Felix Klein: botellas y enseñanza de las matemáticas

Roberto Rodríguez del Río

Departamento de Matemática Aplicada - Universidad Complutense de Madrid
rrdelrio@mat.ucm.es • http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/

¿Se puede construir una superficie cerrada que tenga una sola cara, en la que *dentro* y *fuera* signifiquen lo mismo? No es fácil de imaginar, pero se puede construir. Primero vamos a construir un *toro,* que es el nombre matemático de un donut. Partimos de un cuadrado, lo plegamos hasta obtener un cilindro. Lo estiramos y pegamos los extremos, ya tenemos un donut. Sin embargo, si cuando tenemos el cilindro, en lugar de estirar los extremos y pegarlos formando una rueda, introducimos uno de los extremos a través del propio cilindro, se obtiene una extraña superficie que se denomina *botella de Klein*. (Realmente las gráficas de la botella de Klein son representaciones en nuestro espacio tridimensional de un objeto que habría que imaginar en un espacio más complejo, donde la intersección al atravesar el tubo a sí mismo no se daría).

Felix Klein nació el 25 de abril de 1849, es decir, el 25/4/1849, aunque a él le gustaba apuntar que había nacido el día 5^2 de 2^2 de 43^2, que son los cuadrados de tres números primos: 5, 2 y 43.

La botella de Klein fue ideada por el matemático alemán Felix Klein (1849-1925). Klein vivió en una época muy importante para el desarrollo de la geometría. En la segunda mitad del siglo XIX se habían empezado a desarrollar las llamadas geometrías *no euclídeas*. En la geometría euclídea, la geometría que todos hemos estudiado en la escuela, se acepta como cierto el postulado de las paralelas, según el cual, por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una recta paralela a ésta. Durante siglos se había intentado, sin éxito, deducir este postulado a partir de los otros axiomas de la geometría de Euclides. En las llamadas geometrías no euclídeas se prescinde de este postulado, o se niega. A partir de ahí, aparecen nuevas geometrías tan consistentes como la de Euclides, aunque choquen contra nuestra intuición.

La aparición de estas nuevas geometrías hace que incluso la propia idea de geometría no parezca estar clara. El hecho mismo de utilizar métodos algebraicos y analíticos para resolver problemas geométricos hace que no esté ya tan claro que la geometría sea el estudio de los puntos, rectas y figuras geométricas.

En este contexto, Klein, con motivo de su ingreso como profesor de la Universidad de Erlangen en 1872, escribió una memoria, que hoy se conoce precisamente con el nombre de *programa de Erlangen,* en la que afirma que una *geometría* es el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se les aplica un cierto tipo de transformaciones. Estas propiedades las denominó *invariantes*. Por ejemplo, en la geometría euclídea uno de estos invariantes es la distancia, que no cambia cuando se aplican a los objetos geométricos transformaciones tales como las simetrías, los giros o las traslaciones. La idea de Klein permite clasificar las geometrías y nos permite comprender qué es el estudio general de la Geometría. Ni qué decir tiene que el punto de vista de Klein no fue aceptado por todo el mundo en su época.

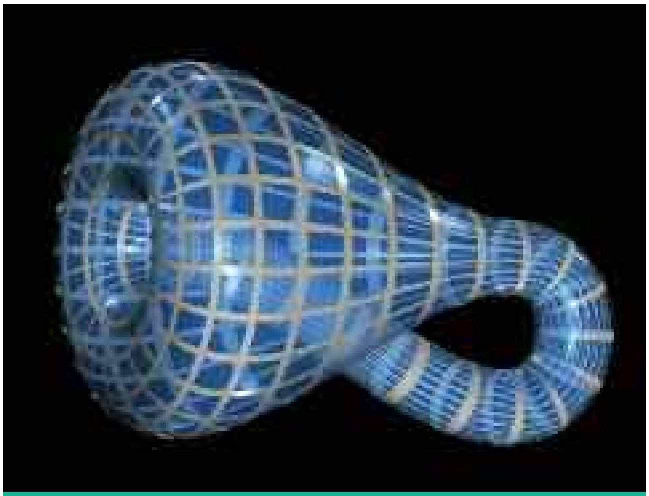
Klein no sólo realizó importantes aportaciones en el campo de la geometría, sino que también se ocupó de la teoría de funciones y en el campo de la física matemática.

Pero quizá la faceta más desconocida de Felix Klein es la de su interés por la enseñanza de las matemáticas en los niveles elementales. En efecto, hacia 1900 comenzó a interesarse por el estado de la instrucción matemática en la enseñanza secundaria y trabajó activamente en modernizar la enseñanza de las matemáticas en Alemania. Una de sus aportaciones más importantes fue la recomendación de la introducción en la enseñanza matemática secundaria de los rudimentos del cálculo diferencial e integral.

Debido a su interés por la enseñanza y a su reconocido prestigio internacional, en 1908, en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Roma, le fue encargada la presidencia de la Internacional Commission on Mathematical Instruction (ICMI), una institución que sigue existiendo hoy en día y que cuenta con subcomisiones en algunos países. La subcomisión española existe desde 1986, aunque no se puede decir que sea muy conocida y es difícil precisar cuál es exactamente su actividad. (Se puede encontrar información en la página del Comité Español de Matemáticas http://www.ce-mat.org/).

Felix Klein, como presidente del ICMI, se preocupó activamente por la conexión entre la enseñanza de las matemáticas en la universidad y en los niveles previos. De hecho, él mismo escribió un libro, en dos volúmenes, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*[1] destinado a los profesores de matemáticas de enseñanza secundaria mostrando las matemática superior de una manera sencilla y estimulante.

Resulta cuando menos curioso leer algunos pasajes de la introducción a este libro, escritos por el propio Klein, hace más de cien años. Dice Klein: «… *los profesores de universidad se han preocupado únicamente por su rama del saber, sin importarles nada las necesidades de las escuelas e incluso sin interesarse por establecer un nexo de unión con las matemáticas escolares*». Quizá pensaba Klein, ingenuamente, que esto cambiaría con el tiempo. Lo que ocurre hoy en día prueba que las cosas en este sentido no han mejorado mucho.



Botella de Klein.

Escribe Klein, hablando del enfoque que habría que dar a la enseñanza de los números: «… *Por ejemplo: si al niño se le explican los números axiomáticamente, como entes abstractos sin contenido con los cuales se puede operar según ciertas reglas, le será imposible entender. Por el contrario, el niño asocia los números con imágenes concretas. Hay números de nueces, de manzanas, y de otras cosas buenas, y al principio sólo pueden y deben presentársele bajo esta forma tangible. […] las matemáticas deben estar asociadas a todo aquello que interese seriamente al alumno en cada momento concreto de su desarrollo…*» Qué pena que aquellos que en la década de los setenta se empeñaron en introducir en los programas todas aquellas nociones de la matemática moderna abstracta no hubieran echado un vistazo a este libro escrito hacía tantos años.

Las ideas de Klein sobre la enseñanza de las matemáticas siguen vigentes hoy en día. Su forma de entender este eterno problema de qué enseñar y cómo enseñar es sencilla, clara. Sus textos se pueden leer y comprender en estos tiempos en los que, por poner un ejemplo, en la universidad hemos comenzado a dedicar tiempo y esfuerzos a elaborar unos objetos llamados *guías docentes* en los que aparecen o*bjetivos generales, objetivos específicos, competencias generales, competencias específicas, competencias transversales, actividades dirigidas* y un largo glosario de términos que nadie sabe muy bien qué significan. Algo análogo a lo que ocurrió en su día en colegios e institutos cuando empezaron a hablarnos de *procedimientos, actitudes, contenidos, contenidos procedimentales, contenidos actitudinales, etc*. Felix Klein hablaba de lo que había que enseñar y de cómo enseñarlo. No necesitaba inventar ninguna jerga para decir lo que quería decir y lo decía con claridad, de forma que se entendiera, porque era eso lo que pretendía.