

HOJA EN BLANCO

HOJA EN BLANCO

# Taller de Matemáticas

HOJA EN BLANCO

# Taller de Matemáticas

Andrés Ruiz de Elvira Albanea  
Miguel Blanco Alonso  
Abilio Corchete González

**JUNTA DE EXTREMADURA**  
Consejería de Educación y Juventud  
*Dirección General de Promoción Educativa*  
Mérida, 1998

© Consejería de Educación y Juventud, 1998  
© "Taller de Matemáticas" de Andrés Ruiz de Elvira Albandea,  
Miguel Blanco Alonso y Abilio Corchete González.

Edita:

**JUNTA DE EXTREMADURA**

Consejería de Educación y Juventud  
*Dirección General de Promoción Educativa*  
Mérida. 1998

Colección:

Materiales Curriculares

Diseño de línea editorial:

JAVIER FELIPE S.L. (Producciones & Diseño)

I.S.B.N.:

84-923779-0-9

Depósito Legal:

BA-411-1998

Fotomecánica e Impresión:

GRÁFICAS REJAS (Mérida)

# Índice

---

<b>Presentación</b> . . . . .	11
-------------------------------	----

---

<b>Introducción</b> . . . . .	13
-------------------------------	----

---

<b>Las materias optativas en la E.S.O.</b> . . . . .	15
--	----

---

<b>El Taller de Matemáticas como materia optativa</b> . . . . .	17
---	----

---

<b>Propuesta para un Taller de Matemáticas</b>	
1.- Organización de la materia . . . . .	19
2.- Objetivos . . . . .	20
3.- Contenidos. Temporalización . . . . .	20
4.- Procedimientos y actitudes generales . . . . .	22
5.- Metodología propuesta . . . . .	23
6.- Fases de cada unidad . . . . .	26
7.- Evaluación . . . . .	27

---

<b>Unidad nº 1:</b>	
<b>“El Tangram”</b>	
A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	35
B. Material necesario . . . . .	35
C. Actividades para los alumnos . . . . .	35
D. Actividades de evaluación . . . . .	36
E. Guía del profesor . . . . .	36
F. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	40

---

<b>Unidad nº 2:</b>	
<b>“Resolución de problemas”</b>	
A. Metodología y organización . . . . .	49
B. Guía del profesor . . . . .	50
C. Algunas notas sobre resolución de problemas . . . . .	51
D. Nuestra experiencia . . . . .	53
E. Algunos problemas . . . . .	53
F. Evaluación . . . . .	54
G. Buenas ideas para llegar a la solución . . . . .	54

---

## Unidad nº 3:

### “Poliminós y policubos”

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	59
B. Nuestras fuentes . . . . .	59
C. Material necesario . . . . .	59
D. Actividades para los alumnos . . . . .	60
E. Actividades de evaluación . . . . .	60
F. Guía del profesor . . . . .	61
G. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	69

---

## Unidad nº 4:

### “La banda de Moebius”

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	83
B. Nuestras fuentes . . . . .	83
C. Material necesario . . . . .	83
D. Actividades para los alumnos . . . . .	84
E. Actividades de evaluación . . . . .	84
F. Guía del profesor . . . . .	84
G. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	88

---

## Unidad nº 5:

### “Grafos eulerianos”

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	97
B. Material necesario . . . . .	97
C. Actividades para los alumnos . . . . .	97
D. Actividades de evaluación . . . . .	98
E. Guía del profesor . . . . .	99
F. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	102

---

## Unidad nº 6:

### “Construcción de un depósito”

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	109
B. Material necesario . . . . .	109
C. Actividades para los alumnos . . . . .	109
D. Actividades de evaluación . . . . .	110
E. Guía del profesor . . . . .	110
F. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	113

---

## **Unidad nº 7:**

### **“Gráficas y funciones”**

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	121
B. Nuestras fuentes . . . . .	121
C. Material necesario . . . . .	121
D. Actividades para los alumnos . . . . .	121
E. Actividades de evaluación . . . . .	121
F. Guía del profesor . . . . .	122
G. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	124

---

## **Unidad nº 8:**

### **“Comenzando al azar”**

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	133
B. Nuestras fuentes . . . . .	133
C. Material necesario . . . . .	133
D. Actividades para los alumnos . . . . .	133
E. Actividades de evaluación . . . . .	134
F. Guía del profesor . . . . .	134
G. Hojas de trabajo para los alumnos . . . . .	139

---

## **Unidad nº 9:**

### **“El camaleón y la mosca”**

A. En esta unidad trabajaremos . . . . .	155
B. Material necesario . . . . .	155
C. Actividades para los alumnos . . . . .	155
D. Actividades de evaluación . . . . .	156
E. Guía del profesor . . . . .	156

---

<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>159</b>
-------------------------------	------------

---

### **Anexos**

1.- Encuesta del primer día de clase . . . . .	163
2.- Modelos de prueba escrita . . . . .	164
3.- Trabajo para vacaciones . . . . .	166
4.- Cuestionario para la evaluación de la asignatura y del profesor . . . . .	168
5.- Informe para alumnos con evaluación negativa . . . . .	171

---

<b>Notas para el lector . . . . .</b>	<b>173</b>
---------------------------------------	------------

HOJA EN BLANCO

# Presentación

Una enseñanza obligatoria y comprensiva como la que establece la L.O.G.S.E. en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria, no sólo debe entenderse como aquella que obliga a chicos y chicas a asistir a un centro escolar hasta los 16 años, sino que exige al sistema educativo que ofrezca propuestas que permitan desarrollar al máximo las capacidades de cada cuál. Para ello es preciso, en primer lugar, admitir el reconocimiento de la diversidad como un elemento positivo y realista de abordar la existencia de diferencias individuales en el alumnado, en cuanto a estilos y ritmos de aprendizaje, experiencia escolar, capacidades e intereses.

Una materia en la que, sin lugar a dudas, el tratamiento de la diversidad tiene un especial interés es en la enseñanza de las matemáticas y ello, entre otras razones, porque tradicionalmente se ha pensado que la actividad matemática estaba reservada a una élite de personas especialmente dotadas para el razonamiento abstracto. Sin embargo, las matemáticas son una ciencia plural que junto a una finalidad formativa ligada al desarrollo de capacidades intelectuales puede favorecer valores estéticos, recreativos y utilitarios.

Por otra parte, la Consejería de Educación y Juventud viene ofreciendo al profesorado una vía de análisis y reflexión mediante la difusión de propuestas didácticas atractivas y, al mismo tiempo, útiles para orientar el trabajo de los profesores y alumnos capacitándoles para hacer frente de una forma eficaz a sus problemas y necesidades cotidianas.

En estas coordenadas se inscribe el presente trabajo que intenta ofrecer una completa visión del Taller de Matemáticas. Esta asignatura, optativa en E.S.O., es de gran importancia como elemento de motivación al mostrar aspectos sorprendentes de la matemática, favorece el trabajo manipulativo, de creación y de investigación y, en consecuencia, el desarrollo de ciertas capacidades imprescindibles para paliar la imagen negativa que muchos alumnos tienen de esta ciencia, al hacer ver que el juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la misma.

Además, el hecho de que sea el resultado de la experiencia llevada a cabo por un grupo de profesores con alumnos y alumnas de un Centro educativo de nuestra Comunidad Autónoma durante varios cursos consecutivos y que, por tanto, ha sido sucesivamente depurada, permite considerar esta propuesta como ejemplo de adaptación a la realidad educativa extremeña, sin por ello perder un ápice de su carácter innovador.

Finalmente, en un momento como el actual en que se ha hecho aparecer en la opinión pública una cierta preocupación acerca de la enseñanza de las matemáticas en un contexto de posible modificación de la normativa sobre la Educación Secundaria Obligatoria, y en el que por otra parte, existen posibilidades de que en un futuro próximo la Comunidad Autónoma de Extremadura haga efectivas las plenas competencias en Educación, la Consejería de Educación y Juventud pretende contribuir con esta publicación a la reflexión serena y rigurosa que conduzca al cambio de aquello que deba cambiar, sin modificar lo que se ha comprobado que funciona.

*El Consejero de Educación y Juventud*

*Luis Millán Vázquez de Miguel*

# Introducción

La pequeña historia de nuestro Taller de Matemáticas empezó a finales del curso 1990-91. En el I.E.S. “Suárez de Figueroa” (entonces I.B.) se trabajaba en la preparación de lo que sería el último curso del Plan Experimental para la Reforma de las Enseñanzas Medias. Para entonces ya se había hecho pública la L.O.G.S.E. y se conocían los borradores de los Reales Decretos de mínimos (14 de junio de 1991) y del currículo (6 de septiembre de 1991); el cambio era, por tanto, inminente.

Nuestro Centro decidió preparar el camino y se organizó un curso de transición donde, sobre la estructura del Experimental, comenzaron a aplicarse algunos de los planteamientos educativos de la L.O.G.S.E. Así, ante la posibilidad de ofrecer a los alumnos nuevas asignaturas, surgió la idea de crear un Taller de Matemáticas para mostrar aspectos nuevos de una materia con un historial bastante oscuro.

Empezamos por buscar material distinto, con actividades que resultaran novedosas a los alumnos y que no se parecieran mucho a las que se trabajan en la clase de Matemáticas. Utilizamos algunas publicaciones del Experimental y varios cursos organizados por el C.E.P. de Zafra, donde descubrimos “cosas” como los poliminós o que un rompecabezas chino podía dar juego desde el punto de vista matemático. Imprescindibles fueron los libros sobre Matemáticas recreativas, en especial los de Martin Gardner, Brian Bolt y Miguel de Guzmán.

Tras recopilar ideas y actividades elaboramos un programa que, a pesar de parecerse más a una declaración de intenciones que a un proyecto sólido y concreto, nos sirvió para empezar a trabajar dentro del aula y, poco a poco, ir definiendo nuestro Taller. Llevamos a la práctica los temas previstos, resolvimos las cuestiones organizativas, nos esforzamos en interpretar adecuadamente nuestro papel de “asesores”, diseñamos un sistema de evaluación... En pocas palabras, fuimos creando una materia.

Los problemas que nos acarreó el día a día hicieron más por el Taller que nuestros buenos propósitos iniciales. Fue la experiencia y no nuestra capacidad de planificación la que dio cuerpo de asignatura a un conjunto de actividades mezcladas con unas pocas ideas iniciales.

A pesar de todo, mantuvimos los que para nosotros eran unos principios básicos no sacrificables; queríamos:

- sorprender al alumno, mostrando otra cara de las Matemáticas,
- potenciar la manipulación de materiales,
- utilizar la investigación como herramienta metodológica básica y
- diferenciar claramente nuestra actividad de las clases de Matemáticas normales.

Los resultados que íbamos obteniendo y la opinión de nuestros alumnos, nos animaron a continuar con la empresa. Una vez hecha pública la Orden de implantación anticipada de la E.S.O. (27 de abril de 1992) en la que se concretaron las materias optativas, solicitamos la pertinente autorización y nuestro Taller obtuvo el refrendo legal necesario.

Algún tiempo después (resolución de 10 de junio de 1992), el Ministerio de Educación y Ciencia, ofreció el currículo de la materia “Taller de Matemáticas” para que pudiera ser adoptado por los centros que lo quisieran. Nos sorprendió gratamente que los planteamientos del M.E.C. a la hora de diseñar la asignatura fueran similares a los nuestros y que muchas de las actividades sugeridas en la versión oficial del Taller de Matemáticas estuvieran también presentes en el nuestro.

Poco a poco fue aumentando el número de centros que anticiparon las nuevas enseñanzas y también la oferta del Taller de Matemáticas como materia optativa. Los enfoques no siempre han sido idénticos, pero los esfuerzos de los profesores se han ido sumando y en la actualidad disponemos del suficiente material como para poder diseñar una materia adaptada a gustos y necesidades. El propio Ministerio ha pensado en el Taller como herramienta para solventar carencias en el área de Matemáticas durante el primer ciclo de la E.S.O., idea que, como comentaremos más adelante, exige un replanteamiento global de la asignatura.

En este libro, queremos ofrecer a los profesores interesados una visión completa del Taller: desde aspectos de programación hasta el desarrollo de actividades, pasando por la evaluación, tanto del alumno como de la materia. Incluiremos, también, algunas notas metodológicas fruto de nuestra experiencia. Pretendemos que el material recogido en estas páginas, esté listo para su uso sin más que recurrir a la fotocopiadora.

Es preciso advertir que la mayor parte de las actividades son clásicos del mundo de las Matemáticas y, por tanto, patrimonio de todos. El desarrollo de algunos temas se ha inspirado en el trabajo de otros autores, unas veces conocidos (y los citaremos en su momento), otras desconocidos (por lo que nos resultará imposible mencionarlos).

Como puede suponer el lector, la originalidad ha sido escasa. Nuestra principal aportación quizá sea la forma de llevar las actividades al aula y trabajarlas con los alumnos. Hemos recopilado, resumido, ordenado y también mezclado ideas de unos y otros. Ése ha sido nuestro trabajo durante algunos años y ahora, gracias a la Consejería de Educación y Juventud de la Junta de Extremadura, queremos ofrecerlo a los profesores y alumnos que estén dispuestos a dedicar parte de su tiempo a una forma distinta de ver las Matemáticas.

# Las materias optativas en la E.S.O.

**E**l nuevo ordenamiento educativo extiende la obligatoriedad de la educación hasta los dieciséis años y confiere a la etapa obligatoria de la secundaria una doble finalidad: capacitar a todos los alumnos para desenvolverse como ciudadanos y preparar a un importante porcentaje de ellos para que continúe sus estudios en alguno de los Bachilleratos.

Tener a todos los alumnos menores de 16 años en el aula, genera problemas a los que los profesores de Enseñanzas Medias no estábamos acostumbrados: la diversidad de gustos e intereses aumenta considerablemente y además, como no todos estudiarán Bachillerato, la formación requerida no será la misma para todos. Para atender a tal heterogeneidad el Sistema Educativo prevé medidas como la de permitir que el alumno elija algunas materias, intentando así aproximar los contenidos a las características y preferencias de cada uno de ellos.

La L.O.G.S.E. (artículo 21) presenta la optatividad como una medida de atención a la diversidad y el Real Decreto del Currículo concreta las finalidades de las materias optativas cuando dice que deben “responder a los intereses y necesidades del alumnado; ampliar las posibilidades de su orientación, facilitar su transición a la vida activa y contribuir al desarrollo de las capacidades generales a las que se refieren los objetivos de la etapa”. Sobre la oferta comenta que debe ser “suficientemente diversa y equilibrada”.

Las posteriores órdenes ministeriales de implantación de la E.S.O. (1992, 1993 y 1996) precisan las posibilidades de elección y oferta de materias optativas. Inicialmente se exigía la inclusión entre las asignaturas ofertadas del segundo idioma, la Cultura Clásica y al menos una materia de iniciación profesional. Más tarde se estableció la relación entre las materias de iniciación profesional y la oferta de ciclos formativos de cada centro. Finalmente, se decidió que el segundo idioma sería, con carácter general, la materia optativa del primer ciclo (salvo casos excepcionales) y que el número de materias de iniciación profesional ofrecidas por un centro dependería del número de ciclos formativos impartidos en él o su entorno. También se limitó la posibilidad de elección al exigir que al menos una de las optativas de cuarto de E.S.O. fuera una materia de las de oferta obligada.

Esta evolución legislativa puede entenderse mejor si tenemos en cuenta qué ocurrió en los primeros años de implantación anticipada.

A pesar del papel que la legislación otorgaba a las materias de libre elección, fueron siempre consideradas asignaturas de segundo orden y heredaron las connotaciones que las E.A.T.P. tuvieron en el B.U.P. Los centros no equilibraron las ofertas, de forma que surgieron materias cuya única finalidad era resolver problemas de ajuste de plantillas. Muchos departamentos ofertaron materias para conseguir mayor número de horas lectivas. Otros presentaron asignaturas diseñadas por profesores puntuales olvidando el respaldo colectivo que el proyecto requería.

Tampoco los alumnos siguieron criterios coherentes a la hora de elegirlos. La desinformación y la ley del mínimo esfuerzo, sin tener en cuenta implicaciones futuras, caracterizaron con demasiada frecuencia la elección de materias hecha por los alumnos.

El resultado de esos primeros años fue un elevado número de materias diseñadas por los propios centros con una eficacia más que dudosa. Así pues, el legislador optó por reorientar la optatividad, limitando las posibilidades de oferta y de elección. Y aunque no le faltaban razones, hubo alguna decisión no muy acertada, desde nuestro punto de vista, con relación al Taller de Matemáticas.

Cuando en 1992 se publica la propuesta del M.E.C. sobre Taller de Matemáticas, se advierte que “no debe convertirse en una clase más de Matemáticas: ni de recuperación para alumnos que lo necesiten, ni de ampliación de los contenidos para los que van mejor”. Se pretendía “proporcionar al alumnado la oportunidad de incorporar las Matemáticas al bagaje de saberes que le son útiles en la vida diaria, fortaleciendo las relaciones que hay entre las Matemáticas y el mundo que le rodea”.

Sin embargo, la Orden de implantación de la E.S.O. de 1996 propone utilizar el Taller de Matemáticas como materia para “reforzar o profundizar las capacidades recogidas en los objetivos generales” adaptando el currículo de esta materia a las condiciones particulares de los centros.

La contradicción entre estas dos normas pudiera explicarse teniendo en cuenta la intención de limitar el número de nuevas materias, utilizando alguna de las ya diseñadas para cubrir las lagunas que se detectan.

Nuestra propuesta tiene mucho en común con el currículo oficial de 1992, pero dista mucho de ser una materia prevista para ayudar a solventar las dificultades en Matemáticas de los alumnos del primer ciclo, como tampoco lo es el desarrollo previsto en la resolución que crea la versión M.E.C. del Taller de Matemáticas.

Es cierto que en Matemáticas algunos alumnos presentan dificultades serias de aprendizaje desde muy pronto. Y no lo es menos que cuanto antes se les preste una ayuda específica, más posibilidades tendrán de solventar sus carencias en un área de marcado carácter instrumental. Pero esto no quiere decir que esa ayuda deba proporcionarla la materia optativa de la que nos ocupamos. Probablemente fuera mejor diseñar una materia optativa específica para esos fines.

# El Taller de Matemáticas como materia optativa

**E**n el Taller de Matemáticas son posibles distintos enfoques y metodologías. La forma de desarrollar la materia dependerá principalmente de los gustos del profesor y de las características de los alumnos: no será lo mismo un Taller pensado para el cuarto curso que uno diseñado para tercero, será también diferente si lo imparte un profesor que potencie la manipulación y el trabajo en grupo que si lo hace alguien al que no le convenzan esas herramientas metodológicas.

Además de la propuesta oficial con la que compartimos muchas de las ideas vertebradoras y algunos de sus contenidos, no es difícil encontrar otros modelos de Taller centrados en la resolución de problemas, dedicados a los juegos de lógica o que trabajen exclusivamente cuestiones geométricas.

Si tuviéramos que definir el modelo que estamos exponiendo, diríamos que se trata de una materia con marcado carácter procedimental y actitudinal, en la que se potencia la aplicación de contenidos y métodos de razonamiento matemático a situaciones prácticas. En ella se fomenta, también, el trabajo cooperativo y, por tanto, el respeto hacia opiniones distintas de la propia.

Desde el primer momento lo diseñamos para tercero de E.S.O. pues, aunque los alumnos de cuarto presentarían mayor capacidad para el trabajo abstracto, la orientación manipulativa de la que hemos hablado y nuestro interés por mostrar cuanto antes la faceta aplicada de las Matemáticas hacían de él una asignatura recomendable para ese curso.

Las principales aportaciones de esta materia optativa a la consecución de los objetivos generales de la etapa, vienen de la mano del “saber hacer”. Aportamos nuestro grano de arena intentando que los alumnos conozcan las principales formas de hacer en Matemáticas y sean capaces de relacionarlas con situaciones cotidianas. En particular, los procesos de razonamiento habituales en el campo de las Matemáticas ayudan a desarrollar la capacidad del alumno para enfrentarse a situaciones desconocidas.

El Taller de Matemáticas puede contribuir, también, al afianzamiento de actitudes respetuosas y hábitos de trabajo positivos. La colaboración a la hora de enfrentarse con las actividades propuestas muestra al alumno el potencial del trabajo en equipo y justifica la trascendencia que esta herramienta tiene para el avance de nuestra sociedad.

Manipular objetos y aplicar conceptos ayudará a comprenderlos mejor y en este sentido el Taller puede ser un importante aliado de la clase normal de Matemáticas, pero no creemos que esta sea la finalidad principal de la materia. Es más, como ya hemos dicho, pensamos que no puede ni debe utilizarse para corregir deficiencias de aprendizaje del área de Matemáticas o para profundizar en ella.

Lógicamente, el Taller comparte contenidos con la asignatura de Matemáticas pero existen diferencias que debemos destacar:

- La vocación de materia aplicada difiere del carácter autosuficiente que rodea a una disciplina tan instrumental como las Matemáticas.
- Es una materia que se cursará durante un año y que no condicionará el desarrollo posterior de ninguna otra asignatura. Disponemos, por tanto, de tiempo suficiente para dedicarlo a cuestiones como el trabajo en grupo o la manipulación, aspectos éstos que en las materias no optativas sólo se trabajan de forma muy puntual.
- El profesor no está coaccionado por un temario de mínimos que debe desarrollar obligatoriamente. Esto facilita la posibilidad de adaptar ritmos y contenidos a las condiciones del grupo y de los alumnos. Un adecuado equilibrio entre manipulación y reflexión puede ser un importante instrumento para abordar esa diversidad.
- El comportamiento del profesor en el aula también puede ser distinto. En el Taller es posible una actitud mucho más constructiva y menos expositiva. Conducir los procesos de investigación o asesorar sin que el alumno pierda la iniciativa, son papeles que no puede primar el profesor del área de Matemáticas.

En relación con la propuesta de Taller de Matemáticas que el M.E.C. hizo en la resolución de 10 de junio de 1992, ya hemos dicho que coincidimos ampliamente con las ideas que la estructuran y las pautas metodológicas que sugiere. Los contenidos que enuncia nos parecen excesivos: de nuevo volvemos a caer en la ancestral necesidad de atiborrar las programaciones para que después el tiempo (dos horas semanales) ponga las cosas en su sitio y demuestre que es imposible trabajar todo lo previsto, mucho más cuando se pretende abordar con seriedad objetivos actitudinales y modificar hábitos de trabajo. ¡Qué sencillo sería no incrementar gratuitamente los niveles de frustración de muchos profesores! Preferimos entender ese listado de contenidos como una batería de la que cada cual puede extraer aquello que considere más interesante.

La propuesta se completó con un libro de los que componen las conocidas “cajas rojas”, donde se añaden orientaciones sobre la metodología, organización y evaluación. También se incluye una completa guía de materiales y recursos. El texto es interesante, aunque algunas sugerencias parecen poco realistas y muy teóricas. No conocemos ningún centro (ni los de nueva construcción) que cuenten con espacios específicos para Matemáticas, mucho menos para su Taller. ¡Otra de frustraciones!

Queremos que tanto nuestro Taller como este libro sean realistas y puedan servir para alumnos, profesores y centros normales. Nos regimos por unas cuantas ideas o aspiraciones, con algo de utopía, que nos marcan el camino. Como cualquier otro profesor, sucumbimos con frecuencia, pero los objetivos nos parecen interesantes y volvemos a levantarnos. Nada más.

# Propuesta para un Taller de Matemáticas

## 1.- Organización de la materia

En nuestra propuesta, el eje vertebrador de la materia son las actividades y no los contenidos matemáticos. El punto de partida suele ser una hoja que se entrega al alumno, en la que se va delimitando el problema. Otras veces utilizamos el trabajo previo del alumno en su casa, buscando ciertos objetos o fabricando material que después será utilizado en clase.

El desarrollo posterior de la actividad se realiza en clase, trabajando habitualmente en pequeños grupos con puestas en común dirigidas por el profesor. Al final, cada alumno deberá elaborar un resumen sobre el tema incluyendo valoraciones personales.

La secuenciación de los capítulos tratados obedece, en nuestro caso, al intento de ir alternando actividades de distintos tipos, teniendo en cuenta las preferencias que los alumnos manifiestan en las encuestas de evaluación final de la asignatura.

El tema de la resolución de problemas es, para nosotros, un caso especial. No lo concebimos como un bloque autónomo: se va desarrollando a lo largo de todo el curso. Periódicamente proponemos problemas o cuestiones de ingenio para que se trabajen de forma individual o en grupo. Hacemos hincapié en el protocolo de resolución e intentamos que el alumno asuma, poco a poco, las estrategias que le permitirán enfrentarse, en el futuro, a cualquier problema.

Cuando pusimos en marcha el Taller de Matemáticas programamos la resolución de problemas como una actividad más. Después del primer año de práctica, decidimos cambiar el planteamiento al comprobar que había sido el tema peor valorado y que el desarrollo en el aula había resultado tedioso. Esta experiencia y otras que vinieron después nos han servido para obtener algunas conclusiones sobre el tema que más adelante comentaremos.

Concebimos el Taller como una materia manipulativa y este empeño exige una adecuada planificación de las tareas encomendadas a los alumnos. Unas veces será el profesor quien aporte el material, pero en otras ocasiones será necesario que previamente preparen en casa determinadas cuestiones o traigan ciertas herramientas de trabajo. Conseguir que todos los alumnos actúen de forma responsable requiere convencimiento y constancia. Resultaría más fácil olvidarse de la manipulación y los problemas que ésta acarrea, pero seguimos pensando que tocar los objetos facilita la comprensión de los conceptos y que la responsabilidad de los alumnos es uno de los contenidos actitudinales básicos que deben trabajarse en la Secundaria Obligatoria.

Todos estos aspectos organizativos son discutibles. No deberíamos olvidar que en este libro ofrecemos experiencias y puntos de vista particulares. La secuenciación y los demás elementos metodológicos responden a nuestro concepto del Taller de Matemáticas y, en última instancia, a nuestra forma de entender la educación. Cada profesor adaptará la organización de la materia a las características de sus alumnos y a sus propias convicciones.

## 2.- Objetivos

El objetivo básico que perseguimos en nuestro Taller es lograr que los alumnos sean capaces de aplicar unas cuantas herramientas matemáticas a situaciones más o menos reales. Estas herramientas no son sólo conceptos, propiedades o fórmulas, sino que nos parece más interesante que el alumno se acostumbre a utilizar procedimientos y hábitos típicos del trabajo matemático que pueden resultar efectivos ante situaciones variopintas.

- Actuar con imaginación y creatividad, valorando la importancia no sólo de los resultados, sino del proceso que los produce.
- Desarrollar estrategias basadas en el proceso de razonamiento matemático para usarlas en situaciones diversas y no siempre relacionadas con las Matemáticas.
- Trabajar en equipo para llevar a cabo una tarea, valorando las ventajas de la cooperación.
- Mostrar actitudes propias de la actividad matemática en situaciones cotidianas e incorporar al lenguaje habitual las formas de expresión matemática.
- Diseñar y manipular materiales que favorezcan la comprensión de conceptos y procedimientos.

## 3.- Contenidos. Temporalización

### 3.1.- CONTENIDOS AGRUPADOS POR BLOQUES

En la siguiente tabla aparece una relación de las unidades que integran el curso y que desarrollaremos en la segunda parte del libro. Se muestran, también, los principales contenidos que se trabajan en cada una, organizados según bloques de contenidos.

UNIDADES	ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA	GEOMETRÍA	FUNCIONES	OTRAS CARACTERÍSTICAS
El Tangram	Cálculos básicos. Fracciones. Porcentajes. Números.	Figuras elementales. Teorema de Pitágoras. Áreas y perímetros.		Manipulación. Creatividad. Optimización.
Poliminós y policubos	Cálculos básicos. Operaciones con radicales.	Giros y simetrías. Teorema de Pitágoras. Geometría tridimensional. Perspectivas.		Manipulación. Juegos. Visión espacial. Generalización a partir de casos particulares.

La banda de Moebius		Caras, lados. Geometría no clásica.		Manipulación. Generalización.
Grafos eulerianos				Juegos. Investigación. Simplificación de un problema. Situaciones equivalentes. Generalización a partir de casos particulares. Aplicación de un resultado teórico a situaciones concretas.
Construcción de un depósito	Cálculos aproximados. Errores y redondeo.	Superficies laterales. Volúmenes. Modelos tridimensionales. Escalas.	Tablas de valores. Gráficas.	Optimización. Generalización.
Gráficas y funciones			Tablas de valores. Representación gráfica de relaciones entre variables. Interpretación de gráficas. Crecimiento/decrec. Máximos y mínimos. Tendencias.	Magnitudes y unidades.
Comenzando al azar	Operaciones básicas.			Fenómenos aleatorios. Recuentos. Simulación. Experimentación. Juegos. Cálculo de probabilidades.
El camaleón y la mosca	Cálculos básicos. Errores y redondeo.	Escalas. Medidas. Modelos tridim. Teorema de Pitágoras.		Investigación. Modelización de la realidad. Optimización.

### 3.2.- TEMPORALIZACIÓN

Los datos de la siguiente tabla se han obtenido a partir de la experiencia acumulada a lo largo de los últimos siete años. Pueden servir para planificar el Taller a los que lo impartan por primera vez. Incluimos, también, algunas consideraciones a tener en cuenta a la hora de distribuir el tiempo.

Suponiendo que el curso tenga una duración de 35 semanas y cada una dos clases, contaríamos con 70 horas para desarrollar la materia. Si descontamos cinco o seis clases perdidas por motivos varios, el inicio y las dedicadas a evaluaciones, destinaremos unos 60 módulos reales a las actividades propias del Taller.

Unidades	Número aproximado de clases
El Tangram	De 8 a 16 clases
Resolución de problemas	De 9 a 11 clases
Poliminós y policubos	De 9 a 13 clases
La banda de Moebius	De 5 a 9 clases
Grafos eulerianos	De 5 a 9 clases
Construcción de un depósito	De 6 a 8 clases
Gráficas y funciones	De 5 a 7 clases
Comenzando al azar	De 10 a 12 clases
El camaleón y la mosca	De 4 a 6 clases

Conclusión: vuelve a ser difícil poder completar todas las actividades previstas. Por tanto, el lector deberá elegir aquellas unidades que crea más adecuadas para sus alumnos. Aconsejamos tener en cuenta la programación del área de Matemáticas para evitar contenidos repetidos o similares.

Las clases dedicadas a la resolución de problemas se imparten de forma aislada, eligiendo aquellos momentos que parecen más propicios: días perdidos al final de cada trimestre, corrección de problemas propuestos para las vacaciones, al comienzo de algunas clases, etc.

## **4.- Procedimientos y actitudes generales**

Nuestro planteamiento hace de la asignatura una materia de marcado carácter procedimental y actitudinal, por ello enunciaremos a continuación una lista de procedimientos y actitudes que se trabajarán en casi todas las actividades. De hecho, suele ocurrir que las situaciones propuestas sean sólo el medio para tratar lo que realmente interesa: procedimientos y actitudes.

El lector podrá encontrar en el siguiente catálogo dos tipos principales de enunciados: los que hacen referencia al trabajo matemático y los que tienen que ver con la actitud del alumno ante el trabajo en general.

- Utilizar la calculadora para comprobar conjeturas, investigar regularidades o generar números aleatorios.
- Formular y comprobar conjeturas sobre situaciones y problemas.
- Utilizar el razonamiento lógico para llegar a conclusiones plausibles.
- Utilizar el método de análisis-síntesis al enfrentarse con problemas o situaciones complejas.
- Manipular materiales con el fin investigar propiedades o modelizar la realidad.
- Utilizar técnicas de trabajo en equipo y de reparto de tareas.
- Utilizar distintos códigos o lenguajes para representar y resumir la información contenida en el enunciado de un problema o situación.
- Reducir problemas complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.
- Estimar medidas de diferentes magnitudes evaluando adecuadamente el error.
- Actitud abierta y crítica, contrastando opiniones con los compañeros y con el profesor.
- Limpieza y orden en la exposición de los razonamientos.
- Actitud positiva ante las tareas a realizar tanto en clase como en casa. Puntualidad en la entrega de trabajos.
- Gusto por el trabajo bien hecho.
- Utilización precisa del lenguaje.
- Analizar de forma crítica los resultados obtenidos para detectar posibles errores y contradicciones.

- Perseverancia y flexibilidad a la hora de buscar soluciones ya que las repuestas raramente son inmediatas y requieren conjeturas y ensayos.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas, distintas de las propias.

Puede parecer una lista excesivamente minuciosa, pero la mayor parte de los aspectos mencionados tendrán gran importancia a la hora de evaluar el progreso del alumno. Casi todos ellos volverán a aparecer en los criterios de evaluación de la materia.

Además de estos contenidos generales, cada una de las actividades tratará otros particulares del tema desarrollado. En cada momento iremos indicando cuáles son y qué conocimientos previos se requieren.

## **5.- Metodología propuesta**

Las líneas metodológicas básicas de nuestro Taller han ido apareciendo a lo largo de los capítulos previos. Queremos ahora hacer un repaso de ellas, comentándolas y justificando por qué nos parecen interesantes.

No pretendemos exponer ningún modelo metodológico, mucho menos sacralizar aspectos que van tan ligados a la propia forma de entender la educación. Lo que viene a continuación es, más que nunca, un conjunto de buenas intenciones, pero creemos en ellas e intentamos tenerlas siempre como referente en nuestro trabajo.

Al final, el lector podrá quedarse con aquello que le interese y olvidar la parte de este libro que no haya conectado con sus gustos. Nosotros estamos ofreciendo una propuesta completa y, creemos, coherente de un determinado Taller de Matemáticas que, lógicamente, estará impregnada de nuestros pareceres.

### **5.1.- MANIPULACIÓN**

Manipular formas y cuerpos es, desde nuestro punto de vista, una forma de trabajo que facilita la comprensión de algunos conceptos. Errores tan frecuentes como no distinguir entre longitudes, superficies y volúmenes o la dificultad para transformar ciertas unidades de capacidad, se deben, en muchos casos, a no haber dedicado tiempo suficiente a la comparación de objetos cuyas diferencias nos parecen obvias a priori, pero que después se convierten en obstáculos insalvables.

El desarrollo de capacidades, como la visión espacial, también está muy relacionado con la manipulación. Muchos alumnos son incapaces de interpretar las representaciones planas de figuras tridimensionales o no pueden imaginar ciertas características espaciales de los cuerpos geométricos. Con ellos puede ser más productiva, desde el punto de vista didáctico, una sesión de geometría manipulativa que otra a partir de dibujos en la pizarra o por fotocopias.

En las clases de Matemáticas el tiempo escasea. Nos centramos en el desarrollo de los temas programados y no podemos dedicar el tiempo que quisiéramos a la manipulación o a otras muchas cosas metodológicamente interesantes. El Taller debe servirnos para rectificar esas lagunas pues podemos “perder” el tiempo cortando figuras o construyendo modelos sobre los que después trabajaremos.

Esta idea del Taller de Matemáticas como espacio para complementar desde el punto de vista metodológico alguno de los temas tratados en la clase ordinaria de Matemáticas es interesante. Además de la manipulación, pueden caber herramientas más modernas como el ordenador o el video. Si estudiamos funciones o estadística sirviéndonos, por ejemplo, de programas informáticos, contribuiremos a que nuestros alumnos entiendan las Matemáticas como una ciencia aplicable.

Después de todo lo que hemos dicho en favor de la manipulación, podríamos irónicamente pensar que estamos ante la piedra filosofal para la enseñanza de las Matemáticas. ¡Ojalá fuera así! Introducir material en clase tiene sus “pequeños” inconvenientes. Para empezar, se acabó el orden. Adviértase debidamente a los profesores que ocupen las aulas contiguas de lo que allí va a suceder, o de lo contrario puede haber enfados. Como aquel día en el que utilizamos los policubos por primera vez; el objetivo era construir poliminós, pero los grupos se pusieron rápidamente de acuerdo y los utilizaron para fabricar todo tipo de imaginarias armas de fuego, bombas incluidas, ¡hasta aviones! El resto puede imaginarlo fácilmente el lector.

Otro principio curioso es que tras una clase manipulativa, siempre faltan piezas. Acostúmbrese a reponer el material de vez en cuando u opte por barrer el aula y registrar a todos los alumnos.

Pese a estas dificultades y algunas otras que podríamos añadir, seguimos utilizando material porque despierta más interés en nuestros alumnos, lo creemos interesante desde el punto de vista didáctico y disponemos de tiempo para ello.

## **5.2.- TRABAJO EN EQUIPO**

A estas alturas, el trabajo en equipo es un tema sobradamente debatido. Los defensores del trabajo cooperativo fundamentan su postura en nuestro entorno cotidiano: el individualismo ha pasado a un segundo plano y casi todo es obra de un equipo. Es, también, una forma de trabajo que fomenta la solidaridad y el autoaprendizaje.

Los detractores analizan la cuestión desde una perspectiva de rentabilidad: es mucho el tiempo que debe invertirse para modificar unos hábitos bastante asentados y poco lo que se obtiene a corto plazo. Además, no es fácil conseguir un ambiente de trabajo adecuado organizando la clase en grupos.

No queremos ahora tomar partido por unos u otros y dado que hay razones válidas en ambas posturas, utilicemos de nuevo el Taller de Matemáticas para aquello que no es fácil hacer en otras materias. El trabajo en equipo nos permite afrontar mejor las fases de investigación en el aula, es el medio ideal para plantear juegos y resulta imprescindible a la hora de desarrollar actividades complejas.

Una vez más, no podemos olvidar que en varios de nuestros objetivos aparecen los métodos y estrategias de trabajo. Así pues, enseñemos a trabajar en grupo, no estaremos perdiendo el tiempo.

### **5.3.- TRABAJO PERSONAL EN CASA Y EN EL AULA**

El elemento básico de nuestro método pedagógico sigue siendo el trabajo personal. Sin él no nos parece viable la actividad en grupo ni creemos productiva ninguna técnica metodológica. El profesor deberá vigilar el funcionamiento de cada grupo para que no se oculte la falta de trabajo individual. En este sentido parece aconsejable que los grupos de trabajo no sean numerosos (tres alumnos por cada uno es un número ideal) y que se acostumbren a repartir tareas, responsabilizándose cada uno de aquello que le corresponda.

Es importante revisar con cierta frecuencia el cuaderno del alumno. Será preferiblemente de anillas para que se puedan añadir las hojas de trabajo que se entregan y estará dividido en dos partes: una primera dedicada a las actividades de la unidad que se esté trabajando y una segunda dedicada a la resolución de problemas.

De la misma forma, se debe comprobar el trabajo encargado para casa. Aconsejamos la recogida selectiva de esas tareas pues, en caso contrario, el método se volvería contra el profesor quien acabaría olvidándose de sus buenas intenciones iniciales.

Exigir responsabilidad nos parece útil desde el punto de vista docente y muy aconsejable con vistas al desarrollo personal del alumno. El profesor del Taller de Matemáticas puede colaborar a la formación en valores no sólo con la supervisión del trabajo; también el buen uso y cuidado del material particular o colectivo son aspectos valorables que requerirán una atención constante. Como los olvidos, justificaciones poco creíbles y otras muestras de dejadez van a ser diarios, necesitaremos un pertinaz espíritu de combate y grandes dosis de paciencia para administrar las agendas de los desmemoriados.

### **5.4.- PAPEL DEL PROFESOR**

Mucho hemos hablado ya sobre lo que debiera hacer el profesor en clase pero todavía falta algo importante. El montaje que sugerimos necesita un director que sepa conducir a los actores e intervenga lo justo, dependiendo de las características del grupo y de la actividad propuesta.

Las dificultades del papel del profesor se manifiestan, sobre todo, en las fases de investigación de algunas actividades. Entonces el profesor debe encauzar el proceso abriendo caminos sin llegar a caer en la manipulación. Aportar ideas en los momentos de sequía creativa y ayudar en la elección de la vía más adecuada cuando se planteen varias posibilidades. También, debe evitar que el interés decaiga demasiado y se llegue a la apatía general. La tarea no va a resultar fácil si no estamos convencidos de lo que queremos.

Sin duda, este tiempo dedicado a la investigación por parte de los alumnos proporciona los momentos más interesantes del Taller. Aparecen todas las etapas del trabajo matemático: análisis exhaustivo del problema, diseño de un plan, ejecución del mismo, análisis de los resultados y vuelta a empezar hasta obtener la solución. Es una situación novedosa para los alumnos, pues pocas veces habrán tenido ante sí una tarea tan compleja, y el profesor debe entenderlo. No deben esperarse milagros.

En muchas ocasiones el proceso nos parecerá tortuoso, lento y estéril. Nos asaltarán deseos de retomar el modo explicativo y desvelar los secretos, dando la respuesta que se busca. Entonces conviene recordar que la nuestra es una materia donde se priman los procedimientos sobre las soluciones, y que uno de nuestros objetivos principales es el aprendizaje del método.

Aspiramos, también, a que los alumnos crean importante su aportación en el curso de los acontecimientos. Si trasmitimos la idea de que las cosas son como son, con independencia de lo que piensen los actores, habremos logrado distanciar (como tantas veces ha ocurrido en clase de Matemáticas) a los alumnos de los contenidos. Acercarlos es básico para conseguir la ansiada motivación.

### **5.5.- UN ÚLTIMO CONSEJO**

Las sugerencias metodológicas dadas hasta ahora pueden haber servido para formar la imagen de una materia inabordable. Nadie debe olvidar que esto es un libro y estamos describiendo nuestro modelo ideal de Taller de Matemáticas. Garantizamos que todos los profesores que hemos impartido esta materia somos humanos y que a pesar de nuestras intenciones y convencimiento, nos hemos dejado arrastrar con demasiada frecuencia hacia el lado oscuro de la pedagogía.

El tiempo nos ha servido para enunciar un principio fundamental de efectividad, según el cual la metodología de trabajo debe ser lo suficientemente realista como para que pueda ser llevada a la práctica. Como corolario importante: las intenciones excesivamente ambiciosas, aunque sean buenas, suelen durar menos de un mes.

## **6.- Fases de cada unidad**

Las unidades que desarrollaremos más adelante pueden clasificarse en dos grandes tipos: unas son más descriptivas, se trabaja con formas o cuerpos geométricos y el objetivo principal suele ser el estudio de algunas de sus características. Otras persiguen resolver una determinada cuestión: hay un problema inicial y poco a poco se elabora una respuesta. El método de trabajo no es el mismo para los dos tipos de unidades. En las primeras -tangram, poliminós, banda de Moebius- el guión de trabajo puede ser el siguiente:

- 1.- *Reconocimiento del objeto de nuestro trabajo.* Actividades, ejercicios y juegos para que los alumnos, mediante la manipulación, se familiaricen con los objetos que van a estudiar. Suele ser trabajo individual.

2.- *Análisis de algunas propiedades o características de los objetos.* El profesor utilizará hojas de trabajo o cuestiones que irá planteando en clase. Se trabaja en pequeños grupos bajo la supervisión del profesor y hay frecuentes puestas en común. A veces se encargará trabajo para casa.

La duración de esta fase y el número de cuestiones propuestas dependerá de lo “enganchados” que se muestren los alumnos y de las características del grupo. Suele haber previstas actividades de profundización que pueden o no utilizarse y que no tienen por qué ir destinadas a todos los alumnos.

3.- *Trabajo de recapitulación.* Cada alumno elabora un informe sobre la unidad desarrollada. Puede ser un simple resumen de lo trabajado o incluir ampliaciones, búsquedas bibliográficas, aplicaciones prácticas, etc. Siempre lleva un apartado dedicado a la valoración personal.

Este trabajo se elabora en casa y se entrega en un plazo previamente fijado.

En el segundo grupo de unidades el esquema de actuación sería:

1.- *Planteamiento del problema.* El profesor introduce la cuestión sobre la que se trabajará, sirviéndose de una situación real que requiere una respuesta. A veces será un problema clásico (los grafos eulerianos), otras un problema práctico (la construcción de un depósito).

Esta fase requiere trabajo en pequeños grupos. La solución nunca será inmediata, los alumnos aportarán ideas pero el camino hasta la respuesta final será largo.

2.- *Fase de investigación.* Resolver el problema planteado requerirá la aplicación de ciertas herramientas matemáticas, la construcción de modelos o la simplificación del contexto. El trabajo en grupos con intervenciones del profesor para reconducir el proceso, será la forma habitual de organizar la clase durante esta fase.

3.- *Trabajo de recapitulación.* Tal y como se explicó antes.

## 7.- Evaluación

El carácter procedimental y actitudinal de los objetivos que nos hemos propuesto debe impregnar también la evaluación, tanto en sus medios como en los indicadores que utilizaremos.

Valorar la actitud de los alumnos ante el trabajo en grupo o el cuidado del material obligará al profesor a dotarse de instrumentos que posibiliten una observación sistemática y a contar con la opinión que los grupos tienen sobre su propio trabajo.

Más complicado resulta evaluar la consecución de objetivos relacionados con la adquisición de hábitos de trabajo matemáticos: métodos de resolución de problemas, formulación de conjeturas y comprobación de las mismas, análisis-síntesis, etc. En muchas ocasiones nos conformaremos con evaluar indicadores más tangibles como la finalización y presentación del trabajo en el tiempo previsto, perseverancia, orden y claridad de los razonamientos utilizados, coherencia de las soluciones, etc.

Los instrumentos de evaluación que usamos son, además de la observación directa, la recogida selectiva del trabajo realizado en clase o en casa, los informes individuales elaborados tras cada actividad, pruebas escritas en las que se preguntan cuestiones relacionadas con alguna de las actividades, ejercicios o trabajos de ampliación voluntarios y la autovaloración del trabajo realizado por cada grupo.

Como podrá observar el lector, los sistemas de recogida de información son los mismos que en cualquier otra materia, si bien damos una especial importancia al trabajo diario, sobre todo al realizado en clase. También en el Taller es importante advertir desde principio de curso cuales son los objetivos previstos y los criterios de evaluación. El alumno debe saber qué se espera de él y cómo debe hacer su trabajo.

Serán necesarias unas reglas básicas para organizar las clases, sobre todo si tenemos en cuenta que la mayor parte del trabajo se hará en pequeños grupos y que la actividad en equipo provoca más desorden que la individual; estas reglas deben ser pocas, concretas y conocidas por todos. El profesor puede pactarlas (o imponerlas) dejando claro que con ellas se pretende conseguir el orden necesario para garantizar el aprendizaje (hábitos incluidos). El cumplimiento de estas normas deberá ser evaluado si queremos que el alumno vaya aprendiendo a trabajar de forma cooperativa.

Los informes, los ejercicios y la observación irán proporcionando la información que permitirá calificar a los alumnos. Además, conseguiremos saber qué funciona mejor y qué no está gustando al grupo de forma que podamos modificar la secuenciación inicialmente prevista o alterar la puesta en escena de las actividades. También nos permitirá saber hasta dónde debemos profundizar en cada una de ellas.

Desde este punto de vista, la evaluación es una herramienta básica para planificar una mínima atención a la diversidad en el Taller de Matemáticas. Casi todas las actividades recorren un camino que va desde la manipulación y el trabajo de aspectos intuitivos hasta la formalización o profundización en el tema. Otras tienen previstas posibles ampliaciones. Decidir hasta dónde debe llegarse en cada clase, es tarea del profesor, que obrará dependiendo de las características del grupo.

### **7.1.- FINALIDADES DE LA EVALUACIÓN**

- Medir los logros que se van obteniendo.
- Emitir una calificación.
- Proporcionar información que permitirá reorientar la organización de la materia para conseguir un mayor interés de los alumnos.

### **7.2.- CRITERIOS DE EVALUACIÓN**

- Utilizar sus conocimientos y su capacidad de razonamiento en un ambiente próximo a la vida cotidiana, para resolver situaciones y problemas reales y/o lúdicos.

- Realizar cuidadosamente tareas manuales y gráficas, diseñándolas y planificándolas previamente, valorando los aspectos estéticos, utilitarios y de satisfacción personal del trabajo manual bien hecho.
- Trabajar en equipo para llevar a cabo una tarea, sabiendo: confrontar las opiniones propias con las de los compañeros, aceptar y desarrollar en grupo las mejores soluciones y valorar las ventajas del trabajo cooperativo.
- Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuese necesario.
- Actuar con imaginación y creatividad, valorando la importancia no sólo de los resultados sino del proceso que los produce.
- Conocer y valorar la utilidad de las Matemáticas en la vida cotidiana, y sus relaciones con diferentes aspectos de la actividad humana y otros campos del conocimiento (ciencia, tecnología, arte, etc.).

### **7.3.- INDICADORES**

- Observación:
  - Interés por el trabajo.
  - Participación dentro del pequeño grupo.
  - Intervenciones en los debates y discusiones.
  - Respeto a las normas de funcionamiento.
  - Respeto al trabajo de otros.
- Hábitos de trabajo:
  - Puntualidad en la realización de las tareas encomendadas.
  - Coherencia de los razonamientos y soluciones.
  - Perseverancia y flexibilidad.
  - Utilización de procedimientos matemáticos de trabajo: análisis, síntesis, particularización, generalización, comprobación de resultados.
  - Cuidado del material.

### **7.4.- CONTENIDOS MÍNIMOS**

Se espera que al final de curso, el alumno haya experimentado una mejoría apreciable, como mínimo en los siguientes aspectos:

- 1.- Mostrar actitudes propias de la actividad matemática en situaciones cotidianas.
- 2.- Utilizar los formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas.
- 3.- Proceder de forma metódica ante situaciones nuevas.

- 4.- Realizar cuidadosamente tareas manuales y gráficas, diseñándolas y planificándolas previamente.
- 5.- Elaborar los resúmenes de las actividades y entregarlas en los plazos previstos.
- 6.- Capacidad para trabajar en equipo.
- 7.- Interés y actitud positiva hacia la asignatura, actividades propuestas, profesor y compañeros. Uso respetuoso del material del aula.

## **7.5.- EVALUACIÓN DE LA MATERIA**

Al final de curso entregamos a los alumnos un cuestionario de evaluación de la asignatura. Queremos saber si sus expectativas se han satisfecho y cuál es su opinión una vez conocida la materia. También se incluyen algunas preguntas sobre valoración del profesor.

La información obtenida sobre los gustos y preferencias la utilizamos para replantear la organización de la materia en futuros cursos e introducir actividades que conecten fácilmente con los destinatarios. La referida al profesor permite a éste mejorar la “puesta en escena”.

Para que el lector se haga una idea de las respuestas que hemos obtenido a lo largo de los años de vida de nuestro Taller, resumimos a continuación aquellas cuestiones que nos parecen más interesantes:

- Las actividades que han resultado más atractivas:
  - Poliminós y policubos: por la variedad de actividades y uso de material.
  - La banda de Moebius: por lo sorprendente de los resultados.
  - Problemas de ingenio: los que son muy fáciles gustan a todos y los que son un poco más complicados gustan a ese tipo especial de alumnos que llamaremos “listos”.
- Las actividades que han resultado menos atractivas:
  - El Tangram: para aquellos alumnos que ya lo habían trabajado por lo repetitivo de alguna actividad y la parte de geometría del Tangram por la necesidad de tener buenos conocimientos de geometría y de operaciones con números.
  - Construcción del depósito: por ser una actividad parecida a las de la clase de Matemáticas y en la que hay que aplicar poco el ingenio.
- La mayoría de los alumnos no tienen una idea muy clara de lo que será la asignatura Taller de Matemáticas al empezar el curso, a pesar de la información previa. Para evitar en lo posible esta desinformación sería deseable que los profesores informaran a los alumnos sobre los objetivos y contenidos de las asignaturas optativas, del curso siguiente, que dependen de su departamento.
- La mayoría de los alumnos opina que en las clases del Taller de Matemáticas han trabajado y conocido una forma distinta de hacer Matemáticas. Piensan que las Matemáticas pueden ser divertidas.

- Los alumnos trabajan más a gusto en grupo o en pareja.
- Hay muy pocos alumnos que se arrepientan de haber elegido esta materia. Algunos, además, hacen constar que ellos la han cursado y no la habían elegido en primer lugar.
- Todos los alumnos valoran muy positivamente la utilización de material.

Entre los documentos finales, ofrecemos al lector uno de estos cuestionarios (anexo 4) para que pueda juzgar por sí mismo o usarlo de modelo.

## **7.6.- AUTOEVALUACIÓN**

Dedicamos parte de una clase previa a cada evaluación, al saludable ejercicio de reflexionar sobre temas como: ¿he trabajado lo suficiente en clase y en casa?, ¿he respetado las fechas de entrega de los trabajos?, ¿he cuidado la presentación?, ¿me he esforzado en mejorar mis deficiencias?, ¿he entregado trabajos voluntarios?, ¿qué calificaciones he obtenido?

También es importante que los alumnos autoevalúen otros aspectos no relacionados directamente con la calidad y cantidad de su trabajo: actitud hacia la asignatura, compañeros y profesor; comportamiento y colaboración en clase; olvidos frecuentes de material; cuidado del mismo.

Una vez analizadas estas cuestiones, cada alumno rellenará una hoja con su nombre y apellidos y anotará las conclusiones que considere más importantes. Junto a ellas propondrá la calificación que crea merecer.

El profesor tendrá en cuenta esta información y prestará especial atención a los casos en los que se haya producido una importante discrepancia entre su juicio y el del alumno.

HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 1:**

**EL TANGRAM**

HOJA EN BLANCO

# EL TANGRAM

## A. En esta unidad trabajaremos

- Manipulación de figuras elementales planas.
- Geometría plana: clasificación de polígonos, elementos de un triángulo, clasificación de triángulos, teorema de Pitágoras, perímetros y áreas, área de un triángulo, semejanza de figuras planas.
- Resolución de rompecabezas.
- Medidas aproximadas y exactas.
- Números radicales básicos.
- Creación de figuras.
- Fracciones y porcentajes.
- Medidas de longitud y superficie.
- Razón de semejanza en longitudes y superficies.

## B. Material necesario

- Cartulina, regla, tijeras, pegamento, calculadora.
- Fotocopias de las hojas para los alumnos.
- Libros de consulta.

## C. Actividades para los alumnos

- Actividad n° 1 Introducción. Construyendo cuadrados.
- Actividad n° 2 Construyendo flechas.
- Actividad n° 3 Geometría del Tangram.
- Actividad n° 4 Construyendo siluetas.
- Actividad n° 5 El Tangram II (*actividad de refuerzo*).
- Actividad n° 6 Geometría del Tangram (*actividad de profundización*).

## **D. Actividades de evaluación**

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso, se proponen las siguientes actividades específicas de evaluación para esta unidad:

- Construir un Tangram.
- Tangram por teléfono.
- Las flechas.
- Las siluetas inventadas.
- El Tangram II.

## **E. Guía del profesor**

### **OBSERVACIONES PREVIAS**

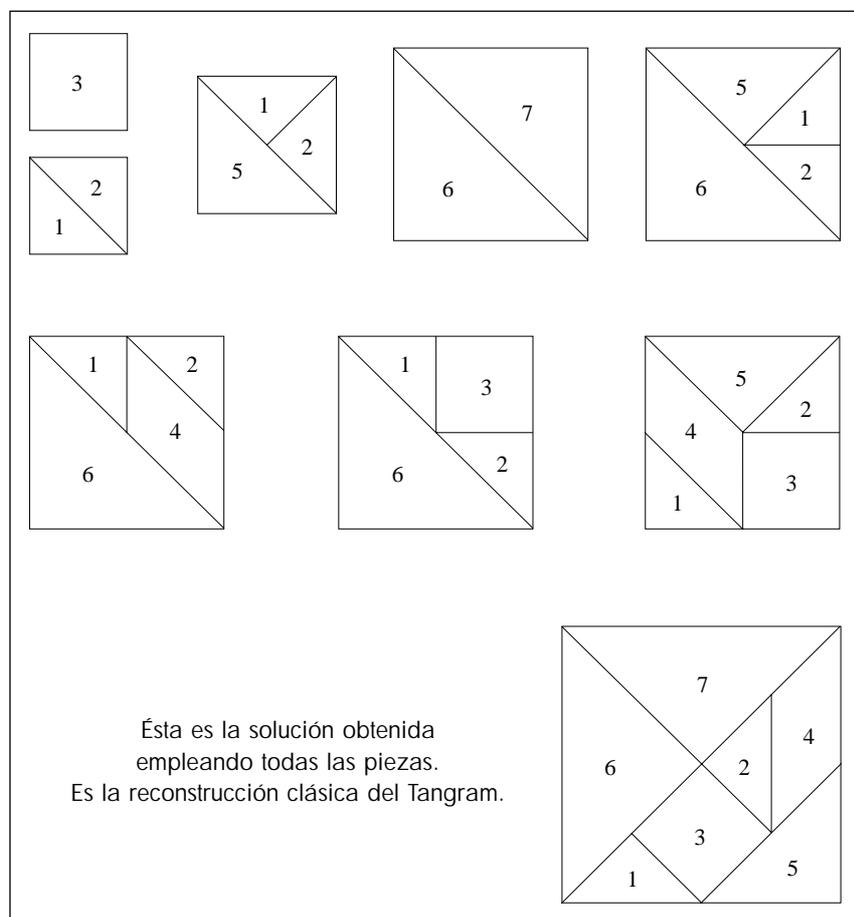
Habitualmente ésta ha sido la unidad didáctica por la que hemos comenzado el curso, ya que reúne muchas de las tareas típicas del Taller de Matemáticas: se manipulan materiales, se crean figuras, se resuelven rompecabezas, se hacen pequeñas investigaciones, hay actividades para resolver con ingenio, se repasan y se aplican contenidos elementales de geometría que siempre conviene tener presentes, la mayoría de las actividades no requieren grandes conocimientos previos de Matemáticas, etc.

### **ACTIVIDAD 1. INTRODUCCIÓN. CONSTRUYENDO CUADRADOS**

- Comenzamos la clase preguntando acerca de los conocimientos previos sobre el Tangram.
- Se entrega a los alumnos la hoja que contiene las piezas del Tangram. El número que hemos puesto a cada pieza servirá para identificarlas a lo largo de la unidad sin que ello obligue a construir las figuras manteniendo todas las piezas con la numeración visible. De hecho la cara sobre la que se apoyen las piezas es irrelevante, salvo en el caso del romboide, que deberá colocarse con el número hacia abajo en algunas de las figuras propuestas. Posteriormente recortarán los polígonos. También se pueden tener preparados sobres con los 7 polígonos construidos en cartulina.
- Se les hace una pequeña introducción al juego del Tangram comentando su origen chino, posibilidades formativas y recreativas y algunos datos curiosos. El Tangram es un puzzle chino formado por 7 piezas (polígonos): 5 triángulos, 1 romboide y un cuadrado, que ayuda a desarrollar la inteligencia y la capacidad de reflexionar sobre formas geométricas planas.
- Lo primero que deben hacer con las piezas es obtener todos los posibles cuadrados (desde el de menor área hasta el de mayor). Conforme los vayan construyendo deben dibujarlos en su cuaderno, indicando el número de cada pieza. Hay 9 cuadrados diferentes, siendo el de mayor área la clásica presentación del Tangram.

Esta actividad se realizará individualmente, pues se pretende que todos los alumnos se familiaricen con las piezas del rompecabezas.

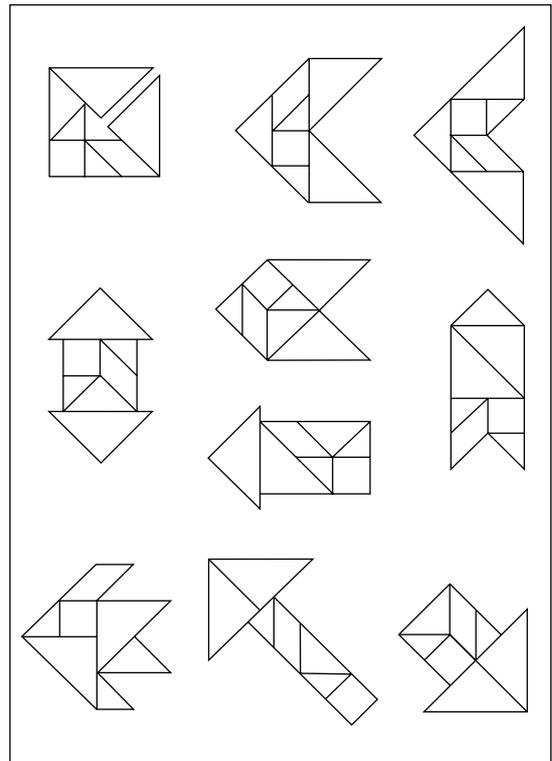
Si no da tiempo a terminar la actividad en clase, los alumnos la completarán en casa.



- Como trabajo de ampliación deben buscar información sobre el Tangram en alguna enciclopedia y recoger lo que les parezca más interesante. En la clase se pedirá a algunos de ellos que lean lo escrito.
- Una vez obtenida la solución clásica del Tangram y a partir de un cuadrado de 10 x 10 cm, los alumnos construirán (en su casa) un Tangram diseñado por ellos mismos utilizando cartulina fuerte (o en cualquier otro material como madera, cartón, chapa, plástico, etc.). Esta tarea requerirá la ayuda del profesor, quien deberá indicarles cómo se puede obtener un rompecabezas de este tipo, partiendo de un cuadrado de cartulina.
- En la actividad del Tangram por teléfono, hay que insistir en la necesidad de nombrar con un buen criterio los puntos básicos de la figura y utilizar adecuadamente todo el vocabulario geométrico que conocen. En clase se pedirá a un alumno que lea las instrucciones y el profesor irá dibujando la figura tratando, de forma simpática, de resaltar los fallos cometidos e indicando la mejor forma de solucionarlos.  
Puede utilizarse como actividad de evaluación, aunque sería preferible que previamente se hubiera hecho algún intento con corrección en público, de forma que los alumnos entendieran la dificultad que entraña la tarea.

## ACTIVIDAD 2. CONSTRUYENDO FLECHAS

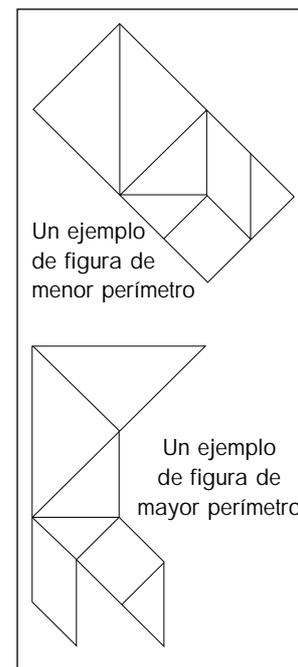
- Comenzaremos la clase comprobando que todos los alumnos disponen de su propio Tangram, construido según las normas dadas.
- Se les entrega la fotocopia de la hoja con los modelos de flechas.
- Se explican las normas para componer las figuras del Tangram:
  - 1.- En todas las figuras se utilizan las 7 piezas.
  - 2.- No se puede montar una pieza sobre otra.
- Los alumnos deben comenzar por construir la flecha sobre fondo negro. Una vez obtenida la solución, la dibujarán en su cuaderno de clase y se corregirá en la pizarra. Posteriormente intentarán realizar 3 de las flechas a su elección.
- Es conveniente recordar el trabajo que deben hacer en casa, cuándo deben entregarlo y cómo debe presentarse.



## ACTIVIDAD 3. GEOMETRÍA DEL TANGRAM

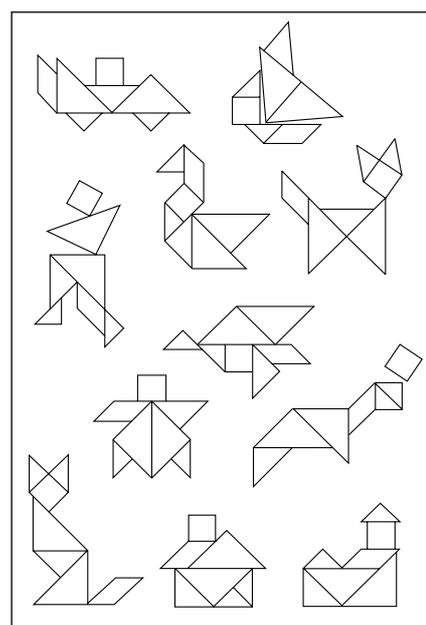
- Aprovechamos las piezas del Tangram para repasar algunos contenidos elementales de geometría plana, que la mayoría de ellos habrán olvidado durante las vacaciones: el nombre de los polígonos, la clasificación de los triángulos, la medida de ángulos, la relación entre fracciones y porcentajes, la diferencia entre igualdad y semejanza.
- A través de preguntas adecuadas, los alumnos irán recordando el vocabulario básico de los polígonos y anotándolo en su cuaderno.
- La pregunta que les pide expresar la proporción, si bien en un primer momento les desconcierta, tras ayudarles con un ejemplo, la resuelven correctamente. Se comprueba la gran dificultad que tienen los alumnos para asociar fracciones con dibujos, a pesar de las veces que se les ha insistido sobre ello en los cursos anteriores.
- Repasamos también la relación entre fracciones y porcentajes que aparece con tanta frecuencia en situaciones cotidianas.
- Para realizar el apartado 6, podemos utilizar el teorema de Pitágoras. Para recordar tan importante resultado puede procederse de la siguiente forma: una vez propuesto este apartado, se espera a que surja entre los alumnos algún comentario sobre la necesidad de usar el teorema de Pitágoras. En este momento se interrumpe el desarrollo de la actividad y sin dar más información se les pide que, en una hoja, escriban el enunciado del teorema de Pitágoras y dibujen un triángulo nombrando los elementos que aparecen en el teorema. Es preferible que los alumnos no pongan su nombre en la hoja.

- Podremos comprobar que sólo un número muy escaso de alumnos tienen claro este teorema y saben aplicarlo. Dada su importancia, deberá recordarse que:
  - El triángulo tiene que ser rectángulo.
  - Los nombres especiales de los lados.
  - En la fórmula, las letras que representan a los catetos son distintas, salvo en los triángulos isósceles.
  - Cómo se calcula un cateto en función de la hipotenusa y del otro cateto.
  - La raíz cuadrada de la suma no es la suma de las raíces cuadradas.
- La ordenación en función de la longitud del perímetro es interesante hacerla con una simple comparación directa de las longitudes de los lados.
- Aparece aquí, por primera vez, uno de los conceptos que más veces nos encontraremos en el Taller de Matemáticas, la semejanza. A través de ejemplos, insistiremos en la diferencia entre igualdad y semejanza y recordaremos las condiciones de semejanza -se pueden poner los clásicos ejemplos de cuadrados y rectángulos-.
- La cuestión sobre la relación entre perímetros y áreas, relación en la que muchos de ellos nunca se han detenido a pensar, les introduce en los problemas de optimización, sobre los que volveremos varias veces a lo largo del curso.
- En la actividad de investigación aparecen varios aspectos interesantes: hay que operar con raíces cuadradas, comparar números con raíces cuadradas, descubrir estrategias para obtener mayor y menor perímetro, probar que los perímetros obtenidos son máximos o mínimos, etc. Para obtener figura de mayor perímetro hay que lograr unir los polígonos por los lados de menor longitud.



#### ACTIVIDAD 4. CONSTRUYENDO SILUETAS

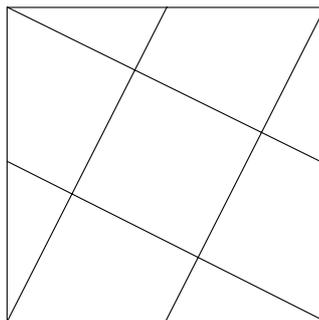
- Volvemos, después de la actividad anterior de contenidos más matemáticos, a la tarea más propia del Tangram: la resolución de rompecabezas. El profesor seleccionará tres o cuatro siluetas y las propondrá como ejercicio. La elección de las figuras se hará teniendo en cuenta el nivel e interés mostrado por el grupo.
- La parte más interesante de esta actividad se encuentra en el trabajo a realizar en casa. Los alumnos tras comprobar con los ejemplos vistos en clase el gran número de figuras que se pueden construir con el Tangram, mostrarán su capacidad de imaginación creando siluetas nuevas, a las que deben poner nombre o explicar en qué consisten.



- Se prestará especial atención a la originalidad, corrección del dibujo y respeto a las formas y dimensiones.

### **ACTIVIDAD 5. EL TANGRAM II**

- Esta parte tiene la consideración de actividad de refuerzo. Trabajaremos con un modelo distinto de Tangram (al que llamaremos el Tangram II) y repetiremos algunas de las tareas realizadas con el Tangram habitual.



- El tercer apartado es el más complicado de la actividad, a partir de él, resolver los apartados siguientes es tarea sencilla.
- Se puede profundizar en esta actividad añadiendo el siguiente apartado:
  - Calcula el perímetro exacto (utiliza radicales) de cada una de las piezas suponiendo que el lado del cuadrado solución es de 10 cm.
- Relacionado con esta actividad se puede proponer el siguiente problema:
  - Da cuatro cortes rectos al símbolo de la Cruz Roja y une los trozos formando un cuadrado.

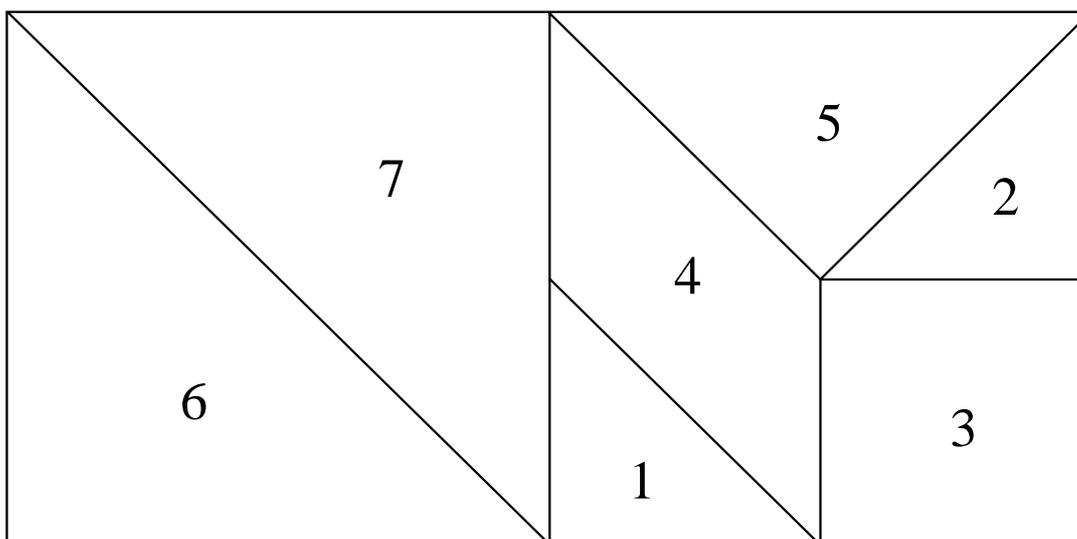
### **ACTIVIDAD 6. GEOMETRÍA DEL TANGRAM**

- Esta es una actividad que se puede trabajar o no, según se haya desarrollado la unidad didáctica. Si vamos bien de tiempo y el nivel medio de la clase es aceptable, haremos sobre todo el primer y el último apartados.
- Hay que prestar especial atención a las operaciones con cifras aproximadas y valorar los errores que dichas operaciones conllevan.
- En el tercer apartado se insiste en la relación entre la razón de semejanza de longitudes y de áreas.
- La actividad para casa, puede servir de ejercicio voluntario de evaluación para subir nota.

## **F. Hojas de trabajo para los alumnos**

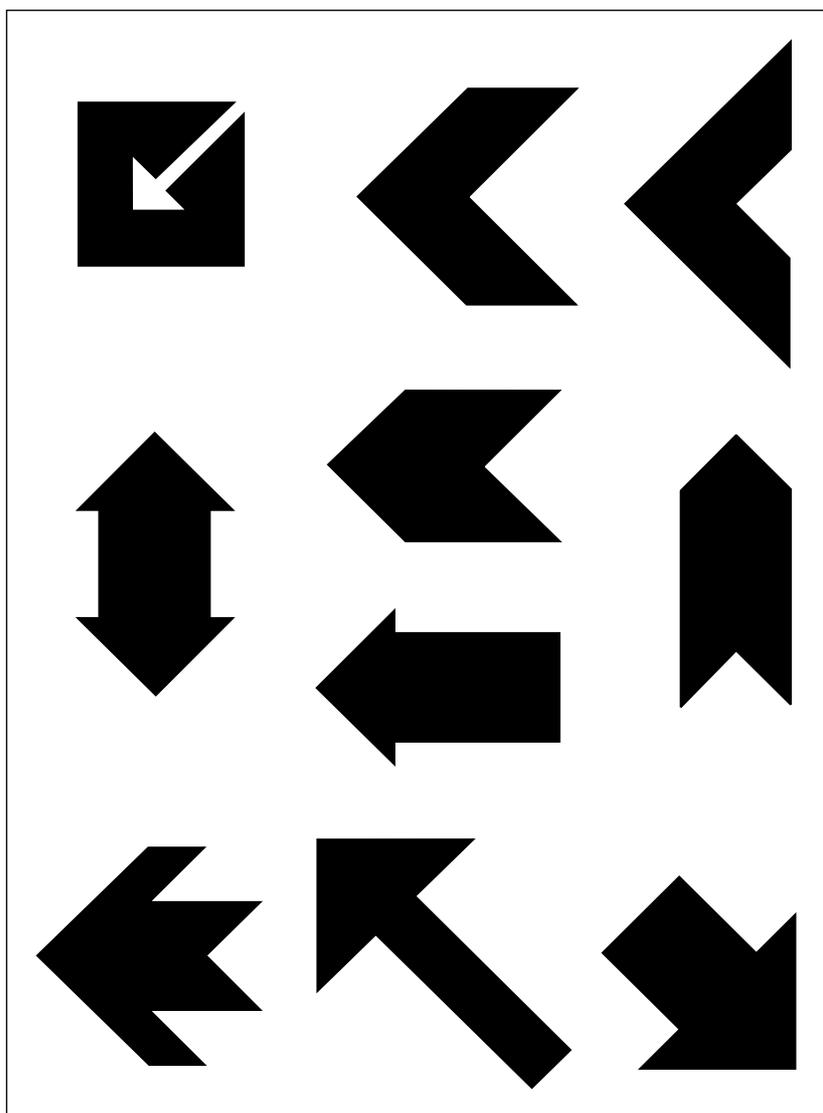
A continuación presentamos las hojas de trabajo de las actividades de esta unidad, junto con el material necesario para el desarrollo de la misma.

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 1:</b> <b>INTRODUCCIÓN. CONSTRUYENDO CUADRADOS</b>	El Tangram
Material	Enciclopedia, cartulina y tijeras.	
En clase	<p>1.- Recorta los 7 polígonos del Tangram de la hoja.          Construye todos los cuadrados posibles usando los polígonos del Tangram (desde el de menor área hasta el de mayor). Por ejemplo, con los triángulos 1 y 2 se puede construir un cuadrado, otro con los triángulos 1, 2 y 5. Conforme los vayas obteniendo dibújalos en tu cuaderno anotando los números de los polígonos que lo forman. Al cuadrado construido con los siete polígonos lo llamaremos solución clásica del Tangram. (Ayuda: hay más de 8 cuadrados diferentes).</p>	
En casa	<p>Tienes que completar -si no lo has hecho en clase- el trabajo de construir los cuadrados.</p> <p>2.- Busca información sobre el Tangram en alguna enciclopedia y recoge en tu cuaderno lo que te parezca más interesante.</p> <p>3.- Construye tu Tangram.          Una vez obtenida la solución clásica del Tangram y a partir de un cuadrado de 10x10 cm., construye tu propio Tangram en cartulina fuerte (o en cualquier otro material como madera, cartón, chapa, plástico, etc.) y lo llevarás a clase hasta el final de esta unidad.</p> <p>4.- Tangram por teléfono.          Supón que un compañero no ha podido asistir hoy a clase y que te ha llamado por teléfono para que le digas lo que hay que hacer para la próxima clase del Taller de Matemáticas. Debes redactar las instrucciones necesarias para comunicar telefónicamente la solución clásica del Tangram de forma que él pueda construir el suyo. Piensa que no es una tarea fácil, intenta utilizar los términos geométricos más adecuados (vértice, segmento, perpendicular, punto medio, etc.) y recuerda que tu compañero no conoce la figura y que no está viendo los dibujos que tú tienes hechos.          Sugerencias: Comienza nombrando con letras mayúsculas los vértices del cuadrado solución, indicando donde empiezas, si los recorrerás siguiendo el movimiento de las agujas del reloj o en sentido contrario y ponles nombre al resto de los puntos importantes en la solución del Tangram.</p>	



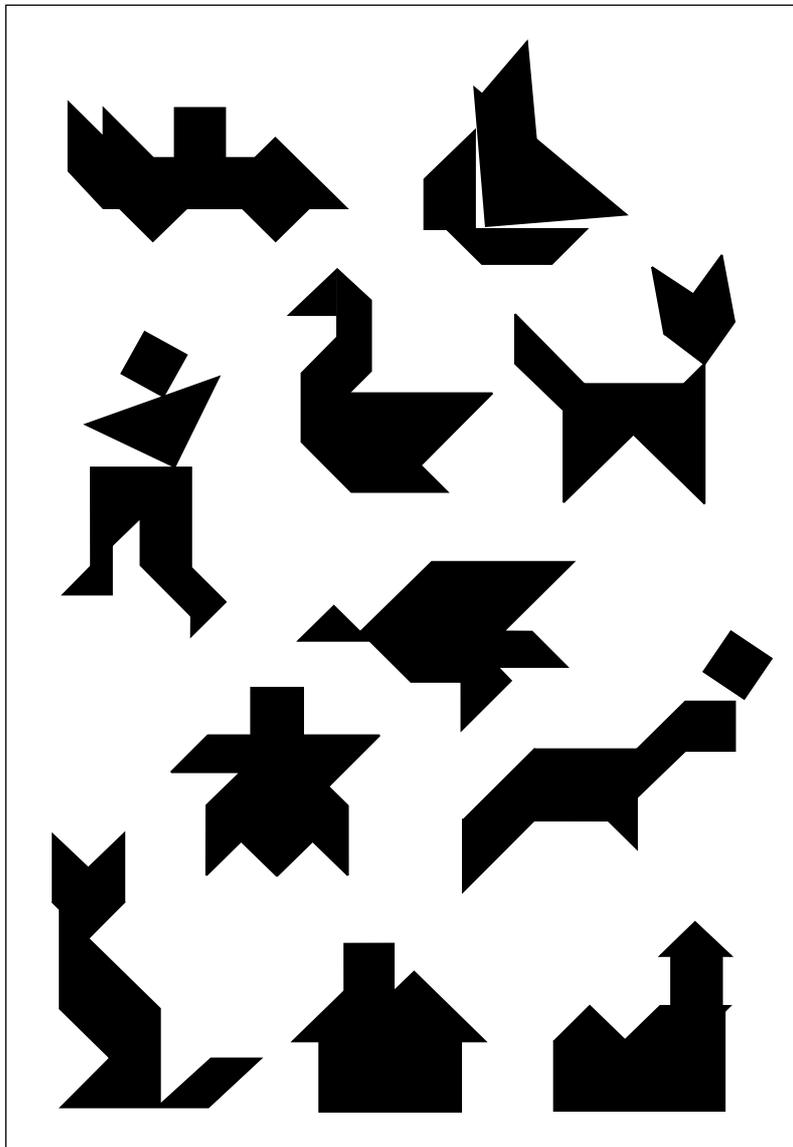
Piezas del Tangram

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 2: CONSTRUYENDO FLECHAS</b>	El Tangram
Material	Tangram del alumno.	
En clase	<p>1.- Utiliza tu Tangram para reconstruir la flecha sobre fondo negro. Una vez obtenida la solución, anótala en tu cuaderno de clase. Debes tener en cuenta que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- En todas las figuras se utilizan las siete piezas.</li> <li>- No se puede montar una pieza sobre otra.</li> </ul> <p>2.- Intenta ahora realizar tres de las flechas a tu elección.</p>	
En casa	<p>Tienes que completar -si no lo has hecho en clase- el trabajo de realizar las tres flechas.</p> <p>3.- Intenta resolver al menos tres de las restantes flechas de la hoja.</p> <p>Este trabajo lo entregarás en la próxima clase. Cuida la presentación y el dibujo de las figuras, respetando la forma y dimensiones.</p>	

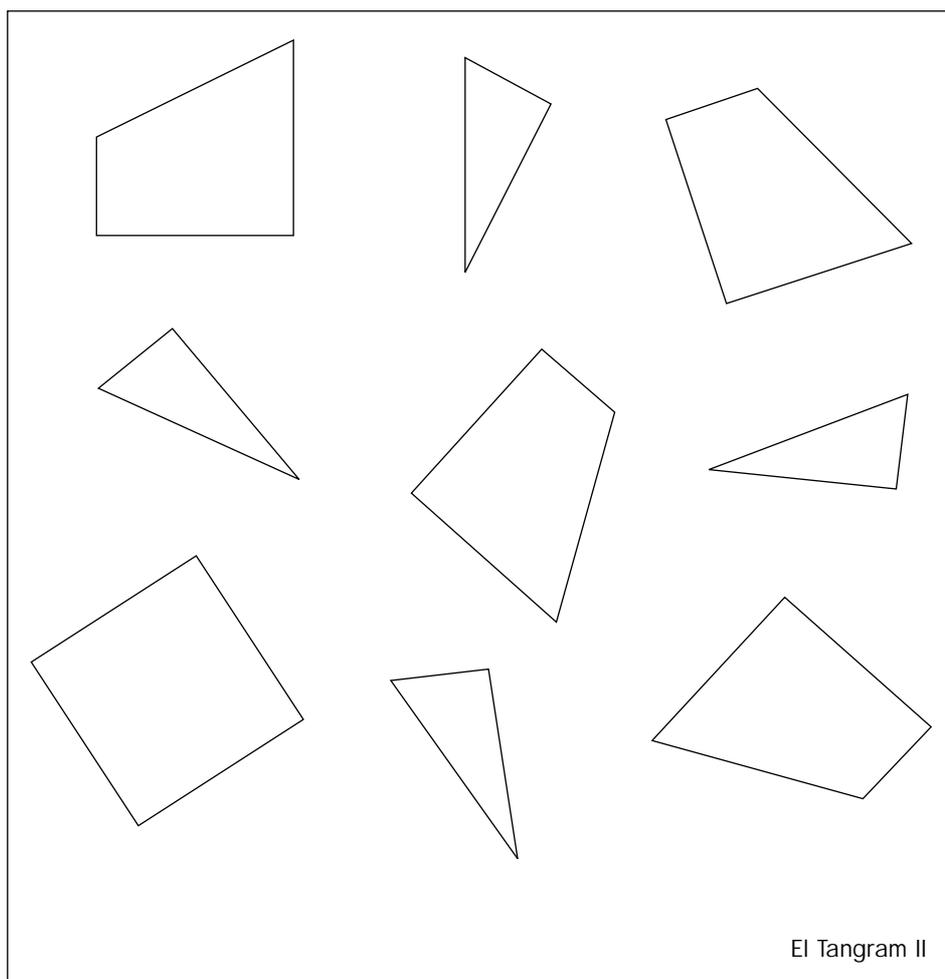


Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>GEOMETRÍA DEL TANGRAM</b>	El Tangram
Material	Tangram del alumno y calculadora.	
En clase	<p>1.- Indica qué tipo de polígono es cada una de las 7 piezas del Tangram. (Por ejemplo: el número 1 es un triángulo).</p> <p>2.- Clasifica los triángulos según sus lados y sus ángulos. (Por ejemplo: el número 1 es isósceles y rectángulo).</p> <p>3.- Expresa qué proporción del cuadrado grande representa el área de cada uno de los polígonos del Tangram. (Por ejemplo: el área del triángulo número 7 es <math>1/4</math> del total).</p> <p>4.- Expresa qué porcentaje del cuadrado grande representa el área de cada uno de los polígonos del Tangram. (Por ejemplo: el área del triángulo número 7 es el 25% del total).</p> <p>5.- Ordena los polígonos del Tangram de menor a mayor según sus áreas, indicando los que tienen igual área.</p> <p>6.- Suponiendo que el lado del cuadrado pequeño mide 1 unidad de longitud. Calcula razonadamente el perímetro de cada uno de los 7 polígonos del Tangram. ¿Qué importante resultado matemático tendrás que utilizar?</p> <p>7.- Ordena los polígonos del Tangram de menor a mayor según su perímetro, indicando los que tienen igual perímetro. (Se pueden ordenar comparando directamente el tamaño de los lados de los polígonos).</p> <p>8.- Indica qué polígonos son iguales y cuáles semejantes. En el caso de los polígonos semejantes calcula la razón de semejanza.</p> <p>9.- Dos figuras que tengan igual perímetro, ¿tendrán siempre el mismo área? ¿Por qué?</p>	
En casa	<p>10.- Actividad de investigación: Construye la figura de mayor y la de menor perímetro utilizando las 7 piezas del Tangram, con la condición de que las piezas en contacto tengan siempre el lado común del mismo tamaño. (Por el vértice sólo, no vale).</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>CONSTRUYENDO SILUETAS</b>	El Tangram
Material	Tangram del alumno.	
En clase	1.- Utiliza tu Tangram para reconstruir cuatro siluetas que te indique el profesor. Una vez obtenidas las soluciones, anótalas en tu cuaderno de clase.	
En casa	Tienes que completar -si no lo has hecho en clase- el trabajo de realizar las cuatro siluetas. 2.- Invéntate dos siluetas, que tengan sentido (fácilmente reconocibles), explicando en cada caso de qué figura se trata. Este trabajo lo entregarás en la próxima clase. Cuida la presentación y dibuja correctamente las figuras. Presta especial atención a la forma y dimensiones de cada pieza.	



Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 5: EL TANGRAM II</b>	El Tangram
Material	Tijeras y pegamento.	
En casa	<ol style="list-style-type: none"><li>1.- Recorta las nueve piezas (4 triángulos, 4 trapecios y 1 cuadrado) del Tangram II.</li><li>2.- De las figuras que lo componen obtén la medida aproximada de sus lados y sus ángulos y clasificalas.</li><li>3.- Forma con las nueve piezas un cuadrado y pégalo en una hoja.</li><li>4.- Calcula la proporción del área, con respecto al cuadrado de partida, que representa cada una de las piezas.</li><li>5.- Halla el área de cada una de las piezas suponiendo que el lado del cuadrado solución es de 10 cm.</li></ol> <p>Este trabajo lo entregarás en la próxima clase. Cuida la presentación y dibuja correctamente las figuras.</p>	



Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 6:</b> <b>GEOMETRÍA DEL TANGRAM</b>	El Tangram
Material	Tangram del alumno y calculadora.	
En clase	<p>1.- Suponiendo que el lado del cuadrado pequeño mide 1 unidad de longitud, calcula razonadamente el perímetro de cada uno de los 7 polígonos. Hazlo de dos maneras distintas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Primero: dando el resultado exacto con radicales. (Por ejemplo: el perímetro del número 1 es <math>2 + \sqrt{2}</math> unidades de longitud).</li> <li>- Segundo: dando el resultado aproximado, redondeado a 2 cifras decimales. (Por ejemplo: el perímetro del polígono número 1 es 3,41 unidades de longitud).</li> </ul> <p>2.- Suponiendo que el lado del cuadrado pequeño mide 1 unidad de longitud. Calcula razonadamente el área de cada uno de los 7 polígonos. Hazlo, en los casos que proceda, de dos maneras distintas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Primero: dando el resultado exacto con radicales.</li> <li>- Segundo: dando el resultado aproximado, redondeado a 2 cifras decimales.</li> </ul> <p>Estudia si hay otras formas diferentes de calcular el área a la que has utilizado.</p> <p>3.- Observa los triángulos números 1 y 7; son semejantes y el área del primero es la cuarta parte que la del segundo. ¿Están sus perímetros en la misma relación? ¿Por qué? Comprueba lo que ocurre en el caso de los triángulos 2 y 5.</p>	
En casa	<p>4.- Supón que disponemos de una finca cuadrada de 1 Km. de lado y que se divide en 7 parcelas de manera idéntica a como se divide el cuadrado solución clásica del Tangram. Supón que el precio de cada parcela depende de su área y de su perímetro según las siguientes cantidades:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Un metro cuadrado 100 ptas.</li> <li>- Un metro de perímetro interior 1.000 ptas.</li> <li>- Un metro de perímetro exterior 25% más caro que el interior.</li> </ul> <p>Calcula el precio de cada una de las 7 parcelas.</p>	

**Unidad nº 2:**

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

HOJA EN BLANCO

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## A. Metodología y organización

El mundo de las Matemáticas gira en torno a los problemas. Intentar resolverlos ha impulsado el trabajo de los matemáticos y gracias a ellos se han ido desarrollando teorías, herramientas y métodos de trabajo.

Enseñar a resolver problemas probablemente sea la principal aportación de las Matemáticas a la educación de los alumnos. Por tanto, no es extraño que sea una de las obsesiones del profesor de Matemáticas, sobre todo si tenemos en cuenta que la tarea no es nada sencilla.

El Taller se interesa por los procedimientos matemáticos que tienen aplicación inmediata en situaciones reales. En la resolución de problemas se manifiestan formas de trabajo y actitudes trasladables a múltiples facetas del quehacer diario. Por tanto, nos pareció interesante dedicar una parte del Taller a la resolución de problemas.

Quisimos mantener, también aquí, las distancias con la asignatura de Matemáticas y seleccionamos situaciones distintas, donde se mezclaba el ingenio con el esfuerzo intelectual que requiere cualquier problema. La principal fuente de ideas suelen ser los libros de Matemáticas recreativas pero un viaje electrónico por Internet también puede proporcionarnos multitud de ejemplos curiosos.

Desde el primer momento pensamos que tratar la resolución de problemas como una actividad más resultaría pesado y entraría en contradicción con el enfoque requerido por un tema como éste. No se aprende a resolver problemas en unas cuantas clases, sino que se necesita un trabajo constante y sistemático a lo largo de toda la Secundaria.

Decidimos utilizar los primeros minutos de cada clase para proponer algún problema que podía resolverse allí o en casa. Además, en las primeras semanas del curso, dedicamos algunas clases a trabajar el protocolo de resolución y a dar algunas ideas sobre cómo enfrentarse a un problema.

Como el tiempo dedicado al tema no era demasiado, preferimos centrar nuestro trabajo en algunos aspectos e insistir, problema tras problema, en ellos. Así, intentamos mostrar lo importante que resulta la lectura atenta del enunciado previa al análisis de la información en él contenida. La reflexión posterior irá tejiendo el proceso que nos acerca a la meta. En cualquier caso, la precipitación no es muy recomendable, y convencer de ello a los alumnos era nuestro objetivo.

Proponemos problemas en los que una primera lectura conduce a conclusiones erróneas. Tras analizar detenidamente las condiciones, y esto suele conllevar resúmenes gráficos de la información u otras técnicas de síntesis, se desechan las soluciones equivocadas y empieza la búsqueda de caminos más plausibles.

El lector encontrará al final de estas consideraciones, algunos de los problemas que solemos utilizar.

Nuestras recomendaciones metodológicas pueden resumirse así:

- No dedicar demasiado tiempo seguido a la resolución de problemas.
- Elegir situaciones con enunciados curiosos en las que se pongan de manifiesto los aspectos que el profesor desea dejar claros.
- Insistir en unas pocas ideas concretas.
- Secuenciar los problemas de forma que se consiga una adecuada progresión.
- Tener siempre presente que se trata de un proceso largo y lento donde se mostrarán claramente las diferencias entre los alumnos. Obtener resultados apreciables en poco tiempo es un milagro, no un objetivo.

## **B. Guía del profesor**

Resolver problemas es una actividad mental compleja; requiere determinados conocimientos y la puesta en escena de ciertas dosis de talento y creatividad. La persona que se enfrenta al problema no sabrá por dónde tirar (bloqueo inicial), pero si previamente lo ha intentado con otros, el camino a recorrer será más suave y certero. Por tanto, la única forma de aprender a resolverlos es resolviendo muchos. El trabajo dedicado a cada uno de ellos, tenga o no éxito, nos enseñará a enfrentarnos con el siguiente.

En este largo proceso el profesor tiene tres ocupaciones básicas:

- planificar la construcción ordenada de experiencias, secuenciando de forma razonable las situaciones propuestas,
- sugerir alternativas ante los frecuentes bloqueos,
- hacer de “abogado del diablo” para facilitar la elección de buenos caminos.

Como ya hemos dicho, lo fundamental es resolver problemas. Pero no olvidemos algo importante: todos nosotros somos profesores y, como tales, no nos resulta difícil atacarlos pues hemos desarrollado las estrategias adecuadas para enfrentarnos a ellos. Sin embargo, nuestros alumnos no son todos iguales y la mayor parte serán incapaces de hacerlo por sí mismos. El profesor debe saber qué elementos cognitivos se ponen en juego en la resolución de problemas. Debe ser capaz, también, de sistematizar mínimamente el proceso a seguir y enseñarlo. Así, los alumnos tendrán algo a lo que asirse en momentos de bloqueo y no se sentirán indefensos.

Sin preparación previa adecuada y sólo con el adiestramiento conseguiremos que los mejores alumnos desarrollen hábitos positivos (probablemente ya los tuvieran), mientras que los otros únicamente habrán constatado sus limitaciones en Matemáticas. Por ello queremos, a continuación, resumir muy brevemente las ideas aportadas por algunos autores que han investigado sobre este tema.

## C. Algunas notas sobre resolución de problemas

Los apuntes que ofrecemos a continuación han sido tomados de tres libros:

- *Cómo plantear y resolver problemas*, George Polya.
- *Pensar matemáticamente*, John Manson, Leone Burton y Kaye Stacey.
- *Para pensar mejor*, Miguel de Guzmán.

En general, el proceso de resolución de un problema consta de las siguientes fases:

- familiarización con el problema
- concepción de un plan
- ejecución del plan
- revisión del proceso y obtención de conclusiones.

La primera fase implica la lectura atenta del enunciado y la respuesta a preguntas como las siguientes:

- ¿qué quiero averiguar?
- ¿con qué datos cuento?
- ¿qué condiciones se imponen?

Para concebir un plan es bueno tener en cuenta la experiencia previa: ¿qué puedo utilizar?, ¿he visto algún problema semejante? También será útil conocer herramientas de uso frecuente en Matemáticas como particularización, simulación, simplificación del problema, etc.

A la hora ejecutar el plan habrá que elegir la estrategia que nos parezca más prometedora. La dificultad principal de esta fase reside en mantener el justo tesón. No debemos doblegarnos con facilidad pero tampoco emperrarnos en mantener a toda costa un camino que puede no ser adecuado.

Estas dos fases se irán alternando y tras una ejecución poco exitosa volveremos a buscar nuevas ideas, ahora ya con mayor conocimiento.

Los bloqueos serán frecuentes, especialmente en los alumnos noveles o acostumbrados a ejercicios mecánicos. En particular estos últimos, manifestarán habitualmente el llamado bloqueo inicial, al no ser capaces de disparar la chispa creativa que enciende el proceso de solución.

En los atascos es imprescindible la labor del profesor para recomendar nuevas lecturas del problema, resumir lo que ya se sabe o aclarar dónde se quiere llegar. Ayudar lo justo, sin imponerse, es tarea que requiere tiempo, práctica y convencimiento.

El buen resolutor de problemas, ante un atasco, decidirá entre dos posibilidades: descansar un momento o re-abordar el problema, nunca lo abandonará.

Si el lector desea profundizar en técnicas concretas para ayudar ante los bloqueos, le recomendamos la lectura de los libros mencionados. De todas formas, he aquí una lista de estrategias comunes que pueden ayudar:

- Codificar (utilizar un método de expresión adecuado: algebraico, verbal, gráfico...).
- Experimentar y sacar pautas (inducir).
- Empezar el problema desde atrás.
- Resolver problemas análogos.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema más simple.
- Descomponer el problema en pequeños problemas.
- Conjeturar y llevar adelante la conjetura.
- Sacar partido de la simetría.
- Ensayo-error.
- Suponer que no (reducción al absurdo).
- Deducir y sacar conclusiones.
- Hacer un esquema, dibujo, tabla...
- Hacer recuento (conteo).
- Analizar los casos límites.

Cuando hemos conseguido una resolución razonablemente buena o cuando estamos a punto de rendirnos, hay que revisar el trabajo hecho. Hasta los buenos alumnos tienden a cerrar sus cuadernos una vez encontrada la solución.

Mirar atrás servirá para mejorar y ampliar la capacidad de razonamiento, también permitirá encontrar nuevas soluciones o generalizar el proceso y sus resultados a contextos más amplios.

Comprobar, reflexionar y generalizar, son para Mason, Burton y Stacey las palabras sobre las que debe girar la revisión. Miguel de Guzmán propone analizar el protocolo de resolución que habremos elaborado mientras nos enfrentábamos con el problema. Estos protocolos son las piezas clave para conseguir pensar mejor.

Polya, también insiste: “reconsiderando la solución, re-examinando el resultado y el camino que nos condujo a ella, podremos consolidar los conocimientos y desarrollar nuestras aptitudes para resolver problemas”.

## D. Nuestra experiencia

Una vez expuesta la teoría, que compartimos, pretendemos hacer una breve incursión por nuestra práctica.

Una vez más, reconocemos que el día a día resulta más fuerte que los buenos propósitos. Con frecuencia cosechamos pereza, desgana y aburrimiento. Especialmente cuando la resolución de problemas centra la actividad del Taller de Matemáticas.

En este momento se aprecia, más que nunca, la diversidad de intereses y motivación de los alumnos. Los “buenos” suelen sentirse a gusto con la resolución de problemas y así lo indican en la evaluación, mientras que el resto muestran actitudes que van desde el esfuerzo impotente hasta el desinterés más absoluto.

Algunas veces hemos pensado en eliminar esta parte de nuestro temario. Pero estamos convencidos, como decíamos al principio, de que la resolución de problemas puede aportar a cualquier alumno herramientas útiles a la hora de enfrentarse a situaciones no habituales en campos no necesariamente relacionados con las Matemáticas.

## E. Algunos problemas

- 1.- Un químico descubrió que cierta reacción precisaba en el laboratorio 80 minutos si él llevaba la bata puesta, mientras que si no la llevaba, la reacción tardaba una hora y veinte minutos. ¿Sabrías explicar por qué?
- 2.- Hay una persona capaz de predecir el resultado de cualquier partido de fútbol antes de que sea jugado. Explica cómo puede ser esto.
- 3.- Los autobuses que unen Madrid con Moscú tardan cuatro días justos en hacer el recorrido. Diariamente sale a las cuatro de la tarde un autobús con dirección Moscú. A la misma hora parte otro de Moscú con dirección Madrid. ¿Con cuántos autobuses se cruzará en su camino el autobús que sale de Madrid?
- 4.- Un viajante recorrió en coche 5.000 km., permutando regularmente las ruedas (incluida la de repuesto) para que todas sufrieran igual desgaste. Al terminar el viaje, ¿durante cuántos kilómetros ha sido utilizada cada rueda?
- 5.- Tenemos dos jarras exactamente iguales con igual cantidad de líquido: una contiene agua y la otra vino. Pasamos una cucharada de agua a la jarra de vino y después una cucharada de la mezcla resultante a la jarra de agua. ¿Qué hay más, vino en la jarra de agua o agua en la jarra de vino?
- 6.- En un cajón hay 10 pares de calcetines, 5 pares de color rojo y 5 de color blanco. Si nos encontramos en una habitación a oscuras, ¿cuántos calcetines como mínimo habría que sacar del cajón para asegurarnos un par del mismo color? ¿Y si en vez de calcetines fuesen guantes?

- 7.- Un griego nació el séptimo día del año 40 a. de C. y murió el séptimo día del 40 d. de C. ¿cuántos años vivió?
- 8.- Un coche cubrió la distancia entre dos ciudades a 120 km/h e hizo el regreso a 80 km/h ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?
- 9.- Eran unos tiempos tan difíciles que un fumador empedernido se vio obligado a recoger colillas del suelo para poder fumar. En una caja tiene almacenadas ya 64 colillas y con cada 4 de ellas se hace un cigarrillo. ¿Para cuántos cigarrillos tiene colillas?
- 10.- Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de su ermita a las nueve de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las nueve de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero. Al ir bajando se pregunta: ¿habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

## F. Evaluación

En cada una de las pruebas escritas que se hacen a lo largo del curso, incluimos algún problema. Lo importante no es la solución sino la coherencia mostrada por cada alumno, tanto en la elaboración del plan como en su ejecución. Para poder evaluar estos aspectos es imprescindible que el alumno se acostumbre a anotar sus ideas (algo parecido al método del protocolo que propone Miguel de Guzmán).

También se suele entregar una colección de problemas para trabajar durante algún período vacacional.

## G. Buenas ideas para llegar a la solución

Ofrecemos, a continuación, algunas pistas para resolver los problemas que hemos incluido en el apartado E.

- 1.- *La bata del químico.*  
Las manchas de la bata hacen milagros.
- 3.- *Problema de los autobuses.*  
Este problema tiene truco. Se encuentra con más autobuses de los que parece. Piensa que hay autobuses que ya están haciendo la ruta Moscú-Madrid. El autobús al salir de Madrid se encuentra con un autobús que viene de Moscú, ¿cuándo salió?
- 4.- *El viajante.*  
No son 1.000 kilómetros. El coche no circula sobre una sola rueda. Piensa mejor en cuántos kilómetros están sin rodar.
- 5.- *Las jarras de vino y agua.*  
No es fácil. Piensa en dos urnas, una con 1.000 bolas negras y la otra con 1.000 bolas blancas. Este truco, bien utilizado, te llevará a la solución.

6.- *Los calcetines del ciego.*

Sacando dos calcetines no te aseguras que sean del mismo color. ¿Y sacando tres calcetines?

La diferencia con el apartado anterior estriba en que ahora hay que asegurarnos que sean del mismo color y de distinta mano (derecho e izquierdo). Supón ahora que tienes muy mala suerte y que todos los guantes que coges son de la mano izquierda.

7.- *El griego de la tercera edad.*

¿Hubo año cero?

8.- *La velocidad media.*

Difícil. Hay que conocer la fórmula elemental que relaciona la velocidad, el espacio y el tiempo. Es aconsejable partir de una distancia concreta, por ejemplo 760 kilómetros.

9.- *El absurdo vicio de fumar.*

Piensa en las nuevas colillas de los cigarrillos que prepara. Siempre es bueno recordar que “el tabaco perjudica seriamente la salud”.

10.- *El punto fijo.*

Difícil. Utilizando gráficas en las que cada punto represente la posición en la que se encuentra en el camino en función del tiempo, se puede llegar a conclusiones interesantes. Suponiendo que un segundo monje repite el segundo día el itinerario de subida del primer monje pasando a la misma hora por los mismos lugares que el día anterior lo hiciera el primero, resulta bastante natural llegar a la solución.

HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 3:**

**POLIMINÓS Y POLICUBOS**

HOJA EN BLANCO

# POLIMINÓS Y POLICUBOS

## A. En esta unidad trabajaremos

- Manipulación de figuras planas y cuerpos.
- Geometría plana y espacial: teorema de Pitágoras, perímetros, áreas y volúmenes, ejes de simetría, centro de rotación, desarrollos del cubo, área de un triángulo, semejanza de figuras planas y cuerpos.
- Representación plana de cuerpos construidos con policubos.
- Resolución de rompecabezas planos y espaciales.
- Medidas aproximadas y exactas.
- Números radicales básicos.
- Creación de nuevas formas y figuras.
- Fracciones y porcentajes.
- Medidas de longitud, superficie y volumen.
- Razón de semejanza en longitudes, superficies y volumen.
- Búsqueda de estrategias ganadoras.
- Juegos y competiciones.

## B. Nuestras fuentes

- Varias actividades con poliminós han sido obtenidas de la publicación *Taller de Matemáticas (Tetraminós y pentaminós)* editado por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.
- Algunas ideas sobre representación plana de cuerpos tridimensionales se han tomado del *Material para el “Taller de intuición espacial”* de Floreal Gracia Alcaine, presentado en las VII JAEM.

## C. Material necesario

- Cartulina, regla, tijeras, pegamento.

- Pentaminós de cartulina.
- Policubos (material Link).
- Fotocopias de las hojas para alumnos que se reproducen al final de la presente unidad.

## **D. Actividades para los alumnos**

Primera parte: Poliminós.

- Actividad nº 1 Introducción a los poliminós.
- Actividad nº 2 Tetraminós. Tetracatálogo.
- Actividad nº 3 Pentaminós. Pentacatálogo.
- Actividad nº 4 Hexaminós. Hexacatálogo (*actividad de profundización*).
- Actividad nº 5 Rompecabezas con pentaminós.
- Actividad nº 6 Juegos en el tablero.

Segunda parte: Policubos.

- Actividad nº 7 Introducción a los policubos.
- Actividad nº 8 Tetracubos.
- Actividad nº 9 Pentacubos.
- Actividad nº 10 Representación de figuras construidas con policubos.
- Actividad nº 11 Rompecabezas con policubos.

## **E. Actividades de evaluación**

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso, se proponen las siguientes actividades específicas de evaluación:

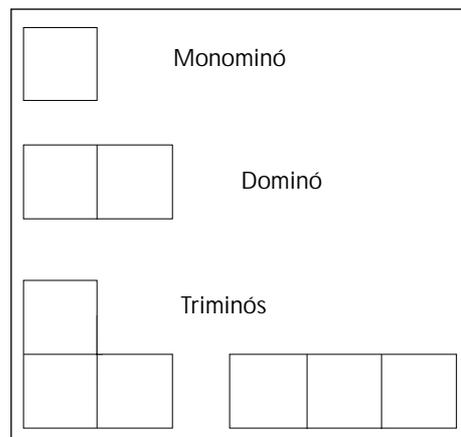
- Construir los pentaminós.
- Los rompecabezas de pentaminós resueltos.
- Control sobre el hexacatálogo.
- Dibujo en trama de pentacubos.
- Representación de la solución del Cubo Soma.
- Resumen de la actividad sobre semejanza en 3D (“L” construida con policubos).

## F. Guía del profesor

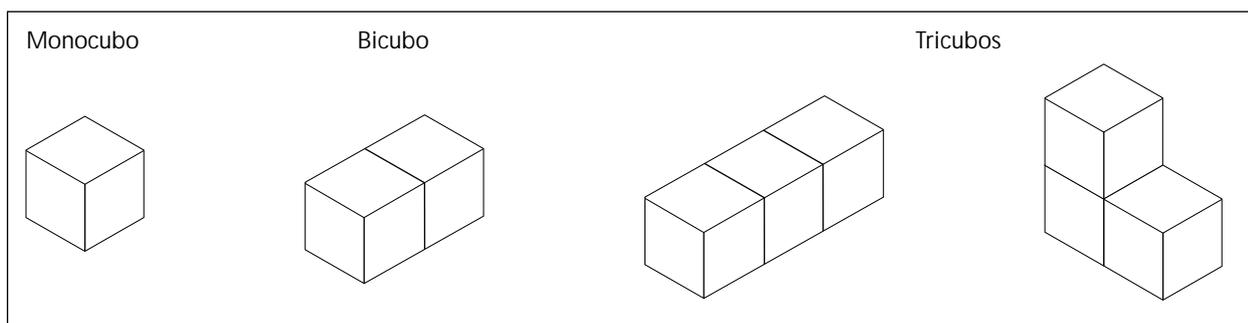
### OBSERVACIONES PREVIAS

Con el nombre de poliminós designamos la agrupación de varios cuadrados unidos por sus lados.

Un dominó sería el conjunto formado por dos cuadrados con un lado en común (habría una única posibilidad de unión). Un triminó estaría formado por tres cuadrados unidos cada uno con el siguiente por un lado (tendríamos dos posibles triminós) y así progresivamente.



Los policubos, por su parte, serían agrupaciones de un determinado número de cubos unidos por una cara. Siguiendo la misma idea que los poliminós, tendríamos monocubos, bicubos, tricubos, etc.



A medida que aumenta el número de cuadrados o cubos, aumentan las formas de unirlos. Nuestro trabajo empezará clasificando esas posibilidades y estudiando algunas de sus características geométricas.

Partiendo de elementos tan simples como el cuadrado y el cubo podemos trabajar contenidos importantes de Matemáticas, desarrollar estrategias ganadoras, resolver rompecabezas en dos y tres dimensiones, etc.

Para trabajar en muchas de las actividades de esta unidad es fundamental disponer de un número suficiente de policubos (material Link). Los utilizaremos tanto en la parte de los poliminós (figuras planas) como en la de los policubos (cuerpos espaciales), por lo fácil que resulta su manipulación. En el caso de las figuras planas, y para no generar demasiada confusión, limitaremos su uso a los momentos en los que se buscan los diferentes tetraminós, pentaminós o hexaminós. A partir de ahí trabajaremos con figuras de cartulina.

Para trabajar con el material Link, se aconseja la adopción de serias medidas de control que dificulten pérdidas y sustracciones. Contarlos y vigilar que no quede ninguno en el suelo permitirá desarrollar esta unidad durante varios años sin tener que reponer los policubos.

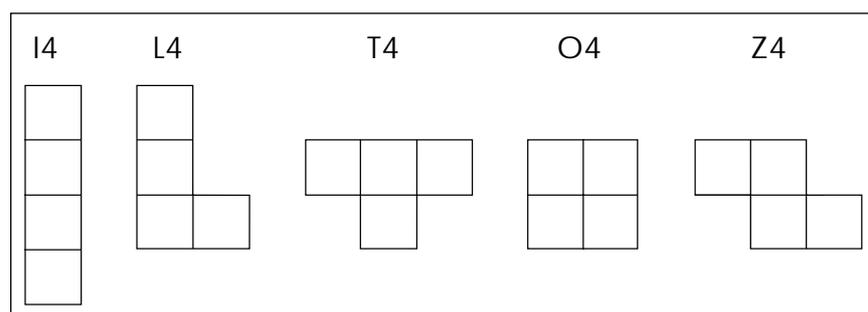
Más difícil será impedir que construyan objetos insospechados: coches, cohetes, pistolas, puentes, etc. Ante el interés que despierta el material, es preferible dejarlos “enredar” el primer día y después intentar reconducir la desbordante imaginación de nuestros alumnos hacia actividades más propias del Taller de Matemáticas.

### ACTIVIDAD 1. INTRODUCCIÓN A LOS POLIMINÓS

- Haremos una breve introducción para presentar los poliminós. Comenzaremos por el más sencillo (monominó) e iremos avanzando hasta los triminós. Debemos hacer hincapié en el número de figuras que hay de cada tipo, dejando claro cuándo son distintos entre ellos y cuándo son iguales y sólo se diferencian en la forma de colocarlos sobre la mesa.
- Justificaremos el nombre de los poliminós a partir del nombre de los números en griego.
- Puede resultar interesante proponer el siguiente juego:  
Utilizando un tablero de ajedrez y fichas de dominó de forma que cada una de ellas cubra exactamente dos casillas, ¿puedes colocar fichas cubriendo todas las casillas menos dos, la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha?

### ACTIVIDAD 2. TETRAMINÓS. TETRACATÁLOGO

- En esta actividad pretendemos repasar contenidos de geometría trabajando con material, de esta forma resultan menos áridos para los alumnos.
- Trabajaremos en grupos.
- Una vez construidos todos los tetraminós (hay que prestar atención para que no estén repetidos) y dibujados en el cuaderno, los nombraremos por el parecido con ciertas letras. Después rellenaremos el tetracatálogo. Es útil recordarles que los tetraminós son figuras planas aunque estemos manipulando material tridimensional.



- Pondremos ejemplos que aclaren las dudas sobre los datos que se piden, prestando especial atención a los siguientes apartados:
  - Ejes de reflexión: líneas imaginarias que dividen el tetraminó en dos partes simétricas (ejes de simetría).
  - Centro de rotación de orden  $n$ : centro de giro de la figura tal que al girarla 360 grados, se repite  $n$  veces la figura en su posición inicial. Consideraremos que el menor orden de un centro de rotación es uno.

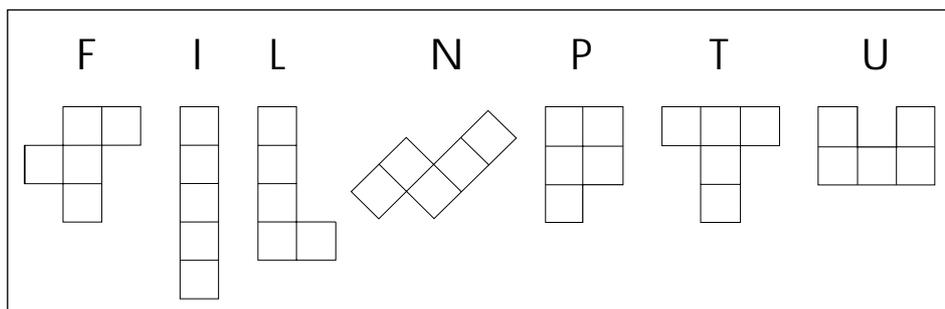
- Posiciones distintas: los alumnos dibujarán en su cuaderno las distintas posiciones en las que se puede colocar cada uno de los tetraminós. Debe entenderse que son válidas únicamente aquellas posiciones en las que la figura está “apoyada” sobre uno de sus lados, nunca sobre un vértice.
- Longitud del diámetro. El alumno debe descubrir cuáles son los vértices más distantes de la figura. Debemos intentar que todos los alumnos sepan aplicar el teorema de Pitágoras para calcular dicha longitud.
- El tetracatálogo se corregirá en la pizarra. Damos la solución a continuación.

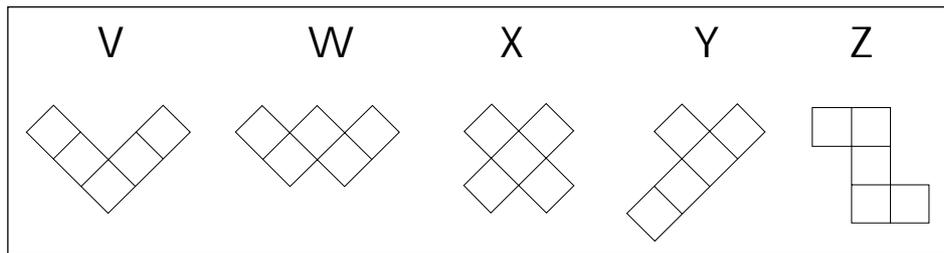
### TETRACATÁLOGO

	I4	L4	O4	T4	Z4
Número de cuadrados	4	4	4	4	4
Número de lados	4	6	4	8	8
Perímetro	10	10	8	10	10
Número de ejes de reflexión	2	0	4	1	0
Centro de rotación de orden	2	1	4	1	2
Número de posiciones distintas	2	8	1	4	4
Longitud del diámetro	$\sqrt{17}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$
Croquis del tetraminó					

### ACTIVIDAD 3. PENTAMINÓS. PENTACATÁLOGO

- Los alumnos trabajarán en grupo.
- Esta actividad tiene un desarrollo muy similar a la anterior. Las cuestiones que presentan mayor dificultad son:
  - Obtener todos los pentaminós sin repeticiones (podemos orientarlos diciendo, por ejemplo, que hay más de 10 y menos de 15).





- Distinguir los pentaminos que forman caja sin tapa. Los alumnos que tengan dificultades, pueden recortarlos y plegarlos hasta comprobar si cumplen o no la condición.
- Los apartados del pentacatálogo que son similares a los del tetracatálogo se pueden utilizar como actividades de refuerzo.
- El pentacatálogo se corregirá en la pizarra. Damos la solución.

PENTACATÁLOGO

	F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
Número de cuadrados	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Número de lados	10	4	6	8	6	8	8	6	10	12	8	8
Perímetro	12	12	12	12	10	12	12	12	12	12	12	12
Número de ejes de reflexión	0	2	0	0	0	1	1	1	1	4	0	0
Centro de rotación de orden	1	2	1	1	1	1	1	1	1	4	1	2
Número de posiciones distintas	8	2	8	8	8	4	4	4	4	1	8	4
Longitud del diámetro	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18}$
¿Forma de caja sin tapa?	SÍ	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Croquis del pentaminó												

- Cada alumno construirá en su casa, con material adecuado, un juego de pentaminos que respete las medidas indicadas en la actividad (cada cuadrado tendrá dos centímetros de lado). Este extremo deberá vigilarse pues, más tarde, los utilizaremos en un juego con tablero.

ACTIVIDAD 4. HEXAMINÓS. HEXACATÁLOGO

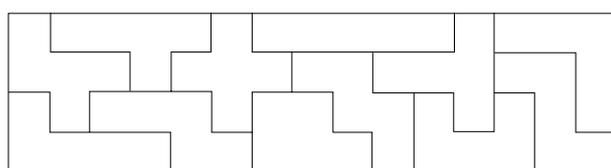
- Esta actividad, al ser de profundización, se propondrá o no según el criterio del profesor.
- Para resolver el apartado de Pepe al cubo correctamente, hay que observar detenidamente como se plegarán las caras formando el cubo y que orientación deben tener las letras.
- Obtener los 35 hexaminos distintos que hay es una tarea enrevesada ya que es muy fácil repetir piezas y olvidarse de alguna. Es importante que el alumno utilice un método sistemático para obtenerlos.

- Hay una prueba de control sobre los hexaminós, llamada hexacatálogo, que puede servir para evaluar a los alumnos sobre esta parte de la unidad. Puede verse en el anexo 2, al final de este libro.

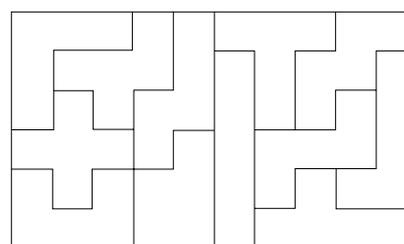
### ACTIVIDAD 5. ROMPECABEZAS CON PENTAMINÓS

- En esta actividad resolveremos algunos rompecabezas utilizando los pentaminós que el alumno ha fabricado en su casa. Podemos utilizar el tablero de ajedrez que se reproduce después de la hoja de trabajo de esta actividad y que también nos servirá para el juego de la actividad número 6, siempre que los pentaminós se hayan construido respetando la longitud indicada de dos centímetros de lado cada cuadrado.
- Los alumnos comprobarán que no es difícil cubrir 60 de las 64 casillas del tablero.
- Los problemas con casillas simétricas son más complicados. No es posible dejar libres las 4 esquinas.
- En el mercado pueden encontrarse juegos basados en el rompecabezas de 10x6, uno de los propuestos en las tareas para realizar en casa.
- Los alumnos que encuentren soluciones a los rompecabezas, pueden entregarlas de forma voluntaria, debidamente presentadas, para evaluarlas.
- A continuación podemos ver algunas soluciones presentadas en su momento por nuestros alumnos.

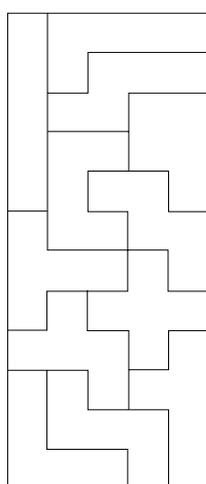
#### SOLUCIONES DE ALGUNOS ROMPECABEZAS CON PENTAMINÓS (Realizadas por los alumnos)



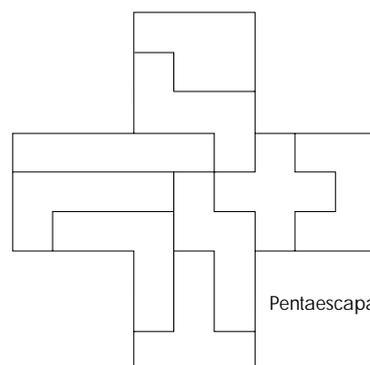
Rectángulo 15x4



Rectángulo 10x6



Rectángulo 5x12



Pentaescaparete

## **ACTIVIDAD 6. JUEGOS EN EL TABLERO**

- Con esta actividad queremos que los alumnos desarrollen estrategias ganadoras a la vez que reflexionan sobre las distintas posiciones de los pentaminós.  
Se colocan los alumnos por parejas (el profesor completará pareja en caso de ser necesario) con un tablero y un juego de pentaminós. El primero elige del montón una ficha (pentaminó) y la pone en el tablero, de forma que cubra exactamente 5 de sus casillas. El segundo actúa de igual forma. Continúan colocando piezas, alternativamente, hasta que no sea posible colocar más fichas o hasta que se acaben las doce. El jugador que no puede poner ficha, pierde.
- Pueden jugar varias partidas antes de hacerles algunas indicaciones sobre posibles estrategias de juego: llegadas las últimas jugadas, deben observarse las casillas libres del tablero y las piezas con las que jugar; habrá que elegir la pieza adecuada y colocarla de forma que los huecos dejados no correspondan con ninguno de los pentaminós no utilizados. Otra posibilidad un poco más complicada de jugar consiste en repartir al principio las doce fichas (6 para cada uno).
- Como actividad asociada, se puede organizar (que lo hagan los alumnos y así aprenden a organizar eliminatorias y a establecer unas normas) un campeonato en clase. Por ejemplo en la primera eliminatoria se puede jugar al mejor de 5 partidas. También se puede proponer un problema sobre número de eliminatorias en un campeonato de tenis.

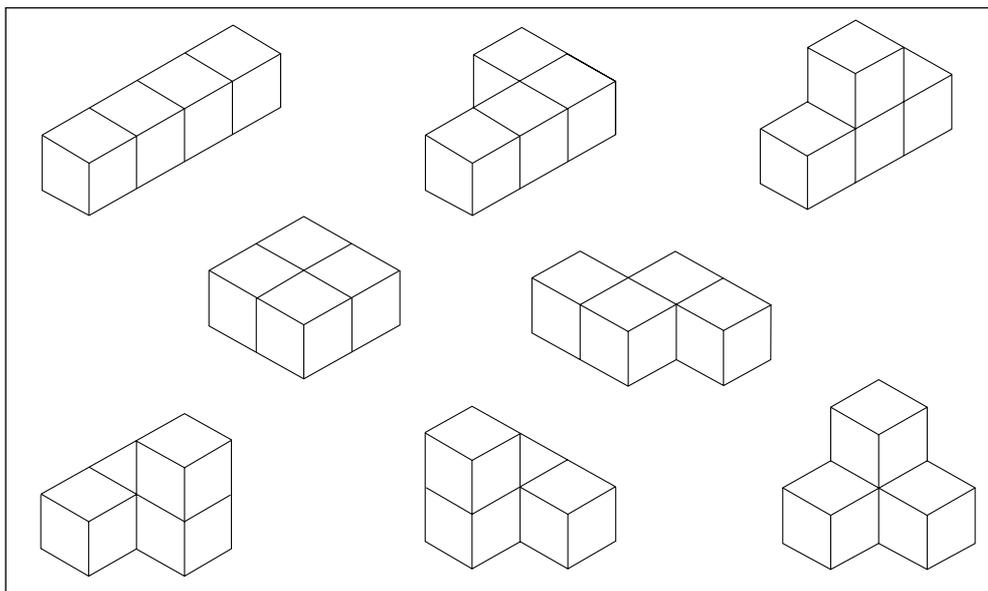
## **ACTIVIDAD 7. INTRODUCCIÓN A LOS POLICUBOS**

- Haremos ahora un desarrollo similar al seguido con los poliminós. El cuadrado es en el plano lo que el cubo es en el espacio. Pedimos a los alumnos que intenten dar (por similitud) una definición de policubo.
- Usaremos el material “Link”. Serán precisos unos 1.000 policubos para un grupo de 20 alumnos.
- Le entregamos a cada alumno una trama isométrica para que dibuje el monocubo, el bicubo y los tricubos. Les podemos aconsejar que sombreen las caras superiores. Hay que pasarse por las mesas para ayudarles a elegir los vértices correctos en la trama.
- A la mayoría de los alumnos les cuesta trabajo, al principio, dibujar en trama los policubos, pero pronto se habitúan y les termina gustando. Hay un grupo reducido de alumnos a los que les resulta casi imposible representar incluso las figuras más elementales.
- Repasaremos en el cuarto apartado de la actividad las unidades de superficie y volumen.

## **ACTIVIDAD 8. TETRACUBOS**

- Los alumnos por grupos intentarán obtener todos los tetracubos. Hay que prestar especial atención a los tetracubos que parecen iguales y sin embargo son simétricos. Llamaremos tetracubos planos a los que construyeron en el apartado 2 de la segunda actividad y

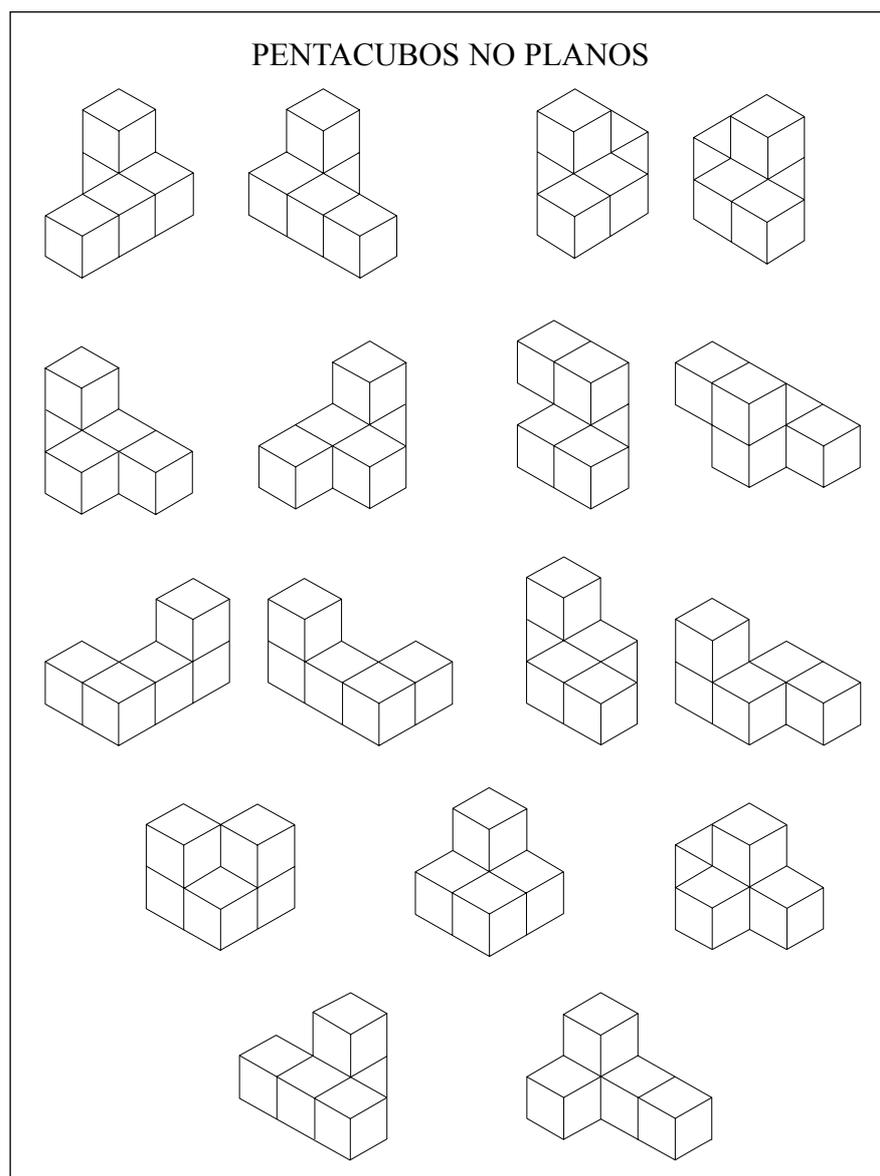
no planos a los que colocados de todas las formas posibles, siempre tienen “dos alturas”. Hay 8 en total, 5 planos y 3 no planos:



- Utilizando la misma trama que en la actividad anterior, los alumnos dibujaran cada uno de los 8 tetracubos desde el punto de vista que les resulte más sencillo y en el que se aprecie mejor las características del tetracubo.
- El cubo de ocho policubos se puede formar con 4 tetracubos distintos: los tres no planos y con la “O”.
- Todos los tetracubos tienen 18 unidades cuadradas de superficie excepto el tetracubo al que hemos asignado la letra “O”, que tiene 16 unidades cuadradas. (Podemos hacer algún comentario sobre los problemas de optimización y recordarles lo que ocurría con los perímetros y las superficies en las actividades de los poliminós).

### ACTIVIDAD 9. PENTACUBOS

- Si no se dispone de suficientes policubos, en cada grupo se obtendrá un único juego de pentacubos no planos. Es interesante obtenerlos todos (podemos informarles que hay más de 14 y menos de 20, por ejemplo) y detectar cuáles tienen simétrico y cuáles no.
- Una vez construidos los pentacubos no planos, se les entrega una trama isométrica y se les pide que dibujen el mayor número posible de ellos. Al final de la clase se recoge para utilizarla como actividad de evaluación. Esta prueba se calificará teniendo en cuenta la corrección de los dibujos de las piezas, el número de piezas dibujadas, la limpieza y esmero en los trazados, etc.
- El cuarto apartado de esta actividad, trata de nuevo el importante y complejo concepto de la semejanza. Muchos alumnos, manipulando los policubos para construir la “L” duplicada o triplicada, comprueban que se necesitan más de los que en un principio ellos pensaban.



- Hay que intentar que los alumnos aventajados generalicen y encuentren fórmulas.
- Asociado a esta actividad, se puede comentar el problema clásico de la duplicación del cubo y los de Gulliver en el país de Liliput (*Los Viajes de Gulliver*, Jonathan Swift).

### **ACTIVIDAD 10. REPRESENTACIÓN DE FIGURAS CONSTRUIDAS CON POLICUBOS**

- Trabajaremos distintas formas de representar en el plano cuerpos de tres dimensiones.
- Entregaremos a los alumnos la fotocopia sobre “algunas formas de representar objetos”, que les servirá para entender cómo pueden representarse objetos tridimensionales. La explicaremos y comentaremos las ventajas e inconvenientes de las distintas representaciones. Especial atención, por lo novedoso, requerirán los cortes de nivel topográficos y el método de código personal que aparece en la fotocopia de prácticas.

- La representación por cortes de nivel topográfico resulta muy adecuada para figuras construidas con policubos. Para que los alumnos practiquen con ella, se propone el apartado segundo de esta actividad. Las figuras no deben ser muy complejas y deben tener como máximo 3 niveles.
- El primer ejercicio (apartados 1, 2 y 3) de la hoja sobre representación de figuras construidas con policubos, servirá para ayudar a los alumnos que hayan encontrado dificultades. El segundo (apartado 4) es un problema que implica cierta dificultad, sobre todo obtener la configuración que requiere el menor número de policubos.

### **ACTIVIDAD 11. ROMPECABEZAS CON POLICUBOS**

- Nos proponemos con esta actividad que el alumno desarrolle capacidades de razonamiento espacial, a través de la resolución de rompecabezas tridimensionales sencillos.
- Hay varios programas informáticos con los que los alumnos que presentan dificultad al pasar del plano al espacio, pueden ejercitarse, como por ejemplo el Tetris 3D.
- Partiendo de la fotocopia que muestra las 7 piezas del Cubo Soma, cada alumno las construirá e intentará encajarlas para resolver el rompecabezas.
- Una vez resuelto, es interesante pedir al alumno que anote en su cuaderno la solución obtenida. Esta parte del primer apartado les resulta muy complicada, pues ninguno de los métodos de representación utilizados hasta ahora, es directamente aplicable.
- Existen modelos comercializados del Cubo Soma.

### **ACTIVIDAD 12. ¿QUÉ SE HA APRENDIDO?**

- Tras una unidad tan amplia y compleja, es interesante que el profesor haga en la pizarra un resumen detallado de todo lo que se ha aprendido.
- Estos resúmenes pueden ser una buena forma de repaso y sería aconsejable hacerlos tras cada unidad.

## **G. Hojas de trabajo para los alumnos**

Presentamos aquí hojas de trabajo para el alumno con las distintas actividades, salvo para las nº 1, 6 y 12, en las que no son necesarias. Intercaladas entre las hojas de actividades, tenemos las hojas con el material para fotocopiar que se necesita en algunas.

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 2:</b> <b>TETRAMINÓS. TETRACATÁLOGO</b>	Poliminós y policubos
Material	Policubos y tetracatálogo.	
En clase	<p>1.- ¿Qué será un tetraminó?</p> <p>2.- ¿Cuándo dos tetraminós son distintos? ¿Cuántos tetraminós distintos hay? Constrúyelos.</p> <p>3.- Colocándolos de determinada forma parecen letras mayúsculas del alfabeto. Basándote en este parecido, asigna un nombre a cada tetraminó.</p> <p>4.- Representa los tetraminós que has obtenido, indicando su nombre.</p> <p>5.- Rellena el tetracatálogo que te ha entregado el profesor. Ten en cuenta:</p> <p>a) El número de lados de la “L” es 6.</p> <p>b) Para medir el perímetro de las figuras tienes que tomar como medida del lado de un cuadrado 1 unidad. Por ejemplo el perímetro de la “O” es 8 unidades.</p> <p>c) La “I” tiene dos ejes de reflexión y la “L” ninguno.</p> <p>d) La “I” tiene un punto, donde se cortan sus diagonales, con la siguiente propiedad: al girar la figura con centro en este punto 360 grados, vemos la figura dos veces en la misma posición (después de 180 grados y, claro está, después de 360 grados). Por esto diremos que la “I” tiene un centro de rotación de orden 2.</p> <p>e) A la hora de contar el número de posiciones distintas, colocaremos los tetraminós apoyados sobre algún lado, nunca sobre un vértice, de forma que los lados queden en posición vertical y horizontal pero no oblicuos. El número de posiciones distintas de la “O” es 1 y de la “L” 8.</p> <p>f) El diámetro de un círculo es la máxima distancia entre dos puntos. Por analogía se define el diámetro de un poliminó como la máxima distancia entre dos puntos de un poliminó.</p> <p>g) ¿Qué resultado matemático importante tendremos que utilizar para calcular el diámetro de los tetraminós?</p> <p>Anota en tu cuaderno todos los pasos necesarios para obtener el diámetro de cada una de las piezas. Da los resultados de forma exacta.</p>	
En casa	Repasa y completa los apartados de esta actividad.	

## TETRACATÁLOGO

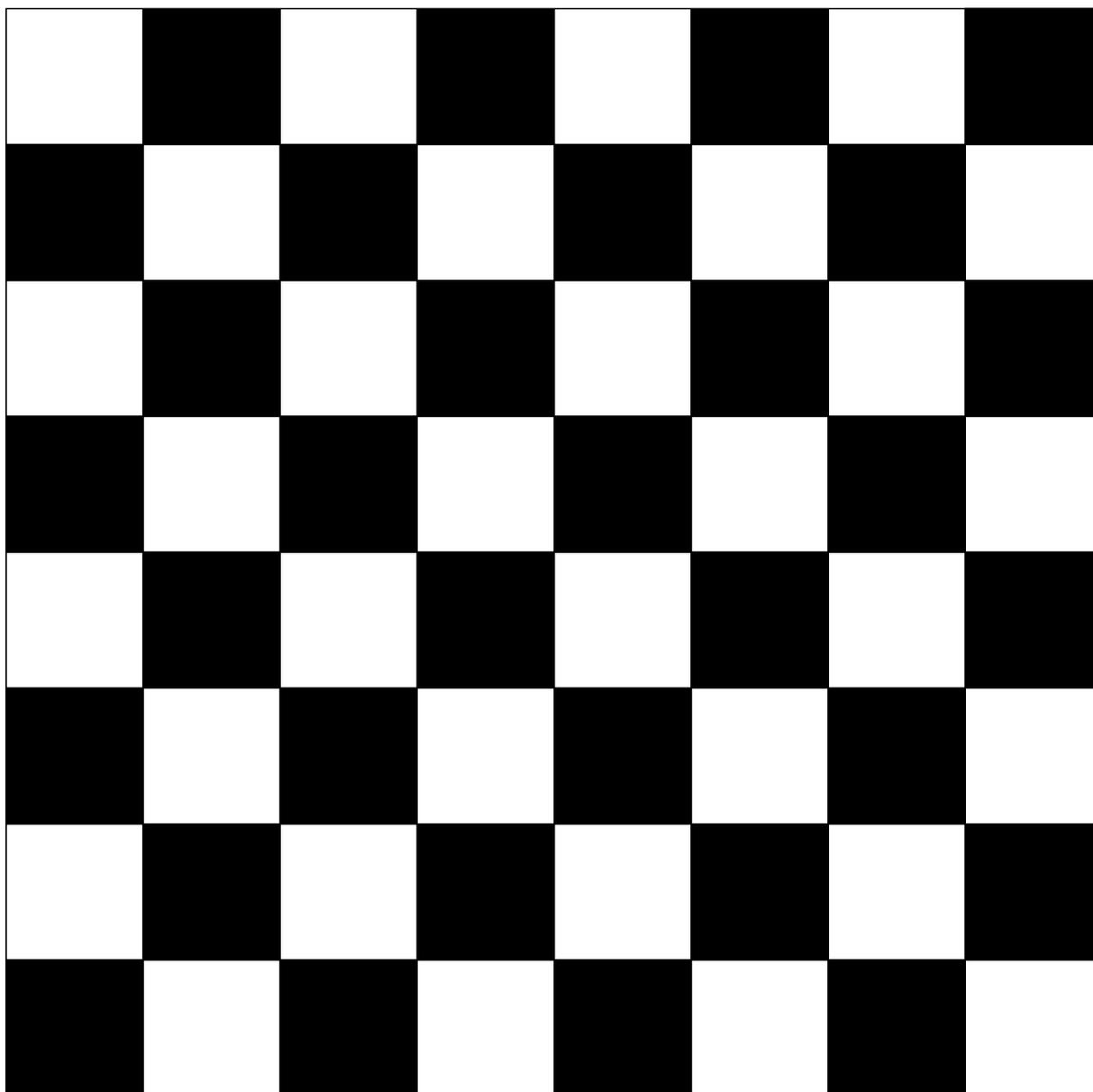
	I4	L4	O4	T4	Z4
Número de cuadrados					
Número de lados					
Perímetro					
Número de ejes de reflexión					
Centro de rotación de orden					
Número de posiciones distintas					
Longitud del diámetro					
Croquis del tetraminó					

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>PENTAMINÓS. PENTACATÁLOGO</b>	Poliminós y policubos
Material	Policubos, el pentacatálogo, regla, cartulina y tijeras.	
En clase	<p>1.- ¿Qué será un pentaminó?</p> <p>2.- ¿Cuántos pentaminós distintos hay? Constrúyelos utilizando los policubos.</p> <p>3.- Colocándolos de determinada forma parecen letras mayúsculas del alfabeto y, basándote en este parecido, asignale un nombre a cada pentaminó.</p> <p>4.- Representa los pentaminós que has obtenido en tu cuaderno indicando su nombre.</p> <p>5.- Rellena ahora el pentacatálogo que te ha entregado el profesor. Recuerda lo que hiciste para los tetraminós.</p> <p>6.- ¿Qué pentaminós son el desarrollo de una caja cúbica sin tapa? (La “I” no lo es y la “X” sí lo es).</p>	
En casa	<p>Repasa y completa los apartados de esta actividad. Presta especial atención a los apartados de ejes de reflexión, posiciones distintas y sobre todo al cálculo de los diámetros.</p> <p>Construye un juego completo de pentaminós, utilizando cartulina (también puedes utilizar cartón, madera o plástico) y con cuadrados de 2 cm de lado. Pon mucho cuidado en que las piezas respeten las formas y las dimensiones ya que las utilizarás para trabajar en muchas actividades. Tu juego de pentaminós lo traerás a clase (por ejemplo dentro de un sobre) durante todos los días que duren las actividades con poliminós.</p>	

### PENTACATÁLOGO

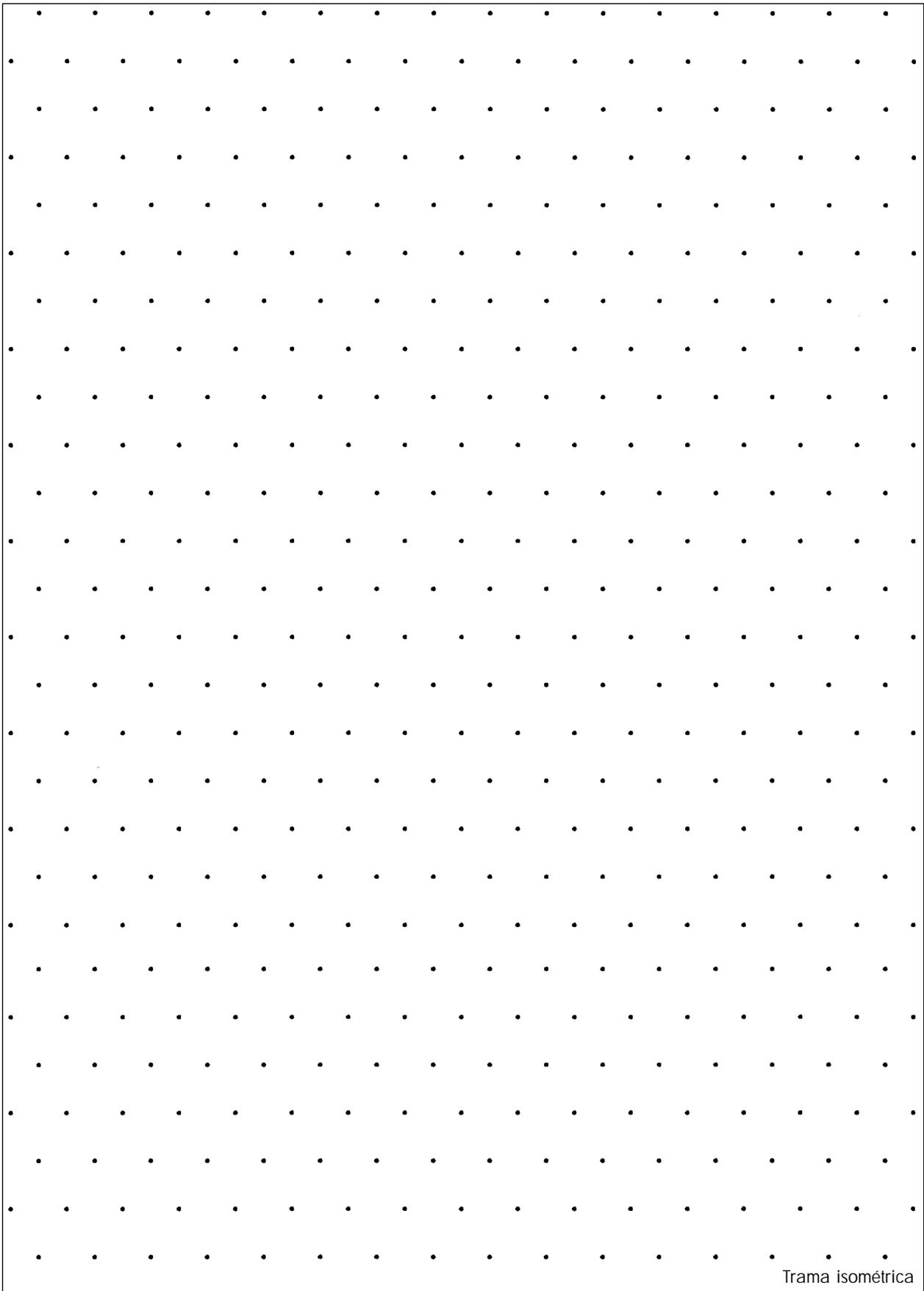
	F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
Número de cuadrados												
Número de lados												
Perímetro												
Número de ejes de reflexión												
Centro de rotación de orden												
Número de posiciones distintas												
Longitud del diámetro												
¿Forma de caja sin tapa?												
Croquis del pentaminó												

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>HEXAMINÓS. HEXACATÁLOGO</b>	Poliminós y policubos
Material	Papel cuadriculado.	
En clase	<p>Las figuras que aparecen abajo son desarrollos planos del cubo. ¿Dónde hay que poner el resto de las letras para que al formar el cubo se pueda leer la palabra PEPE?</p> <p>¡Cuidado con la orientación de las letras!</p>	
En casa	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Qué será un hexaminó?</li> <li>2. ¿Cuántos hexaminós distintos hay? (Ayuda: hay más de 30 y menos de 40). Intenta alguna estrategia para no repetirlos y no olvidarte de ninguno.</li> <li>3. ¿Qué hexaminós son desarrollos planos de un cubo o hexaedro? Dibújalos en una hoja cuadriculada e intenta representar para alguno de ellos cómo hay que plegarlos para obtener un cubo.</li> <li>4. Representa debidamente los hexaminós que has obtenido en una hoja cuadriculada. Presta mucha atención para no repetir ninguno.</li> </ol>	
Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 5:</b> <b>ROMPECABEZAS CON PENTAMINÓS</b>	Poliminós y policubos
Material	Juego de pentaminós del alumno, tablero de ajedrez y papel cuadriculado.	
En clase	<p>Los tableros de ajedrez tienen 64 cuadrados. Si quisiéramos recubrir uno de estos tableros (que te entregará el profesor) con los pentaminós, tendríamos que renunciar a tapar 4 cuadrados. ¿Es posible conseguirlo? ¿Y si imponemos que la figura formada por los cuatro huecos sea simétrica? Por ejemplo, dejar sin cubrir las casillas de las 4 esquinas o las 4 centrales.</p>	
En casa	<p>Los 12 pentaminós pueden recubrir, en total, 60 cuadrados. Dibuja una cuadrícula rectangular que tenga 60 cuadrados, para cada una de las siguientes dimensiones: 30x2, 20x3, 15x4, 12x5, 10x6, con la condición de que el lado del cuadrado sea 2 cm. Intenta rellenar los rectángulos anteriores usando exactamente los 12 pentaminós y una sola vez cada uno.</p> <p>¿Hay algún caso en el que claramente es imposible?</p> <p>Halla la solución de, al menos, uno de los rompecabezas. Dibuja la solución correctamente en una hoja.</p>	



Para jugar hacen falta dos jugadores. Se coloca uno a cada lado del tablero y se sortea quién ha de empezar. El primero pone un pentaminó sobre el tablero de forma que cubra exactamente 5 casillas. El segundo actúa de la misma forma. Le toca ahora el turno al primero,... El juego continúa hasta que no sea posible colocar más fichas sobre el tablero o bien hasta que se acaben las doce fichas. El jugador que no puede jugar, pierde.

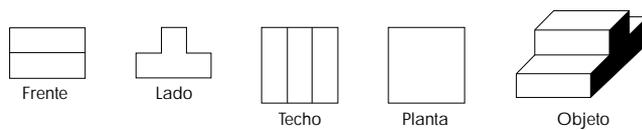
Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 7:</b> <b>INTRODUCCIÓN A LOS POLICUBOS</b>	Poliminós y policubos
Material	Policubos (material Link) y trama isométrica.	
En clase	<p>1.- Definición de policubo: cuerpo formado por varios cubos de igual arista y que tienen en común una cara completa.</p> <p>2.- ¿Qué será un bicubo? ¿Y un monocubo? ¿Cómo se llamará el policubo formado por cuatro cubos? ¿Y el formado por 5?</p> <p>3.- ¿Cuándo dos tricubos son distintos? Obtén usando los policubos (material Link), todos los tricubos. Representalos en la trama isométrica.</p> <p>Calcula el volumen (en unidades cúbicas) y la superficie (en unidades cuadradas) de los tricubos. (Supondremos que la arista de los policubos mide una unidad lineal y por tanto la superficie de una de sus caras es una unidad cuadrada y el volumen una unidad cúbica).</p>	
Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 8:</b> <b>TETRACUBOS</b>	Poliminós y policubos
Material	Policubos (material Link) y trama isométrica.	
En clase	<p>1.- ¿Cuántos tetracubos distintos hay?</p> <p>2.- Constrúyelos con policubos y representalos en la trama isométrica.</p> <p>3.- ¿Uniendo qué tetracubos se puede formar un cubo de 8 cubitos?</p> <p>4.- Todos los tetracubos tienen el mismo volumen, ¿tendrán todos la misma superficie?</p>	
Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 9:</b> <b>PENTACUBOS</b>	Poliminós y policubos
Material	Policubos (material Link) y trama isométrica.	
En clase	<p>1.- ¿Cuántos pentacubos distintos hay?</p> <p>2.- Construye los pentacubos no planos con policubos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Cuáles son simétricos?</li> <li>- Representalos en la trama isométrica.</li> </ul> <p>3.- (Actividad de profundización). Todos los pentacubos tienen el mismo volumen; ¿tienen todos la misma superficie?</p> <p>4.- Construye con policubos el pentacubo plano conocido por la “L”.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Supón que cada policubo pesa 3 gramos. ¿Cuánto pesará una “L” construida con policubos que sea el doble de alta, el doble de ancha y el doble de larga?</li> <li>- ¿Cuántos policubos son necesarios para construir otra “L” aumentando al doble las dimensiones de la primera? ¿Cuál es su volumen? ¿Y su superficie?</li> <li>- ¿Cuántos policubos son necesarios para construir otra “L” aumentando al triple las dimensiones de la primera? ¿Cuál es su volumen? ¿Y su superficie?</li> <li>- Construye una tabla y recoge en ella los datos obtenidos.</li> <li>- ¿Cuántas “L” pequeñas se pueden hacer, en cada caso, con los cubitos de las “L” grandes? Saca conclusiones.</li> </ul>	



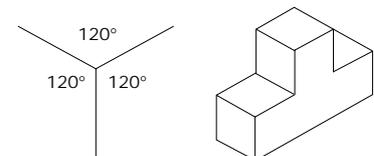
Hoja de trabajo del alumno	<p align="center"><b>ACTIVIDAD 10:</b></p> <p align="center"><b>REPRESENTACIÓN DE FIGURAS CONSTRUIDAS CON POLICUBOS</b></p> <p align="right">Poliminós y policubos</p>
Material	Policubos (material Link), trama isométrica triangular, fotocopia con problemas sobre sistemas de representación de figuras construidas con policubos.
En clase	<p>1.- Ayudándote de la fotocopia con los tipos de representaciones: proyección ortogonal (vistas: frente, lado, techo y planta), dibujos en perspectiva, dibujos en trama isométrica y cortes de nivel topográfico, rellena la fotocopia con problemas sobre las distintas representaciones de varios tetracubos. Construye primero cada uno de los tetracubos, utilizando la información aportada y los policubos.</p> <p>2.- (Colocándose por parejas). Utiliza la representación por cortes de nivel topográfico para representar una figura construida por ti, con policubos. A partir de esa representación tu compañero debe ser capaz de reconstruirla. Posteriormente haces el proceso a la inversa.</p> <p>3.- Dada la representación en trama isométrica de una figura mirada desde la esquina frontal derecha (ver fotocopia), encuentra su representación desde la parte de atrás.</p> <p>4.- (Actividad de profundización) Observa en la fotocopia la vista frontal y lateral de una construcción con policubos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Obtén diferentes configuraciones que correspondan a esta representación.</li> <li>- Determina cuál es la que requiere el mayor número de policubos.</li> <li>- Determina también la que necesita el menor.</li> <li>- Haz una representación por cortes de nivel topográfico de las construcciones de mayor/menor número de policubos.</li> </ul>

**ALGUNAS FORMAS DE REPRESENTAR OBJETOS**  
 (Las utilizaremos para representar figuras construidas con los policubos)

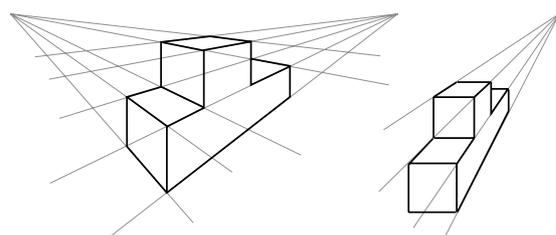
1.- *Proyecciones ortogonales*



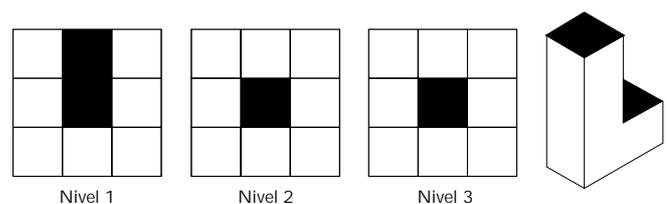
2.- *Dibujos isométricos*



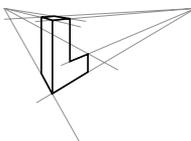
3.- *Dibujos en perspectiva*



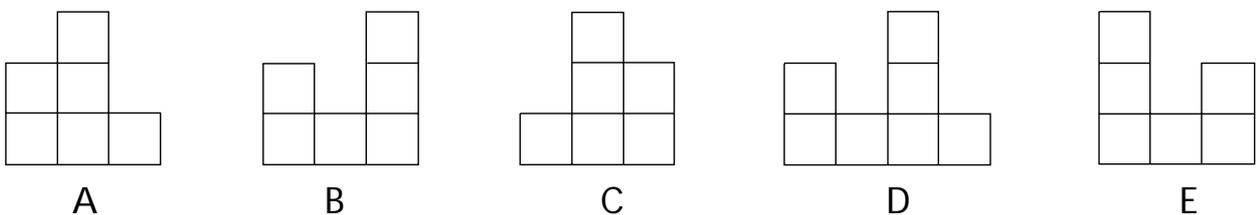
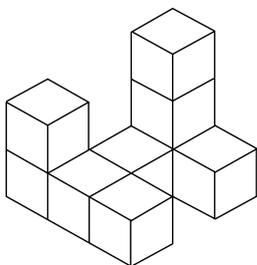
4.- *Cortes de nivel topográficos*



1.-

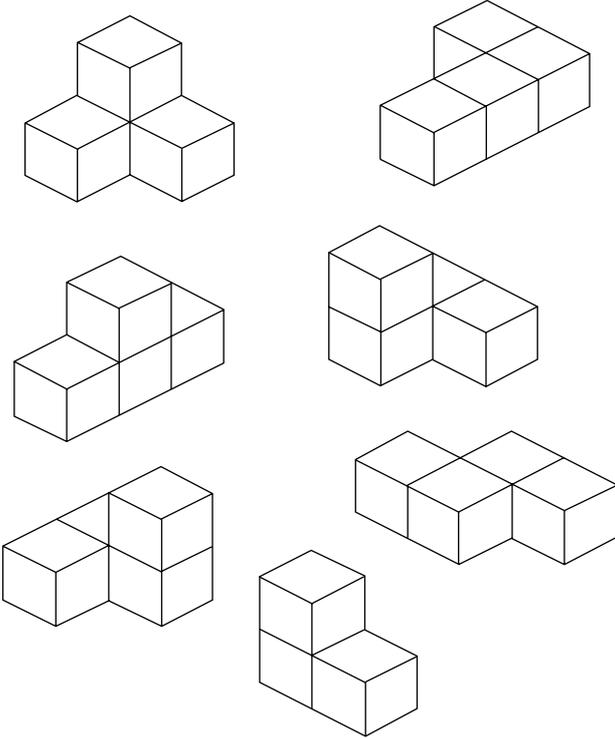
Representaciones							
ISOMÉTRICA	ORTOGONAL (vistas)			TOPOGRÁFICA (niveles)	PERSPECTIVA	CÓDIGO PERSONAL (niveles)	
	Arriba 	Frente 	Lado 	1 	2 	3 	 ▲ colocar un cubo arriba
							
							 ★ colocar un cubo detrás
							

3.- Dada la representación isométrica de un edificio mirado desde la esquina frontal derecha, encontrar su representación desde la parte de atrás.

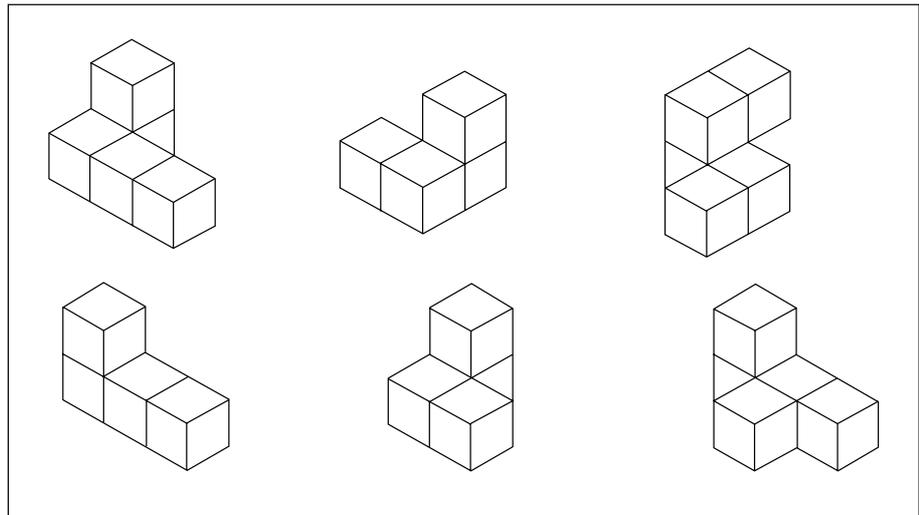


4.- Dada las vistas frontal y lateral de una construcción con bloques, dar diferentes configuraciones que correspondan a esta representación. Determinar cuál es la que requiere el mayor y el menor número de bloques.

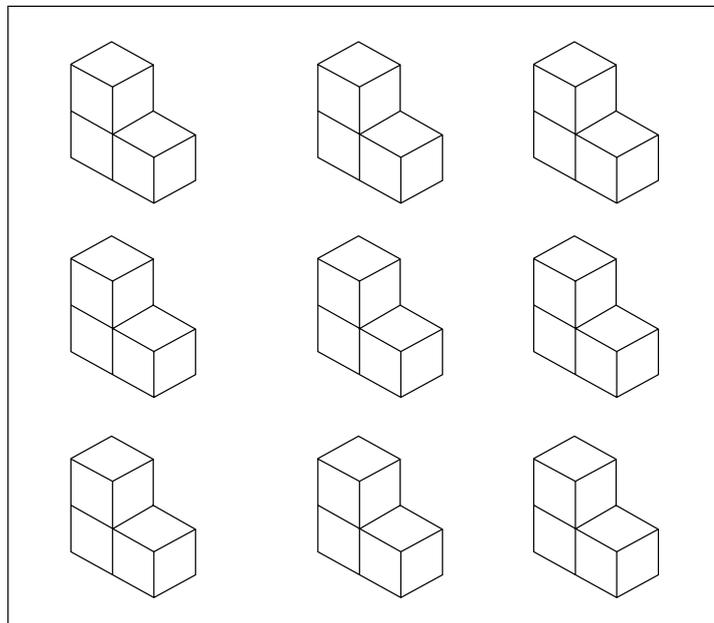


<p>Hoja de trabajo del alumno</p>	<p><b>ACTIVIDAD 11:</b> <b>ROMPECABEZAS CON POLICUBOS</b> <span style="float: right;">Poliminós y policubos</span></p>
<p>Material</p>	<p>Policubos (material Link), fotocopia de otros modelos de rompecabezas cúbicos.</p>
<p>En clase</p>	<p>1.- El Cubo Soma es un cubo de dimensiones 3x3x3 que se forma con 7 las piezas (1 tricubo y 6 tetracubos) que figuran en el dibujo. Construye con policubos las 7 piezas y forma con ellas el cubo de 3x3x3. Piensa cómo se puede representar la solución del Cubo Soma.</p> <p style="text-align: center;"><b>EL CUBO SOMA</b></p>  <p>2.- (Actividad de profundización) Repite el proceso anterior con los cubos de Steinhaus, el de O'Berine y el de Lesk que figuran en la fotocopia.</p>

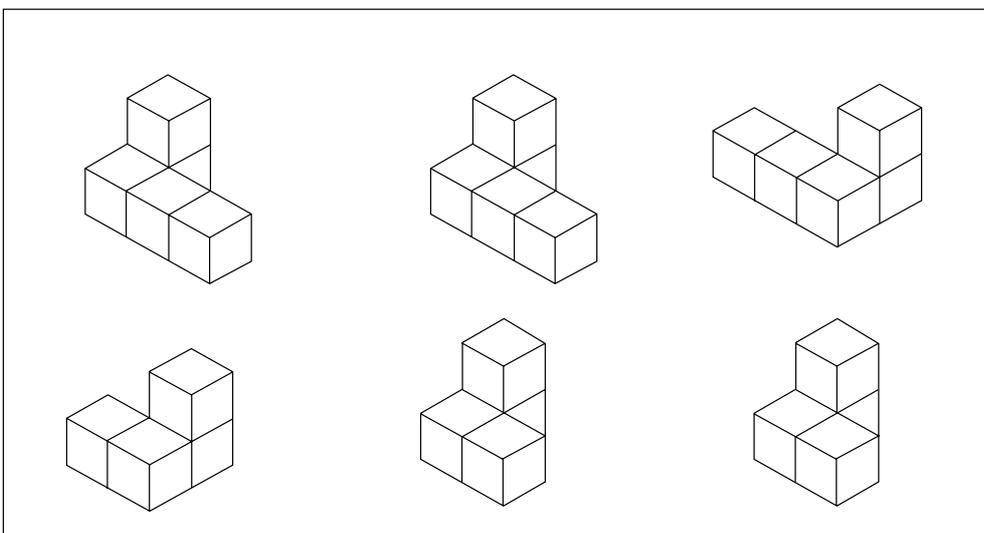
Cubo de Steinhaus



Cubo de O'Berine



Cubo de Lesk



HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 4:**

**LA BANDA DE MOEBIUS**

HOJA EN BLANCO

# LA BANDA DE MOEBIUS

## A. En esta unidad trabajaremos:

- Presentación de una nueva rama de las Matemáticas: la Topología.
- Vida y las obras de August Ferdinand Moebius.
- Manipulación de figuras elementales planas.
- Vocabulario matemático relacionado con la topología.
- Aproximación práctica a contenidos complejos de topología: caras, bordes, semigiros, cortes, superficies orientables, deformaciones continuas.
- Predicción de resultados en los cortes topológicos.
- Investigación en problemas topológicos sencillos.
- Obtención de objetos aparentemente imposibles.
- Introducción a geometrías distintas a la euclídea habitual.
- Resolución de un problema clásico: las tres casas y los tres pozos.
- Relación entre las Matemáticas y el arte: obras de M. C. Escher.
- Dibujo de figuras topológicas tridimensionales sencillas con cierta destreza.
- Vídeos con contenido matemático para introducir o completar conceptos nuevos.

## B. Nuestras fuentes

Varias ideas para trabajar con la Banda de Moebius y cilindros, se han obtenido del material de Francisco Ruiz López, presentado en la mesa de recursos para el aula de las V JAEM.

## C. Material necesario

- Cartulina o papel, regla, tijeras, cinta adhesiva o pegamento.
- Enciclopedia.
- Acetatos y rotuladores especiales para acetato de 3 colores.
- Cinta de vídeo “Arte y Matemáticas”.
- Fotocopia de las hojas para los alumnos (el lector puede encontrarlas al final de la presente unidad).

## D. Actividades para los alumnos

- Actividad n° 1 Introducción.
- Actividad n° 2 Los cilindros y las bandas.
- Actividad n° 3 Las cruces de Moebius.
- Actividad n° 4 Lo imposible, posible.
- Actividad n° 5 Las casas y los pozos.
- Actividad n° 6 Arte y Matemáticas.
- Actividad n° 7 Resumiendo.

## E. Actividades de evaluación

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso, se proponen las siguientes actividades específicas de evaluación:

- Investigación sobre resultados de cortes en las bandas con distintos números de semigiros.
- Investigación sobre orientación en las cruces de Moebius.
- Solución al problema de las tres casas y los tres pozos.
- Control resumen de respuesta breve sobre el vídeo Arte y Matemáticas.
- Resumen de la unidad.

## F. Guía del profesor

### OBSERVACIONES PREVIAS

Las actividades que se proponen a continuación requieren cortar y pegar papel con frecuencia. Por ello es imprescindible que el alumno traiga todos los días a clase el material necesario.

Debe insistirse, también, en la limpieza del aula. Al final de cada clase todos los recortes de papel deben ir a la papelería.

Es aconsejable reutilizar el papel de fotocopias que ya no sirvan.

### ACTIVIDAD 1. INTRODUCCIÓN

- Como introducción, puede comenzarse la unidad hablando sobre Moebius, astrónomo del siglo pasado que dio en 1858 el primer ejemplo de superficie unilateral. Junto con Euler, Riemann, Jordan y Poincarè, contribuyó a la creación y desarrollo de la Topología. Escribió: *El cálculo baricéntrico* (1827), *Principios de Astronomía* (1836) y *Elementos de mecánica celeste* (1843).

- Se pueden poner ejemplos sobre problemas sencillos que sean objeto de estudio de la Topología.
- Hablaremos sobre bordes y caras de una superficie, advirtiendo que forman parte de las llamadas “características topológicas” de esa superficie.
- En casa deberán completar la información sobre Moebius, Topología o términos como “dextrógiro” o “levógiro”, utilizando el material bibliográfico a su alcance. Los datos recopilados se incluirán en el resumen final de la unidad.

## ACTIVIDAD 2. LOS CILINDROS Y LAS BANDAS

- Comenzaremos la clase revisando el trabajo hecho en casa por los alumnos.
- Se les distribuye papel y se les indica que deben cortar tiras de varios centímetros de ancho (más adelante deberán hacer varios cortes por la mitad en sentido longitudinal).
- Llamaremos cilindro a la superficie obtenida pegando los extremos de la tira sin hacer giros previos, mientras que la Banda de Moebius se obtiene pegando los dos extremos de la tira después de haber girado 180 grados uno de ellos.
- Colorearán las caras de las dos superficies para darse cuenta que mientras el cilindro tiene dos caras, la Banda de Moebius tiene sólo una. Después, les pedimos que recorran con el dedo el borde o los bordes de las superficies. Debe insistirse en cómo un simple semigiros cambia las características topológicas de una cinta de papel.
- Siguiendo las instrucciones que se dan en la hoja del alumno, cortaremos el cilindro y la Banda longitudinalmente observando los resultados. En todas las actividades de corte es importante que los alumnos imaginen el resultado antes de hacerlo y que lo anoten en su cuaderno.
- Se les puede pedir que comparen las dimensiones (largo y ancho) de la nueva superficie con las de la cinta inicial.
- Continuaremos la actividad dando cortes longitudinales a un tercio de distancia de los bordes de cada superficie. Se van anotando todas las características topológicas (número de semigiros, número de caras y número de bordes) de cada una de las nuevas superficies que se obtiene.
- Asociado a la actividad de cortar a un tercio, se puede proponer un problema de ingenio consistente en intentar separar los colores rojo y amarillo de una bandera de España con un solo corte continuo y pegamento (no vale cortar la tela doblándola).
- Para la actividad de casa, puede utilizarse una tabla como la siguiente a la hora de recoger la información:

Nº de semigiros	Figura obtenida	Sin cortar		Cortando por la mitad	
		Nº de caras	Nº de bordes	Nº de caras	Nº de bordes
0	Cilindro				
1	Banda de Moebius				
2					
3					
4					

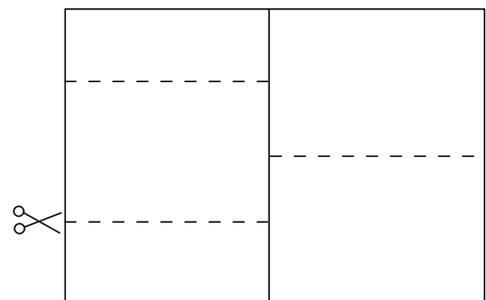
### ACTIVIDAD 3. LAS CRUCES DE MOEBIUS

- En primer lugar, obtendremos las cruces de Moebius. Para ello utilizaremos una hoja de papel en la que hemos dibujado una cruz tal y como se muestra en la hoja que se entrega al alumno. Doblando adecuadamente dos veces el folio y cortando por el lugar conveniente es muy fácil obtenerlas. Debemos dar un ancho mínimo de 4 centímetros a cada aspa.
- Siguiendo las indicaciones que se dan en las hojas de los alumnos, construiremos varias superficies y las iremos cortando tal y como se hizo en la actividad anterior. Se obtendrán resultados curiosos e inesperados e iremos anotando las características topológicas de las nuevas superficies.
- En el punto 3, se obtienen dos resultados distintos: dos corazones entrelazados o separados. Sobre esta particularidad de las cruces de Moebius se pueden hacer comentarios divertidos a los alumnos del tipo: al que le salgan unidos es que está enamorado y al que le salgan separados, no lo está.  
El que salgan separados o no, depende del sentido en el que se haga el semigiros en una banda en relación con la otra.
- En el apartado cuarto deberán cortar por la mitad la parte de la cruz que ha formado el cilindro y a un tercio la parte que ha dado lugar a la Banda de Moebius. Para hacer los cortes es siempre más sencillo marcar previamente las caras con una línea que indique el camino que seguirá la tijera. Debe comenzarse a cortar por la Banda de Moebius y completar los cortes por todas las líneas.  
Se obtiene una Banda de Moebius enlazada con un marco. Es interesante que los alumnos observen de qué parte de la cruz ha salido el resultado final.

### ACTIVIDAD 4. LO IMPOSIBLE, POSIBLE

En esta actividad vamos a construir una serie de objetos imposibles.

- Para el primero, el profesor colocará sobre el encerado un folio en el que se han practicado los cortes que se indican en la figura y se ha girado la mitad inferior del folio 180 grados. Los alumnos deben ver el resultado pero no el proceso.  
Se les pide que construyan otro igual. Podrán acercarse para observarlo, pero no podrán separarlo de la pizarra (también puede colocarse sobre una mesa). Cuando alguno crea que tienen el resultado, debe avisar al profesor para mostrárselo directamente sin que lo vea el resto de la clase.

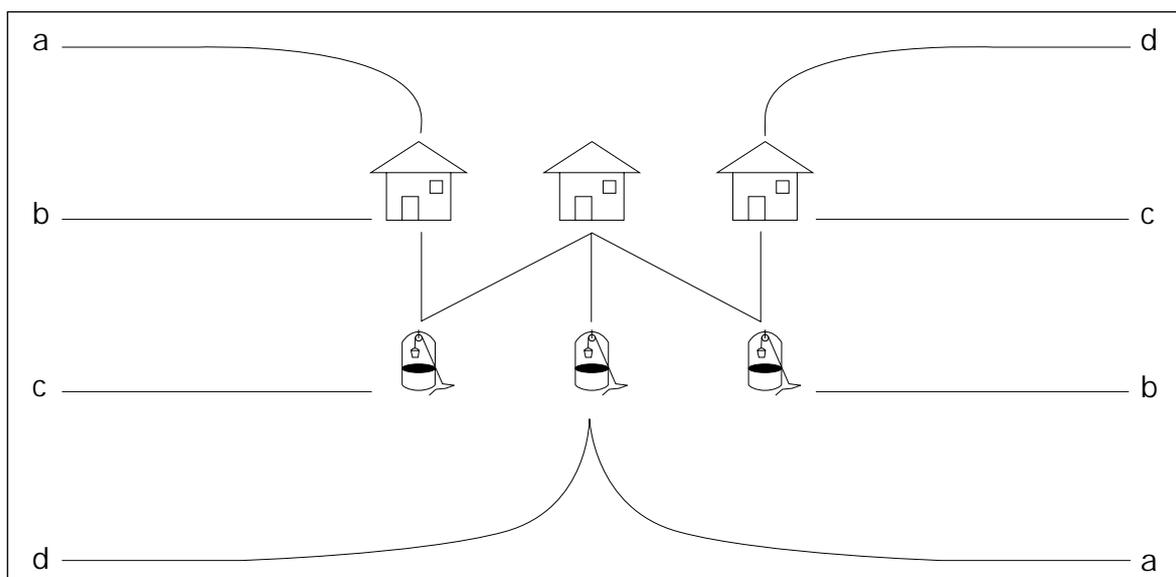


- Sobre la segunda parte de la actividad, se puede comentar que en un futuro no muy lejano con la proliferación de los relojes digitales, nuestros alumnos no tendrán muy claro en qué sentido giran las agujas del reloj. Se les puede recordar las definiciones de LEVÓGIRO y DEXTRÓGIRO.

- La solución consiste en girar el dedo que presiona la cinta, sin levantarlo de la mesa, dos vueltas enteras alrededor del extremo pegado en sentido contrario al de las agujas del reloj. La solución para la banda con asa, consiste en dar cortes similares a los del apartado primero, pero partiendo de una Banda de Moebius.

### ACTIVIDAD 5. LAS CASAS Y LOS POZOS

- Proponemos a los alumnos en clásico problema de unir tres casas con cada uno de los tres pozos disponibles. Las conducciones de agua no deben cruzarse.
- Comenzarán haciéndolo con dos casas y dos pozos. Es muy fácil y todos los alumnos se enganchan concibiendo esperanzas de resolver la parte difícil. Es muy importante no darles ninguna pista sobre la imposibilidad de resolver la versión de tres casas y tres pozos.
- Tras dejar probar a los alumnos y cuando estén a punto de abandonar, se les puede ayudar sugiriéndoles la Banda de Moebius como posible solución. Para que la solución sea más correcta (desde el punto de vista topológico) debemos dibujar nuestra figura en un trozo de transparencia. Si lo hacemos en papel, hay que copiar el dibujo por la parte de atrás. Facilitaremos la interpretación del dibujo utilizando rotuladores de 3 colores, uno para cada casa.



- Es interesante que los alumnos traten de hacerse un modelo de solución en una tira de plástico, cuidando que las tuberías de la derecha coincidan después del semigiro con las de la izquierda. (Este trabajo se puede utilizar para evaluar).

### ACTIVIDAD 6. ARTE Y MATEMÁTICAS

- La actividad gira en torno al vídeo “Arte y Matemáticas”, concretamente la parte dedicada a la Banda de Moebius (se puede conseguir fácilmente en un CPR). A los alumnos les llama la atención como una figura para ellos nueva y aparentemente sin utilidad, ha sido fuente de inspiración para tantos artistas y diseñadores.

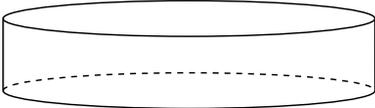
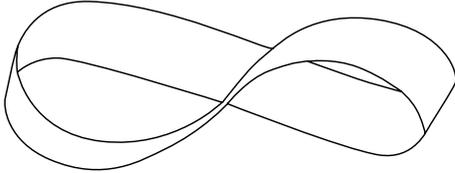
- Es una buena forma de terminar la unidad pues permite resumir todo lo trabajado de una forma distinta, y al mostrar obras curiosas o aplicaciones inesperadas, resulta motivador para los alumnos.
- Tras ver el vídeo, los alumnos contestan a un cuestionario sobre él, así se ven obligados a prestar más atención durante los 25 minutos que dura la proyección.

### **ACTIVIDAD 7. RESUMIENDO**

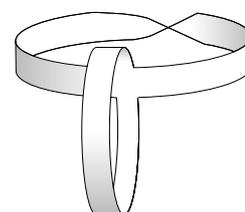
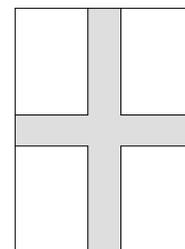
- Para terminar la unidad, elaborarán un resumen que recoja las actividades realizadas y los resultados de las investigaciones que el alumno ha hecho en su casa.
- Se puede aprovechar la clase que se dedica a orientarles sobre el trabajo resumen de la unidad, para llevarles algún libro con grabados del artista M. C. Escher y sobre objetos imposibles.
- Es importante fijar con antelación y dejando un margen adecuado para que no les resulte agobiante, la fecha de entrega del resumen.
- Deben tenerse en cuenta a la hora de valorarlo, los siguientes aspectos:
  - Tienen que cuidar la presentación: márgenes, caligrafía, ortografía, índice, paginación, limpieza, etc.
  - Tienen que esforzarse en hacer dibujos de las figuras obtenidas.
  - Solución correcta del problema de las 3 casas y los 3 pozos.
  - Opinión personal sincera y reflexionada.

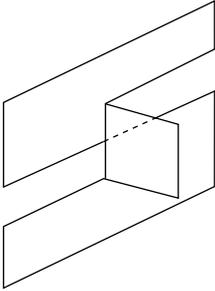
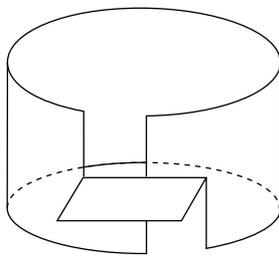
## **G. Hojas de Actividades para los alumnos**

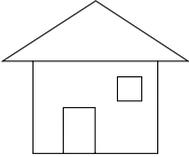
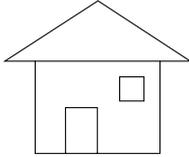
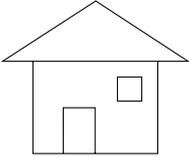
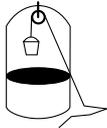
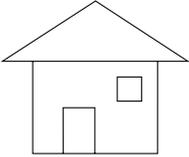
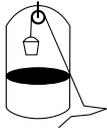
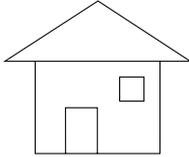
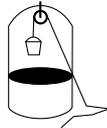
A continuación aparecen las hojas de trabajo para los alumnos, correspondientes a las actividades de esta unidad (salvo para la primera, donde no es necesaria).

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 2:</b> <b>LOS CILINDROS Y LAS BANDAS</b>		La banda de Moebius
Material	Hojas de papel tamaño A4 (usadas), tijeras y cinta adhesiva o pegamento.		
En clase	<p>1.- Divide con las tijeras a lo largo un A4 en 5 partes iguales. Con una tira de papel puedes construir un simple “cilindro” pegando los extremos de la cinta o una Banda de Moebius dando media vuelta -semigiro- a un extremo antes de pegarlo con el otro.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p>2.- ¿Cuántos colores distintos necesitas para colorear las caras de un cilindro? ¿Cuántos colores distintos necesitas para colorear las caras de una Banda de Moebius?</p> <p>3.- El cilindro de papel, ¿cuántas caras y bordes tiene? La Banda de Moebius, ¿cuántas caras y bordes tiene?</p> <p>4.- Cortando por la mitad. Dibuja en una cinta de papel una línea que la divida a lo largo, por la mitad. Si formas con ella un cilindro y lo cortas por la línea central, ¿cuántas superficies obtendrás? ¿Con cuántas caras y bordes? Intenta contestar a estas preguntas antes de hacer los cortes. Repite el proceso formando una Banda de Moebius en lugar de un cilindro. Responde las mismas preguntas. Si cortas de nuevo la superficie obtenida, ¿qué obtendrás?</p> <p>5.- Cortando a un tercio. Dibuja en una cinta de papel, por las dos caras, dos líneas que la dividan a lo largo, en tres partes iguales. Forma con ella una Banda de Moebius. Córta-la por las líneas que has dibujado hasta que llegues al punto de partida. Trata de contestar a las siguientes preguntas antes de cortar y después comprueba si has acertado. ¿Qué obtienes? ¿Has obtenido alguna Banda de Moebius? Compara las cintas atendiendo a su anchura y a su longitud.</p>		
En casa	<p>Actividad de investigación.</p> <p>Construye una superficie girando un extremo una vuelta completa, es decir, dando dos semigiros seguidos. ¿Qué obtienes? ¿Cuántos bordes y caras tiene? ¿Qué pasa cuando cortas por la mitad? ¿Y cuando cortas a un tercio?</p> <p>Construye ahora una superficie girando un extremo una vuelta y media (tres semigiros seguidos). Contesta a las mismas preguntas.</p> <p>¿Qué características (número de caras y bordes) tendrá una superficie con un número par de semigiros? ¿Y con un número impar?</p>		

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>LAS CRUCES DE MOEBIUS</b> <span style="float: right;">La banda de Moebius</span>	
Material	Hojas de papel tamaño A4 (usadas), tijeras y cinta adhesiva o pegamento.	
En clase	<p>¡ATENCIÓN! Mantén limpia la clase.</p> <p>1.- Corta, siguiendo las indicaciones del profesor, 4 cruces de Moebius. Toma una de las cruces y traza por una cara líneas que dividan cada aspa por la mitad, a lo largo. Une las aspas opuestas formando 2 cilindros.          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?          ¿Puedes predecir qué vas a obtener al cortar por las líneas trazadas a lo largo de toda la superficie?          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?</p> <p>2.- Toma otra de las cruces, traza por las dos caras líneas que dividan cada aspa a lo largo por la mitad. Une dos aspas opuestas formando un cilindro y las otras dos aspas formando una Banda de Moebius.          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?          ¿Puedes predecir qué vas a obtener al cortar por las líneas trazadas a lo largo de toda la superficie?          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?</p> <p>3.- Toma otra de las cruces, traza por las dos caras líneas que dividan cada aspa por la mitad a lo largo. Une las parejas de aspas opuestas formando dos Bandas de Moebius.          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?          ¿Puedes predecir qué vas a obtener al cortar por las líneas trazadas a lo largo de toda la superficie?          ¿Qué has obtenido? ¿Has obtenido lo mismo que tus compañeros?          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?</p> <p>4.- Traza una línea recta que vaya por la mitad de una de las aspas y su opuesta. Dibuja ahora dos líneas rectas que dividan en tres partes iguales las otras dos aspas (este dibujo debes hacerlo por las dos caras del papel).          Une las aspas que tienen un solo trazo, formando un cilindro y las que tienen dos, una Banda de Moebius. ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie? ¿Puedes predecir qué vas a obtener al cortar por las líneas trazadas a lo largo de toda la superficie (empezando por la Banda de Moebius)?          ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie?</p>	
En casa	<p>Actividad de investigación.</p> <p>¿A qué se debe que en el punto 3 de esta actividad se puedan obtener dos resultados distintos?          ¿Qué hay que hacer para obtener “dos corazones juntos”? ¿Y para obtener dos superficies separadas?</p>	



Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>LO IMPOSIBLE, POSIBLE</b>		La banda de Moebius
Material	Hojas de papel, tijeras y cinta adhesiva o pegamento.		
En clase	<p>¡ATENCIÓN!: Mantén limpia la clase.</p> <p>1.- El folio sorprendente. Con un folio y tijeras (sin usar pegamento) construye de una sola pieza la superficie que se te muestra en el dibujo.</p>  <p>2.- Para desenvolverse. Toma una tira de papel de dos o tres centímetros de ancha y unos 30 cm de larga y pega a la mesa un extremo con cinta adhesiva. Sujeta el extremo libre de la cinta y dale 4 medias vueltas en el sentido de las agujas del reloj. Si sujetas este extremo libre de la cinta con un dedo sobre la mesa, ¿podrías “deshacer los lazos de la cinta” sin levantar el dedo y la cinta de la mesa?</p>		
En casa	<p>3.- La banda con asa. Trata de construir ahora la figura siguiente (esta vez tienes que pegar dos bordes).</p> 		

<p>Hoja de trabajo del alumno</p>	<p><b>ACTIVIDAD 5:</b> <b>LAS CASAS Y LOS POZOS</b></p> <p style="text-align: right;">La banda de Moebius</p>	
<p>Material</p>	<p>Hoja de actividades.</p>	
<p>En clase</p>	<p>Debes unir mediante tuberías dos casas con dos pozos con las siguientes condiciones: cada casa debe recibir agua de los dos pozos y las tuberías no se deben cruzar.</p>	
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">    </div> <div style="text-align: center;">    </div> </div>	
	<p>Trata de resolverlo ahora en el caso de tres casas y tres pozos.</p>	
	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="text-align: center;">    </div> <div style="text-align: center;">    </div> <div style="text-align: center;">    </div> </div> </div>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 6:</b> <b>ARTE Y MATEMÁTICAS</b>	La banda de Moebius
Material	Cinta de vídeo Arte y Matemáticas, primera parte: La Banda de Moebius (duración: 25 minutos).	
En clase	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.- ¿Qué es una Banda de Moebius?</li> <li>2.- ¿Quién describió por primera vez las características de la Banda de Moebius?</li> <li>3.- La Banda de Moebius es una de las figuras básicas que se estudian en una de las ramas modernas de las Matemáticas, ¿cómo se llama dicha rama?.</li> <li>4.- En el vídeo se habla de una figura que recibe el nombre de “TORO”, ¿cuál es el nombre habitual con el que se conoce dicha figura?</li> <li>5.- Describe alguna de las obras que se han mostrado en el vídeo del artista holandés M. C. Escher.</li> <li>6.- Dibuja una Banda de Moebius falsa como la que se ha mostrado en el vídeo. ¿Por qué se dice que es una falsa banda de Moebius?</li> <li>7.- ¿A qué símbolo matemático se asemeja la Banda de Moebius?.</li> <li>8.- ¿Qué utilidad industrial, mostrada en el vídeo, tiene la Banda de Moebius?</li> <li>9.- ¿Qué se obtiene al cortar una Banda de Moebius por la mitad?</li> <li>10.- ¿Qué se obtiene al cortar por la mitad un cilindro con dos medias vueltas?</li> <li>11.- ¿Qué se obtiene al cortar una Banda de Moebius a un tercio del borde?</li> <li>12.- Haz un breve comentario dando tu opinión sobre el vídeo sobre la Banda de Moebius.</li> </ol>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 7:</b> <b>RESUMIENDO</b>	La banda de Moebius
Material	El cuaderno de clase.	
En clase	<p>(Para realizar este resumen los alumnos dispondrán de una clase y serán orientados por el profesor).</p> <p>Realizarás un resumen de la unidad Banda de Moebius debidamente presentado, y que recogerá todas las actividades realizadas en clase y prestando especial atención a los dibujos que muestren “aproximadamente” las bandas y figuras obtenidas en clase.</p> <p>Puedes incluir tus “investigaciones” sobre las bandas y las cruces.</p> <p>Tienes que incluir obligatoriamente información sobre Moebius y tu opinión sobre la unidad.</p>	
En casa	Completa el resumen de esta unidad, dedicando el tiempo conveniente y entregándola en la fecha fijada.	

HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 5:**

**GRAFOS EULERIANOS**

HOJA EN BLANCO

# GRAFOS EULERIANOS

## A. En esta unidad trabajaremos

- Búsqueda de estrategias ganadoras en el juego del drago.
- Aplicaciones sencillas de la teoría de grafos.
- Investigación sobre la vida y las obras de Euler.
- Distinción entre lo principal y lo accesorio en un problema.
- Importancia de las buenas notaciones y de las generalizaciones.
- Vocabulario matemático relacionado con la teoría de grafos.
- Aproximación experimental a la de teoría de grafos: conceptos de vértice, arco, red, paridad, grafo unicursal.
- Teorema de Euler. Aplicarlo para determinar si un grafo es o no unicursal.
- Resumen de las actividades realizadas.

## B. Material necesario

- Fotocopias de las hojas para los alumnos (el lector puede encontrarlas al final de esta unidad).
- Enciclopedia o material de consulta.

## C. Actividades para los alumnos

- Actividad nº 1 Introducción. Juego del drago.
- Actividad nº 2 Euler y los puentes de Königsberg.
- Actividad nº 3 Teorema de Euler.
- Actividad nº 4 Los puentes de Leningrado (*actividad de refuerzo*).
- Actividad nº 5 ¿Un grafo imposible? (*actividad de profundización*).
- Actividad nº 6 Resumiendo.

## D. Actividades de evaluación

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso se proponen las siguientes actividades específicas de evaluación:

- Investigaciones sobre el juego del drago.
- Investigaciones sobre grafos imposibles.
- Resumen de la unidad didáctica.

## E. Guía del profesor

### OBSERVACIONES PREVIAS

En esta unidad, probablemente no sea muy necesario entregar hojas de trabajo a los alumnos. El profesor podrá conducir las investigaciones dando las ayudas oportunas y utilizando la pizarra.

A pesar de todo, hemos organizado el guión de la unidad en forma de hojas para el alumno que, como siempre, pueden encontrarse al final del capítulo. El lector podrá utilizarlas como esquema de lo que será su trabajo en el aula o podrá dárselas a los alumnos.

### ACTIVIDAD 1. INTRODUCCIÓN. EL JUEGO DEL DRAGO

- Para comenzar, propondremos el siguiente juego:

Se distribuirán los alumnos por parejas y se jugará por turnos. Dibujaremos  $n$  puntos sobre una hoja de papel (conviene empezar con 2 o 3) y empezaremos a jugar.

El primer jugador trazará una línea que una un punto con otro o consigo mismo y luego marcará sobre ella, en cualquier lugar, un nuevo punto. El segundo jugador hará lo mismo observando las siguientes restricciones:

- 1.- La línea puede tener cualquier forma pero no podrá cortar ninguna otra, ni a sí misma. Tampoco podrá pasar por un punto dibujado previamente.
- 2.- De ningún punto podrán salir más de tres líneas. Si en alguno confluyen ya tres líneas, ese punto diremos que está “muerto”.

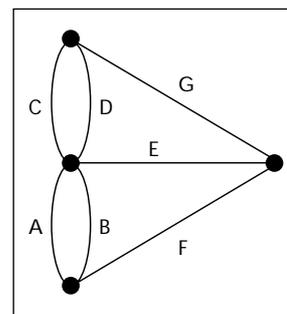
Los jugadores trazan líneas por turno. Gana la última persona que puede jugar.

- Comenzaremos dibujando 2 puntos y dejaremos que jueguen 4 o 5 partidas. Les pediremos que piensen en posibles estrategias ganadoras.
- Repetiremos lo anterior dibujando, ahora, 3 puntos iniciales.
- Los alumnos empiezan a trabajar con grafos de una forma entretenida al mismo tiempo que piensan en posibles estrategias ganadoras.

- Se les puede proponer para casa que investiguen cuál será el número máximo y mínimo de jugadas si se comienza con dos puntos. También lo pensarán para tres y cuatro puntos e intentarán generalizar el resultado para  $n$ . Una partida de drago puede durar como mínimo  $2n$  movimientos y como máximo  $3n-1$ .

## ACTIVIDAD 2. EULER Y LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

- Después de haber trabajado con el juego del drago, daremos algunos datos de interés sobre Euler y nos centraremos sobre el problema de la ciudad prusiana: ¿cómo dar un paseo que permita cruzar por los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo? Dejaremos el tiempo suficiente para que los alumnos ensayen diversas posibilidades de hacer el recorrido.



- El problema se puede esquematizar tal y como se observa en la figura. Esta posibilidad la comentaremos en la siguiente clase.
- Se les informa sobre el trabajo de búsqueda bibliográfica, que deben realizar en casa. Los datos que obtengan los utilizarán para elaborar la actividad resumen.
- Un problema de ingenio que utiliza los mismos elementos pero que no es una cuestión propiamente de grafos es el siguiente: ¿cómo unir nueve puntos distribuidos en tres filas y tres columnas con sólo cuatro rectas y sin levantar el lápiz del papel?

## ACTIVIDAD 3. EL TEOREMA DE EULER

- Comenzaremos la clase preguntando a los alumnos que nos cuenten otros datos obtenidos sobre Euler y sobre la situación geográfica de la ciudad prusiana.
- Sondaremos a la clase para conocer qué soluciones proponen sobre el famoso paseo. Seguramente los alumnos habrán llegado a la conclusión de que es imposible. Llegado este punto, insistiremos en lo difícil que es probar que un problema no tiene solución.
- Propondremos la simplificación del problema olvidándonos de aspectos no relevantes como el tamaño de las islas, la anchura de los puentes o la forma de los elementos que intervienen. Lo importante son los puentes a cruzar y los distintos lugares que debemos visitar (dos islas y dos orillas).
- Seguidamente dibujaremos el esquema que resume la situación y estableceremos el parecido con el típico juego que nos anima a dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel (grafo unicursal). Dibujos de este tipo aparecen en el apartado número tres de esta actividad. A la hora de esquematizar el plano de la ciudad, a los alumnos les cuesta trabajo identificar qué son los puentes y qué son las islas y las márgenes del río. No se debe continuar hasta que esto quede claro.
- Deben ponerse varios ejemplos de grafos para que vean los que son y los que no son unicursales.

- Con nuestras preguntas iremos centrando la cuestión en torno al aspecto crucial: el número de caminos que llegan a cada punto.
  - ¿Por qué hay vértices en los que al llegar a ellos siempre encontramos salida y en otros no?
  - ¿Qué tiene de especial el vértice donde se acaba el recorrido? ¿Siempre es el vértice por el que lo comenzamos?
  - ¿Dependerá del número de vértices la solución del problema?
- Poco a poco iremos enunciando las conclusiones a las que Euler llegó:
  - 1.- Si un grafo está compuesto de vértices sólo pares, se puede recorrer en una sola pasada, partiendo de un determinado vértice y regresando al mismo.
  - 2.- Si un grafo contiene sólo dos vértices impares, también puede recorrerse en una sola pasada, pero no volveremos al punto de partida.
  - 3.- Si un grafo contiene un número de vértices impares superior a 2, entonces no se puede recorrer de una sola pasada.
- Llamaremos la atención sobre la forma tan matemática de abordar este problema que tuvo Euler: no sólo resolvió éste, sino que dio un resultado que permitía analizar cualquier grafo, saber si se podía recorrer de un solo trazo y en el caso de poderlo hacer, desde dónde había que empezar.
- Podemos interpretar el problema de las tres casas y los tres pozos como un problema de grafos que tiene solución en la Banda de Moebius.

#### **ACTIVIDAD 4. LOS PUENTES DE LENINGRADO**

- Esta actividad se les propondrá a aquellos alumnos que han encontrado dificultades para entender y completar las actividades anteriores.
- En el apartado de los puentes de Leningrado, empezaremos por hacer un grafo que represente la situación de las islas, las márgenes y los puentes. Tienen que prestar atención a la paridad de cada vértice y aplicar el teorema de Euler para concluir que el paseo se puede hacer (hay sólo dos vértices impares).

#### **ACTIVIDAD 5. ¿UN GRAFO IMPOSIBLE?**

- Este problema será un trabajo voluntario. El alumno puede abordarlo partiendo de un grafo con todos los vértices de orden par. Intentará añadir un único vértice impar, unido por un camino a cualquier vértice del grafo. Pero cada camino que se añade cambia la paridad de dos vértices o (si empieza y termina en el mismo vértice) no cambia la paridad de ningún vértice.

Sumando la paridad de todos los vértices de un grafo tiene que resultar un número par ya que será el doble del número de caminos (cada camino tiene sólo dos extremos).

Suponiendo que haya un número impar de vértices impares, al hacer el recuento de los extremos de los caminos llegamos a un número impar, situación imposible. Es, por tanto, imposible dibujar un grafo con tal condición.

## ACTIVIDAD 6. RESUMIENDO

- Para realizar este resumen los alumnos dispondrán de una clase y serán orientados por el profesor.
- Tiene que quedar claro en el resumen que el alumno ha entendido el teorema sobre grafos eulerianos y que sabe aplicarlo.
- Las explicaciones dadas por los alumnos a las preguntas clave que hay en la unidad, permitirán valorar el nivel de adquisición de los contenidos mínimos.
- Incluimos parte del resumen que en su día elaboró un alumno de tercero de Secundaria. Merece aparecer publicado.

*Volví a estornudar. Me encontraba sentado en una vieja mesa de madera, entre cientos de libros polvorientos; y eso mi alergia no lo soportaba.*

*Mi trabajo consistía en reunir todas las olvidadas obras de un innovador matemático, L. Euler. Aquel era un trabajo pesado, aburrido, monótono...*

*Pero merecía la pena.*

*Por desquitarme del trabajo, empecé a hojear los libros que tenía apilados sobre la mesa. A mi parecer, todos eran iguales, aparentemente muy aburridos. Cogí el último. Éste me parecía distinto. No tenía aquel mismo aire serio que los otros. Lo abrí. A primera vista, lo que más me llamó la atención fue un rudimentario mapa.*

*Acerqué más la vela y su tenue luz alumbró con fuerza mi rostro. Observé detenidamente el mapa, deseando encontrar una "X". "El problema de los puentes de Königsberg", leí. Impulsado por la más mera curiosidad, seguí leyendo.*

*"El problema, que según entiendo es muy bien conocido, se enuncia así:*

*En la ciudad de Königsberg, hay dos islas rodeadas por las aguas del río Preguel. Existen siete puentes que cruzan las aguas del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo, de tal modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez. Se me ha informado, que mientras unos lo dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente".*

*Saqué de mi bolsillo la libreta y la estilográfica, y me puse a resolverlo. Por más que lo intentaba, nunca lo conseguía. Al cabo de un rato, me tiraba de los pelos. Vencido, volví a la lectura.*

*"Pero yo he dado con la respuesta y el porqué".*

*Me quedé sorprendido.*

*"El problema de los puentes de Königsberg no tiene solución".*

*"Lo sabía", pensé. La confianza volvió a mí. A continuación había varios dibujos, y uno de ellos, me recordaba a un juego, que me parece que se llama "el juego de la col".*

*El texto seguía.*

*“Dados dos o más puntos en un plano, y si los unen mediante arcos de curvas o segmentos, obtendremos una figura llamada grafo. Los puntos dados se llaman vértices y los segmentos que los unen se llaman lados.*

*Se llama orden de un grafo, al número de vértices que tiene. Y orden de un vértice, al número de lados que salen de éste. En un grafo puede haber vértices de orden par, impar, o de ambos, aunque en este último caso, el número de vértices de orden impar, es siempre un número par.*

*Un grafo es unicursal, cuando se puede dibujar sin levantar el útil de escribir, ni recorrer dos veces la misma línea.*

*Un grafo sólo puede ser unicursal si:*

*1º.- Todos sus vértices son de orden par. Entonces se termina en el mismo vértice que donde se empieza.*

*2º.- Si tiene dos vértices de orden impar. El vértice de partida y llegada respectivamente.*

*3º.- Si tiene más de dos vértices de orden impar, éste no es unicursal”.*

*Para comprobarlo, me dispuse a realizar un mapa similar al anterior.*

*Euler tenía razón. Como me encontraba dentro del tema empecé a buscar información sobre este tema tan original, que más que Matemáticas parece un juego pensado para niños, pero fue inútil, no encontraba nada.*

*Era de noche. Volví a mi casa.*

*Pasaron años o quizás décadas, y quién sabe cómo y por qué me volví a topar con el nombre de Euler. Por alguna causa lo busqué en La Enciclopedia; y allí venía, como uno más.*

*Me sentí orgulloso de mí mismo. Aunque mi nombre no apareciese, había hecho historia.*

## **ACTIVIDAD 7. ¿QUÉ SE HA APRENDIDO?**

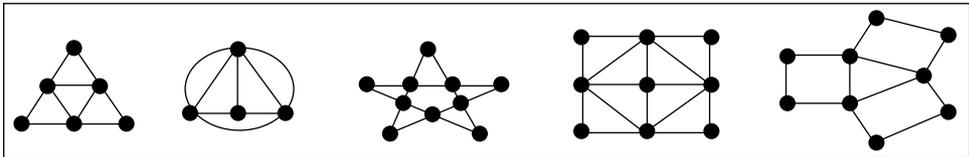
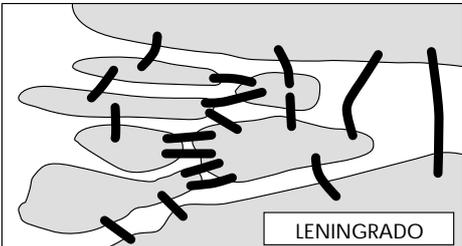
Como ya hemos dicho en otras unidades, es interesante dedicar algo de tiempo a la confección de un esquema con todo lo aprendido en la unidad.

## **G. Hojas de trabajo para los alumnos**

A continuación se desarrollan las actividades en hojas de trabajo para los alumnos, con excepción de la primera que, puede ser dirigida directamente por el profesor.

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 2:</b> <b>EULER Y LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG</b> <p style="text-align: right;">Grafos Eulerianos</p>
Material	Enciclopedia y atlas.
En clase	<p>Una de las ramas importantes de la matemática actual, la Topología, nació con el siguiente acertijo que el gran Euler (matemático y astrónomo suizo) describió y resolvió en uno de sus artículos (1735):</p> <p>“El Problema que, según entiendo, es muy bien conocido, se enuncia así: En la ciudad de Königsberg (ahora Kaliningrado), en Prusia, hay dos islas rodeadas por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes, A, B, C, D, E, F y G, que cruzan los dos brazos del río (ver figura). La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez. Se me ha informado que mientras unos lo dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente”.</p> <div data-bbox="549 748 1158 1133" style="text-align: center;"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.- ¿Se puede realizar tal paseo?        En caso afirmativo. ¿Dónde hay que empezar? ¿Y cuál es el recorrido?        En caso negativo. ¿Por qué no es posible? ¿Qué obras deberían realizar en la ciudad para poder realizar dicho paseo?</li> <li>2.- ¿Qué hay en este problema, de planteamiento aparentemente tan sencillo, para que un genio como Euler le dedicará su valioso tiempo?</li> </ol>
En casa	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.- Busca en un atlas información sobre la ciudad de Königsberg o Kaliningrado. Anota en tu cuaderno los datos que consideres de interés.</li> <li>2.- Busca en una enciclopedia información sobre el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Toma nota de la información que te parezca de interés (cuándo vivió, donde vivió, qué estudió, dónde trabajó, obras más importantes, aportaciones a la ciencia, cuáles fueron sus maestros más destacados, cuáles sus discípulos, curiosidades de su vida, etc.).</li> </ol>

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>EL TEOREMA DE EULER</b>	Grafos Eulerianos
En clase	<p>Después de pensar sobre el problema de los puentes de Königsberg y si todavía no has dado con la solución completa, te vamos a dar algunas pistas.</p> <p>Ayuda:                  ¿Por dónde se puede empezar a atacar el problema? Piensa y observa. Hay muchos aspectos que son totalmente irrelevantes, que no importan nada. Por ejemplo, que las islas sean más grandes o más pequeñas, que los puentes sean más estrechos o más anchos, rectos o curvos, más largos o más cortos. Lo esencial es el esquema, lo que los puentes unen y cómo estas uniones se comportan entre sí.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Se puede realizar el dibujo que ves de un solo trazo sin repetir ninguna línea?                      Seguro que esto te sugiere algún recuerdo de tu infancia.</li> <li>¿Cómo era aquel dibujo que se podía hacer de un solo trazo? ¿Por dónde había que empezar?</li> <li>¿Sabrías repetir las siguientes figuras sin levantar el lápiz del papel y sin repetir dos veces una misma línea? ¿Sabrías hacer esto mismo saliendo de algún punto y volviendo al mismo punto?</li> </ol> <div data-bbox="395 1016 1385 1211" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Cuándo se puede hacer un dibujo con un solo trazo y cuándo no? Y si se puede, ¿cuál es la receta?                      Teoría elemental de grafos:                      Dados dos o más puntos de un mismo plano, si los enlazamos mediante arcos de curva o segmentos, obtendremos una figura llamada grafo o red. Los puntos dados se denominan vértices o nudos y las líneas que los unen, y que pueden tener cualquier forma, se llaman lados o aristas. Una red o grafo se llama euleriano (o unicursal) cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel ni recorrer dos veces una misma línea. La primera de las redes del ejercicio 3, es euleriana, pero la segunda no: es necesario levantar una vez el lápiz de la figura. El número de vértices se llama orden del grafo. Se llama orden de un vértice al número de lados que llegan o salen de él. En un grafo puede haber vértices sólo de orden impar, sólo de orden par o de ambos tipos a la vez.                      Ayuda: Estudia cuántos vértices son pares y cuántos impares en cada uno de los grafos.</li> <li>Cuando llegas a un vértice par, al recorrer una red, ¿habrá siempre salida?                      ¿Ocurre lo mismo en los vértices impares?                      Relaciona estos datos con el que un grafo sea o no unicursal. Pon nuevos ejemplos.                      ¿Sacas alguna conclusión? ¿Qué condiciones debe cumplir un grafo para ser unicursal?</li> <li>¿Por qué no se podía dar el famoso paseo atravesando todos los puentes de Königsberg?</li> </ol>	<div data-bbox="1059 371 1426 600" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="text-align: center; font-size: small;">KÖNIGSBERG</p> </div> <div data-bbox="1091 629 1394 913" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> </div>
En casa	<p>Completa el trabajo de clase.</p> <p>Inventate grafos que no se puedan realizar de un solo trazo.</p> <p>¿Qué actitudes matemáticas podemos resaltar en el comportamiento de Euler ante este problema?</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>LOS PUENTES DE LENINGRADO</b>	Grafos Eulerianos
Material	Enciclopedia y atlas.	
En clase	<p>1.- Analiza, utilizando el teorema de Euler, cuáles de estos grafos son eulerianos.</p>  <p>2.- Intenta pasar por los 17 puentes que unen entre sí las partes del territorio de Leningrado, sin recorrer ninguno de ellos dos veces.</p>  <p>En el caso de poderse dar tal paseo, indica por dónde hay que empezar y dónde hay que terminar.</p>	
En casa	<p>Completa el trabajo de clase.</p> <p>Busca información sobre la ciudad de Leningrado, ¿cómo se llama actualmente?</p> <p>Anota en tu cuaderno los datos que consideres de interés.</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 5:</b> <b>¿UN GRAFO IMPOSIBLE?</b>	Grafos Eulerianos
En casa	<p>Busca un ejemplo de grafo con un número impar de vértices impares.</p> <p>Si después de intentarlo no has encontrado ninguno, intenta explicar por qué es imposible.</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 6:</b> <b>RESUMEN</b>	Grafos Eulerianos
Material	Cuaderno de clase.	
En clase	<p>Realizarás un resumen de la unidad didáctica grafos eulerianos debidamente presentado, y que recogerá todas las actividades realizadas en clase, prestando especial atención a la justificación del teorema de Euler.</p> <p>Puedes incluir tus “investigaciones” sobre grafos imposibles.</p> <p>Tienes que incluir obligatoriamente información sobre Euler y tu opinión sobre la unidad didáctica.</p>	
En casa	<p>Completa el resumen de esta unidad didáctica, dedicando el tiempo conveniente y entregándola en la fecha fijada.</p>	

HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 6:**

**CONSTRUCCIÓN DE UN DEPÓSITO**

HOJA EN BLANCO

# CONSTRUCCIÓN DE UN DEPÓSITO

## A. En esta unidad trabajaremos

- Aplicación de técnicas matemáticas a un problema práctico.
- Optimización. Ejemplos curiosos.
- Organización de datos. Importancia de una buena notación.
- Uso de tablas y gráficas para resumir información y tomar decisiones.
- Aproximación experimental a contenidos de análisis matemático: crecimiento, decrecimiento, máximo, mínimo, continuidad, tendencias, tasa de variación media, aproximación de raíces.
- Fórmulas y unidades de longitud, superficie y volumen.
- Modelos a escala.
- Números aproximados. Errores y redondeo.

## B. Material necesario

- Papel cuadriculado y milimetrado, regla, tijeras, cinta adhesiva, compás, calculadora (preferiblemente científica).
- Hoja de cálculo (para posibles ampliaciones).
- Diccionario.

## C. Actividades para los alumnos

- Actividad nº 1 Planteamiento y construcción de modelos a escala.
- Actividad nº 2 Tablas y gráficas.
- Actividad nº 3 Depósito óptimo.
- Actividad nº 4 Optimizando el precio del depósito (*actividad de profundización*).
- Actividad nº 5 Fórmulas algebraicas (*actividad de profundización*).
- Actividad nº 6 Partiendo de un rectángulo (*actividad de refuerzo*).
- Actividad nº 7 Depósito cilíndrico (*actividad de profundización*).
- Actividad nº 8 Resumiendo.

## D. Actividades de evaluación

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso se proponen las siguientes actividades específicas de evaluación:

- Resumen de la unidad.
- Actividad de recuperación: partiendo de un rectángulo.

## E. Guía del profesor

### OBSERVACIONES PREVIAS

El objetivo de esta unidad es la construcción de un depósito para agua de volumen máximo, partiendo de una superficie fija de material. La actividad puede presentarse de múltiples formas, por ejemplo: distribuimos a los alumnos en grupos de tres o cuatro y los suponemos miembros de un gabinete técnico que debe realizar un proyecto para construir un depósito (esta forma de trabajar es habitual en la asignatura de Tecnología). Los alumnos analizan el problema, hacen los cálculos necesarios y posteriormente elaboran un documento resumen que sería el proyecto final.

En el desarrollo que hacemos a continuación, no utilizamos expresiones algebraicas (sólo en la actividad de ampliación) ni, por supuesto, derivadas.

El profesor puede conducir el proceso utilizando únicamente la pizarra y sus explicaciones ya que las hojas de trabajo no son imprescindibles en esta unidad. De todas formas, las incluimos al final del capítulo pues pudieran resultar útiles para facilitar el trabajo autónomo de los grupos cuando nos encontramos con ritmos de aprendizaje muy dispares.

Varios apartados de esta unidad se pueden trabajar con una hoja de cálculo, utilizando sus posibilidades gráficas.

### ACTIVIDAD 1. PLANTEAMIENTO Y CONSTRUCCIÓN DE MODELOS A ESCALA

- Podemos introducir la unidad presentándola como un ejemplo de utilidad de las Matemáticas.
- Comenzaremos comentando algunos casos curiosos de optimización como la forma hexagonal de las celdillas en los panales de abejas: máxima capacidad de almacenamiento con el mínimo consumo de cera. Las tapas de las alcantarillas son otro ejemplo de forma óptima para impedir que puedan caer dentro del agujero. O las dimensiones normalizadas de los envases de cartón “Tetrabrik”. Podemos pedirles que investiguen en sus casas sobre alguno de estos ejemplos.
- Para aclarar la idea de optimización, es útil recurrir a la construcción del rectángulo de mayor área partiendo de un trozo de cuerda de longitud fija; el perímetro será siempre el mismo y la superficie variará.

- Tras ello propondremos nuestro problema: partiendo de una plancha metálica cuadrada, debemos construir un depósito (caja sin tapa) recortando un cuadrado en cada una de las esquinas y plegando la chapa.
- Los alumnos construirán distintos modelos de depósito a escala. Para obtenerlos, cortarán en las esquinas de la superficie inicial, cuadrados de 1, 2, 3,... centímetros de lado. Es importante hacerles pensar sobre el significado de los casos límite: 0 cm de altura y 10 cm de altura.
- Sobre los modelos y a simple vista, deben elegir el depósito de mayor volumen. Posteriormente medirán las dimensiones de los modelos y calcularán sus volúmenes.

## ACTIVIDAD 2. TABLAS Y GRÁFICAS

- Pretendemos obtener mediante cálculos matemáticos sencillos, todos los datos que nos permitan tomar una decisión razonada sobre el depósito óptimo. Insistiremos en la importancia de ordenar en tablas adecuadas los datos que vayamos obteniendo.
- Comenzaremos construyendo una tabla que recoja, para cada uno de los depósitos construidos, los siguientes datos: la longitud del lado del cuadrado recortado, las dimensiones del depósito obtenido, el área de la base, el área de las paredes laterales y la cantidad total de material utilizado. Este último dato se puede calcular restando a la superficie del cuadrado de partida el área de los cuadrados recortados en las esquinas.
- A continuación representaremos en una gráfica la cantidad de material utilizado en función del lado de los cuadrados cortados en las esquinas. Al dibujarla, prestaremos especial atención a las escalas y etiquetas de los ejes pues serán necesarias escalas distintas en cada uno de ellos. Para interpretar la gráfica serán necesarios conocimientos previos sobre crecimiento, decrecimiento y tendencias.
- Repetiremos el proceso para el volumen del depósito. Primero ordenaremos en una tabla los valores de la altura, área de la base y volumen de cada uno de los depósitos construidos en la primera parte de la unidad. Después, representaremos en una gráfica el volumen de cada uno de ellos, en función de las dimensiones de los cuadrados recortados.
- Para decidir cuáles son las medidas exactas del depósito óptimo necesitaremos afinar el procedimiento. Las gráficas elaboradas nos indican que la mejor relación volumen/material empleado se consigue cuando cortamos en las esquinas cuadrados de lado comprendido entre tres y cuatro centímetros. Si queremos precisar más, deberemos repetir el proceso, confeccionando modelos de milímetro en milímetro. Cortando en las esquinas cuadrados de 3,33 cm de lado se obtiene un volumen máximo de  $592,592 \text{ cm}^3$ .

## ACTIVIDAD 3. DEPÓSITO ÓPTIMO

- Utilizaremos los modelos construidos para calcular, trabajando con escalas, las medidas reales del depósito que estamos buscando.

Insistiremos en la relación existente entre la razón de semejanza para longitudes, para superficies y para volúmenes.

También aparece de nuevo la dificultad de trabajar con números aproximados.

- Cortando en las esquinas cuadrados de 33,3 cm de lado, se utilizan 3,55644 metros cuadrados de metal. Si suponemos que el metro cuadrado cuesta 10.000 ptas., el precio del material empleado sería de 35.564 ptas. La capacidad máxima obtenida es de 0,592592 metros cúbicos o 592,592 litros.

#### **ACTIVIDAD 4. OPTIMIZANDO EL PRECIO DEL DEPÓSITO**

- Esta es una actividad de profundización que se propondrá o no dependiendo de las características de los alumnos.
- Se trata de resolver ahora otro aspecto del problema. Hemos hallado las dimensiones del depósito que, con las condiciones impuestas, tiene mayor capacidad. Se ha llegado a la conclusión siguiente: tener un depósito con una capacidad de 592,592 litros cuesta 35.564 pesetas, por lo tanto el precio del depósito por litro almacenado es de 60,015 Ptas. La pregunta que nos surge ahora es la siguiente: ¿cuáles deben ser las dimensiones del depósito para que el precio por litro sea lo más económico posible?
- Un primer paso para buscar la solución a este apartado, consistirá en comparar las gráficas obtenidas en las actividades anteriores y localizar el intervalo en el que el volumen esté muy próximo al máximo y el área sea la menor posible. Se puede observar que el valor buscado está en torno al 4. Por tanteo, el alumno deberá localizar un valor aproximado.  
Tomando como altura del depósito a escala 4,14 centímetros se obtiene una relación en el depósito real de 58,28 pesetas por litro de capacidad.
- Este apartado se simplifica mucho si disponemos de las expresiones algebraicas y de una hoja de cálculo.

#### **ACTIVIDAD 5. FÓRMULAS ALGEBRAICAS**

- En esta actividad obtendremos expresiones algebraicas que simplifiquen algunos de los cálculos realizados en actividades anteriores.
- El profesor dará mayor o menor número de pistas dependiendo de la experiencia que sobre el uso de expresiones algebraicas, tengan los alumnos. Suponiendo que, en general, tendrán un escaso dominio de cálculo formal, se puede hacer lo siguiente:
  - El alumno deberá repasar las operaciones que ha hecho en la actividad 2 para obtener las áreas y volúmenes con números concretos, y las reproducirá sustituyendo el número que representa la longitud del lado del cuadrado a recortar, por una letra.
  - Primero iremos trasladando al lenguaje algebraico las operaciones expuestas verbalmente poniendo especial cuidado en las prioridades y paréntesis.
  - Después simplificaremos las expresiones obtenidas hasta llegar a las fórmulas buscadas.

### **ACTIVIDAD 6. PARTIENDO DE UN RECTÁNGULO**

- Podemos utilizarla como refuerzo para aquellos alumnos que hayan tenido dificultades con la actividad número 2.  
Puede servir también como actividad de evaluación.
- Supondremos que la superficie de metal es ahora rectangular y que debemos construir otro depósito. El procedimiento a seguir será el mismo que desarrollamos en la actividad 2.
- El volumen máximo aproximado es 1,056 metros cúbicos y se obtiene recortando de cada esquina un cuadrado de 39,2 cm. de lado.

### **ACTIVIDAD 7. DEPÓSITO CILÍNDRICO**

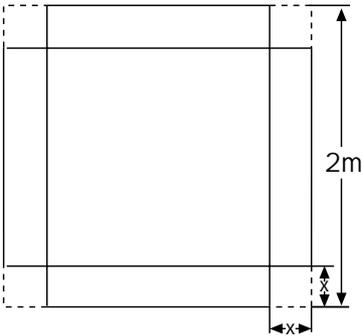
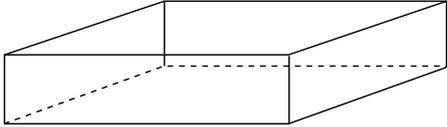
- El objetivo, ahora, es construir un depósito cilíndrico sin tapa, partiendo de una plancha cuadrada.
- Intentamos que el alumno observe las complicaciones que surgen al cambiar la forma del depósito y que proponga posibles soluciones.  
No esperamos que lo resuelva completamente.

### **ACTIVIDAD 8. RESUMIENDO**

El resumen de esta unidad puede hacerse en grupo y elaborarse como si fuera un proyecto realizado por un gabinete de ingeniería dando respuesta a un encargo de un cliente.

## **F. Hojas de trabajo para los alumnos**

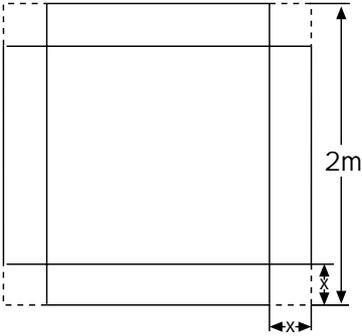
A continuación se presentan las hojas con todas las actividades para los alumnos.

<p>Hoja de trabajo del alumno</p>	<p style="text-align: right;">Construcción de un depósito</p> <p><b>ACTIVIDAD 1:</b> <b>PLANTEAMIENTO Y CONSTRUCCIÓN DE MODELOS A ESCALA</b></p>
<p>Material</p>	<p>Papel cuadriculado, regla, tijeras, cinta adhesiva, diccionario.</p>
<p>En clase</p>	<p>Una pieza cuadrada de metal (2x2 m) debe ser convertida en un depósito de agua sin tapa superior. Para ello cortaremos cuadrados en sus cuatro esquinas y levantaremos los cuatro rectángulos resultantes que formarán las paredes laterales del depósito.</p> <p>Queremos saber las dimensiones (largo, ancho y alto) del depósito que tenga mayor capacidad.</p> <p>Vamos a resolver este problema construyendo modelos a escala y tomando decisiones sobre los datos que esta experiencia nos aporte.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>1.- Construcción de los modelos a escala (1:10).          Recorta en papel cuadriculado un cuadrado de 20x20 cm.          Recorta en las esquinas un cuadrado de 1 cm de lado y forma el depósito.          Repite este proceso, recortando a cada paso un cuadrado con 1 cm más de arista.          ¿Cuáles son los cuadrados más grandes que se pueden cortar en las esquinas?</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>2.- De todos los depósitos que has construido y sin hacer cálculos matemáticos, ¿cuál crees que es el depósito de mayor volumen?          Calcula la capacidad de cada uno de los depósitos. Recuerda que el volumen de esta figura (ORTOEDRO, PRISMA DE BASE CUADRADA) es igual al área de la base por la altura del depósito.</p>

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 2:</b> <b>TABLAS Y GRÁFICAS</b> <span style="float: right;">Construcción de un depósito</span>	
Material	Calculadora, papel milimetrado y regla.	
En clase	<p>1.- Construye una tabla en la que se recoja la siguiente información (para cada uno de los depósitos):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Número de centímetros del lado del cuadrado recortado.</li> <li>- Dimensiones del depósito: largo, ancho y alto (en cm).</li> <li>- Área de la base (en <math>\text{cm}^2</math>).</li> <li>- Área de las cuatro caras laterales (en <math>\text{cm}^2</math>).</li> <li>- Cantidad de material utilizado en su construcción (en <math>\text{cm}^2</math>).</li> </ul> <p>¿De qué formas se puede calcular el área total del depósito?</p> <p>2.- Dibuja (a ser posible en papel milimetrado) una gráfica que represente la variación de la cantidad de material utilizado en la construcción del depósito en función de los centímetros del lado de los cuadrados recortados en las esquinas. Elige las unidades que utilizarás en cada uno de los ejes (no tienen por qué ser iguales). Describe por escrito las características más significativas de esa gráfica.</p> <p>3.- Volumen: Construye una tabla en la que se recoja la siguiente información (para cada uno de los depósitos):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Número de centímetros del lado del cuadrado recortado.</li> <li>- Altura del depósito (en cm).</li> <li>- Área de la base (en <math>\text{cm}^2</math>).</li> <li>- Volumen del depósito (en <math>\text{cm}^3</math>).</li> </ul> <p>4.- Dibuja (a ser posible en papel milimetrado) una gráfica que represente la variación del volumen del depósito en función de los centímetros del lado de los cuadrados recortados en las esquinas. Elige de nuevo las unidades adecuadas para cada eje. Describe por escrito las características más significativas de esta gráfica.</p> <p>5.- Utiliza esta última gráfica para hallar el tamaño con el que se deben cortar las esquinas para que el volumen resultante sea máximo. ¿Estás seguro que has encontrado el valor que nos da el volumen máximo? Observando la gráfica parece que el máximo se alcanzará para valores comprendidos entre 3 y 4 centímetros. Precizando ahora de milímetro en milímetro, calcula el valor para el que se obtiene el volumen máximo.</p>	
En casa	Completa el trabajo de clase y recoge en una tabla la información obtenida.	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>DEPÓSITO ÓPTIMO</b>	Construcción de un depósito
Material	Calculadora, papel milimetrado y regla.	
En clase	<p>1.- Utilizando los resultados de las actividades anteriores y haciendo uso de la escala, calcula las dimensiones del depósito óptimo real.                      ¿Cuántas veces es mayor la altura del depósito real que la del modelo a escala?                      ¿Las dimensiones serán realmente las del depósito óptimo o estás cometiendo algún error?                      ¿Cuándo se puede considerar que el error es insignificante?</p> <p>2.- Calcula la superficie lateral, en metros cuadrados, que tendrá el depósito. ¿Cuántas veces es mayor el área real que la del modelo a escala? ¿Qué relación hay con la escala?</p> <p>3.- Calcula la capacidad, en metros cúbicos y en litros, que tendrá el depósito. ¿Cuántas veces es mayor el volumen real que el del modelo a escala? ¿Qué relación hay con la escala?</p> <p>4.- Suponiendo que el precio del metro cuadrado del metal con el que se construye el depósito es de 10.000 Ptas. ¿Cuánto costará el material para construir el depósito de mayor volumen?</p>	
En casa	Completa el trabajo de clase.	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>OPTIMIZANDO EL PRECIO DEL DEPÓSITO</b>	Construcción de un depósito
Material	Calculadora.	
En casa	Suponiendo que el precio del metro cuadrado del metal con el que se construye el depósito es de 10.000 Ptas. ¿Qué dimensiones tendrá el depósito que presente la mejor relación entre el precio del depósito y su volumen (es decir, el menor coste por litro almacenado)?	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 5:</b> <b>FÓRMULAS ALGEBRAICAS</b>	Construcción de un depósito
En clase	 <p>Intenta hallar una fórmula algebraica para obtener el área total del depósito en función de <math>x</math>, siendo <math>x</math> el lado de los cuadrados que se cortan en las esquinas.</p>	
En casa	Intenta hallar una fórmula algebraica para obtener el volumen del depósito en función de $x$ , siendo $x$ el lado de los cuadrados que se cortan en las esquinas.	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 6:</b> <b>PARTIENDO DE UN RECTÁNGULO</b>	Construcción de un depósito					
Material	Calculadora, papel milimetrado y regla.						
En casa	<p>Una pieza rectangular de metal (3 x 2 m) debe ser convertida en un depósito de agua sin tapa superior, cortando cuadrados en sus cuatro esquinas y levantando los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito.</p> <p>Se trata de calcular las dimensiones (largo, ancho y alto) del depósito para que utilizando el menor material posible su capacidad sea máxima.</p> <p>Resuelve este problema siguiendo los pasos de las actividades trabajadas: completa la tabla siguiente, haz la gráfica correspondiente a la variación del volumen en función de la longitud del lado del cuadrado cortado en las esquinas y obtén las dimensiones precisando al centímetro.</p>						
	Longitud del lado del cuadrado	Alto	Largo	Ancho	Área de la base	Superficie total	Volumen del depósito
	0 cm						
	10 cm						
	20 cm						
	30 cm						
	40 cm						
	50 cm						
	60 cm						
	70 cm						
	80 cm						
	90 cm						
100 cm							

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 7:</b> <b>DEPÓSITO CILÍNDRICO</b>	Construcción de un depósito
Material	Calculadora, papel milimetrado, regla y compás.	
En casa	<p>Problema de investigación.</p> <p>A partir de una pieza cuadrada de metal (1x1 m.) se debe construir un depósito cilíndrico sin tapa superior.</p> <p>Se trata de calcular las dimensiones (radio de la base y altura) del depósito para que utilizando el menor material posible su capacidad sea máxima.</p> <p>Investiga posibles soluciones a este problema.</p> <p>Anota todas las dificultades debidas a la nueva forma del depósito.</p> <p>Simplifica el problema imponiendo la condición que la altura del depósito sea igual a su diámetro.</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 8:</b> <b>RESUMIENDO</b>	Construcción de un depósito
Material	Cuaderno de clase, calculadora, papel milimetrado y regla.	
En clase	Cada alumno, o grupo, realizará un resumen de la unidad en el que se tratarán, como mínimo, los siguientes apartados: <ul style="list-style-type: none"><li>- Planteamiento del problema.</li><li>- Estrategias utilizadas en la resolución del problema.</li><li>- Tablas y gráficas tanto para el área como para el volumen.</li><li>- Conclusiones de la actividad.</li><li>- Posibles ampliaciones.</li><li>- Opinión personal del alumno/a sobre la unidad.</li></ul>	
En casa	Completa el resumen de esta unidad, dedicando el tiempo conveniente y entregándola en la fecha fijada.	

**Unidad nº 7:**

**GRÁFICAS Y FUNCIONES**

HOJA EN BLANCO

# GRÁFICAS Y FUNCIONES

## A. En esta unidad trabajaremos

- Interpretación de gráficas.
- Representación de los cambios de una variable mediante gráficas.
- Construcción de gráficas a partir de textos.
- Gráficas como resumen de información.
- Aproximación a contenidos de análisis matemático: crecimiento, decrecimiento, máximo, mínimo, continuidad, tendencias, tasa de variación media, concavidad.

## B. Nuestras fuentes

Las actividades de esta unidad están inspiradas, y algunas tomadas directamente, del libro *El lenguaje de funciones y gráficas*, del Shell Centre for Mathematical Education.

## C. Material necesario

- Papel cuadriculado, regla.
- Hojas de trabajo para los alumnos.

## D. Actividades para los alumnos

- Actividad nº 1 Dos aviones (*interpretando puntos*).
- Actividad nº 2 Golpe de golf.
- Actividad nº 3 Recolección de fresas (*dibujando gráficas a partir del texto*).
- Actividad nº 4 Excursión al Castellar.
- Actividad nº 5 Llenando piscinas.

## E. Actividades de evaluación

Además de la observación utilizaremos el resumen final de la unidad como actividad de evaluación.

## **F. Guía del profesor**

### **OBSERVACIONES PREVIAS**

En esta unidad trabajaremos con gráficas y funciones de una forma distinta a la habitual. Las actividades resultarán chocantes y algo liosas para los alumnos que hayan trabajado gráficas exclusivamente desde el punto de vista tradicional. Pasados los primeros momentos de desconcierto, les empezará a gustar y no será difícil obtener buenos resultados.

### **ACTIVIDAD 1. DOS AVIONES**

- En la primera actividad pretendemos que interpreten gráficas con poca información. Dos puntos en cada una, representan las características de dos aviones A y B (ver las hojas de trabajo que se incluyen al final de la unidad).
- El bloqueo inicial se vence con unas mínimas indicaciones sobre cómo interpretar que un punto esté por encima o más a la derecha que otro.
- Es importante que los alumnos anoten en su cuaderno la interpretación que cada uno ha dado a los puntos y posteriormente la defiendan ante sus compañeros de grupo.
- En la segunda parte de la actividad, deben situarse los puntos en la gráfica. Este apartado permite evaluar muy fácilmente si se ha alcanzado el objetivo de interpretar puntos en una gráfica.

### **ACTIVIDAD 2. EL GOLPE DE GOLF**

- Se plantea ahora una situación real: un golpe dado a una pelota de golf. En un dibujo se representa la trayectoria seguida por la bola y se pide analizar gráficamente algunos aspectos del movimiento.
- Una interpretación rápida y poco reflexiva de esta situación da como resultado unas gráficas que repiten la forma de la trayectoria de la bola de golf.
- Hay que prestar especial atención al punto inicial y final del recorrido, a la velocidad de la bola en el punto de máxima altura, a los cambios suaves y bruscos de velocidad, a la presencia de saltos, etc.
- De nuevo es importante que los alumnos escriban sus explicaciones y las defiendan ante sus compañeros.
- Hay aspectos de Física que intervienen en mayor o menor medida a la hora de analizar este problema -la fuerza de la gravedad, el rozamiento, la velocidad del viento, la inclinación y dureza del terreno, etc.- sin embargo no alteran significativamente las características fundamentales de la gráfica.
- Uno de los aspectos más chocantes para los alumnos es descubrir que los puntos donde la pelota alcanza su máxima altura corresponden con los de velocidad cero.

### ACTIVIDAD 3. RECOLECCIÓN DE FRESAS

- Partimos de una frase en la que se describe una situación sin datos numéricos: cuanta más gente tengamos para ayudar, antes terminaremos de recoger las fresas de esta parcela. Los alumnos deben situar una serie de puntos que representen la variación del tiempo de recolección en función del número de recolectores.
- Puede ser la primera vez que se encuentren ante una situación de proporcionalidad inversa. Pensarán en una recta con pendiente negativa, y hay que hacerles ver que la gráfica estará formada por puntos aislados.
- Es una buena situación para introducir el concepto de tendencia.
- ¿Cuántos trabajadores serán necesarios para que el tiempo invertido sea nulo?

### ACTIVIDAD 4. EXCURSIÓN AL CASTELLAR

- Intentamos en esta actividad, asociar el espacio y el tiempo con la pendiente del itinerario a recorrer.
- Proponemos una excursión a una montaña (“el Castellar” en nuestro caso). Les proporcionamos el perfil del itinerario y les pedimos que representen la distancia al punto de partida en función del tiempo transcurrido.
- Para solventar el bloqueo inicial se les sugiere simplificar la cuestión suponiendo que el perfil sea llano. Después, una subida con pendiente constante y finalmente, una bajada con pendiente constante.
- Entre otros aspectos, se prestará especial atención a los siguientes:
  - La gráfica comienza en el punto  $(0,0)$  y termina en el punto  $(165,0)$  -el tiempo expresado en minutos-.
  - El primer kilómetro de recorrido tiene terreno llano, una bajada y una subida, por tanto será el tramo en el que se lleve mayor velocidad. El segundo kilómetro es todo de subida, pero no muy pronunciada, por tanto la velocidad será media. El tercer kilómetro del recorrido es una subida muy pronunciada, por tanto la velocidad con la que avanza el grupo será muy lenta.
  - En el descenso el proceso se invierte, con la salvedad del primer tramo de bajada, que, al ser tan pronunciado, hay que recorrerlo con mucha precaución.
  - Durante el período de descanso la gráfica permanece constante.
- Se debe hacer hincapié en la relación espacio-tiempo. Mirando en la gráfica, el alumno debe señalar los tramos donde el grupo ha ido más rápido y donde ha ido más lento.

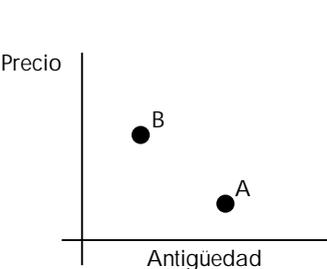
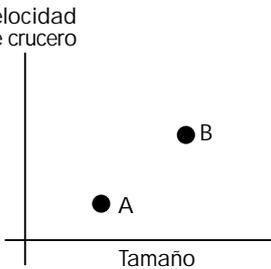
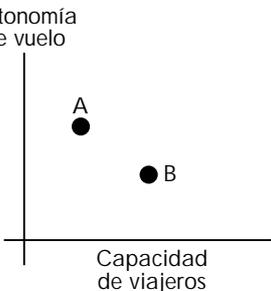
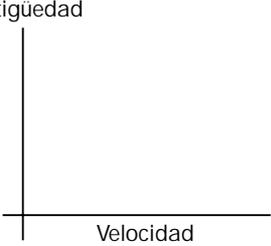
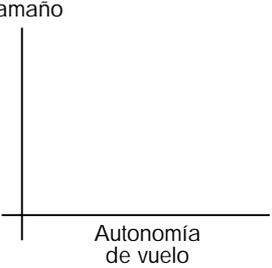
### ACTIVIDAD 5. LLENANDO PISCINAS

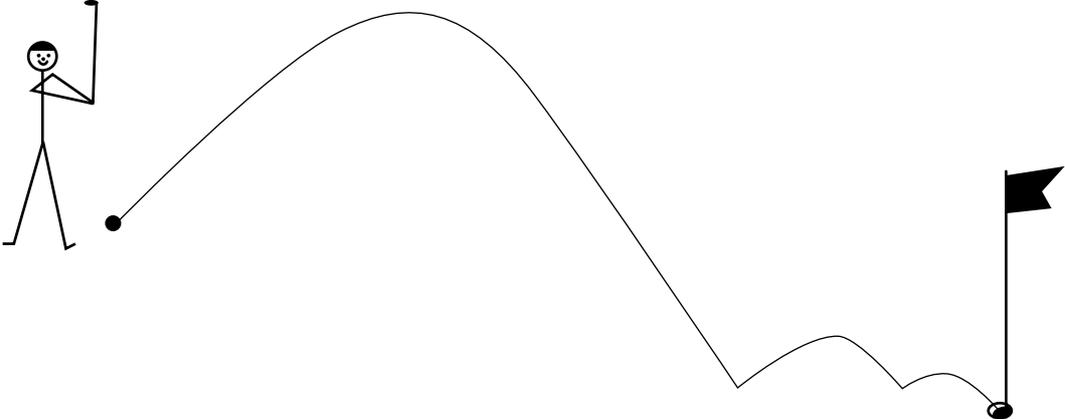
- Esta actividad es una buena oportunidad de introducir, de forma sencilla, los conceptos de tasa de variación media e instantánea y concavidad-convexidad.

- La primera parte de la actividad es clave para conseguir que los alumnos respondan adecuadamente al resto de las cuestiones. Proponemos llenar tres recipientes distintos con la misma cantidad de líquido y estudiar cómo varía la altura del líquido a medida que avanza el tiempo.
- Todos los alumnos han realizado la experiencia de llenar una botella y han observado que el nivel sube con mayor rapidez en la parte del cuello. Nos ayudaremos de dicha experiencia para hacerles razonar correctamente.
  - Crecimiento lineal: el nivel sube a velocidad constante.
  - Crecimiento cóncavo: el nivel sube lento al principio y rápido después.
  - Crecimiento convexo: el nivel rápido al principio y lento al final.
- En el segundo apartado de la actividad proponemos llenar piscinas de las que conocemos su sección. Cuidaremos los siguientes aspectos:
  - Velocidad con la que aumenta la altura del agua en la parte más profunda, ¿es constante?
  - Velocidad con la que aumenta la altura en la parte menos profunda, ¿es constante?
  - ¿Cómo se reflejará en la gráfica el cambio de la velocidad al pasar el agua de la parte más profunda a la que tiene menor profundidad?
- En el tercer apartado aparecen las medidas de la piscina y el salto entre las zonas de mayor y menor profundidad se hace a través de una suave pendiente. Debemos prestar atención a los siguientes aspectos:
  - Al haber medidas concretas el alumno debe hacer unas estimaciones que le permitan dibujar la gráfica con corrección.
  - ¿Cómo cambiará la velocidad con la que sube el nivel del agua en la parte más profunda? ¿Qué diferencia habrá con el apartado anterior?

## **G. Hojas de trabajo para los alumnos**

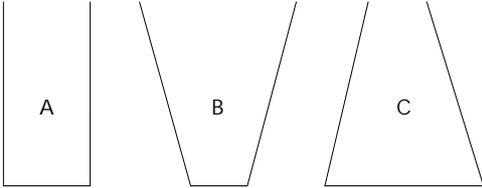
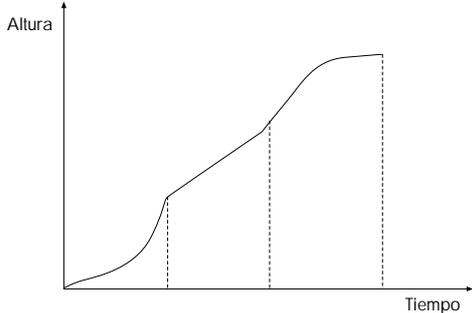
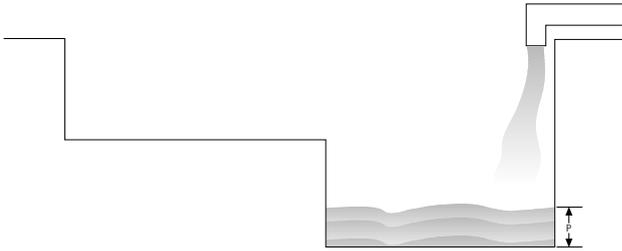
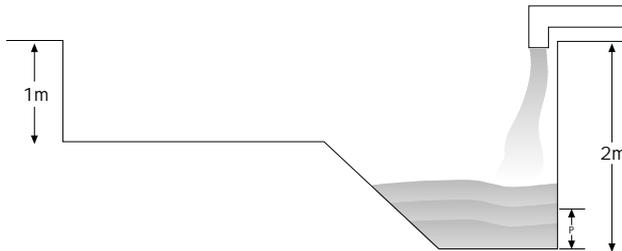
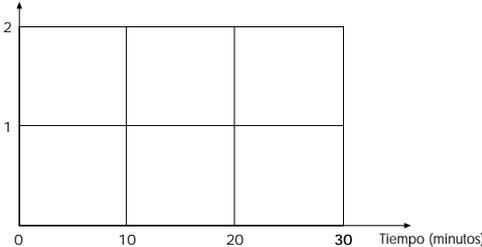
Como en todas las unidades, presentamos las actividades en hojas de trabajo que el profesor puede fotocopiar y usar directamente en clase.

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 1:</b> <b>DOS AVIONES</b> <span style="float: right;">Gráficas y funciones</span>	
Material	Papel cuadriculado y regla.	
En clase	<p>Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <p>La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A.  ¿Qué más indica?  ¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El avión más viejo es el más barato.</li> <li>• El avión más rápido es más pequeño.</li> <li>• El avión más grande es más viejo.</li> <li>• El avión más barato transporta menos pasajeros.</li> </ul> <p>Anota en tu cuaderno la justificación de tus respuestas. Posteriormente compara dicha respuestas con tus compañeros y compañeras de grupo y durante un pequeño debate, defiende tus interpretaciones.</p> <p>En cada una de las gráficas siguientes marca aproximadamente dos puntos que representen a los aviones A y B.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div>	
En casa	Completa el trabajo de clase. Explica brevemente cada una de tus respuestas.	

<p>Hoja de trabajo del alumno</p>	<p style="text-align: center;"><b>ACTIVIDAD 2:</b> <b>GOLPE DE GOLF</b></p> <p style="text-align: right;">Gráficas y funciones</p>
<p style="text-align: center;">En clase</p>	<p>¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire en este golpe de golf?</p>  <p>Discute esta situación con tus compañeros de grupo y escribe una descripción clara, indicando cómo creéis que varía la velocidad de la bola.</p> <p>Ahora haz una gráfica aproximada para ilustrar tu descripción anterior: tiempo desde que se ha golpeado la bola-velocidad de la bola.</p> <div style="text-align: center;"> <p>Velocidad de la bola</p>  <p>Tiempo desde que se ha golpeado la bola</p> </div>

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>RECOLECCIÓN DE FRESAS</b> <span style="float: right;">Gráficas y funciones</span>
En clase	<p>Utilizando los siguientes ejes, haz una gráfica que ilustre la siguiente situación: <i>“Cuanta más gente tengamos para ayudar, antes terminaremos de recoger las fresas de esta parcela”.</i></p> <div style="text-align: center;"><p>Tiempo de recolección</p><p>Número de trabajadores</p></div> <p>Compara tu gráfica con las de tus compañeros. Intenta llegar a un acuerdo sobre la versión correcta. Escribe cómo has llegado a tu respuesta. En particular responde a las siguientes cuestiones:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- ¿Debería ir la gráfica hacia arriba o hacia abajo? ¿Por qué?</li><li>- ¿Debería ser la gráfica una línea recta? ¿Por qué?</li><li>- ¿La gráfica debería cortar los ejes? Si la respuesta es afirmativa ¿dónde? En caso contrario, ¿por qué?</li></ul>

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>EXCURSIÓN AL “CASTELLAR”</b>	Gráficas y funciones
Material	Papel cuadriculado y regla.	
En clase	<p>Un grupo de alumnos y alumnas del I.E.S. “Suárez de Figueroa” han realizado una excursión al Castellar de Zafra. El itinerario de ida ha sido el mismo que el de vuelta (su perfil aparece en la figura) y en total han recorrido 6 Km. En la subida han empleado una hora y media, luego han descansado media hora y en el descenso han tardado tres cuartos de hora.</p>  <p>Haz una gráfica que muestre cómo varía la distancia del grupo al Instituto en función del tiempo transcurrido desde su salida hasta su regreso. Coméntala.</p>	

<p>Hoja de trabajo del alumno</p>	<p><b>ACTIVIDAD 5:</b> <b>LLENANDO PISCINAS</b></p> <p style="text-align: right;">Gráficas y funciones</p>	
<p>Material</p>	<p>Papel cuadriculado y regla.</p>	
<p>En clase</p>	<p>Llenando botellas.</p> <p>Supón que dispones de tres vasos de igual capacidad y de las formas que muestra la figura. Supón que se vierte la misma cantidad constante de agua por unidad de tiempo en los tres recipientes a la vez.</p> <p>Describe, con palabras, cómo varía con el tiempo la altura del agua en cada uno de los recipientes, a partir del momento en que empiezan a llenarse.</p> <p>Haz tres gráficas que muestren, en cada caso, cómo varía con el tiempo la altura del agua en los recipientes.</p> <p>Dibuja la forma que deberá tener un vaso para que la variación de la altura de líquido con respecto al tiempo, sea la que se indica en la gráfica adjunta.</p> <p>Se está llenando una piscina rectangular con una manguera que vierte agua a velocidad constante. Se muestra una sección transversal de la piscina:</p>	   <p>Describe con palabras, cómo varía con el tiempo la profundidad del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que comienza a llenarse la piscina vacía</p>
<p>En casa</p>	<p>Una piscina rectangular y de sección diferente se rellena de una forma similar:</p>  <p>Haz una gráfica, en tu hoja, que muestre cómo varía con el tiempo la profundidad (p) del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que la piscina vacía comienza a llenarse. Supón que la piscina tarda 30 minutos en llenarse hasta el borde.</p>	

HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 8:**

**COMENZANDO AL AZAR**

HOJA EN BLANCO

# COMENZANDO AL AZAR

## A. En esta unidad trabajaremos

- Aplicaciones prácticas de las Matemáticas.
- Tablas y gráficas como resumen de la información.
- Aproximación experimental a la teoría de la probabilidad
- Diferencias entre experimentos deterministas y aleatorios.
- Números aproximados. Errores y redondeo.
- Estrategias de resolución de problemas probabilísticos como la técnica del “mogollón”.
- Juegos equitativos y no equitativos.

## B. Nuestras fuentes

Muchas de las ideas de esta unidad han sido tomadas de la unidad didáctica “Estadística y Probabilidad” elaborada por M<sup>a</sup> del Mar Pozo Domínguez, José Luis Plata Ceballos, Francisco Pozo y José Antonio Sánchez Guillén, durante el curso ACD-A de Matemáticas celebrado en el Centro de Profesores de Zafra (1992-93).

## C. Material necesario

- Monedas, dados cúbicos, tarjetas especiales para la actividad de las tres cartas, aparato de Galton, regla, calculadora, cajas de chinchetas, fichas de colores, papel cuadriculado, regla.
- Diccionario.
- Hojas de trabajo para alumnos (se incluyen al final de la unidad).

## D. Actividades para los alumnos

- Actividad n<sup>o</sup> 1 Encuesta inicial.
- Actividad n<sup>o</sup> 2 Muchas caras.
- Actividad n<sup>o</sup> 3 Tres eran tres.
- Actividad n<sup>o</sup> 4 La chincheta chachi.

- Actividad nº 5 La carrera de caballos.
- Actividad nº 6 La paridad del producto.
- Actividad nº 7 Laberintos de condenados.
- Actividad nº 8 Las tres cartas.
- Actividad nº 9 El aparato de Galton (*actividad de evaluación*).
- Actividad nº 10 Los clásicos (*actividad de refuerzo*).

## E. Actividades de evaluación

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso se proponen las siguientes actividades específicas de evaluación:

- Un resumen de la actividad del aparato de Galton y sobre todo el apartado de la pizzería.
- Para evaluar la adecuación de las actividades desarrolladas en la unidad utilizaremos la encuesta inicial, que la volveremos a pasar al terminar la actividad 9.

## F. Guía del profesor

### OBSERVACIONES PREVIAS

A pesar de constituir uno de los bloques de contenidos del área de Matemáticas en Secundaria, los alumnos pocas veces trabajan el azar y la probabilidad. Tras constatar este hecho y convencidos del interés creciente de estos temas, nos hemos decidido a incluirlos en la programación del Taller de Matemáticas.

Los problemas sobre el azar reúnen muchas de las condiciones que los hacen idóneos para ser trabajados en el Taller de Matemáticas. Eligiendo adecuadamente las actividades, podemos encontrar situaciones presentes en la vida cotidiana que necesitan muy pocos conocimientos matemáticos previos, que son fáciles de entender y resolver recurriendo a la simulación y que resultan altamente motivadoras. De ellas, además, se pueden obtener conclusiones importantes.

Otra de las ventajas de las actividades de este bloque es que se prestan al trabajo en equipo y exigen de los alumnos organización y reparto de tareas.

Utilizaremos material específico: dados, monedas, chinchetas etc., y tendremos que advertirlo a los alumnos con suficiente antelación para que el desarrollo de las actividades se entorpezca lo menos posible.

Incluimos a continuación unas breves notas históricas y las definiciones de algunos términos que iremos introduciendo poco a poco para mejorar el vocabulario matemático de nuestros alumnos y conseguir mayor precisión al expresarnos.

## UN POCO DE HISTORIA

La palabra “aleatorio” tiene su raíz en el término latino *aleam* que significa dado o suerte.

Los antecedentes históricos de la teoría de Probabilidades están ligados a los juegos de azar. Su desarrollo matemático se puede situar en el siglo XVII y aunque hay varios precursores del mismo, se atribuye a la correspondencia entre Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) el origen de la teoría.

- Llamaremos suceso al resultado de una experiencia cualquiera.
- Una experiencia decimos que es determinista cuando da como resultado un suceso que se puede conocer (predecir) con anterioridad (pequeñas variaciones iniciales implican pequeños cambios en el resultado).
- Una experiencia decimos que es aleatoria cuando el resultado de la misma no se puede conocer con seguridad hasta que no se realiza (la experiencia); de tal forma que repetida la experiencia varias veces, en las mismas condiciones, los resultados pueden ser distintos (pequeñas variaciones iniciales implican grandes cambios en el resultado).
- El Cálculo de Probabilidades es la parte de las Matemáticas que se dedica al estudio de los fenómenos (experiencias) aleatorios. Digamos que es la ciencia que estudia las “leyes del azar”.
- Espacio muestral: es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- Sucesos elementales: son los resultados del experimento. Son los formados por un solo resultado.
- Sucesos compuestos: son los que se forman con más de un resultado del experimento. Un suceso compuesto se verifica cuando ocurre alguno de los resultados que lo componen.
- Suceso unión: El suceso ( $A$  o  $B$ ) se compone de los resultados comunes y no comunes de  $A$  y de  $B$ . El suceso ( $A$  o  $B$ ) se realiza cuando se realiza  $A$  o cuando se realiza  $B$  o cuando se realizan ambos.
- Suceso intersección: El suceso ( $A$  y  $B$ ) se compone de los resultados comunes a los sucesos  $A$  y  $B$ . El suceso ( $A$  y  $B$ ) se realiza sólo cuando se realizan el suceso  $A$  y el suceso  $B$  simultáneamente.
- Suceso contrario de  $A$ : es el formado por los resultados del experimento no incluidos en el suceso  $A$ .
- Suceso seguro: es el que se compone de todos los resultados o sucesos elementales del experimento. Ocurre siempre que se lleve a cabo el experimento.
- Suceso imposible: es aquel que tiene intersección vacía con el espacio muestral. Nunca ocurre por más que se repita el experimento.
- Sucesos incompatibles: Dos sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles si el hecho de que ocurra uno de ellos impide la realización del otro. En el caso de que  $A$  y  $B$  se puedan realizar simultáneamente, serán compatibles.

- Frecuencia absoluta ( $F$ ) de un resultado es el número de veces que se repite dicho resultado en un experimento.
- Frecuencia relativa ( $fr$ ) de un resultado es el cociente entre la frecuencia absoluta de dicho resultado y el número de veces que se ha realizado el experimento.

Propiedades de las frecuencias relativas.

- 1.- Si  $A$  es un suceso cualquiera se verifica que  $fr(A)$  es mayor o igual que cero y menor o igual que 1.
  - 2.- La suma de las frecuencias relativas de todos los resultados de un experimento aleatorio es igual a 1.
  - 3.- La frecuencia relativa de un suceso compuesto es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos elementales que lo componen.
- Ley del azar o ley de estabilidad de las frecuencias. Al repetir numerosas veces un experimento aleatorio, la frecuencia relativa ( $fr$ ) de cada resultado tiende hacia un determinado número (que llamaremos probabilidad de dicho resultado). La frecuencia relativa de un resultado tiende, o se aproxima, a la probabilidad cuando el experimento aleatorio se repite un gran número de veces.
  - Sucesos equiprobables: Si todos los resultados de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, se dice que los sucesos elementales son equiprobables.
  - Regla de Laplace:  
Si los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables y  $A$  es un suceso cualquiera, entonces la probabilidad de  $A$  es el cociente entre el número de casos favorables al suceso entre el número de casos posibles.

## **ACTIVIDAD 1. ENCUESTA INICIAL**

Esta actividad (ver hoja de trabajo para los alumnos) nos servirá para:

- Realizar una evaluación inicial (pasándola el primer día de trabajo en la unidad) y determinar los conocimientos previos de nuestros alumnos sobre probabilidad y azar, detectando ideas erróneas sobre estos conceptos. A la vista de los resultados, podremos seleccionar unas u otras actividades, así como su enfoque.
- Evaluar la unidad (pasándola de nuevo una vez trabajadas las actividades) comprobando si los alumnos han conseguido asimilar los conceptos básicos de la probabilidad. Sería interesante dedicar una sesión posterior a corregir -en el sentido de comentar y discutir- cada una de las cuestiones de la encuesta, relacionándolas con las actividades trabajadas y haciendo hincapié en los matices que puedan distinguirse en cada una de las preguntas.
- Después de haber pasado la encuesta inicial convendría aclarar a los alumnos la diferencia entre una experiencia aleatoria y determinista y, de paso, realizar una breve introducción histórica a la Probabilidad. Se puede aprovechar para hablar de su importancia práctica en la actualidad.

**ACTIVIDAD 2. MUCHAS CARAS**

- Tratamos con esta actividad de introducir el concepto de probabilidad como límite de las frecuencias relativas.
- Los alumnos se distribuirán en grupos de 3 o 4 personas y seguirán las indicaciones de la hoja de trabajo prestando especial atención a la forma en la que recogerán los datos de los otros grupos.
- Hay que vigilar el redondeo de los resultados obtenidos por los alumnos con la calculadora.
- Con la segunda parte de la actividad se intenta dar una interpretación visual del comportamiento que siguen las frecuencias relativas cuando el número de lanzamientos aumenta.

**ACTIVIDAD 3. TRES ERAN TRES**

- Las actividades 2 y 3 son muy similares. Desarrollar las dos puede resultar pesado para los alumnos. Es preferible trabajar una sólo de ellas, eligiendo la que el profesor considere más oportuna.
- El desarrollo de esta actividad es similar al de la anterior, con la salvedad del apartado final, donde se intenta llegar intuitivamente a la regla de Laplace.

**ACTIVIDAD 4. LA CHINCHETA CHACHI**

- El profesor llevará a clase chinchetas del mismo tipo (con 300 será suficiente).
- Tratamos con esta actividad de poner de manifiesto que la equiprobabilidad de los sucesos es imprescindible para poder aplicar la regla de Laplace.
- Dejaremos a los alumnos libertad para que expresen su opinión sobre lo que ocurrirá y asignen probabilidades a priori. Después, como en las actividades anteriores, harán el recuento y asignarán un valor a los dos sucesos posibles del problema. Finalmente, compararán lo obtenido experimentalmente con lo pronosticado inicialmente por ellos.
- Debe quedar muy claro que los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio deben ser equiprobables para poder aplicar la regla de Laplace. Si no lo tenemos en cuenta, obtendremos resultados erróneos.

**ACTIVIDAD 5. LA CARRERA DE CABALLOS**

- Situamos cinco caballos en la línea de salida, cada uno lleva un número desde cero hasta cuatro. Lanzamos cuatro monedas y contamos cuántas caras se han obtenido. Avanza una posición el caballo que corresponda al número de caras obtenido.
- Con esta actividad queremos que los alumnos, mediante el juego, descubran que la probabilidad de avanzar cada caballo no es la misma y que intenten buscar el motivo.

- Se disponen los alumnos en grupos de cuatro. Se reparten las fotocopias con el tablero y se entregan 5 fichas de parchís por grupo. Tras explicarles las normas de la carrera, y antes de empezar a jugar, se les pide que piensen si hay algún caballo que tiene más probabilidades de ganar que los demás.
- Después de jugar varias partidas, los alumnos se replantearán la apuesta y la secuencia: apuesta errónea → experimento → replanteamiento, obligará a los alumnos a buscar estrategias ganadoras y a encontrar una explicación. ¿Por qué gana un caballo con más facilidad que otro?
- Podemos hablar del espacio muestral (para que les vaya sonando el término) asociado al experimento de lanzar 4 monedas y pedir a los alumnos que obtengan todos los resultados posibles (16) utilizando el diagrama de árbol.
- De forma muy intuitiva podemos introducir la idea de variable aleatoria.

### **ACTIVIDAD 6. LA PARIDAD DEL PRODUCTO**

- Lanzaremos, ahora, dos dados y multiplicaremos los resultados obtenidos. Nos interesan los sucesos “producto par” y “producto impar”.
- Como en actividades anteriores, los alumnos deben plantearse previamente el resultado y responder si el juego es equitativo o no. El profesor mantendrá que ambos sucesos son equiprobables hasta que la experimentación demuestre lo contrario.
- Por último, se conduce al alumno hacia la resolución matemática del problema (con simples recuentos y mediante la regla de Laplace).
- Podemos aprovechar esta actividad para plantear a los alumnos algunas curiosidades sobre los números pares e impares, como por ejemplo: ¿qué hay más, números pares o números impares?, ¿hay más números naturales que números pares?

### **ACTIVIDAD 7. LABERINTO PARA CONDENADOS**

- Presentamos a los alumnos el laberinto que se muestra en la hoja de trabajo. Nos preguntamos por la probabilidad de llegar a cada una de las zonas indicadas.
- A las dos zonas llega el mismo número de caminos, esto hará pensar a los alumnos que el lugar en el que coloquemos al verdugo no influirá en el futuro del condenado.
- Podemos simular el recorrido utilizando dados: para las encrucijadas de 3 pasillos distinguiremos los sucesos “sacar 1 o 2”, “sacar 3 o 4” y “sacar 5 o 6”, para las bifurcaciones utilizaremos los sucesos “sacar par” y “sacar impar”.
- Otra posibilidad consiste en utilizar el diagrama de árbol y el producto de probabilidades.
- Nosotros apostamos por el “método del mogollón”. Situamos un número elevado de individuos en la cabecera del laberinto y los hacemos circular por él, teniendo en cuenta que en cada bifurcación continuarán por cada camino la mitad de los que han llegado hasta ella, y en cada cruce con tres salidas, la tercera parte continuará por cada uno de los caminos posibles. Al final, sólo tendremos que contar cuántos han llegado a cada zona.

## ACTIVIDAD 8. LAS TRES CARTAS DEL FERIAANTE

- Necesitamos para esta actividad tres tarjetas: una roja por sus dos caras, otra verde y la tercera con una cara de cada color. Pueden adquirirse en establecimientos de material didáctico o bien pueden fabricarse en clase.
- Perseguimos que los alumnos sean capaces de reconsiderar posturas fruto de falacias intuitivas. Al mismo tiempo les haremos ver como juegos en apariencia justos, ocultan situaciones no equitativas.
- Nuestro adversario elegirá una carta al azar poniéndola sobre la mesa de forma que se vea sólo el color de una cara. Debemos adivinar el color de la cara oculta. Tras repetir el juego un cierto número de veces, llegaremos a la conclusión de que los dos colores no eran igualmente probables a la hora de adivinar el desconocido.
- Esta actividad admite un planteamiento mucho más sencillo rellenando la tabla (1), y contestado a las preguntas que están a continuación.
- No es el objetivo de esta actividad que el alumno resuelva completamente el problema desde el punto de vista probabilístico, pero sí debe reflexionar buscando una explicación.

## ACTIVIDAD 9. EL APARATO DE GALTON

- Esta actividad puede utilizarse para evaluar varios de los procedimientos trabajados a lo largo de la unidad. La situación que se plantea estaba ya presente en las actividades de la carrera de caballos y del laberinto.
- Es importante recalcar que la probabilidad de que la bola recorra cada uno de los 64 caminos es la misma, pero no es igual el número de caminos que llegan a cada salida.
- Podemos aprovechar para hablar del triángulo de Tartaglia y de alguna de sus propiedades, así como de los números combinatorios.

## ACTIVIDAD 10. LOS CLÁSICOS

- Son una serie de problemas a los que se les puede dar un tratamiento clásico, que no requiere uso de material.
- Los dos primeros problemas se pueden trabajar en clase con todos los alumnos y el resto pueden proponerse como actividad de profundización para algunos alumnos.
- Los problemas de urnas son los que presentan mayor dificultad.

## G. Hojas de trabajo para el alumno

A continuación incluimos las hojas de trabajo del alumno para las distintas actividades, acompañadas de las tablas necesarias.

## ACTIVIDAD 1. ENCUESTA INICIAL

Nombre: \_\_\_\_\_

### *AZAR Y PROBABILIDAD*

- 1.- Es más difícil que la combinación ganadora de la Lotería Primitiva sea 1, 2, 3, 4, 5 y 6 que la compuesta por 3, 17, 23, 31, 43 y 49.
  - a) verdadero
  - b) falso
  
- 2.- Si lanzamos correctamente una moneda 5 veces y hemos obtenido la secuencia cruz, cara, cara, cara, cara, ahora lo más probable es que salga cruz.
  - a) verdadero
  - b) falso
  
- 3.- Lanzamos una moneda 4 veces. ¿Qué secuencia es más probable?
  - a) cara, cara, cara, cara
  - b) cara, cruz, cara, cruz
  - c) son igualmente probables
  
- 4.- ¿Crees que es fácil que en una clase dos compañeros cumplan años el mismo mes?
  - a) Seguro que sí
  - b) probable
  - c) poco probable
  - d) casi imposible
  
- 5.- Al extraer una carta de una baraja, ¿qué es más fácil?
  - a) que salga el as de oros
  - b) que salga el 4 de bastos
  - c) da igual
  
- 6.- Se lanza un dado y se consideran los resultados par-impar. ¿Qué es más fácil?
  - a) que salga par
  - b) que salga impar
  - c) es igual de fácil
  
- 7.- Y ahora con la Lotería Primitiva (números de 1 al 49), extraemos la primera bola. ¿Qué es más fácil?
  - a) que salga par
  - b) que salga impar
  - c) es igual de fácil

- 
- 8.- Al extraer una carta de una baraja, ¿qué es más fácil?
- a) que salga de oros
  - b) que salga figura
  - c) da igual
- 9.- En un almacén disponen de dos lotes de bombillas. En el primero nos dicen que 2 de cada 5 están fundidas y en el segundo lote que 14 de cada 35 están fundidas. ¿De qué lote elegirías una bombilla?
- a) del primero
  - b) del segundo
  - c) de la mismo
- 10.- Si lanzas 100 chinchetas la mitad aproximadamente caerán de punta.
- a) verdadero
  - b) falso
- 11.- En familias de 4 hijos, ¿qué secuencia es más probable?
- a) niño, niño, niño, niño
  - b) niña, niño, niña, niño
  - c) igualmente probables

### *FENÓMENOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS*

Intenta acabar si puedes las siguientes frases:

- 1.- Se ha lanzado una moneda 5 veces y se obtiene cara, cruz, cara, cruz, cara. Por tanto en el sexto lanzamiento obtendré.....
- 2.- Enfrío agua a 10 grados centígrados bajo cero. Por tanto obtendré.....
- 3.- La combinación ganadora del próximo sorteo de lotería primitiva será.....
- 4.- El grupo sanguíneo de la primera persona con la que nos topemos y se llame José/Josefa será.....
- 5.- Si arrimamos un mechero encendido a una mesa en la que previamente se ha derramado un poco de alcohol.....
- 6.- Mira. ¡Un manzano! Sube y nos pondremos morados/as de.....
- 7.- La estatura del primer alumno que llegue primero al Instituto mañana es.....
- 8.- El equipo campeón de liga este año será el.....

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 2:</b> <b>MUCHAS CARAS</b>	Comenzando al azar
Material	Monedas.	
En clase	<p>Cada alumno/a del grupo lanza una moneda 10 veces. Debes contar y anotar el número caras que has obtenido. Divide el número de caras entre el número de lanzamientos (10 lanzamientos) y anota los datos obtenidos en las celdas correspondientes de la tabla 2.1</p> <p>Seguidamente suma el número de caras obtenido por ti y por cada uno de tus compañeros y divídelo por el total de lanzamientos del grupo. Anota los datos obtenidos en las celdas correspondientes a tu grupo en la tabla.</p> <p>Hay que continuar de forma ordenada recogiendo (uno a uno) información del resto de los grupos de la clase para completar las siguientes filas de la tabla 2.1</p> <p>Observa los datos de la última columna. ¿Está saliendo lo que esperabas? ¿Qué tipo de conclusiones sacas?</p> <p>Representa en un diagrama cartesiano la información de la tabla 2.1 teniendo en cuenta las siguientes observaciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En un folio apaisado, se dibuja una recta horizontal a unos 2 cm del borde inferior y una recta vertical a unos 2 cm del borde izquierdo; éste será nuestro sistema de ejes cartesianos.</li> <li>• En el eje horizontal vamos a representar el número de lanzamientos de la moneda, cada unidad de 1 cm. representará 10 lanzamientos.</li> <li>• En el eje vertical vamos a representar el cociente entre el número de caras y el número de lanzamientos redondeado a 2 cifras decimales. Tomaremos como unidad 10 cm.</li> </ul> <p>Una vez dibujados los puntos que representan los datos de la tabla 2.1, dibuja una recta horizontal que pase por el punto de coordenadas (0, 0,5). Une mediante una línea poligonal los puntos obtenidos de izquierda a derecha. ¿Qué deduces del gráfico que obtenemos?</p> <p>¿Te atreverías a predecir lo que obtendríamos si se hiciera esta experiencia con todos los alumnos del Instituto?</p>	
En casa	Completa el trabajo de clase.	

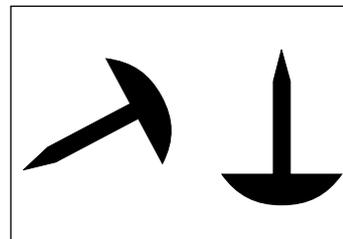
(Tabla 2.1)	Nº de caras	Nº de lanzamientos	Nº de caras/ Nº de lanzamientos
Resultados del alumno/a			
Resultados de su grupo			
Resultados de 2 grupos			
Resultados de 3 grupos			
Resultados de 4 grupos			
Resultados de 5 grupos			
Resultados de 6 grupos			
Resultados de 7 grupos			
Resultados de la clase			

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 3:</b> <b>TRES ERAN TRES</b> <p style="text-align: right;">Comenzando al azar</p>
Material	Dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6.
En clase	<p><i>Primera parte:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cada alumno/a del grupo lanza un dado 10 veces. Debes contar y anotar el número veces que has obtenido el número 3. Divide el número anterior entre el número de lanzamientos (10 lanzamientos) y anota los datos obtenidos en las celdas correspondientes de la tabla 3.1.</li> <li>• Seguidamente suma el número de veces que ha aparecido el 3 entre tus lanzamientos y los de tus compañeros y divídelo por el total de lanzamientos del grupo. Anota los datos obtenidos en las celdas correspondientes.</li> <li>• Hay que continuar de forma ordenada recogiendo (uno a uno) información del resto de los grupos de la clase para completar las siguientes filas de la tabla 3.1</li> <li>• Observa los datos la última columna. ¿Está saliendo lo que esperabas? ¿Qué tipo de conclusiones sacas?</li> <li>• Representa en un diagrama cartesiano la información de la tabla 3.1 teniendo en cuenta las siguientes observaciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>- En un folio apaisado, se dibuja una recta horizontal a unos 2 cm del borde inferior de la hoja y una recta vertical a unos 2 cm del borde izquierdo, éste será nuestro sistema de ejes cartesianos.</li> <li>- En el eje horizontal vamos a representar el número de lanzamientos de la moneda, cada unidad de 1 cm representará 10 lanzamientos.</li> <li>- En el eje vertical vamos a representar el cociente entre el número de veces que hemos obtenido 3 y el número de lanzamientos redondeado a 2 cifras decimales. Tomaremos como unidad 10 cm.</li> </ul> </li> <li>• Una vez dibujados los puntos que representan los datos de la tabla 3.1, dibuja una recta horizontal que pase por el punto de coordenadas (0, 0,33). Une mediante una línea poligonal los puntos obtenidos de izquierda a derecha.</li> </ul> <p>¿Qué deduces del gráfico que obtenemos?</p> <p><i>Segunda parte:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lanza 10 veces el dado y anota en la tabla 3.2 cuántas veces obtienes el múltiplo de 3. Contabiliza los resultados de tu grupo.</li> <li>• Realicemos el recuento de lo obtenido para toda la clase. <ul style="list-style-type: none"> <li>A.- Expresa la frecuencia relativa obtenida en la primera parte de esta actividad en forma de fracción irreducible. Reduce el numerador de esa fracción a 1 y observa el denominador. ¿Puedes suponer algo?</li> <li>B.- Repite el apartado A para la frecuencia relativa del suceso “obtener múltiplo de 3”. Reduce el numerador a 2 y observa el denominador. ¿Qué puedes decir de ambos?</li> </ul> </li> </ul>

(Tabla 3.1)	Nº de veces que sale el 3	Nº de lanzamientos	Nº de veces que sale el 3/ Nº de lanzamientos
Resultados del alumno/a			
Resultados de su grupo			
Resultados de 2 grupos			
Resultados de 3 grupos			
Resultados de 4 grupos			
Resultados de 5 grupos			
Resultados de 6 grupos			
Resultados de 7 grupos			
Resultados de la clase			

(Tabla 3.2)	Nº de veces que sale múltiplo de 3	Nº de lanzamientos	Nº de veces que sale múltiplo de 3/ Nº de lanzamientos
Resultados del alumno/a			
Resultados de su grupo			
Resultados de 2 grupos			
Resultados de 3 grupos			
Resultados de 4 grupos			
Resultados de 5 grupos			
Resultados de 6 grupos			
Resultados de 7 grupos			
Resultados de la clase			

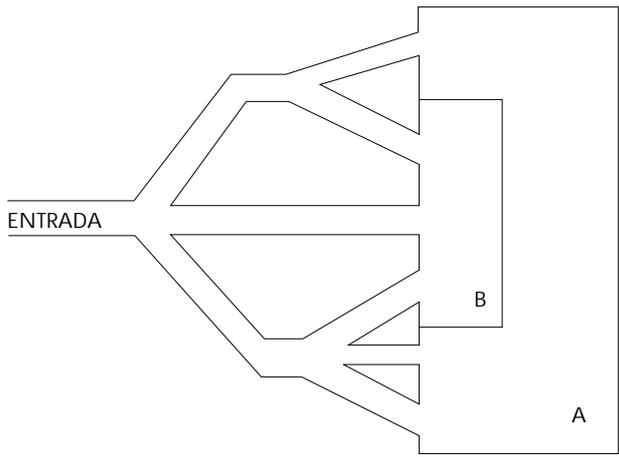
Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 4:</b> <b>LA CHINCHETA CHACHI</b>	Comenzando al azar
Material	Caja de chinchetas.	
En clase	<p>Al lanzar una chincheta tenemos dos posibilidades: que caiga “de punta” o que caiga acostada.</p> <p>Asigna su probabilidad a cada una de ellas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Probabilidad de caer de punta =</li> <li>• Probabilidad de caer acostada =</li> </ul> <p>Explica por qué le has asignado las probabilidades anteriores.</p> <p>Hagámoslo ahora experimentalmente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lanza 10 chinchetas y cuenta cuántas caen de punta.</li> <li>• Contabiliza todas las de tu grupo.</li> </ul> <p>Realicemos ahora el recuento de toda la clase y para ello utiliza una tabla como las de las actividades anteriores.</p> <p>¿El resultado obtenido coincide con el que habías asignado al principio?</p> <p>Intenta dar una explicación a lo sucedido.</p>	



Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 5:</b> <b>LA CARRERA DE CABALLOS</b>	Comenzando al azar
Material	Monedas y fichas de parchís.	
En clase	<p>Los alumnos y alumnas se reúnen en grupos. Antes del comienzo del juego cada alumno debe apostar por un caballo ganador (dos o más jugadores pueden apostar por el mismo caballo). Cada jugador lanza una moneda y se cuenta el número de caras obtenidas en el grupo al lanzar las 4 monedas a la vez (el número estará entre 0 y 4). Avanza un puesto el caballo (ficha) colocado en la casilla que indique ese número. Hay un caballo numerado con el 0. Gana la partida el o los alumnos que hayan apostado por el caballo que primero llegue a la meta.</p> <p>¿Crees que todos los caballos tienen la misma probabilidad de ganar? O bien, ¿hay algún caballo que sea tu favorito?</p> <p>Repite este juego dos o tres veces.</p> <p>¿Sigues pensando lo mismo? ¿Por qué?</p> <p>¿Te atreverías a calcular la probabilidad de que en una jugada avance un caballo determinado, usando la regla de Laplace?</p>	

META	META	META	META	META
SALIDA Caballo 0	SALIDA Caballo 1	SALIDA Caballo 2	SALIDA Caballo 3	SALIDA Caballo 4

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 6:</b> <b>LA PARIDAD DEL PRODUCTO</b>	Comenzando al azar
Material	Dados cúbicos numerados del 1 al 6.	
En clase	<p>Los alumnos y alumnas se reúnen por parejas.</p> <p>1.- Al tirar un dado, ¿crees que hay la misma probabilidad de obtener un resultado par que uno impar? ¿Por qué?</p> <p>2.- Juega ahora con tu compañero o compañera. Cada uno lanza el dado una vez. Multiplicad los valores de los dos dados. Si sale par gana uno y si sale impar gana el otro. ¿Por qué apostaréis, por un resultado par o por uno impar?</p> <p>3.- Jugad 10 veces. ¿Qué ocurre? Explicadlo.</p>	
En casa	<p>1.- Sabrías calcular la probabilidad de “sacar par” y la de “sacar impar”? Utiliza la regla de Laplace.</p> <p>2.- ¿Qué ocurre si en lugar de multiplicar los valores de los dos dados los sumamos?</p> <p>3.- Calcula en este nuevo caso la probabilidad de “sacar par” y la de “sacar impar”.</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 7:</b> <b>LABERINTO PARA CONDENADOS</b>	Comenzando al azar
En clase	<p>El laberinto que muestra la figura está concebido para ejecutar sentencias especiales. Se le ofrece al condenado que camine por el laberinto representado en la figura -del cual, claro está, no conoce el plano- que conduce a puertas semejantes. Unas suponen su libertad y otras encontrarse con el verdugo.</p> <p>Si quieres ayudar al condenado, ¿en qué zona -A o B- colocarías al verdugo?</p>  <p>Ayuda:</p> <p>Para tomar una decisión sírvete del “método del mogollón”. Supón que hay 900 condenados y que, en cada división del camino del laberinto, se reparten los condenados de tal forma que por cada pasillo se marcha el mismo número (la probabilidad de elegir cada uno de los pasillos en los cruces es la misma). Cuenta cuántos condenados llegan a cada una de las zonas y saca conclusiones.</p>	

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 8:</b> <b>LAS TRES CARTAS DEL FERIAANTE</b>	Comenzando al azar
Material	Tres tarjetas: una con las dos caras rojas, la segunda con las dos caras verdes y una tercera con una cara roja y la otra verde.	
En clase	<p>Se juega por parejas y con las tres cartas que os facilitará el profesor.</p> <p><b>JUEGO:</b></p> <p>Quizás te apetezca desafiar a tu compañero con el siguiente juego que, según parece, data de la época de las ferias medievales. Tienes tres cartas: la primera es roja por los dos lados, la segunda es roja por un lado y verde por el otro y la tercera es verde por los dos lados.</p> <p>Tu compañero/a selecciona una de las tres cartas al azar (¡muy importante!), colocándola en la mesa y sin que tu veas el lado oculto. Ofrece a tu compañero una moneda de 1 euro si no adivinas el lado oculto de la carta, en caso contrario, tu compañero/a te pagará el euro.</p> <p>Si alguien duda del juego (o de ti) hazle ver que si, por ejemplo, el color rojo está a la vista, entonces obviamente la carta no es la verde - verde y por tanto hay una posibilidad de 50% de que el lado oculto de la carta sea también rojo. Así, ambos tenéis la misma posibilidad de ganar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Repite 20 veces el juego con tu compañero/a y rellena la tabla (1) de datos de la pareja. En vista de los resultados del juego, ¿es equitativo? ¿Has descubierto alguna estrategia que te permita ganar más veces?</li> <li>- Repite otra vez el juego con tu compañero/a, ahora con las siguientes condiciones: Las 10 primeras veces di siempre el mismo color que veas. Las 10 últimas di siempre el color contrario del que veas. Rellena la tabla (2) de datos de la pareja: En vista de los nuevos resultado del juego, ¿has descubierto una estrategia para ganar más veces? ¿Es un juego equitativo?</li> <li>- Repite 20 veces el juego con tu compañero/a utilizando la estrategia ganadora y rellena la tabla (3) de datos de la pareja. En vista de los resultados obtenidos con la información de toda la clase, ¿crees que es un juego equitativo?</li> <li>- Si el juego se repitiera un número muy grande de veces, ¿a qué número se acercaría la frecuencia relativa del suceso “acertar el color de la cara oculta”?</li> </ul>	
En casa	<p>Si se repite el juego 300 veces, ¿cuántos Euros espero ganar?</p> <p>¿Sabrías explicar por qué la esperanza de ganar no es del 50%?</p>	

Tabla (1) de datos de la pareja:

Jugada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Frecuencia de aciertos
Adivinó el color (sí o no)											
Jugada	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Adivinó el color (sí o no)											

Tabla (2) de datos de la pareja:

Jugada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Frecuencia de aciertos
Adivinó el color (sí o no)											
Jugada	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Adivinó el color (sí o no)											

Tabla (3) de datos de la pareja:

Jugada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Frecuencia de aciertos
Adivinó el color (sí o no)											
Jugada	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Adivinó el color (sí o no)											

Hoja de trabajo del alumno	<p><b>ACTIVIDAD 9:</b></p> <p><b>EL APARATO DE GALTON</b></p> <p style="text-align: right;">Comenzando al azar</p>
Material	Monedas y aparato de Galton.
En casa	<p>1.- ¿Cuántos caminos puede seguir una bola que cae desde el punto de salida hasta una determinada casilla final? (La bola recorre el laberinto de arriba hacia abajo y en cada vértice se puede ir por la izquierda o por la derecha, nunca subirá).</p> <div data-bbox="879 432 1382 622" style="text-align: center;"> </div> <p>2.- Supón que la red anterior es un laberinto de tuberías que tiene una entrada en el punto S y siete salidas marcadas con las letras: A, B, C, D, E, F y G. Supón que dejas caer una bola por las tuberías en el punto S y que en cada bifurcación la probabilidad de caer por la tubería izquierda es la misma que la de caer por la tubería derecha.</p> <p>Si dejamos caer algunas bolas por el punto S, contesta a las siguientes preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Llegará el mismo número de bolas a cada una de las 7 salidas?</li> <li>¿Llegarán más a la salida A o a la G?</li> <li>¿Habrá alguna salida a donde lleguen más bolas?</li> </ol> <p>(Ayuda: Contesta a las preguntas anteriores utilizando el “método del mogollón” con 6.400 bolas).</p> <p>3.- Podemos simular el recorrido de una bola a través del laberinto lanzando 6 veces una moneda. Si sale cara, cae por la izquierda y si sale cruz, cae por la derecha en cada una de las bifurcaciones. Por ejemplo si el resultado de los 6 lanzamientos es CCCCCX la bola llegaría a la salida B. Simula con la moneda el recorrido por el laberinto de 20 bolas y anota los resultados en la tabla 9.1. Pasa ahora a calcular la frecuencia absoluta con que las bolas caen por las distintas salidas y rellena la tabla 9.2.</p>
En clase	<p>4.- A continuación vamos a calcular las probabilidades de que una bola llegue a cada una de las salidas. Cuenta los caminos distintos por los que se accede a cada bifurcación. Ten en cuenta que para una bifurcación cualquiera, el número de caminos distintos es igual a la suma de los de las bifurcaciones inmediatamente superiores.</p> <p>Rellena cada bifurcación asignándole el número de caminos que acceden a ella.</p> <p>Los caminos que llegan a cada salida son:</p> <p>Salida A= ___; salida B= ___; salida C= ___; salida D= ___;</p> <p>Salida E= ___; salida F= ___; salida G= ___.</p> <p>Por tanto las probabilidades son:</p> <p><math>P(A)=</math> --- <math>P(B)=</math> --- <math>P(C)=</math> --- <math>P(D)=</math> --- <math>P(E)=</math> --- <math>P(F)=</math> --- <math>P(G)=</math> ---</p> <p>Compara las probabilidades con las frecuencias relativas obtenidas en el apartado anterior.</p> <p>5.- Considera el experimento aleatorio lanzar una moneda 6 veces y anotar los resultados. Cuántos elementos contendrá el espacio muestral asociado a dicho experimento.</p> <p>A partir de los resultados del experimento anterior vamos a contar el número de caras obtenidas.</p> <p>¿Qué es más probable obtener 1 cara en los 6 lanzamientos o 5 caras?</p> <p>Aplicando la regla de Laplace calcula la probabilidad de obtener 0 caras, 1 cara, 2 caras, 3 caras, 4 caras, 5 caras y 6 caras.</p> <p>¿Encuentras alguna relación entre este problema y el problema de la red de tuberías?</p>
En casa	<p>Supón que vas a abrir una “pizzería” y que para elaborar las diferentes variedades de pizzas, además de la masa tienes hasta 6 ingredientes diferentes. Tienes que preparar la carta de pizzas y necesitas ponerle nombre a cada una de las pizzas que puedas preparar. Pizzas que no lleven ningún ingrediente, aparte de la masa, está claro que sólo hay una y la llamaremos “aburrida”.</p> <p>¿Cuántos nombres necesitaremos para nombrar a todas las variedades de pizzas que tienen un sólo ingrediente? ¿Y con dos? ¿Y con tres? ¿Y con cuatro? ¿Y con cinco? ¿Y con seis?</p>

Tabla 9.1

	1	2	3	4	5	6	Salida		1	2	3	4	5	6	Salida
Bola 1								Bola 11							
Bola 2								Bola 12							
Bola 3								Bola 13							
Bola 4								Bola 14							
Bola 5								Bola 15							
Bola 6								Bola 16							
Bola 7								Bola 17							
Bola 8								Bola 18							
Bola 9								Bola 19							
Bola 10								Bola 20							

Tabla 9.2

	A	B	C	D	E	F	G
Frecuencia alumno							
Frecuencia grupo							
Frecuencia clase							
Frecuencia relativa de la clase							

Hoja de trabajo del alumno	<b>ACTIVIDAD 10:</b> <b>LOS CLÁSICOS</b>	Comenzando al azar						
En clase	<p>1.- LA BARAJA ESPAÑOLA</p> <p>Como sabes una baraja española tiene 40 cartas: 4 palos (oros, copas, espadas y bastos) con diez cartas cada uno (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota, caballo y rey).</p> <p>Asigna un número a las siguientes probabilidades:</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">P(caballo de copas)=</td> <td style="width: 50%;">P(as)=</td> </tr> <tr> <td>P(no salga oros)=</td> <td>P(no salga as)=</td> </tr> <tr> <td>P(figura o copas)=</td> <td>P(par o múltiplo de 3)=</td> </tr> </table> <p>2.- MESES DEL AÑO</p> <p>Se escribe el nombre de cada mes del año en una ficha y se colocan todas en una caja. Se extrae al azar una ficha. ¿Cuál es la probabilidad de que el mes del año que sale sea junio? ¿Y de que el nombre del mes contenga la letra “r”?</p> <p>Escribe el suceso contrario a cada uno de los anteriores y calcula su probabilidad.</p> <p>Se extrae una ficha y se mira la última letra del nombre. Resulta ser “o”. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de enero?</p> <p>3.- URNA I</p> <p>En una urna hay 4 bolas amarillas y 6 verdes. Si sacamos dos bolas simultáneamente:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean amarillas?</li> <li>¿Cuál es la probabilidad de que al menos una sea amarilla?</li> <li>¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea amarilla?</li> </ol> <p>4.- URNA II</p> <p>En una urna hay 10 bolas blancas, 8 rojas y 2 negras.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Sacamos tres bolas, una a una y devolviéndola cada vez a la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras sean blancas y la tercera negra? ¿Cuál es la probabilidad de que dos sean blancas y una negra?</li> <li>Calcula las probabilidades de apartado anterior si no devolvemos cada vez la bola extraída.</li> </ol> <p>5.- DADO ICOSAÉDRICO</p> <p>Se lanza un dado icosaédrico. Sus caras están numeradas con el 0 y con el 1. Pero desconocemos la proporción. Después de 120 lanzamientos construimos la serie de resultados:</p> <pre style="text-align: center;"> 01110110010110110101 11101111100100101001 11101100011011011110 10110110110010011111 11110110110101110101 01110011101011011100 </pre> <p>¿Cuántos ceros y cuántos unos piensas que tiene el dado?</p> <p>6.- CARMEN E ISABEL</p> <p>Carmen e Isabel lanzan un dado cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Carmen sea mayor que la de Isabel?</p>	P(caballo de copas)=	P(as)=	P(no salga oros)=	P(no salga as)=	P(figura o copas)=	P(par o múltiplo de 3)=	
P(caballo de copas)=	P(as)=							
P(no salga oros)=	P(no salga as)=							
P(figura o copas)=	P(par o múltiplo de 3)=							

HOJA EN BLANCO

**Unidad nº 9:**

**EL CAMALEÓN Y LA MOSCA**

HOJA EN BLANCO

# EL CAMALEÓN Y LA MOSCA

## A. En esta unidad trabajaremos:

- Modelos a escala de espacios tridimensionales.
- Optimización de distancias.
- Escalas y longitudes.
- Errores en la medida. Aproximaciones y redondeo.

Pretendemos que los alumnos entiendan que trabajar sobre representaciones de la realidad hechas a escala, no sólo simplifica la tarea, sino que también puede proporcionar soluciones sencillas a problemas que inicialmente no lo son.

## B. Material necesario

- Regla.
- Metro para medir.
- Papel cuadriculado y tijeras.
- Calculadora.

## C. Actividades para los alumnos

Esta unidad no está organizada a través de las hojas de trabajo para los alumnos. El profesor conducirá el proceso directamente mediante indicaciones verbales y gráficos en la pizarra.

Al final de la unidad, los alumnos elaborarán un resumen que contemple los siguientes puntos:

- a) Planteamiento del problema.
- b) Estrategias utilizadas en la resolución del problema.
- c) Errores de medida.
- d) Conclusiones de la actividad.
- e) Posibles ampliaciones.
- f) Opinión personal del alumno/a sobre la unidad.

## D. Actividades de evaluación

Además de los métodos generales de observación presentes a lo largo del curso, se utilizará como actividad de evaluación el resumen final de la unidad.

## E. Guía del profesor

- 1.- El profesor en una pared del aula marcará con tiza un punto procurando que esté más cerca del suelo que del techo (esta condición facilitará la construcción del modelo a escala de la clase ya que el techo no será necesario). En la pared opuesta dibujará otro punto, también más próximo al suelo que al techo, a una altura distinta a la del primero y en un lugar que no esté justo enfrente del otro punto. Uno representará a un camaleón y el otro a una mosca.

Pedirá a los alumnos que determinen cuál es el camino que deberá recorrer el camaleón para llegar hasta la mosca de forma que la distancia total recorrida sea la menor posible. ¿Cuánto valdrá esa distancia? Será preciso recordar que los camaleones no vuelan y que el camino debe seguir las paredes, el suelo o el techo.

Los alumnos, distribuidos en pequeños grupos, analizarán la situación y propondrán la solución que crean mejor. Pueden utilizar el material que crean necesario entre el que estará a su disposición (este material puede aportarlo el profesor, los alumnos o ambos).

- 2.- Puesta en común de las soluciones propuestas por los grupos. Es difícil (nunca nos ha pasado) que averigüen por dónde discurre el camino óptimo. Tras la exposición de los grupos, el profesor desechará las peores pero no desvelará la correcta, simplemente advertirá que vamos a investigar cuál es la mejor.

Si algún grupo hubiera encontrado la solución óptima, la explicarán a sus compañeros e intentarán convencerlos (no les resultará fácil). El profesor retomará el tema y, en cualquier caso, seguirá los siguientes pasos, bien para demostrar que es la solución buscada, o para conducir el proceso que dará con ella.

- 3.- El profesor propondrá la siguiente simplificación del problema:
  - ¿Qué pasaría si el camaleón y la mosca estuvieran en la misma pared? Obviamente el camino más corto vendría dado por la recta que une los dos puntos. La distancia podría obtenerse midiendo directamente con el metro.
  - Supongamos ahora que el camaleón estuviera en una pared y la mosca en el suelo y ambos estuvieran contenidos en un plano perpendicular al suelo y a la pared. El camino se obtendría bajando directamente al suelo desde el lugar que ocupa el camaleón y continuando en línea recta hasta la mosca. La distancia se calcularía sumando los dos tramos recorridos y para obtener la longitud de cada uno recurriríamos de nuevo al metro.
  - ¿Qué haríamos si la posición de la mosca y el camaleón no permitiera encontrar un plano que los contenga y sea perpendicular a la pared y al suelo? Trazar el camino más corto se complica, ¿cómo podemos dibujar líneas rectas salvando esquinas?

En este punto sugeriremos un modelo sencillo: doblaremos un folio por la mitad de forma que una de las partes represente la pared y la otra, perpendicular a la primera, el suelo.

Dibujaremos dos puntos que reproduzcan la situación planteada en la realidad.

Para obtener el camino buscado, desdoblaremos el folio convirtiendo nuestro modelo tridimensional en uno plano, y trazaremos sobre el folio la línea recta que une los dos puntos. Volviéndolo a doblar, veremos nuestro camino.

Trasladar el recorrido a la pared y al suelo del aula o calcular la distancia recorrida por el camaleón, sólo será posible si el modelo que hemos utilizado está hecho a escala. Tomaremos, entonces, las medidas oportunas sobre el papel y las trasladaremos a la realidad utilizando el factor adecuado.

Es fácil comprobar sobre nuestra representación que cualquier otro camino sería más largo, pues tendríamos un triángulo y sabemos que un lado mide siempre menos que los otros dos juntos.

- 4.- Estaremos en situación de volver al problema de partida. Sea cual sea la situación del camaleón y de la mosca, construiremos un modelo a escala de la clase (como mucho serán necesarias dos paredes y el suelo), dibujaremos sobre el modelo los puntos que representan al camaleón y la mosca (de nuevo utilizaremos el factor de escala), desdoblaremos el modelo volviendo al plano sobre el que dibujaremos la línea recta que una los dos puntos. El resto consistirá en trasladar la recta obtenida en nuestro modelo al aula (de nuevo la escala). Calcular la distancia no requerirá metro, la podremos medir sobre el dibujo y trasladarla mediante el factor de escala.
- 5.- Una posible ampliación de la actividad, que nunca hemos planteado, consiste en suponer que el camaleón quiere cazar dos moscas situadas en puntos distintos. El tema se complica y hace falta una investigación previa sobre cuál de todas las formas posibles de unir los tres puntos mediante dos rectas, proporcionará una distancia mínima.
- 6.- Se puede proponer para casa la siguiente situación:
  - Suponed, ahora, que el camaleón y la mosca se encuentran en el interior de un depósito cilíndrico. El camaleón está en un punto del círculo de la base y la mosca en la pared del depósito.
  - Buscad el camino más corto en cada una de las situaciones posibles. Id anotando las dificultades que encontréis, indicando posibles soluciones al problema.
- 7.- A la hora de llevar la actividad a la práctica, pueden surgir otras cuestiones paralelas. Por ejemplo: no será raro que al tomar las medidas en el aula se obtengan resultados distintos para una misma distancia. Será un buen momento para hablar de errores en las medidas y de que el valor más aproximado será el obtenido como media de varias mediciones.
- 8.- Al final de la actividad será interesante hacer hincapié en el procedimiento seguido para resolver el problema:
  - Partimos de una situación compleja.
  - Simplificamos el problema todo lo posible (camaleón y mosca en un mismo plano).
  - Resolvemos el caso sencillo (distancia más corta igual a línea recta).
  - Complicamos poco a poco la situación, resolviendo cada uno de los casos intermedios (modelo tridimensional que desdoblamos para hacerlo plano y poder dibujar la recta).
  - Finalmente, obtenemos un procedimiento general que nos permite resolver cualquier situación de partida.

HOJA EN BLANCO

# Bibliografía

## 1.- Problemas para resolver con ingenio

- AGOSTINI, F.: *Juegos de lógica y matemáticas*, Pirámide, Madrid, 1982.
- BALBUENA, L. y COBA, M<sup>a</sup> D. de la: *La matemática recreativa vista por los alumnos*, Proyecto Sur, Granada, 1992.
- BOLT, B.: *Actividades matemáticas*, Labor, Barcelona, 1982.
- BOLT, B.: *Más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona, 1988.
- BOLT, B.: *Divertimentos matemáticos*, Labor, Barcelona, 1988.
- BOLT, B.: *Aún más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona, 1989.
- BOLT, B. y HOBBS, D.: *101 proyectos matemáticos*, Labor, Barcelona, 1991.
- GARDNER, M.: *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza, Madrid, 1980.
- GARDNER, M.: *Paradojas ¡ajá!*, Labor, Barcelona, 1980.
- GARDNER, M.: *Inspiración ¡ajá!*, Labor, Barcelona, 1981.
- GARDNER, M.: *Circo matemático*, Alianza, Madrid, 1983.
- GARDNER, M.: *Festival mágico-matemático*, Alianza, Madrid, 1984.
- GARDNER, M.: *Carnaval matemático*, Alianza, Madrid, 1984.
- GARDNER, M.: *Izquierda y derecha en el Cosmos*, Alianza, Madrid, 1984.
- GUZMÁN, M. de: *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona, 1984.
- PERELMÁN, Y.: *Problemas y experimentos recreativos*, Mir, Moscú, 1975.

## 2.- Formas y figuras

- ALSINA, C. y otros: *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid, 1988.
- ELFFERS, J.: *El Tangram*, Labor, Barcelona, 1982.
- ERNST, B.: *Un mundo de figuras imposibles*, Taschen, Alemania, 1985.
- ERNST, B.: *El espejo mágico de M.C. Escher*, Taschen, Alemania, 1994.
- HILDEBRANDT, S. y TROMBA, A.: *Matemática y formas óptimas*, Prensa Científica, Barcelona, 1991.

### **3.-Fundamentación del currículo**

- BOYER, C. B.: *Historia de la Matemática*, Alianza, Madrid, 1986.
- CERO, Grupo: *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas*, Editorial propia, Valencia, 1984.
- CERO, Grupo: *Es posible*, ICE Universidad de Valencia, Valencia, 1989.
- DÍAZ, J. y otros: *Azar y probabilidad*, Síntesis, Madrid, 1987.
- DICKSON L. y otros: *El aprendizaje de las matemáticas*, Labor, Barcelona, 1991.
- FERRERO, L.: *El juego y la Matemática*, La Muralla, Madrid, 1991.
- GROSSWIRTH, M y SALNY, A.: *¿Es usted un genio?*, Planeta, Barcelona, 1995.
- MEC: *Diseño curricular base*, Madrid, 1988.
- MEC: *Matemáticas (Secundaria Obligatoria)*, Madrid, 1992.
- SHELL CENTRE: *El lenguaje de funciones y gráficas*, MEC, Madrid, 1990.

### **4.- Resolución de problemas**

- GUZMÁN, M. de: *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona, 1991.
- MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K.: *Pensar matemáticamente*, Labor, Barcelona, 1988.
- POLYA, G.: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1981.
- RODRÍGUEZ, R.: *Enjambre matemático*, Reverté, Barcelona, 1983.

### **5.- Otras propuestas de taller**

- ANTÓN, J.L. y otros: *Taller de Matemáticas*, Narcea, Madrid, 1994.
- BRIHUELA, J. y otros: *Taller de matemáticas*, MEC, Madrid, 1992.
- LÓPEZ, A. y otros: *El laboratorio de Matemáticas*, Ayuntamiento de San Fernando, Cádiz, 1993.
- LÓPEZ, C. y otros: *Taller de Matemáticas*, Mileto, Madrid, 1998.

### **6.- Otro material bibliográfico**

- *CALENDARIO MATEMÁTICO*, S.E.M.C.V. “Al-Khwarizmi”.
- Revista *NÚMEROS*, Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.
- Revista *SIGMA*, Sociedad Vasca de Profesores de Matemáticas.

- Revista *SUMA*, Federación Española de Profesores de Matemáticas.
- FISHER, R. y VINCE, A.: *Investigando las Matemáticas*, Akal, Madrid, 1990.
- GRACIA, F.: *Material para el "Taller de intuición espacial"*, VII JAEM, Madrid, 1995.
- MOLANO, A. y otros: *Combinatoria y Probabilidad (Papeles para el Bachillerato)*, Grupo "Halley", Cáceres, 1990.
- PÉREZ, L. y MARTÍNEZ, P.: *Taller de Matemáticas*, col. Tetraminós y pentaminós, Junta de Andalucía, Granada, 1990.
- PLATA, J. L.; POZO, M<sup>a</sup> del Mar; POZO, F. y SÁNCHEZ J. A.. *Unidad didáctica "PROBABILIDAD Y JUEGO"*, Curso ACD-A de Matemáticas, Zafra, 1992.
- RUIZ, F.: *Bandas de Moebius*, V JAEM, Castellón, 1991.

HOJA EN BLANCO

# Anexos

## Anexo 1: Encuesta del primer día de clase

DATOS PERSONALES DEL ALUMNO O DE LA ALUMNA	
Curso:	Grupo:
Apellido 1º:	Apellido 2º:
Nombre:	Fecha de nacimiento:
Nombre y ap. del padre:	Profesión:
Nombre y ap. de la madre:	Profesión:
Domicilio:	Localidad:
Teléfono:	Observaciones:

### DATOS ACADÉMICOS DEL ALUMNO O DE LA ALUMNA

- ¿Repites curso?
- ¿Qué asignatura te resulta más fácil?
- ¿Qué asignatura te resulta más difícil?
- ¿Qué profesión o carreras prefieres?
- Colegio de procedencia; localidad:
- ¿Cuáles fueron tus notas globales de matemáticas en 1º y 2º de ESO?
  - 1º ESO → I S B N Sb
  - 2º ESO → I S B N Sb
- Tu interés por las matemáticas lo calificarías de:
  - ESCASO                      NORMAL                      CONSIDERABLE
- ¿Por qué has elegido la asignatura optativa de Taller de Matemáticas?
- ¿Serías capaz de escribir el número 1.000 con tres números romanos?
- Consigue el número 1.000 con ocho ochos.

## Anexo 2: Modelos de prueba escrita

### TALLER DE MATEMÁTICAS

Nombre: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

#### OBSERVACIONES:

- Responde por escrito, lo más claramente posible.
- Justifica razonadamente tus respuestas.
- Puedes utilizar “la cuenta la vieja”.

#### 1.- EL TAPÓN DE CORCHO.

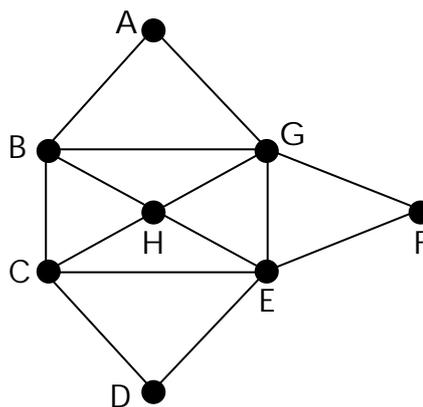
Una botella y un tapón valen 7 pesetas. La botella vale un duro más que el tapón.  
¿Cuánto vale el tapón?

#### 2.- LA ESCALA FLOTANTE.

Una escala de cuerda, que tiene cada 0,25 metros un peldaño, se echa por la borda de un barco, de modo que tenga 2,50 metros secos. Cuando la marea suba 1,50 metros, ¿qué longitud de la escala permanecerá seca?

#### 3.- DE UN SOLO TRAZO.

La figura siguiente la tienes que dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea. ¿Podrás hacerlo?



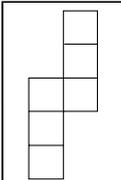
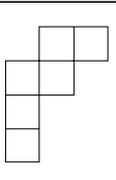
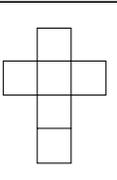
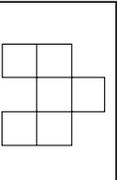
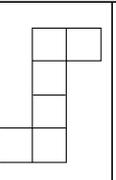
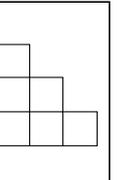
#### 4.- LA CABRA TRAGONA.

Una cabra está atada por una cuerda de 5 metros en una de las esquinas exteriores de una caseta de planta rectangular de dimensiones tres metros por cuatro metros y rodeada por un campo de hierba. ¿En qué área puede pastar la cabra?

## TALLER DE MATEMÁTICAS

Nombre: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

### HEXACATÁLOGO

						
Número de lados						
Perímetro						
Número de ejes de reflexión						
Número de posiciones						
Longitud del diámetro						

- 1.- Completa el hexacatálogo para los seis hexaminós dibujados en la primera fila.
  
- 2.- Supón que dispones de seis fincas, cada una de ellas con la forma de uno de los hexaminós anteriores. ¿Cuál será el área de cada una de las fincas? Si tuvieras que construir una valla alrededor de cada una de ellas ¿cuál de las seis fincas se vallaría con un coste menor?
  
- 3.- Indica razonadamente cuáles de los seis hexaminós que figuran en el hexacatálogo se pueden plegar formando un cubo o hexaedro.

## Anexo 3: Trabajo para vacaciones

- 1.- Escribir los dígitos del 1 al 9 (ambos inclusive), intercalando los signos aritméticos (+, -, x, /) que sean necesarios para que dé como resultado 100.
- 2.- Investiga un procedimiento que te permita calcular la cantidad de números naturales que contienen la cifra 2 entre el 100 y el 200.
- 3.- ¿En cuántas posiciones pueden coincidir el horario y el minuterero de un reloj que marcha normalmente?
- 4.- Querría repartir 30 salchichas iguales entre 18 personas, equitativamente. ¿Cuál es el número mínimo de cortes que tengo que hacer? ¿Cuál es el número mínimo de trozos que necesito hacer?
- 5.- Dos beduinos caminan por el desierto, uno de ellos lleva 3 panes y el otro 5. Cuando van a comer aparece un tercero que no lleva comida y se comen los 8 panes entre los tres. En agradecimiento a su buena acción, el último en llegar ofrece a los beduinos 8 monedas de oro, ¿cómo han de repartirlas?
- 6.- Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada una dama bailó con 7 caballeros, una segunda dama con 8, una tercera con 9, y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos los hombres. ¿Cuántas damas había en aquel baile?
- 7.- Sergio y Juan participan en una merienda. Sergio ha comido la mitad de los pasteles; y Juan, la mitad de lo que quedaba, más 3 pasteles. Ahora bien, ya no quedan más.  
¿De qué pasteles se componía la merienda?
- 8.- Dispongo de peces y peceras. Si coloco un pez en cada pecera, me sobra un pez.  
Si meto dos animales en cada pecera, veo que me sobra una. ¿Cuántos peces y peceras tengo?
- 9.- Tengo tantos hermanos como hermanas.  
La hermana de la persona que acaba de hablar declara:  
- Tengo dos veces más hermanos que hermanas.  
¿Cuántos hermanos son?
- 10.- Continúa la serie: 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43,....
- 11.- ¿Sabrías cómo quitarle a 19 uno y obtener como resultado 20?
- 12.- Un tren sale de Madrid a las 19 horas y 46 minutos. Pasa por Zaragoza a las 1 hora 30 minutos. Llega a Barcelona a las 7 horas 12 minutos.  
Otro tren sale de Barcelona a las 20 horas. Durante el camino se detiene una media hora en las cercanías de Tarragona por trabajos en la vía.  
Ambos circulan a 70 km. por hora.  
Cuando los trenes se cruzan, ¿cuál de ellos está más cerca de Madrid?

- 13.- Entre las afirmaciones de este problema hay tres errores. ¿Sabrías decir cuáles son?
- a)  $2 + 2 = 4$
  - b)  $4/(1/2) = 2$
  - c)  $3 - 1 \times 3 = 0$
  - d)  $7 - (-4) = 11$
  - e)  $-10(6 - 6) = -10$
- 14.- El señor Asamantecas tiene un asador pequeño, donde apenas caben dos chuletas. Su mujer y su hija Clara se mueren de hambre y están ansiosas por comer cuanto antes. El problema es asar las tres chuletas en el mínimo tiempo posible, sabiendo que cada chuleta tarda en hacerse veinte minutos, diez por cada cara.
- 15.- Expresa el número 10 utilizando cinco nueves y las operaciones que desees.
- 16.- LOS BICHEJOS: Rosa colecciona lagartos, escarabajos y gusanos. Tiene más gusanos que lagartos y escarabajos juntos. En total, tiene en la colección doce cabezas y veintiséis patas. ¿Cuántos lagartos tiene Rosa? (Los escarabajos tienen 6 patas).
- 17.- LA MERIENDA: Cinco señoras meriendan sentadas en torno a una mesa redonda. La señora de García está sentada entre la señora de López y la señora de Martínez. Elena está sentada entre Catalina y la señora de Pérez. La señora de López está entre Elena y Alicia. Catalina y Doris son hermanas. Isabel está sentada con la señora de Gómez a su izquierda y la señora de Martínez a su derecha. Coloca los nombres con sus correspondientes apellidos.
- 18.- En un poblado africano viven 800 mujeres, de ellas el 3% se adorna con un solo pendiente. Del otro 97% la mitad usa 2 pendientes, y la otra mitad, ninguno. ¿Cuántos pendientes llevan en total estas mujeres?
- 19.- Disponiendo de un reloj de arena de 7 minutos y de otro de 11 minutos, ¿cuál es el método más rápido para controlar la cocción de un huevo, que debe durar 15 minutos?
- 20.- Un griego nació el séptimo día del año 40 a. de C. y murió el séptimo día del 40 d. de C. ¿cuántos años vivió?
- 21.- Tenemos dos jarras exactamente iguales con igual cantidad de líquido, una contiene agua y la otra vino. Pasamos una cucharada de agua a la jarra de vino y después una cucharada de la mezcla resultante a la jarra de agua. ¿Qué hay más, vino en la jarra de agua o agua en la jarra de vino?
- 22.- En un tubo de ensayo de 3 ml. de capacidad, hay un microbio que, cada segundo que pasa, se convierte en dos. Al cabo de 30 minutos el tubo está lleno hasta la mitad (1,5 ml.) de microbios.  
¿Cuánto tiempo tardará en llenarse completamente el tubo?
- 23.- Un coche cubrió la distancia entre dos ciudades a 120 km./h e hizo el regreso a 80 km./h  
¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?

## Anexo 4: Cuestionario para la evaluación de la asignatura y del profesor

### OBSERVACIONES PREVIAS:

- *Lee atentamente cada una de las preguntas y reflexiona antes de contestar.*
- *En las preguntas con varias respuestas, señala la o las respuestas con las que estés más de acuerdo.*

1.- ¿Cuál de las actividades realizadas a lo largo del curso te ha resultado más atractiva?

- Unidad nº 1 El Tangram.
- Unidad nº 2 Problemas de ingenio.
- Unidad nº 3 Poliminós y policubos.
- Unidad nº 4 La Banda de Moebius.
- Unidad nº 5 Grafos eulerianos.
- Unidad nº 6 Construcción de un depósito.
- Unidad nº 7 Gráficas y funciones.
- Unidad nº 8 Comenzando al azar.
- Unidad nº 9 El camaleón y la mosca.

2.- ¿Cuál de las actividades te ha resultado menos atractiva? ¿Por qué?

3.- ¿Sobre qué otros temas de Matemáticas te hubiera gustado que se trabajase en el Taller de Matemáticas?

4.- Próximo a finalizar el curso:

- La idea que tenías en un principio de esta asignatura, ¿corresponde con lo que ha sido?

- a) Sí
- b) No
- c) A veces.

- En la mayoría de las clases del Taller:

- a) Me he aburrido como una ostra.
- b) Me lo he pasado bomba.
- c) He trabajado y he conocido una forma distinta de hacer Matemáticas.
- d) Se me han pasado volando.
- e) Me han parecido eternas.

5.- ¿En qué ha cambiando tu opinión sobre las Matemáticas después de haber cursado el Taller de Matemáticas?

6.- Indica con cuáles de las siguientes frases estás de acuerdo:

- a) Las Matemáticas pueden ser divertidas.
- b) Con las Matemáticas sólo se pueden divertir los alumnos “empollones”.
- c) Lo que se hace en el Taller no son Matemáticas.

7.- He trabajado en la mayoría de las actividades más a gusto en:

- a) Grupo
- b) Pareja
- c) Individualmente

8.- Las pruebas y ejercicios que se han utilizado para evaluar:

- ¿Crees que han sido?

- a) Pocas
- b) Adecuadas
- c) Muchas

- ¿Crees que han servido para evaluar correctamente tu trabajo en grupo?

- a) Sí
- b) No
- c) A veces

- ¿Crees que han servido para evaluar correctamente tu trabajo individual?

- a) Sí
- b) No
- c) A veces

9.- ¿Consideras que las calificaciones que te ha dado tu profesor en los ejercicios evaluados han sido?

- a) Altas
- b) Bajas
- c) Correctas

10.- ¿Te arrepientes de haber elegido el Taller de Matemáticas como asignatura optativa?

11.- ¿Qué opinas sobre la utilización de material (papel, tijeras, calculadora, policubos, etc.) en la clase del Taller de Matemáticas?

- a) Me ha gustado.
- b) Me ha parecido infantil.
- c) Me ha parecido escaso.
- d) Trabajar con material me ayuda a pensar.

- 12.- ¿En su trato con los alumnos y alumnas el profesor es?
- a) Educado.
  - b) Se cree muy superior.
  - c) Correcto. Distante.
  - d) De igual a igual.
  - e) Nos tiene atemorizados.
- 13.- ¿El profesor muestra preferencia por determinados alumnos o alumnas?
- a) Sí
  - b) No
  - c) A veces
- 14.- ¿Da las mismas oportunidades a los alumnos que destacan que los alumnos con dificultades?
- a) Sí
  - b) No
  - c) A veces
- 15.- Cuando el profesor plantea un problema, ¿deja tiempo suficiente para que la mayoría de los alumnos lo hagan?
- a) Sí
  - b) No
  - c) A veces
- 16.- ¿Se puede apreciar un trato diferente a los alumnos que a las alumnas por parte del profesor?
- a) Sí
  - b) No
  - c) A veces
- 17.- ¿Cuál o cuáles de las frases siguientes se ajustan mejor a la forma de explicar de tu profesor?
- a) Nunca explica.
  - b) Explica muy deprisa.
  - c) Explica sólo para los más listos.
  - d) Repite las explicaciones siempre que se lo pides.
  - e) Es muy desordenado en la pizarra.
  - f) No hay quien lo entienda.
  - g) Te pone muchos ejemplos para que lo entiendas todo muy bien.
- 18.- ¿Sobre qué tema relacionado con el Taller de Matemáticas te hubiera gustado dar tu opinión y tu profesor no te la ha pedido?
- ¿Cuál es tu opinión sobre este tema?

## Anexo 5: Informe para alumnos con evaluación negativa

Alumno/a:

Grupo:

Asignatura: TALLER DE MATEMÁTICAS.

Profesor:

- 1.- Objetivos de la asignatura no conseguidos (los marcados con un círculo):
  - a) Incorporar al lenguaje habitual las formas de expresión matemática.
  - b) Mostrar actitudes propias de la actividad matemática en situaciones cotidianas.
  - c) Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas.
  - d) Elaborar estrategias personales. Conocer las propias habilidades.
  - e) Identificar cuerpos y figuras geométricas en situaciones reales.
  - f) Otros:
- 2.- Mínimos no superados por el alumno/a a lo largo del proceso de evaluación:
  - a) Orden, limpieza y gusto por el trabajo bien hecho.
  - b) Utilización precisa del lenguaje.
  - c) Análisis crítico de los resultados obtenidos en los problemas, aprendiendo de los errores cometidos.
  - d) Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda y mejora de soluciones a los problemas.
  - e) Actitud positiva ante las actividades y situaciones planteadas.
  - f) Desarrollo de técnicas generales de resolución de problemas.
  - g) Otros:
- 3.- Sugerencias para la consecución de lo anterior, a realizar durante el verano:
  - a) Repaso de las actividades desarrolladas a lo largo del curso, completando aquellas que lo requieran y haciendo los ejercicios que se propusieron por el profesor.
  - b) Otras:
- 4.- Carencias globales del alumno/a en las que se debe incidir:
  - a) Cambio de actitud hacia la asignatura e interés por el estudio y las matemáticas.
  - b) Otras:
- 5.- Medidas de refuerzo y/o adaptaciones tomadas a lo largo del curso y valoración de su funcionamiento:
  - a) Las medidas de recuperación han sido las que figuran en la programación. Los mínimos, que son procedimientos y actitudes muy generales, se han trabajado en cada una de las unidades desarrolladas en el curso. Por tanto en cada una se ha intentado recuperar, a la vez que afianzar, dichos mínimos.
  - b) Otras:

HOJA EN BLANCO

# Notas para el lector

El desarrollo que hemos realizado de las distintas unidades gira en torno a las actividades de las hojas de trabajo para los alumnos. En cada una de ellas se proponen varios apartados, unos para realizar en clase (en una o varias sesiones, según su complejidad y el criterio del profesor) y otros para realizar en casa. Junto con cada actividad figuran los materiales (gráficos, tablas,...) que necesitan los alumnos para desarrollar su trabajo.

Paralelamente, en la “guía del profesor” se comenta cada una de estas actividades y se dan orientaciones sobre el desarrollo de las mismas, presentando la solución en aquellos casos en los que hemos estimado conveniente. En esta guía siempre se hace referencia a la hoja de trabajo del alumno y, en ocasiones, es necesaria una lectura conjunta de ambas para una mejor comprensión.

Cada unidad se completa con una relación de los contenidos tratados, el material necesario y algunas sugerencias sobre evaluación.

HOJA EN BLANCO

HOJA EN BLANCO

HOJA EN BLANCO