemos está repleto de cualidades. Se puede trabajar matemáticamente con aquellas que son medibles, las magnitudes.

No hay que confundir una magnitud con su unidad de medida.

Ejemplo. Si una tabla mide 1,52 metros de longitud, la magnitud es la longitud, no los metros. Esa magnitud también se podía haber medido, por ejemplo, en centímetros y diríamos que la tabla mide 152 cm. Metros, centímetros... no son magnitudes, sino unidades de medida de la magnitud longitud.

- Al estudiar las Fracciones, aprendiste:

Razón y proporción: *La razón de dos cantidades es su cociente indicado. Una proporción es la igualdad de dos razones.*

Ejemplo: La razón entre 2 y 5 es $\frac{2}{5}$

Sabemos que $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$; ésa es una proporción

Propiedad de las proporciones: *En una proporción, el producto de sus medios es igual al producto de sus extremos.*

Ejemplo: En la proporción $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

5 y 6 son los medios; 2 y 15 son los extremos.
Observa que: $5 \cdot 6 = 30$ y también $2 \cdot 15 = 30$

En general, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $b \cdot c = a \cdot d$

- Al estudiar las Operaciones con los Números Naturales y Decimales, aprendiste:

Relación entre los elementos de una multiplicación: *Si se divide el producto de dos factores entre uno de ellos, se obtiene el otro factor.*

Ejemplo: $5 \cdot 7 = 35$ luego $35 : 5 = 7$ y también $35 : 7 = 5$
En general, si $a \cdot b = c$ entonces $c : a = b$ y también $c : b = a$

- Al estudiar los Números Decimales, aprendiste:

Regla de redondeo del euro: *Si, como resultado de cálculos, un precio tiene tres o más decimales, se debe redondear a las centésimas.*

Ejemplo: Si compro un pollo que pesa 1,567 kg y el pollo hoy está a 2,85 € el kg, el precio que debo pagar es
$1{,}567 \cdot 2{,}85 = 4{,}46595 \approx 4{,}47$ €

PROPORCIONALIDAD

En cualquier lugar a donde vayas, y en cualquier hecho en el que te fijes, encontrarás magnitudes. Unas estarán relacionadas entre sí y otras no. Las relacionadas pueden estarlo de diferentes formas. Vamos a verlo en dos situaciones prácticas.

Proporcionalidad directa

En el supermercado:

Hace buena mañana. Jorge oye en la radio que hay 16º C. Irá pronto a la compra, antes de que haya mucha gente en el supermercado. Al entrar en el "súper" ve que hay 4 cajas de pago.

Va a comprar manzanas y detergente. Las manzanas se venden a granel, a 1,30 € el kg. El detergente que quiere se vende en paquetes de tres tamaños: el de 500 gr, que vale 1,20 €; el de 2kg, que vale 3,50 €; y el de 5 kg, que vale 6,20 €.

Observa:

En esta situación, *¿qué magnitudes aparecen?*

La temperatura, el número de cajas, el peso y el precio de las manzanas que compre; y el peso y el precio del paquete de detergente que elija.

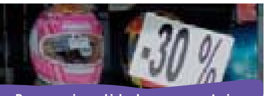
¿Hay alguna relación entre ellas?

La temperatura y el número de cajas no guardan relación con ninguna de las demás; el peso y el precio de las manzanas están relacionados; y también lo están el peso y el precio del detergente. En estos dos últimos casos, como es lógico, *a mayor peso corresponde mayor precio y a menor peso corresponde menor precio*. Diremos que hay una *relación directa* entre ellas.

Pero esa relación, *¿es la misma en uno y otro caso?* Para poder responder, hay que hacer cálculos.

En las manzanas:

Si compra 1 kg paga 1,30 €
Si compra 2 kg paga 2 · 1,30 = 2,60 €
Si compra 0,5 kg paga 0,5 · 1,30 = 0,65 €
Si compra 3 kg paga 3 · 1,30 = 3,90 €



Es decir, a doble peso corresponde doble precio; a mitad de peso, mitad de precio; a triple peso, triple precio; etc.

Decimos que *el peso y el precio de las manzanas son directamente proporcionales.*

En el detergente:

Si compra 0,5 kg paga 1,20 €

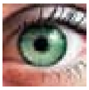
Si compra 2 kg, que es 4 veces más, no paga 4· 1,20 = 4,80 €, sino 3,50 €

Si compra 5 kg, que es 10 veces más, no paga 10·1,20 = 12 €, sino 6,20 €

Es decir, a doble peso no corresponde doble precio; a un peso 10 veces mayor no corresponde un precio 10 veces mayor; etc.

El peso y el precio de los paquetes de detergente no son directamente proporcionales.

Definición. Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir el valor de una de ellas por un número, el valor de la otra queda multiplicado o dividido por ese mismo número.



¡OJO! Para que dos magnitudes sean directamente proporcionales no basta con que "a mayor valor de una, mayor valor de la otra; y a menor, menor" (recuerda el caso del detergente). Mucha gente se confunde con esto.

Actividad 1. Bebés

Al poco de nacer, se cuenta la edad de un bebé en meses; más adelante, en años. Conforme pasa el tiempo, gracias a los cuidados que recibe, el bebé engorda y crece. El pediatra anota en un gráfico los progresos de la criatura, que en estos años consume un gran número de pañales.

En esta situación, ¿qué magnitudes observas?; ¿cuáles de ellas están relacionadas con la edad y cómo?

Proporcionalidad inversa

Progreso atlético

Mi vecina Paula vive en el piso 3º y practica atletismo. Al principio, entrenaba 2 días a la semana y consiguió correr los 200 m en 28,05 seg. En la temporada siguiente, pasó a entrenar 3 días a la semana y mejoró hasta correr los 200 m en 27,53 seg. Al empezar esta temporada decidió entrenar más en serio, 4 días a la semana. El pasado domingo mejoró su tiempo: 26,75 seg., y con ello consiguió la marca mínima exigida para participar en el Campeonato de España.

Para celebrar su éxito, Paula va a invitar a pasteles a sus compañeros, al terminar el entrenamiento de hoy. Como son 8 atletas en su grupo, ha comprado 24 pasteles, de modo que haya 3 para cada uno. Pero sólo han ido a entrenar 6, así que el reparto cambia...

Observa:

En esta situación, *¿qué magnitudes aparecen?*

El piso donde vive Paula, el número de entrenamientos semanales, su tiempo en los 200 m, el número de atletas en el entrenamiento de hoy y el número de pasteles para cada uno.

¿Hay alguna relación entre ellas?

El piso donde vive no guarda relación con ninguna de las demás. Entrenando más, Paula ha logrado correr los 200 m en menos tiempo; es decir, cuando entrenaba menos, corría en más tiempo. Con más atletas, cada uno comerá menos pasteles; pero si ese día van menos a entrenar, cada uno de los presentes comerá más pasteles. En estos dos últimos casos, *a mayor valor de una magnitud corresponde menor valor de la otra; y viceversa, a menor valor de una, mayor valor de la otra.* Diremos que hay una *relación inversa* entre ellas.

Pero esa relación, *¿es la misma en uno y otro caso?* Para poder responder, hay que hacer cálculos.

En el reparto de los 24 pasteles:

Si van a entrenar 8 atletas, habrá 24: 8 = 3 pasteles para cada uno.

Si van a entrenar 4 atletas, habrá 24: 4 = 6 pasteles para cada uno.

Si fueran 16 atletas, habría 24: 16 = 1,5 pasteles para cada uno.

Es decir, si van doble número de personas, cada uno recibirá la mitad de pasteles; si van la mitad, recibirán el doble; etc.

Decimos que *el número de personas y el número de pasteles que recibirá cada una son inversamente proporcionales.*

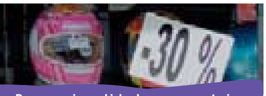
En la mejora de la marca de 200 m:

Entrenando 2 veces a la semana, Paula corría en 28,05 seg.

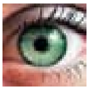
Entrenando el doble, 4 veces a la semana, corrió en 27,53 seg., que, por supuesto, ¡no es la mitad de tiempo!

Es razonable suponer que si hubiese bajado el número de entrenamientos a la mitad, 1 por semana, correría en más tiempo, ¡pero no en el doble de tiempo!

El número de entrenamientos semanales y la marca en los 200 m no son inversamente proporcionales.



Definición. Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor de la otra queda dividido por ese mismo número. Y viceversa: cuando al dividir el valor de una de ellas por un número, el valor de la otra queda multiplicado por ese mismo número.



¡OJO! Para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales no basta con que "a mayor valor de una, menor valor de la otra; y a menor, mayor" (recuerda el caso de los entrenamientos). Mucha gente se confunde con esto.

Actividad 2. De viaje

Si voy a salir de viaje en coche, debo controlar antes si llevo suficiente gasolina; y si no es así, si llevo bastante dinero para cargar la gasolina necesaria. También debo prever el tiempo que va a durar el viaje; y, una vez en carretera, la velocidad adecuada. Fallar en cualquiera de estos cálculos me podría poner en dificultades, incluso graves.

En esta situación están presentes, al menos, estas magnitudes:

a) el precio del litro de gasolina.
b) el precio que me costaría llenar el depósito.
c) los litros de gasolina que puedo cargar con 30 € (el dinero que llevo).
d) el número que indica el cuentakilómetros antes de salir.
e) la velocidad media que consiga mantener en el viaje.
f) el tiempo que va a durar el viaje.

¿Cuáles de esas magnitudes están relacionadas entre sí?; y ¿de qué manera?

Actividad 3. La piscina

Llenar de agua una piscina es un proceso costoso, en tiempo y en dinero. Intervienen varias magnitudes:

a) el número de grifos para llenarla.
b) la cantidad de agua que esos grifos vierten en 1 hora.
c) el precio del agua que llena la piscina.
d) el tiempo que se tarda en el llenado.

¿Cuáles de esas magnitudes están relacionadas entre sí?; y ¿de qué manera?

Actividad 4. Vacas

En una granja de vacas, el granjero ha de ser muy previsor para asegurar la alimentación de su ganado. Ha de saber:

a) el número de vacas que tiene;
b) la ración diaria recomendada de pienso por vaca;
c) el consumo diario de pienso de todas sus vacas;
d) la cantidad de pienso almacenado;
e) el número de días que puede alimentar a sus vacas con el pienso almacenado.

¿Cuáles de esas magnitudes están relacionadas entre sí?; y ¿de qué manera?

Actividad 5. Busca magnitudes

A continuación te indicamos varias magnitudes. Para cada una, busca otra magnitud que sea proporcional con ella. Justifica si lo es de forma directa o inversa:

a) las horas que tarda un mecánico en reparar mi coche.
b) el número de obreros que van a cavar una zanja.
c) el número de personas que participamos en la compra de un regalo de cumpleaños.
d) las horas que está encendida la calefacción.
e) el radio de la rueda de un coche.

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

En las situaciones de proporcionalidad se plantean problemas que podemos resolver por tres métodos:

- **aplicando de forma inmediata las definiciones de proporcionalidad**
- **por reducción de la unidad**
- **por Regla de Tres**

En cada caso es más conveniente utilizar uno u otro. Debes conocerlos todos para así poder escoger cada vez el más adecuado.

Aplicación inmediata de la proporcionalidad

Producción

> Una máquina produce 18 piezas en 15 minutos. ¿Cuántas producirá en 5 minutos, en 10 minutos y en una hora?

En este caso las magnitudes son el *tiempo* y el *número de piezas*. Son directamente proporcionales.

Entonces, en 5 minutos, que es la tercera parte de 15, se producirá la tercera parte: 18: 3 = 6 piezas.

Y en 10 minutos, que es el doble de 5 minutos, se producirá el doble: $6 \cdot 2 = 12$ piezas. En una hora, es decir 60 minutos, que es 6 veces 10 minutos, se producirán: $6 \cdot 12 = 72$ piezas.

Estos cálculos se pueden ordenar en una tabla de datos:

Tiempo (min.)	Nº piezas
15	18
5	6
10	12
60	72

Alquiler de bus

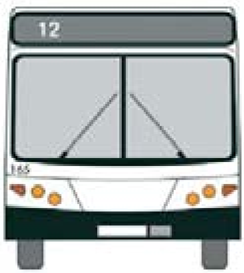
Para ir de excursión alquilamos un autobús entre 20 compañeros de clase y debemos pagar 21 € cada uno. El precio del alquiler es el mismo, sea cual sea el número de viajeros, tanto si vamos más como si vamos menos. ¿Cuánto deberíamos pagar cada uno si sólo fuéramos 10 a la excursión? ¿Y si fuéramos 40 viajeros?

En este problema las magnitudes son el *número de compañeros* y el *precio a pagar por cada uno*. Son inversamente proporcionales.

Si fuéramos 10 a la excursión, que es la mitad de 20, tendríamos que pagar cada uno el doble: 21 € · 2 = 42 €

Y si fuéramos 40 a la excursión, que es el doble de 20, tendríamos que pagar cada uno la mitad: 21 €: 2 = 10,50 €

Estos cálculos se pueden ordenar en una tabla de datos:



Nº viajeros	Precio por persona (euros)
20	21
10	42
40	10,50

Reducción a la unidad

Pintores

Dos pintores han pintado una casa en 6 días. ¿Cuánto hubiesen tardado 3 pintores? ¿Y 4 pintores?

Aquí las magnitudes son el *número de pintores* y el *tiempo que tardan en pintar la casa*. Son inversamente proporcionales, ya que: con el doble de pintores, se tardaría la mitad de tiempo; con la mitad de pintores, se tardaría el doble de tiempo; etc.

Pero con los datos del problema no se puede aplicar de forma inmediata la definición de proporcionalidad: 3 pintores no es el doble de 2, ni el triple... no es un múltiplo. Entonces podemos plantearnos: ¿cuánto tardaría un solo pintor? Saberlo nos permitirá responder a todas las preguntas, pues cualquier número de pintores será múltiplo de 1.

También en este caso es útil reflejar los datos y cálculos en una tabla:

Nº pintores	Tiempo (días)
2	6
1	$6 \cdot 2 = 12$
3	$12: 3 = 4$
4	$12: 4 = 3$

Fotocopias

En la copistería, por 36 fotocopias me han cobrado 1,80 €. ¿Qué precio me cobrarán por 27 fotocopias?

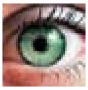
Las magnitudes son el *número de fotocopias* y el *precio* (en euros). Son directamente proporcionales: a triple cantidad de copias, triple precio; a la mitad de copias, mitad de precio, etc.

Pero los datos conocidos, 36 y 27, no son múltiplos entre sí; de manera que no podemos aplicar de forma inmediata la definición de la proporcionalidad. Nuevamente va a ser de utilidad calcular qué valor de la segunda magnitud corresponde al valor 1 de la primera magnitud. Es decir: calcularemos el precio de una fotocopia y con él ya nos será posible calcular el precio de cualquier número de copias.

Reflejamos los datos y cálculos en una tabla:

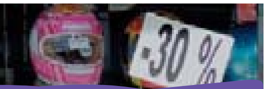
Nº fotocopias	Precio (euros)
36	1,80
1	$1{,}80: 36 = 0{,}05$
27	$0{,}05 \cdot 27 = 1{,}35$

¡OJO! Al empezar cualquiera de estos problemas, lo primero que hay que hacer es razonar estos aspectos:



- **qué magnitudes hay en el problema**
- **¿hay proporcionalidad entre esas magnitudes?**
- **si hay proporcionalidad, ¿de qué tipo es?**
- **con los datos del problema, ¿cuál es el método más adecuado?**

Sin tener claro todo eso, de nada sirve empezar a hacer cálculos.



Actividad 6. Gasolina

Mi amigo Raúl acaba de cargar 17 litros de gasolina sin plomo y ha pagado 16,15 €. Llevo el depósito vacío y debo llenarlo con 50 litros de gasolina de la misma clase. ¿Cuánto tendré que pagar?

Actividad 7. Traslado

Por renovación del mobiliario de varias aulas, hemos tenido que trasladar todas sus sillas al patio. Habíamos quedado 12 personas para hacerlo, pero al final sólo hemos venido 4; ¡vaya faena! Así, hemos hecho el trabajo en 42 minutos. ¿Cuánto tiempo hubiésemos tardado si hubiesen venido todos? ¿Y si sólo hubiésemos sido 2 personas?

Actividad 8. Como un flan

Para celebrar que estrena piso, Julio ha invitado a comer en casa a sus amigos en tres días y está nervioso por que todo salga bien. Va a preparar como postre flanes, según la receta de su abuela, que le dijo: *"para 6 personas, hay que usar 10 huevos, 3 vasos de leche y 12 cucharadas de azúcar"*. ¿Qué ingredientes deberá usar para el flan de cada día, si un día serán 3 personas a comer, otro día serán 9 y otro serán 12?

Actividad 9. Vaciado

Un depósito tiene 3 desagües. Si se abren los tres, el depósito se vacía en 90 minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse si sólo se abren dos?

Constantes de proporcionalidad

Primero vamos a trabajar con las tablas de datos de dos problemas de proporcionalidad directa que antes resolvimos: *Producción* y *Fotocopias*.

Tiempo (min.)	Nº piezas
15	18
5	6
10	12
60	72

Nº fotocopias	Precio (euros)
36	1,80
1	0,05
27	1,35

Fíjate qué sucede si dividimos cada pareja de valores correspondientes.

En *Producción*: $\frac{18}{15} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{72}{60} = 1{,}2$ (piezas/minuto)

Decimos que en este caso 1,2 es la constante de proporcionalidad directa.

En *Fotocopias*: $\frac{1,80}{36} = \frac{0,05}{1} = \frac{1,35}{27} = 0,05$ (€/fotocopia)

Decimos que en este caso 0,05 es la constante de proporcionalidad directa.

En general:

Si dos magnitudes son directamente proporcionales, al dividir cualquier pareja de valores correspondientes se obtiene siempre el mismo valor, al que llamamos **constante de proporcionalidad directa o razón de proporcionalidad**.

Y ahora vamos a trabajar con las tablas de datos de dos problemas de proporcionalidad inversa que antes resolvimos: *Alquiler de bus* y *Pintores*.

Nº viajeros	Precio por persona (euros)
20	21
10	42
40	10,50

Nº pintores	Tiempo (días)
2	6
1	12
3	4
4	3

Fíjate qué sucede si multiplicamos cada pareja de valores correspondientes.

En *Alquiler de bus*: $20 \cdot 21 = 10 \cdot 42 = 40 \cdot 10,50 = 420$

Decimos que en este caso 420 es la constante de proporcionalidad inversa.

En *Pintores*: $2 \cdot 6 = 1 \cdot 12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$

Decimos que en este caso 12 es la constante de proporcionalidad inversa.

En general:

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al multiplicar cualquier pareja de valores correspondientes se obtiene siempre el mismo valor, al que llamamos **constante de proporcionalidad inversa**.

Estas constantes de proporcionalidad nos van a permitir un nuevo método para resolver los problemas, la Regla de Tres.

Reglas de Tres

Chinchetas

Elisa trabaja en una ferretería. Tiene que averiguar cuántas chinchetas hay en una bolsa de 3,5 kg. Ha comprobado que una bolsita de 50 chinchetas pesa 40 gr. Usando la proporcionalidad conseguirá saber cuántas hay sin tener que contarlas. ¿Cómo lo hará?

Las magnitudes son el "peso" (en gramos) y el "número de chinchetas". Son directamente proporcionales: a doble peso, doble número de chinchetas; a la mitad, mitad; etc. Planteamos los datos en la siguiente tabla, donde x es el número de chinchetas desconocido:

Peso (gr.)	Nº chinchetas
40	50
3.500	x

El problema así planteado se dice que es una **Regla de Tres Directa**, ya que hay cuatro datos y conocemos tres de ellos.

La razón de proporcionalidad es:

$$\frac{50}{40} = \frac{x}{3.500}$$

En la anterior *proporción*, el producto de medios es igual al producto de extremos:

$$40 \cdot x = 50 \cdot 3.500$$
$$40 \cdot x = 175.000$$

Aplicando la conocida relación entre los elementos de una multiplicación:

$$x = 175.000 : 40 = 4.375 \text{ chinchetas}$$

Elisa ha evitado un trabajo muy pesado: ¡contar 4.375 chinchetas! *Pensar usando las Matemáticas nos puede ayudar a vivir mejor.*

ATENCIÓN: En algunos libros verás que se plantea la proporción con los datos en otro orden. Para este problema, por ejemplo:

$$\frac{40}{50} = \frac{3.500}{x} \quad \text{o también} \quad \frac{40}{3.500} = \frac{50}{x}$$

De esas otras formas la solución del problema no cambia, ya que en todas llegamos a la misma igualdad: $40 \cdot x = 50 \cdot 3.500$

Fórmula 1

El récord del Circuito de Jerez lo tiene el alemán Michael Schumacher, que en 2004 con un Ferrari logró dar una vuelta en 75,650 segundos, a una velocidad media de 210,72 km/h. Este año, en los entrenamientos, Fernando Alonso, al volante de un Renault, ha cubierto la vuelta más rápida en 78,343 segundos. ¿Cuál fue su velocidad media?

Las magnitudes son el *tiempo* (en segundos) y la *velocidad media* (en km/h), inversamente proporcionales: a doble tiempo, la velocidad sería la mitad; a mitad de tiempo, doble velocidad; etc. Planteamos los datos en la siguiente tabla, donde x es la velocidad media desconocida:

Tiempo (seg.)	Velocidad media (km/h)
75,650	210,72
78,343	x

Es una **Regla de Tres Inversa**. La constante de proporcionalidad inversa es:

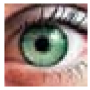
$$78{,}343 \cdot x = 75{,}650 \cdot 210{,}72$$
$$78{,}343 \cdot x = 15.940.968$$

Aplicando la relación entre los elementos de una multiplicación:

$$x = 15.940.968 : 78{,}343 = 203{,}48 \text{ km/h}$$

Ésa fue la velocidad media conseguida por Fernando Alonso en su vuelta rápida.

OBSERVA: Ya conocemos tres métodos para resolver los problemas de proporcionalidad, pero en cada caso conviene elegir el más adecuado.



Por ejemplo: en *Producción* y en *Alquiler de bus* los datos de la primera magnitud eran entre sí múltiplos y divisores (doble, mitad, etc), así que ha sido sencillo aplicar de forma inmediata las definiciones de proporcionalidad.

En *Pintores* y en *Fotocopias* ya no había múltiplos, pero además saber el tiempo que tarda un pintor o el precio de una fotocopia permiten responder a cualquier otra nueva pregunta; por eso lo más lógico ha sido la reducción a la unidad.

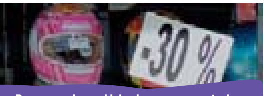
En *Chinchetas* y en *Fórmula 1* tampoco había múltiplos y la reducción a la unidad no era lógica (¿cuántas chinchetas hay en 1 gr?, ¿qué velocidad hace falta para recorrer el circuito en 1 segundo?... son preguntas con poco sentido). Por eso hemos recurrido a la Regla de Tres. También tú, **en cada problema, debes escoger el método que mejor se adapte a la situación**. Hazlo en las siguientes actividades:

Actividad 10. Cortinas

Juan ha comprado unas bonitas cortinas de 10,2 m que le han costado 86,50 €. Yo quiero comprar unas del mismo tipo y necesito 8,5 m. ¿Cuánto me costarán?

Actividad 11. Voluntarios

VoluntaRíos es un proyecto de voluntariado ambiental que trabaja en la recuperación de los parajes acuáticos de Aragón. En las últimas vacaciones, un grupo de 7 voluntarios realizamos la limpieza de un soto del Ebro en 9 días, retirando la basura abandonada y la arrastrada por las aguas. Si hubiera más gente colaborando, este trabajo habría sido menos fatigoso. ¿Cuántas personas se necesitaban para hacerlo en 3 días?



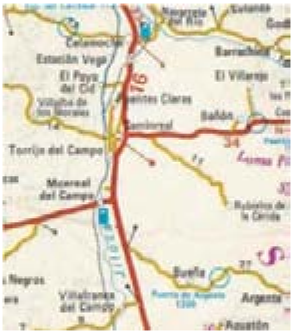
Actividad 12. Plátanos

Una Bandeja de 750 gr. de plátanos cuesta 1,98 €. ¿A cuánto está el kg de plátanos? ¿Cuánto me costará una bandeja que pesa 830 gr?

Actividad 13. La merienda

Nos hemos reunido 6 amigos para ver un partido de fútbol en TV y merendar a la vez. Hemos encargado 2 pizzas grandes y nos corresponderá pagar a cada uno 4,55 €. Pero, sin avisar, llegan 2 amigos más y decidimos merendar todos con las pizzas ya encargadas. ¿Cuál es ahora el dinero que debe pagar cada uno?

Actividad 14. Mapa



Voy de viaje por la provincia de Teruel. En el mapa de carreteras está marcada la distancia por carretera entre Calamocha y Caminreal: 16 km. Pero no está marcada la distancia entre Caminreal y Villafranca del Campo, que me interesa conocer. Compruebo que ambas distancias en el mapa miden, respectivamente: 1,6 cm y 2,7 cm. Con estos datos, calcula cuál es, de forma aproximada, la distancia desconocida.

En un mapa, se llama **escala** a la razón de proporcionalidad entre las distancias del mapa y las distancias reales. ¿Cuál es la escala de mi mapa?

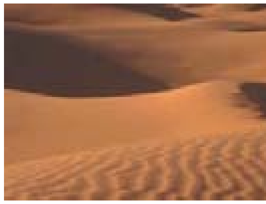
Actividad 15. Gallinas

Tengo 732 gallinas en la granja y con el pienso almacenado las puedo alimentar durante 10 días. Puedo aumentar hoy mismo el número de gallinas comprando las que quiera, pero hasta dentro de 6 días no me van a traer más pienso. ¿Cuántas gallinas más puedo comprar ya, de manera que con las reservas de que dispongo las pueda alimentar hasta que llegue el repartidor de pienso?

Actividad 16. Expedición

Hemos preparado una expedición al desierto y es vital llevar agua suficiente. Sabemos que para 4 personas se aconseja llevar 22 litros diarios. Vamos a ir 11 personas. ¿Qué cantidad de agua deberemos llevar para cada día? ¿Cuál es así la ración diaria por persona?

En el último momento se añaden 3 personas más, pero ya no es posible cargar más agua. En las nuevas condiciones, ¿cuál deberá ser la ración diaria de agua por persona?



Actividad 17. Buzoneo

Marta y Omar han cobrado 550 € por repartir entre los dos 11.000 folletos de publicidad en buzones. Si Marta ha repartido 7.000 folletos y Omar el resto, ¿qué cantidad de lo cobrado corresponde a cada uno?

Actividad 18. Estanque

El estanque del parque se llena con el agua de una acequia. Cuando la acequia lleva un caudal de 50 l./seg, el estanque se llena en 32 minutos. Si el caudal es de 34 l./seg, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse?

Actividad 19. Ciudad accesible

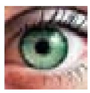
Se están rebajando los bordillos de los pasos de peatones para facilitar el acceso en silla de ruedas. Aunque fueran pocas personas las que lo necesitan, estaría justificado porque tienen derecho a poder pasear en igualdad. Pero, ¿realmente son pocas? Para saberlo, he salido a la calle y me he fijado: de 80 personas con las que me crucé, 2 iban en silla de ruedas. ¿Cuántas personas en esa situación puede haber en Zaragoza, ciudad de 680.000 habitantes?

Actividad 20. La cosecha

Un agricultor quiere saber qué cosecha de trigo va a obtener de un campo de 41.530 m^2. De esa forma, podrá prever su almacenamiento y el dinero que va a ganar.

Ha recogido el trigo de una parcela de 60 m^2 del campo, obteniendo 33 kg de grano.

¿Qué cosecha total puede esperar del campo completo?



OBSERVA: En las dos últimas actividades has visto que la proporcionalidad nos permite obtener datos que de otra forma sería difícil conocer o hacerlo con anticipación. Pero en los dos casos son datos aproximados, pues en los dos procesos interviene en parte el azar. ¿Qué se puede hacer para que esa influencia sea menor?

PORCENTAJES

El símbolo *%* se lee *"por ciento"*. Así, por ejemplo, 12% se lee *"doce por ciento"*. Lo encontramos por todas partes, especialmente en las ofertas comerciales y bancarias. Vamos a aprender a interpretarlo en dos ejemplos de esos tipos.

Interés

> El banco me ha enviado la oferta que aquí ves. ¿Qué significa?
>
> Mis ahorros son de 580 €. Si los ingreso en el banco en esas condiciones, ¿qué ganancia habré obtenido dentro de un año? ¿Cuánto dinero tendré entonces?

Una oferta de *plazo fijo al 4% anual* significa que por cada 100 € que deposite, sin utilizarlos durante un año, al cabo de ese tiempo el banco me dará 4 € de ganancia o *interés*.

Consideramos las magnitudes: dinero que deposito (se le llama *capital*) e *intereses* en un año. Son directamente proporcionales, pues si deposito doble capital obtendré el doble de intereses; si deposito la mitad de capital, la mitad de intereses, etc.

Ya hemos dicho que por 100 € al cabo de un año se ganan 4 €. ¿Y por mis 580 €, cuánto ganaré? Vamos a calcularlo con una Regla de Tres Directa:

Capital (€)	Intereses (€)
100	4
580	x

La proporción que de ahí se obtiene es:

$$\frac{4}{100} = \frac{x}{580}$$

De donde:

$$100 \cdot x = 4 \cdot 580$$

$$x = \frac{4 \cdot 580}{100} = 23{,}20\,€$$

Los intereses que ganaré en un año serán 23,20 €.
Así que entonces tendré: 580 +23,20 = 603,20 €

Descuento

En la publicidad de una tienda de ropa se lee:

¿Qué significa esto? Si un jersey marcaba un precio de 46 €, ¿qué descuento hacen ahora en su compra? ¿Cuánto cuesta ese jersey con la rebaja?

Esta oferta significa que por cada 100 € de compra se hace un descuento de 25 €.

Consideramos las magnitudes: *precio antes del descuento* y *descuento*. Son directamente proporcionales, pues si un artículo de ropa valía el doble, la cantidad que se descuenta es el doble; si valía la mitad, se rebaja la mitad, etc.

Calculamos qué descuento se hace en el jersey con una Regla de Tres Directa:

Capital (€)	Descuento (€)
100	25
46	x

La proporción que de ahí se obtiene es:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{46}$$

De donde: $$100 \cdot x = 25 \cdot 46$$

$$x = \frac{25 \cdot 46}{100} = 11{,}50\,€$$

El descuento es de 11,50 €. Así que el jersey costará: 46 – 11,50 = 34,50 €

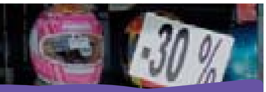
En estos dos casos hemos calculado los porcentajes mediante Reglas de Tres Directas. Hay otros métodos de cálculo más rápidos, que pronto conoceremos. Pero lo que hemos razonado en esos dos ejemplos nos va a permitir dar una definición matemática de qué es un porcentaje (también se le llama *tanto por ciento*).

El porcentaje como fracción de una cantidad

Revisemos los cálculos anteriores:

$$4\% \text{ de } 580 = \frac{4 \cdot 580}{100} = \frac{580}{100} \cdot 4$$

Hacer el 4% de una cantidad es dividirla en 100 partes iguales y tomar 4 de ellas.



$$25\% \text{ de } 46 = \frac{25 \cdot 46}{100} = \frac{46}{100} \cdot 25$$

Hacer el 25% de una cantidad es dividirla en 100 partes iguales y tomar 25 de ellas.

Definición. Hacer el **tanto por ciento** de una cantidad es dividirla entre 100 y multiplicar por “el tanto”.

Cálculo de porcentajes multiplicando por decimales

Fíjate: $$4\% \text{ de } 580 = \frac{4}{100} \cdot 580 = 0{,}04 \cdot 580$$

Hacer el 4% de una cantidad es multiplicarla por 0,04.

$$25\% \text{ de } 46 = \frac{25}{100} \cdot 46 = 0{,}25 \cdot 46$$

Hacer el 25% de una cantidad es multiplicarla por 0,25.

De forma similar, se puede calcular cualquier porcentaje multiplicando por un número decimal.

Cálculo rápido de algunos porcentajes

Algunos tantos por ciento equivalen a fracciones sencillas. En esos casos es posible calcularlos mentalmente. Éstas son las equivalencias más útiles:

$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ Hacer el 10% es dividir entre 10.

$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ Hacer el 20% es dividir entre 5.

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ Hacer el 25% es dividir entre 4.

$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ Hacer el 50% es dividir entre 2.

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ Hacer el 75% es calcular las tres cuartas partes.

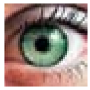
Porcentajes en la calculadora

Busca en el teclado de tu calculadora. Encontrarás la tecla %, que te permite obtener los porcentajes así:

Para el 16% de 180, pulsa, sucesivamente: 180 X 16 % =

Para el 7% de 345, pulsa, sucesivamente: 345 X 7 % =

Y del mismo modo para cualquier otro porcentaje.



¡OJO! Que haya en la calculadora una tecla para los porcentajes no significa que *"como la calculadora los hace ya no es necesario que nosotros sepamos hacerlos"*. La calculadora obedecerá nuestras órdenes, pero no piensa por sí misma. Si no sabemos qué estamos haciendo, cómo se hace y qué resultado se puede esperar, seremos incapaces de aprovechar la ventaja de la calculadora y tampoco sabremos detectar los posibles errores que hayamos cometido al teclear. Además, la necesidad de calcular un porcentaje surge en cualquier momento y situación, y... ¡no siempre vas a tener una calculadora a mano!

Actividad 21. Calcula porcentajes

Calcula los siguientes porcentajes, usando para cada uno el método indicado:

Como fracciones del total:

7% de 210	45% de 3.000	13% de 372

Multiplicando por un número decimal:

80% de 520	35% de 200	40% de 5.180

Usando el cálculo mental:

50% de 184	20% de 150	25% de 4.000

Con el método propio de la calculadora:

17% de 821	72% de 1234	41% de 892

Por Regla de Tres:

31% de 1.547	53% de 829	67% de 186

Por el método que mejor te parezca para cada caso:

47% de 137	10% de 5.271	90% de 514

PROBLEMAS DE PORCENTAJES

Calcular el total

En ocasiones, sabiendo un porcentaje llegamos a conocer el total

Precio anterior

En Rebajas, en el escaparate de una tienda se lee:

Todo con el 25% de descuento.

Y en un artículo pone: *Ahora 51 €*. ¿Cuánto costaba antes de las rebajas?

Consideramos las magnitudes *precio actual* y *precio anterior*, que son directamente proporcionales. Planteamos una Regla de Tres, viendo que, al haber un 25% de descuento, lo que antes valía 100 ahora vale 75.

Precio actual (€)	Precio anterior (€)
75	100
51	x

La proporción que se obtiene es: $\dfrac{100}{75} = \dfrac{x}{51}$

De donde: $75 \cdot x = 51 \cdot 100 \qquad x = \dfrac{51 \cdot 100}{75} = 68\,€$

El precio anterior era de 68 €.

Expresar una parte como porcentaje

A veces nos interesa saber qué porcentaje representa una parte del total.

¿Qué descuento?

> En otra tienda se anuncia: *Descuentos 20%-30%-50%.*
> Veo un artículo que me interesa, con este cartel: *Antes 48 €. Ahora 33,60 €.*
> ¿Qué porcentaje de descuento se hace en este artículo?

Consideramos las magnitudes *precio anterior* y *precio actual*, que son directamente proporcionales.

Planteamos una Regla de Tres:

Precio anterior (€)	Precio actual (€)
48	33,60
100	x

proporción: $\dfrac{33,60}{48} = \dfrac{x}{100}$

de donde: $48 \cdot x = 33,60 \cdot 100$

$$x = \frac{33,60 \cdot 100}{48} = 70€$$

Como 100 – 70 = 30, el descuento es del 30%.

Aumentos porcentuales

Es frecuente actualizar una cantidad que es aumentada en un tanto por ciento.

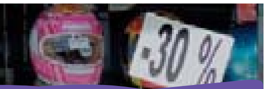
El IVA

Los precios de bienes y servicios son incrementados con el famoso IVA, siglas que significan *Impuesto sobre el Valor Añadido*. Este impuesto, junto a otros, permite al Estado recaudar fondos con los que realizar obras públicas, garantizar la atención médica o la educación para todos, etc. Aunque hay tipos especiales de IVA, el más común es del 16%.

Si el coste de una reparación es de 280 €, ¿cuánto tendré que pagar después de que le añadan el IVA?

Podemos resolver este problema de al menos 4 formas diferentes. Veámoslas todas y luego, en la práctica, escoge la que te parezca mejor:

	Por Regla de Tres	Multiplicando por decimales
En dos pasos	**precio sin IVA** **IVA** 100 16 280 x proporción: $\frac{16}{100} = \frac{x}{280}$ de donde: $100 \cdot x = 16 \cdot 280$ $x = \frac{16 \cdot 280}{100} = 44{,}80$ € El precio con IVA: 280 + 44,80 = 324,80 €	La cantidad que hay que pagar de IVA es: 16% de 280 = $\frac{16}{100} \cdot 280 =$ $= 0{,}16 \cdot 280 = 44{,}80$ € El precio con IVA: 280 + 44,80 = 324,80 €
Directamente	**precio sin IVA** **precio con IVA** 100 116 280 x proporción: $\frac{116}{100} = \frac{x}{280}$ de donde: $100 \cdot x = 116 \cdot 280$ $x = \frac{116 \cdot 280}{100} = 324{,}80$ € El precio con IVA: 324,80 €	Si se paga un 16% de IVA, eso significa que se paga el 116% del precio inicial. Así que el precio con IVA es: 116% de 280 = $\frac{116}{100} \cdot 280 =$ $= 1{,}16 \cdot 280 = 324{,}80$ €



Disminuciones porcentuales

De forma análoga al caso anterior, también cuando hay que descontar un porcentaje podemos elegir uno de esos cuatro métodos.

Nuevo precio

Leemos en un escaparate: *15% de descuento en todos nuestros precios.* Me interesa una camisa que antes de las rebajas valía 32 €. ¿Cuál es su nuevo precio?

	Por Regla de Tres	Multiplicando por decimales
En dos pasos	**precio sin rebaja** — **rebaja** 100 — 15 32 — x proporción: $\frac{15}{100} = \frac{x}{32}$ de donde: $100 \cdot x = 15 \cdot 32$ $x = \frac{15 \cdot 32}{100} = 4{,}80€$ El precio con rebaja: 32 – 4,80 = 27,70 €	La cantidad que se rebaja en la camisa es: 15% de 32 = $\frac{15}{100} \cdot 32$ = 0,15·32 = 4,80 € El precio con rebaja: 32 – 4,80 = 27,20 €
Directamente	**precio sin rebaja** — **precio con rebaja** 100 — 85 32 — x proporción: $\frac{85}{100} = \frac{x}{32}$ de donde: $100 \cdot x = 32 \cdot 85$ $x = \frac{32 \cdot 85}{100} = 27{,}20€$ El precio con rebaja: 27,20 €	Si se rebaja un 15%, eso significa que sólo se paga el 85% del precio inicial. Así que el precio con rebaja es: 85% de 32 = $\frac{85}{100} \cdot 32 =$ = 0,85 · 32 = 27,20 €

Porcentajes para comparar

Puede ser difícil tomar decisiones comparando números dispares. Los porcentajes unifican la escala y ayudan a decidir.

Baloncesto

En la fase final de un partido de baloncesto, el equipo que va perdiendo tiene que evitar que el equipo contrario ralentice el juego para perder tiempo. Para eso, cuando tenga la pelota el otro equipo, les van a hacer faltas personales y en la posterior posesión de balón intentarán los tiros de tres puntos. El jugador contrario que reciba esa falta personal lanzará tiros libres y, claro está, interesa que los falle. Ésta es la estadística de tiros libres de los jugadores del otro equipo en esta temporada:

Jugador	tiros libres	aciertos
Diego	80	62
Luis	42	22
Carlos	28	15
Alfonso	56	38
Juan	15	12

¿A quiénes y con qué prioridad conviene hacerles falta?

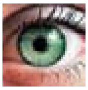
Desde luego, habrá que hacer la falta a quien menos acertado esté en los tiros libres. Pero como cada jugador ha lanzado un número diferente de tiros, la comparación no es inmediata. Por ejemplo: Juan, con 12 aciertos, es quien menos tiros libres ha acertado; pero ¡es que sólo ha tirado 15!

En casos como éste, se expresan todos los datos en porcentajes (mediante reglas de tres, como hicimos antes en *¿Qué descuento?*) y de esa forma común ya se puede realizar la comparación:

Jugador	aciertos
Diego	77,50%
Luis	52,38%
Carlos	53,57%
Alfonso	67,86%
Juan	80%

Es decir, conviene hacer las faltas a Luis y a Carlos, mejor que a sus compañeros.

¡OJO! *Cuando los números son pequeños, expresarlos en porcentajes puede ser engañoso.*



Por ejemplo: en un hospital se han realizado 3 trasplantes de corazón, con éxito en los 3; y se han realizado 48 trasplantes de riñón, con éxito en 42. Si expresamos esos datos en tantos por ciento: hay un 100% de éxito en trasplantes de corazón y un 87,5% de éxito en trasplantes de riñón. ¿Se puede decir entonces que el primer tipo de trasplante es más exitoso que el segundo? No, pues 3 casos son muy pocos para sacar conclusiones, mientras que 48 ya son bastantes. Imaginemos que el próximo trasplante de cada tipo fracasa. Entonces, el porcentaje de éxitos cambiaría muchísimo en los trasplantes de corazón, pasando del 100% al 75% (3 de 4). Sin embargo, cambiaría muy poco en los trasplantes de riñón, pasando del 87,5% al 85,7% (42 de 49). Así que el porcentaje es engañoso en los trasplantes de corazón, pero es mucho más fiable en los de riñón.

Actividad 22. Gafas

En mi clase, de 26 alumnos, 7 llevan gafas. ¿Qué porcentaje de alumnos con gafas hay en mi clase?

Actividad 23. Reciclado de basuras

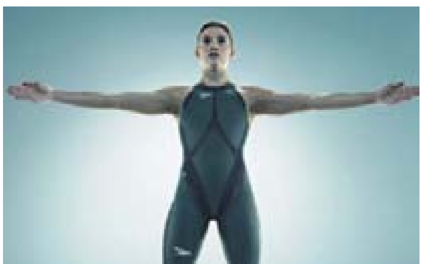
La ciudad es una gran fábrica de basura. Si esta basura termina en un vertedero, tarda años en degradarse; sin embargo, reciclar los residuos puede ahorrar energía. La colaboración ciudadana está avanzando mucho en este terreno. La recogida selectiva y reciclado de basuras en España se ha duplicado en el último lustro (2003-2008). Por término medio, en 2008 cada español recicló 78,750 Kg. de basura. Pero esto todavía representa sólo un 15% de toda la basura generada. ¿Cuánta basura se produce en España por habitante y año? ¿Cuántos kg diarios de basura se reciclaban en 2003?

Actividad 24. El 0,7%

Para evitar que se haga mayor la desigualdad entre países ricos y pobres, en 1992 los 21 países más ricos del mundo se comprometieron a destinar el 0,7% de su riqueza anual o PIB (Producto Interior Bruto), *"tan pronto como sea posible"*, para la ayuda al Tercer Mundo. En 2009, 17 años después de aquel compromiso, sólo 4 de esos países ricos lo están cumpliendo. Pero, ¿acaso es difícil de cumplir? Veámoslo en nuestro caso: en España, la renta anual por habitante es de 27.390 €. ¿Qué dinero deberíamos dedicar al año por cada español para cumplir el compromiso del 0,7%? ¿Y al día? ¿Qué opinas?

Actividad 25. Piel de tiburón

Los nadadores de alta competición utilizan unos bañadores de cuerpo entero fabricados con un tejido especial que disminuye la resistencia al agua y mejora la compresión de



los músculos al nadar. A ese tejido se le llama *"piel de tiburón"* porque la imita. Se estima que, gracias a esos bañadores, los tiempos de los nadadores mejoran en un 2%.

Nadia tiene un tiempo de 1:03.45 en los 100 m libres. ¿Qué tiempo podría hacer con uno de esos bañadores de alta tecnología?

Actividad 26. Votos

En las Elecciones Generales 2008, la coalición Izquierda Unida obtuvo 3.764 votos en la provincia de Huesca, que representaron el 2,87% del total de votos emitidos. ¿Cuántos votos hubo en la provincia?

Actividad 27. Población mundial

Según la ONU, la población mundial era en 2008 de, aproximadamente, 6.700 millones de habitantes y en las próximos diez años crecerá un 8,6%. ¿Cuál será, aproximadamente, la población mundial en 2018?

Actividad 28. Liga 2008-09

El Campeón de la Liga de Fútbol Profesional 2008-09 ha sido el FC Barcelona, tras conseguir 27 victorias, 6 empates y 5 derrotas. Expresa en porcentajes esos datos.

Actividad 29. Aprobados y suspensos

Los siguientes datos son de la evaluación final del 2º curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales en un centro de enseñanza:

Asignatura	**Alumnos**	**Aprobados**
Filosofía	37	26
Latín	15	11
Economía	22	15

¿En cuál de estas asignaturas se suspende más? Justifica tu respuesta con cálculos.

Actividad 30. Planta acuática

Una planta acuática llena hoy la tercera parte de un estanque. Sabemos que su superficie cada día crece un 5%. ¿Qué fracción del estanque llenará mañana? ¿Y pasado mañana?

Actividad 31. La mejor oferta

El sentido común dice que hay que comprar sólo lo que se necesita. Pero la publicidad intenta que consumamos más y más... A continuación vas a ver varias ofertas de las que se suelen repartir por los buzones de las casas. Ordénalas de mejor a peor, teniendo en cuenta las Matemáticas, pero también el sentido común...

Actividad 32. El precio del viaje

Este verano iremos de vacaciones toda la familia, que somos 4 personas. Hemos seleccionado un viaje que cuesta 530 € por persona. Por reserva anticipada, con al menos 45 días de adelanto a la fecha de salida, hacen un descuento del 7%. Si la fecha elegida es el 15 de julio, ¿hasta qué día tenemos de tiempo para reservar el viaje con descuento? ¿Qué precio total nos costará si lo reservamos antes de esa fecha? ¿Y después?

Actividad 33. Rebajas rebajadas

En una tienda me dicen: *"Primero rebajamos los precios el 20% y luego los hemos rebajado un 30%. Ahora todo está a mitad de precio"* ¿Es correcto?

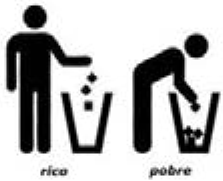
Idea: piénsalo sobre algunos ejemplos concretos. Luego, fíjate en las operaciones realizadas e intenta dar una explicación general, que valga para cualquier precio.

Actividad 34. IVA ¿antes o después?

Laura ha comprado un aparato MP4 en un comercio donde se anuncia: *TODO REBAJADO UN 30%.* Junto al precio aparece un asterisco (*) y más abajo está escrita, en letra pequeña, la explicación de ese símbolo. Pone: ** Precio sin IVA.* Eso significa que Laura deberá pagar además un 16% en concepto del IVA. En la caja surge la polémica: el vendedor calcula el precio rebajado en un 30% y después lo incrementa en el 16% de IVA, diciendo que así se paga menos impuesto, porque se calcula sobre un precio menor. Pero Laura quiere que primero se calcule el precio más el 16% de IVA y después, al precio que resulte, se le aplique el 30% de descuento, pues dice que así va a conseguir un mayor descuento, al ser calculado sobre un número mayor. ¿Quién tiene razón? ¿Qué forma de cálculo le conviene a Laura?

Como en la actividad anterior, aunque comiences pensando el problema en casos particulares, hay que llegar a dar un razonamiento general, que sea válido para cualquier precio posible.

Actividad 35 (en grupo). Ricos y pobres



a) Organizaos y conseguid, para los países del mundo, agrupados como se indica, los datos señalados.

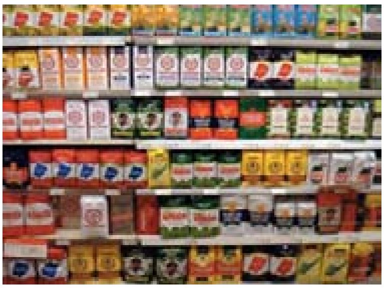
   Países: Estados Unidos, China, Japón, Europa y resto del mundo.
   Datos: Población y PIB (Producto Interior Bruto o riqueza anual).

b) Cread una tabla donde, junto a los datos anteriores, figuren los porcentajes que, en cada caso, representan sobre los totales mundiales.

c) Los números se entienden mejor con la ayuda de gráficos. Haced dos gráficos de sectores: uno con los porcentajes sobre la población mundial y otro con los porcentajes sobre la riqueza mundial. Debéis justificar la obtención de los grados de amplitud de cada sector circular y dibujarlos con compás y transportador; no se admiten gráficos de ordenador.

d) Comparad la presencia de cada uno de esos bloques de países en ambos gráficos. Expresad por escrito vuestras conclusiones.

Actividad 36 (en grupo). Investigando en el "súper"

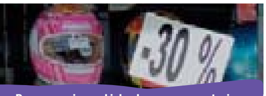


En el supermercado hay que saber porcentajes, y no sólo para entender las ofertas; también los necesitamos para saber bien qué compramos. Para ello hay que leer las etiquetas de los productos.

a) Id a un supermercado y anotad para cada marca y tipo de chocolate cuál es su porcentaje de cacao, el peso de una tableta y su precio. Calculad a qué precio salen los 100gr. de cada chocolate. Haced una tabla donde estén ordenados todos los chocolates según el porcentaje de cacao y otra donde lo estén según el precio. ¿Observáis alguna relación entre ambas tablas? ¿Debería haberla? ¿Por qué?

b) También en el "súper", veréis que cada marca de leche se vende en tres modalidades: entera, semidesnatada y desnatada. Investigad con varias marcas qué porcentaje de grasa tiene cada tipo de leche.

c) Las conservas suelen ir en agua, aceite, vinagre, etc. En las etiquetas se explicita: peso neto y peso escurrido (sin agua, aceite, etc.). Para tres marcas en cada caso, fijaos en los envases de judías blancas, garbanzos, espárragos y alcachofas. Haced una tabla de datos que refleje en porcentajes la pérdida de peso por esos líquidos. ¿Hay grandes diferencias entre esos productos? ¿Y entre las marcas?



MEDIOS DE COMUNICACIÓN

Actividad 37. Anuncio en T.V.

Un reciente anuncio televisivo de una cadena de hipermercados decía:

"Primero creamos el 3 x 2. Después, la segunda unidad a mitad de precio. Y ahora, anunciamos en exclusiva el descuento 20-30, una promoción más flexible para ti que convierte tu compra en ahorro. ¿Que compras dos paquetes de detergente?, te hacemos un descuento del 20% en los dos. Que compras tres o más, te hacemos un descuento del 30%"

En Youtube: http://www.youtube.com/watch?gl=ES&hl=es&v=A-r07CSmCkU

Repasa bien el texto del anuncio y saca tus conclusiones.

Actividad 38. Muchos diabéticos

El Periódico de Aragón publicaba el 17-11-2008 la siguiente noticia, cuyo titular es alarmante. ¿Qué opinas?:

DÍA MUNDIAL

Siete de cada diez aragoneses tiene diabetes y la mitad no lo sabe

La clínica Montpellier utiliza una operación que 'cura' el tipo II

M. E. C.
ZARAGOZA

El 7% de los aragoneses tiene diabetes, aunque la mitad no lo sabe. Además, la cifra de personas con esta enfermedad se triplica en el grupo de personas de más de 65 años. Para concienciar sobre la importancia de esta patología, la Sociedad Aragonesa de Endocrinología y Diabetes y la Asociación de Diabéticos Adezaragoza ha organizado una conferencia en el salón de actos del Colegio de Médicos de Zaragoza que tendrá lugar el próximo 20 de noviembre.

Además, coincidiendo con la celebración hoy del Día Mundial de la Diabetes, la clínica Montpellier recordó ayer que está realizando intervenciones quirúrgicas que permiten curar la diabetes tipo II. De hecho, el doctor Resa, cirujano coordinador de la Unidad de Cirugía Laparoscópica de la Obesidad y el Metabolismo de este centro hospitalario, ha presentado resultados de pacientes tratados mediante un bypass biliopancreático, con mejoría del 100% de los casos en el primer mes después de la cirugía y de abandono de la medicación antes de los tres meses del 92%.

Así, esta unidad iniciará próximamente un ciclo de charlas divulgativas sobre este asunto, presentando testimonios y resultados.

Actividad 39. Gran caída

Esta otra noticia es del invierno 2008-09, en que la crisis económica ha provocado grandes caídas de la valoración de las empresas en la Bolsa. Lee la columna de la derecha y da tu opinión:

A fondo

GAZPROM, LA PEOR DE TODAS LAS COMPAÑÍAS DEL SECTOR

Si ha existido un grupo especialmente sensible a la depreciación del crudo ése ha sido Gazprom. La petrolera rusa amagó en el cuarto trimestre de 2008 con incorporarse a la puja por el 20 por ciento que Sacyr tiene en Repsol, si bien reculó con rapidez. En este comienzo de ejercicio, la compañía se ha visto envuelta en la crisis del gas del Este de Europa.

138,4

Por ciento. Así de severa ha sido la caída que la empresa rusa ha protagonizado desde que el petróleo alcanzara su máximo histórico en julio.

Actividad 40. NBA

HOY.es

Hemeroteca |

Portada | Regional | Deportes | Más Actualidad | Multimedia | Ocio | Participación | Servicios

Fútbol | Baloncesto | Motor | Ciclismo | Más Deportes |

Deportes

BALONCESTO I NBA

Calderón se asoma a la historia

Al base extremeño le queda un mes de competición para desbancar a Murphy y dejar su huella en la NBA con el mejor registro en porcentaje de tiros libres

MARCO A. RODRÍGUEZ

Vota ☆☆☆☆☆ | 0 votos ☆☆☆☆☆ Opina Ver comentarios (0) Imprimir Enviar Rectificar

En uno de los múltiples recovecos que ofrece la página web de la NBA aparece una especie de enciclopedia (www.nba.com/history/records/regular_freethrows.html) con los registros más importantes en la historia de la liga más famosa del mundo. Apellidos ilustres que durante más de medio siglo multiplicaron el conocimiento de esta competición a nivel global, como Jordan, Jabbar, Malone, Wilkins, Chamberlain, etc. En algo menos de un mes -y poco más de diez partidos- un extremeño de Villanueva de la Serena puede ser parte de esa mítica lista.

Cuando José Manuel Calderón, aún siendo niño, puso rumbo a Vitoria para buscarse la vida en esto del baloncesto, seguro que nunca pensó en que acabaría una temporada de la NBA como el mejor de toda la liga en una estadística, la que sea. En esta ocasión es la de porcentaje en tiros libres, un récord que ostenta Calvin Murphy desde 1980 con un 95.8 por ciento, algo que parecía inalcanzable hasta que llegó nuestro paisano y empezó a meter tantos tiros desde los 4,60 metros que casi bate la marca de Williams de 97 consecutivos. Al final, se quedó en 87, quizá impresionado por la bola de nieve mediática que se iba generando conforme se asomaba a la cifra.

Calderón atesora un espectacular 97,7% desde la línea de personal. O lo que es lo mismo: ha anotado 127 de 130 intentos. O lo que es lo mismo: sólo ha fallado tres en casi cinco meses de temporada. Es el mejor entre los mejores especialistas, perseguido por nombres como Ray Allen (95,6) y Steve Nash (93,8). El extremeño ya ha salvado la condición de tener que lanzar al menos 125 tiros para dar validez a su marca, un requisito que sirve para no contabilizar a quienes apenas suman lanzamientos.

Calderón prueba suerte en la especialidad de la casa. / HOY

Los mejores tiradores

Temporada 2008/2009

JUGADOR TIROS %

1º José Calderón 127/130 97,7

2º Ray Allen 213/223 95,5

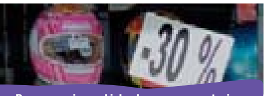
3º Steve Nash 152/162 93,8

4º Mo Williams 181/194 93,3

http://www.hoy.es/20090318/deportes/futbol/calderon-asoma-historia-20090318.html

Lee con atención la noticia anterior y después responde:

a) ¿Qué significan las siglas NBA? ¿Hay algo similar en España?
b) ¿Qué sentido tiene en el artículo la expresión *"bola de nieve mediática"*?
c) Siendo que Calderón ha encestado 127 tiros libres y que Steve Nash ha encestado 152, ¿por qué está Calderón por delante en la clasificación?
d) Inventa un ejemplo para explicar por qué se exige haber lanzado al menos 125 tiros para entrar en esa estadística.
e) ¿Está totalmente claro que Calderón sea mejor lanzador de tiros libres que Ray Allen?



Actividad 41. Precio de la vivienda

Lee este comienzo de noticia (*El País* 30-12-2000), haz cuentas y opina:

EL PAÍS edición impresa | ECONOMÍA

El precio de la vivienda cierra el año con una subida del 12,5%, la mayor de la década

Los expertos inmobiliarios estiman que en 2001 los pisos nuevos subirán otro 7%

SANTIAGO HERNÁNDEZ - Madrid - 30/12/2000

El precio de la vivienda no encuentra techo. En el año que ahora termina, el precio medio de la vivienda nueva en las capitales de provincia subió una media del 12,5%. Se trata de la mayor subida de toda la década, desde el anterior boom inmobiliario de los ochenta. En 1997 subió el 3,4%, un año después lo hizo en un 5,1% y en 1999 la cifra se aceleró al 9%. Es decir, un 30% en cuatro años. Así lo refleja el estudio de Sociedad de Tasación presentado ayer. El presidente de esta empresa, José de Pablo, pronosticó que para 2001 los precios subirán otro 7% como media.

http://www.elpais.com/articulo/economia/precio/vivienda/cierra/ano/subida/mayor/decada/elpepieco/20001230elpepieco_19/Tes

Actividad 42. Asesores para las rebajas

El diario de Andalucía *El Ideal* publicaba el 28-12-2006 la siguiente noticia. Léela con atención. Haz un resumen y expresa tu opinión.

ALMERÍA **IDEAL**

VIVIR

Los ingleses no saben contar

El Gobierno británico envía asesores a las rebajas, ya que la cuarta parte de los ciudadanos ignora las nociones básicas para entender las ofertas

MENSAJES tan comunes en nuestra compra cotidiana como «obtenga el 20% de descuento» o «compre uno y consiga el segundo a mitad de precio» pueden resultar un verdadero jeroglífico para muchos ciudadanos de Reino Unido. Así lo ha dado a conocer el departamento de Educación, que ha sacado a la luz el dato de que alrededor de quince millones de británicos -es decir la cuarta parte de la población- carecen de las destrezas matemáticas más básicas, esperadas en un niño de 11 años.

En un país como éste, en el que las grandes deficiencias del sistema educativo están en boca de todos, la cifra puede no resultar una sorpresa, aunque no deja de ser preocupante. Por eso, el Gobierno está decidido a acabar con el problema y ha lanzado una medida diseñada para estas fechas: ha entrenado a equipos de personas para que acudan a los principales centros comerciales de diez grandes ciudades y ayuden a los británicos a realizar sus compras navideñas.

Imprimir Enviar

La locura comercial de estos días, las grandes avenidas atestadas de gente, los innumerables y llamativos letreros... crean confusión entre muchos compradores. El apoyo de estos equipos puede ser decisivo para que los consumidores saquen el máximo provecho a sus compras y venzan el aturdimiento típico producido por las avalanchas, los villancicos y las múltiples posibilidades al alcance de más bolsillos. Teniendo en cuenta, además, que ayer fueron inauguradas las rebajas, con lo que las tiendas vivirán esta semana los días más concurridos del año. Las ofertas no esperan hasta enero porque los Reyes Magos no viajan hasta la isla, y tras la corta visita de Santa Claus en Navidad, los ciudadanos ya se han lanzado a las calles en busca de gangas, labor para la que los cálculos numéricos son imprescindibles. Sobre todo cuando algunas tiendas ofrecen ya descuentos del 70%.

Además de asesorar a los compradores en la búsqueda de buenas ofertas, estos oportunos 'maestros' repartirán 200.000 calculadoras y ofrecerán información sobre la campaña gubernamental 'Get On', dirigida a adultos con carencias en sus habilidades numéricas y lingüísticas.

Cursos

La iniciativa ofrece cursos gratuitos en los barrios y aspira a mejorar las destrezas de 2,25 millones de adultos para el año 2010. El ministro de Educación, Phil Hope, expresó la necesidad de divulgar sus ventajas: «A todos nos gusta ir a la caza de gangas, pero mucha gente no sabe que pueden repasar sus conocimientos matemáticos y lingüísticos en su propio barrio. Y gratis».

Los descuentos, para los británicos, en estos casos pueden convertirse en verdaderos problemas, que deberán resolver y comprobar si realmente les salen las cuentas. De no ser así, los cursos de barrio saldrán, a la larga, mucho más rentables a los británicos que lanzarse al consumo desenfrenado y mal calculado en las rebajas. Unas nociones matemáticas serán más aconsejables que atender a los mensajes publicitarios.

http://www.ideal.es/granada/prensa/20061228/vivir/ingleses-saben-contar_20061228.html