¿Y para *n*?

ALGUNAS PROPUESTAS PARA GUIAR A NUESTROS ALUMNOS A HACER CONJETURAS

María Moreno Warleta
IES Alameda de Osuna

EN este artículo se presentan algunas ideas y problemas que pueden ayudar a nuestros alumnos a hacer conjeturas y a entender qué son y por qué se deben hacer demostraciones.

¿POR QUÉ ENSEÑAR A CONJETURAR?

1º) Enseñando a conjeturar mostramos mejor la esencia del quehacer matemático.

2º) Enseñamos a nuestros alumnos un tipo de razonamiento que le será útil en contextos no matemáticos.

3º) Detectamos errores conceptuales, motivamos la introducción de conceptos nuevos y afianzamos el aprendizaje de los ya enseñados.

4º) Los alumnos lo toman como un reto. Se sale un poco de los programas habituales.

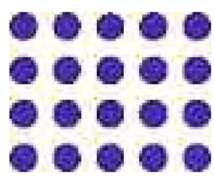
Lo dicen los grandes maestros de la didáctica de las matemáticas: Ya Polya en los años 60 incluía en su decálogo del profesor de matemáticas un punto que rezaba así: *Enséñales a conjeturar*. Y Puig Adam también ahondaba en esta idea: *Enseña guiando la actividad creadora y descubridora del alumno*.

La forma más sencilla de conjeturar es buscar pautas y generalizar. Este tipo de ejercicio puede hacerse en varios contextos. Veamos algunos de ellos:

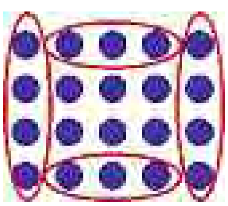
BUSCANDO PAUTAS EN CONSTRUCCIONES:

PROBLEMA 1: *En un rectángulo como este, de* 4 x 5*, hay* 14 *puntos en la frontera.*

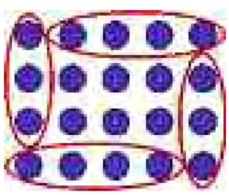
¿Cuántos puntos habrá en la frontera de un rectángulo de n x *m?*



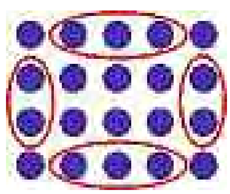
Si planteamos este problema a alumnos de la ESO, seguro que en el aula surgen algunas de estas fórmulas con sus respectivas justificaciones:



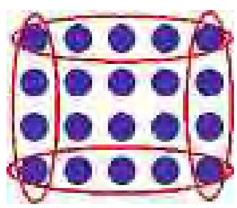
$2n+2(m-2)$



$2(n-1)+2(m-1)$



$2(n-2)+2(m-2)+4$



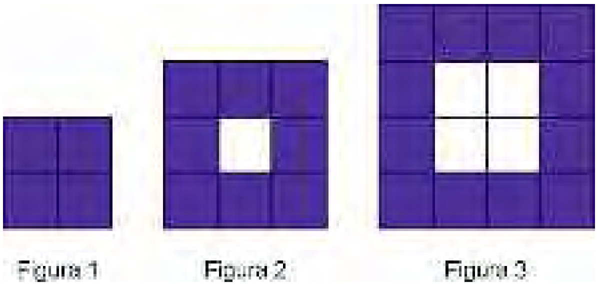
$2n+2m-4$

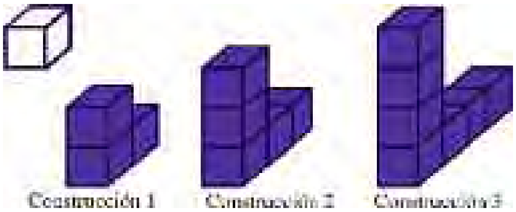
$n \cdot m-(n-2) \cdot (m-2)$

Un ejercicio interesante para los alumnos del primer ciclo es comprobar que todas las expresiones son iguales.

Algunos problemas similares al anterior son los siguientes:

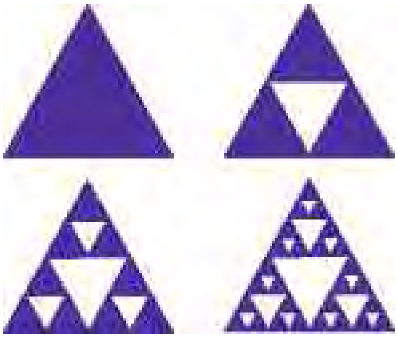
Problema 2: *¿Cuántos cuadrados azules y cuántos blancos necesitaré para hacer la figura número* 500*?* [2]





Problema 3: *Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de* **L** *y una vez armadas las pintamos de azul. En la construcción* 500*, ¿cuántas caras pintaré?* [2]

Problema 4: Los triángulos de Sierpinski



- *¿Cómo se forma la siguiente figura?*
- *Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es* 1 u^2*. ¿Cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el decimoprimero?*
- *¿Y el área de la parte blanca?*
- *Si el lado del triángulo grande mide* 1 *u, ¿cuál será el perímetro de la zona azul en la enésima figura?*
- *¿Cuántos triángulos de cada color habrá en la figura* 1200*?*

Los problemas 2 y 3 son una buena forma de trabajar, de forma intuitiva, razonamientos de tipo inductivo y por recurrencia.

En el problema 4 planteo algunas preguntas que les han surgido a alumnos de la ESO. Este problema es especialmente interesente para alumnos de 3º ESO ya que permite deducir la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica (comparando la suma de las áreas de los triángulos blancos con la diferencia entre el área total y el área azul) y, posteriormente, aplicarla para resolver las otras cuestiones.

Problema 5: La región perdida

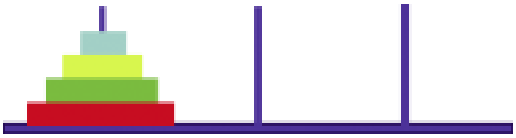
¿Cuántas regiones, como máximo, se forman dentro de un círculo si unimos dos a dos n puntos sobre su circunferencia? [10]

Este es un problema que provoca mucha sorpresa ya que, tras probar para los primeros valores de n, se conjetura con facilidad que el número de regiones será . Sin embargo, si se hace para n = 6, el número de regiones es sólo 31. Con este tipo de problemas mostramos a nuestros alumnos la necesidad de demostrar nuestras conjeturas.

BUSCANDO PAUTAS EN JUEGOS:

Dos juegos clásicos que permiten, además de buscar estrategias de resolución, conjeturar y dar argumentos inductivos, son:

PROBLEMA 6: Las torres de Hanoi (Puedes jugar online en [A])



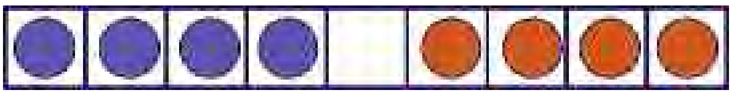
Objetivo: *llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.*

Reglas del juego:

- *No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.*
- *Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.*

¿Cuál es el mínimo número de movimientos para 4 *discos? ¿Y para* 64 *discos?*

Problema 7: Las ranas saltarinas (Puedes jugar online en [B])



Objetivo: *intercambiar la posición de las ranas.*

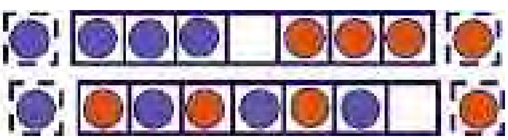
Reglas del juego:

- *Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.*
- *No se puede saltar por encima de más de una rana.*
- *Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.*

¿Cuántos movimientos son necesarios con 4 *ranas de cada color? ¿Y con* 100*?*

En el caso de las ranas saltarinas tras jugar varias veces con 2, 3, 4 y 5 ranas, es posible encontrar una pauta numérica en el número de movimientos. De ello surge una conjetura que se puede demostrar observando que al jugar con *n* ranas primero hay que jugar con *n*-1.

(1)
(2)



Tras 5 movimientos llevamos una azul a la derecha y llegamos a:

(3)

Tras 4 movimientos llevamos una roja a la izquierda y llegamos de nuevo a **(2)**:

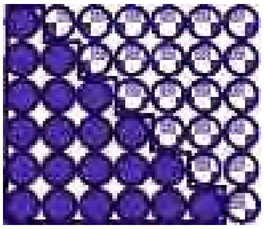
(4)

Buscando pautas numéricas:

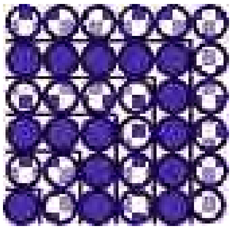
Algunos problemas numéricos requieren para su demostración de argumentos inductivos o de complicadas manipulaciones algebraicas. A continuación ofrecemos problemas cuyas demostraciones pueden ser comprendidas por alumnos de la ESO:

Problema 8: *Piensa un número de dos cifras. Réstale la suma de sus cifras, ¿qué observas?* (Puedes encontrar una aplicación sorprendente de este resultado en [C])

Los siguientes problemas permiten *Demostraciones sin palabras* [3].



Problema 9: *¿Cuánto suman los diez primeros números enteros? ¿Y los diez mil primeros números enteros?*



Problema 10: *¿Cuánto suman los veinte primeros enteros impares? ¿Y los cinco mil primeros números enteros impares?*

Problema 11:

Piensa un número de 4 cifras no todas iguales.

Reordena las cifras para obtener el mayor y el menor número posible.

Calcula la diferencia de entre estos dos números.

Repite el proceso unas cuantas veces con los números que vas obteniendo.

¿Qué observas?

Este curioso problema está demostrado en [4]. Su demostración requiere de algunas deducciones lógicas y, fundamentalmente, de un estudio sistemático y metódico de todos los casos que aparecen, lo que la hace especialmente adecuada para los alumnos de la ESO.

Tres conjeturas famosas:

Para aquellos que se hayan quedado con ganas, dejamos como «ejercicio» las siguientes conjeturas para que las demuestren o encuentren contraejemplos: [5]

***Conjetura de Goldbach* (1742)**: *Todo número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos números primos.*

El problema 3*x* + 1:

Comienza con un número natural cualquiera.

Si es par, divídelo entre 2.
Si es impar, multiplícalo por 3 y súmale 1.

Repite el proceso.

Conjetura: *Todo número natural produce una secuencia que finalmente acaba en 4, 2, 1.*

Ejemplo: 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Conjetura de los capicúas*:*

Piensa un número. Invierte sus cifras. Suma esos dos números. Repite la operación con el resultado obtenido.

Conjetura: *Tarde o temprano obtendrás un número capicúa.*

Ejemplos: 235 + 532 = 767

139 + 931= 1070; 1070 + 0701= 1771

Bibliografía:

[1] Newton Students Notes

Mathematics Challenge for Young Australians

Enrichment Stage AMT Publishing http://www.amtt.com.au/

[3] Demostraciones sin palabras

Roger B. Nelsen

Ed. Proyecto Sur

[5] Excursions in Calculus

Robert M. Young

The Mathematical Association of America

[7] Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas

Martin Gardner

Gedisa Editorial

[9] Problemas con pautas y números

Shell Centre for Mathematical Education

Ed. Universidad del País Vasco

[2] Dirichlet Student Notes Mathematics Challenge for Young Australians

Enrichment Stage AMT Publishing

http://www.amtt.com.au/

[4] El ingenio en las matemáticas

Ross Honsberger

Col. La tortuga de Aquiles. Ed. Euler

[6] Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas

Martin Gardner

Gedisa Editorial

[8] Mathematical Circles (Russian Experience)

Fomin, Genkin e Itenberg

American Mathematical Society

[10] Pensar matemáticamente

Mason, Burton y Stancey

Editorial Labor

Páginas web de juegos:

[A] Las torres de Hanoi

http://www.aulademate.com/contentid-99.html

[B] Las ranas saltarinas

http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog

[C] Lectura del pensamiento

http://www.cyberpadres.com/juegos/jugar/pensamiento_lectura.htm