GEOMETRÍA FRACTAL

Julián Aguirre Estibález
Catedrático de Análisis Matemático
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Fractales en la naturaleza

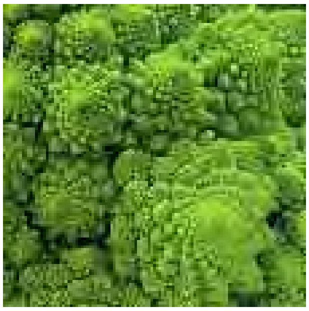
En 1623, Galileo desvelaba el idioma en que está escrito el Universo:

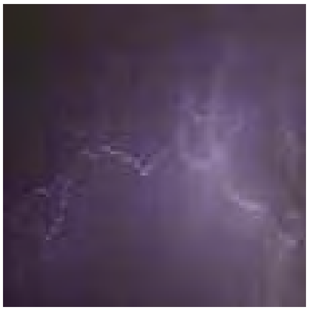
> *«… es el de las Matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras Geométricas…»*

Sin embargo, en la naturaleza no vemos triángulos, círculos o esferas. La geometría euclídea no resulta adecuada para describir la sutil complejidad de las irregularidades de la naturaleza. Como dice Benôit Mandelbrot (1924–), inventor del término *fractal*:

> *«…Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, la corteza de un árbol no es suave y la luz no viaja en línea recta.»*

La *geometría fractal* permite estudiar de manera científica formas naturales como la del árbol, romanesco, copo de nieve y rayo de las fotografías, en las que apreciamos irregularidades, estructura en todas las escalas, y autosemejanza, es decir, un parecido de las partes con el todo. Pero no sólo la naturaleza produce objetos fractales. También la industria ha comenzado a explotar las formas fractales para la producción por ejemplo de antenas, difusores de fluidos e incluso camuflaje militar.



Los antecedentes de los fractales los encontramos en construcciones patológicas de figuras planas con propiedades contrarias a toda intuición. Los primeros ejemplos son curvas continuas, que pueden dibujarse en un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel, pero que no tienen tangente en ningún punto, y que provocaron el siguiente comentario de Charles Hermite (1822-1901):

> *«El análisis matemático quita con una mano lo que da con la otra. Huyo con miedo y espanto de ese deplorable mal, funciones continuas sin derivada.»*

La curva de Koch

Una de las más conocidas es debida al matemático sueco Helgen von Koch (1870–1924), construida a partir de un segmento rectilíneo, procediendo así:

1. Se divide el segmento en tres partes iguales;
2. Se sustituye la parte central por un triángulo equilátero sin la base;
3. Se repite el proceso con cada uno de los cuatro segmentos resultantes.

El resultado de iterar este proceso hasta el infinito, es una curva de longitud infinita que no tiene tangente en ninguno de sus puntos.

Giusepe Peano (1858-1932) y David Hilbert (1862-1943) construyeron ejemplos aún más contrarios a la intuición: curvas que llenan el plano, y cuyo dibujo es un cuadrado sólido.

El triángulo de Sierpinski

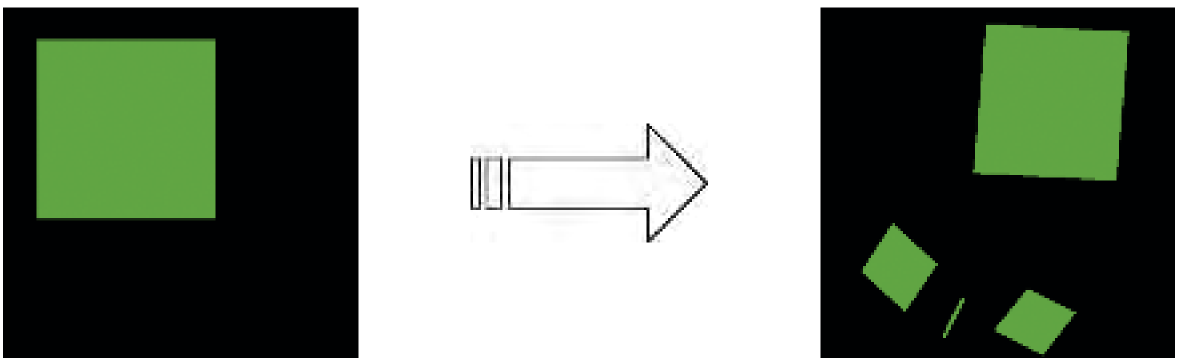
Waclaw Sierpinski (1882–1969) ideó el conocido como triángulo de Sierpinski. Para su construcción se parte de un triángulo, y se repite el siguiente proceso hasta el infinito:

1. Se divide el triángulo en cuatro triángulos iguales;
2. Se elimina el triángulo del medio.

Se trata de una generalización de una construcción debida a Georg Cantor (1845–1918), conocido como el creador la teoría de conjuntos.

Sistemas iterados de funciones

La curva de Koch, el triángulo de Sierpinski y gran parte de los fractales se construyen con un mismo mecanismo: una regla sencilla que se repite una y otra vez en un proceso de retroalimentación (*feedback*), en el que el resultado de aplicar la regla a un dato, se utiliza como dato para la siguiente iteración. Así se construyen fractales mediante *sistemas iterados de funciones*, siendo uno de los más conocidos el helecho de Barnsley. Partiendo de una figura cualquiera, como el cuadrado verde de la izquierda, se hacen cuatro *fotocopias* deformadas de una cierta manera, se giran y se trasladan, y se forma una nueva figura, con la que se repite el proceso. La fotocopiadora es aquí una metáfora de una función entre puntos del plano.



El número de copias, la deformación que sufre cada una de ellas y su posterior colocación permiten generar una variedad infinita de fractales, algunos que imitan formas naturales, y otros patrones geométricos.

Los mamíferos y otros animales superiores tienen simetría bilateral o de reflexión, es decir, se dividen en dos partes, una imagen especular de la otra. Muchas flores, como las margaritas, tienen simetría de rotación. Los ejemplos de fractales que hemos visto tienen una forma de simetría distinta: son iguales a la unión de un número finito de copias de si mismos. Es lo que se conoce como *autosemejanza*, y es una de las características que define un fractal.

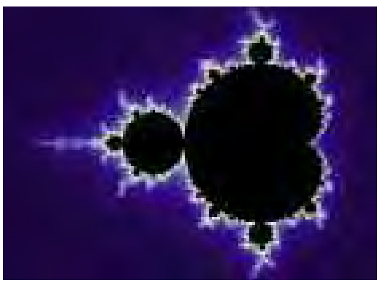
El conjunto de Mandelbrot

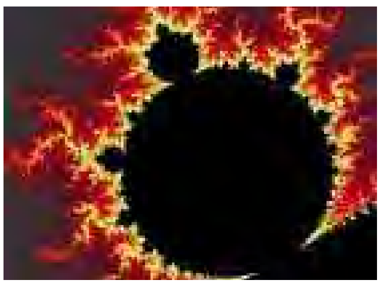
Otra fuente de fractales es la iteración de funciones de variable compleja. Los *números complejos* son una extensión de los números reales, introducidos para poder resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$, de las que se dice que no tiene solución. En efecto, el cuadrado de un número real nunca es negativo, y al sumarle uno no puede dar cero. Por ello se ideó la *unidad imaginaria*, representada por i, con la propiedad de que $i^2 = -1$. Los números complejos son de la forma $z = x + y\,i$, donde x e y son números reales. De la misma manera que representamos los números reales en una recta, los números complejos se representan en un plano, identificando $z = x + y\,i$ con el punto de coordenadas (x,y). Los números complejos se pueden sumar y multiplicar, y a efectos de lo que aquí nos ocupa, podemos definir una función compleja que a z le hace corresponder $z^2 + c$, donde c es un parámetro también complejo. Algunos de los fractales más bellos y complicados de las matemáticas, entre ellos el conjunto de Mandelbrot, se obtienen al aplicar el proceso de retroalimentación a esta familia de polinomios de segundo grado.

El conjunto de Mandelbrot está formado por los valores del parámetro c que cumplen cierta propiedad que estudiamos a continuación. Partimos del número complejo 0, lo elevamos al cuadrado y le sumamos c, obteniendo $0^2 + c = c$. Repetimos el proceso con este valor, obteniendo $c^2 + c$. Al iterar este proceso de feedback, se obtiene una sucesión cuyos primeros términos son

$$0,\quad c,\quad c^2 + c,\quad (c + c)^2 + c,\quad ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c,\quad (((c^2 + c)^2 + c)^2 + c,\ldots$$

Existen entonces dos posibilidades: los términos de la sucesión permanecen todos en un círculo, o se alejan hacia infinito. En el primer caso, el número está en el conjunto de Mandelbrot. El algoritmo que acabamos de describir puede programarse para obtener imágenes del conjunto de Mandelbrot. Existen además algoritmos para colorear esas imágenes, basados en los valores de la sucesión de iteraciones, que producen imágenes impactantes, como las que siguen a estas líneas.

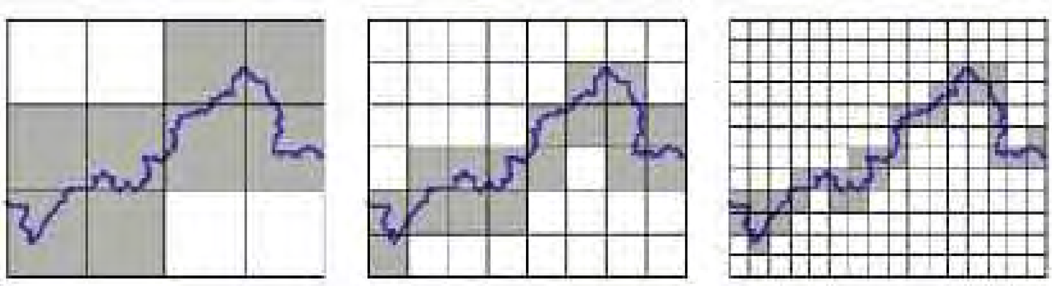




Dimensión fractal

¿Qué es lo que hace que una cierta imagen sea un fractal? Hasta ahora hemos mencionado la autosemejanza, pero no es suficiente. Un cuadrado es autosemejante, pues es la unión de cuatro cuadrados iguales entra sí y semejantes al primero, pero dista mucho de ser un fractal. El ingrediente que falta es la *dimensión fractal*. Todos tenemos una idea intuitiva de dimensión, que coincide con a llamada *dimensión topológica*: un punto no tiene dimensión, una línea tiene una, una superficie dos y un sólido tres. Pero los matemáticos han ideado otros conceptos de dimensión, que resultan más adecuados para el estudio de los fractales.

Para calcular la dimensión fractal de una figura plana se preparan una serie de cuadrículas cada vez más finas, de manera que el lado de una cuadrícula sea la mitad del de la anterior. Se superponen sobre el conjunto y se cuenta el número de cuadros que tienen algún punto en común con la figura. La forma en que varía ese número con el tamaño de la cuadrícula determina mediante una fórmula la dimensión fractal de la figura. De esta forma se puede determinar experimentalmente la dimensión fractal de una nube, un línea de costa o un cuadro, tal y como se ha hecho con las *drip paintings* del pintor americano Jackson Pollock (1912–1956).



La curva de Koch tiene dimensión fractal 1,262, y el triángulo de Sierpinski 1,585.

¿Qué es un fractal?

Estamos ya en condiciones de responder a esa pregunta. Según Mandelbrot , una figura es un fractal cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.

Caos y fractales

En lenguaje coloquial, entendemos por caos una situación confusa, con un desarrollo errático y desordenado. Ese comportamiento caótico lo asociamos con fenómenos aleatorios, en los que es imposible predecir el resultado de un experimento concreto, como el de lanzar una moneda al aire. La teoría de la probabilidad, desarrollada a partir de los estudios sobre los juegos de azar por Pierre de Fermat (1601–1665) y Blaise Pascal (1623–1662), permite estudiar esos fenómenos de manera científica, y obtener información útil sobre ellos. Por ejemplo, explica porqué a la larga no puede ganarse dinero jugando en un casino.

Para explicar el fenómeno del *caos determinista*, realicemos un pequeño experimento con una calculadora. Introducimos un número positivo *cualquiera* y pulsamos repetidamente la tecla . El resultado final, independientemente del número inicial, será 1,000… Algo similar ocurre si pulsamos la tecla correspondiente a la función . Imaginemos (o programemos) una tecla que realice con un número x la operación $4x(1–x)$, y repitamos el experimento, esta vez con números comprendidos entre 0 y 1. Nos daremos cuenta enseguida de que el comportamiento de la serie numérica que vamos calculando a medida que presionamos esa tecla parece caótico. Además, si realizamos el experimento con dos números iniciales distintos pero muy cercanos, después de presionar unas cuantas veces la tecla, el resultado será muy distinto, como se aprecia en el siguiente cuadro. La primera fila es el número de veces que presionamos la tecla, la segunda el resultado que se obtiene al empezar con x=0,300, y la segunda al empezar con x=0,301.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,300	0,840	0,538	0,994	0,023	0,088	0,321	0,872	0,448	0,989	0,434	0,166
0,301	0.842	0,533	0,996	0,018	0,069	0,258	0,765	0,719	0,808	0,620	0,942

Este fenómeno es lo que se denomina dependencia sensitiva de condiciones iniciales, y es más conocido como *efecto mariposa*. Una pequeña diferencia en las condiciones iniciales, como puede ser el aleteo de una mariposa, puede producir a la larga resultados completamente diferentes. Cuando un sistema tiene este comportamiento, es inútil hacer predicciones a largo plazo, como bien saben los metereólogos.

Muchos de estos sistemas caóticos tienen *atractores extraños*, figuras hacia las cuales evolucionan con el transcurso del tiempo. A su vez, estos atractores son frecuentemente fractales.

Arte fractal

El impacto visual de las imágenes creadas a partir de los experimentos de Mandelbrot inspiró a una serie de artistas, que propusieron usar los algoritmos generativos de fractales para la creación de obras de arte. Una de las características que diferencian el arte fractal de otras formas de arte digital, es que son las matemáticas las que, a partir de parámetros elegidos por el artista, crean la obra. Por *arte fractal* se entiende la creación de obras de arte mediante algoritmos matemáticos de generación de fractales, y su posible manipulación posterior. La mayor parte de la producción de arte fractal es visual, imágenes para ser vistas en la pantalla del ordenador, y en ocasiones impresas para su comercialización, como si de litografías se tratase. Pueden verse en un museo para el que no es necesario entrada, sino que basta una conexión a Internet. Quien desse visitarlos puede hacerlo escribiendo en su buscador favorito