Problemas de las
Olimpiadas Matemáticas
en Extremadura (1992-1997)

Problemas de las
Olimpiadas Matemáticas
en Extremadura (1992-1997)

Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prósper"

JUNTA DE EXTREMADURA
Consejería de Educación y Juventud
Dirección General de Promoción Educativa
Mérida, 1997

Edita:
JUNTA DE EXTREMADURA
Consejería de Educación y Juventud
Dirección General de Promoción Educativa
Mérida. 1997

Colección:
Recursos Didácticos

Diseño de línea editorial:
JAVIER FELIPE S.L. (Producciones & Diseño)

I.S.B.N.:
84-923364-0-4

Depósito Legal:
BA-43-1997

Fotomecánica e Impresión:
INDUGRAFIC, Artes Gráficas, S.L. (Badajoz)

Índice

Presentación 9

Introducción 11

I OLIMPIADA 1992
Fase comarcal 15
Fase regional. Castuera 18

II OLIMPIADA 1993
Fase comarcal 21
Fase regional. Jarandilla 27

III OLIMPIADA 1994
Fase comarcal 33
Fase regional. Zafra 37

IV OLIMPIADA 1995
Fase comarcal 41
Fase regional. Valencia de Alcántara 46

V OLIMPIADA 1996
Fase comarcal 51
Fase regional. Hervás 55

VI OLIMPIADA 1997
Fase comarcal 59
Fase regional. Don Benito 63

VII OLIMPIADA NACIONAL 69

Presentación

El importante lugar que ocupan las Matemáticas en el Sistema Escolar viene determinado, como bien señala la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo, por su contribución al desarrollo de capacidades cognitivas abstractas y formales, y también por el valor funcional que poseen para resolver problemas en campos muy diferentes.

La resolución de problemas es una actividad genuinamente matemática, ya que en ella se ponen en juego las principales características del quehacer del matemático, tales como formular hipótesis, particularizar, poner ejemplos y contraejemplos, resolver casos particulares, etc. También puede ser una herramienta metodológica importante, pues la reflexión que se lleva a cabo durante las labores de resolución de problemas ayuda a la construcción de los conceptos y a establecer relaciones entre ellos.

Pero además de ser el corazón de las Matemáticas, la resolución de problemas favorece el desarrollo de actitudes relacionadas con el interés por investigar, con la creatividad al formular conjeturas, con la autonomía intelectual para abordar situaciones nuevas y con la perseverancia en la búsqueda de soluciones. Por tanto, puede ser un instrumento muy eficaz para la consecución de los objetivos generales relativos al desarrollo del equilibrio personal que la L.O.G.S.E. establece para la Educación Secundaria.

Para que los alumnos y alumnas puedan abordar la resolución de problemas con perspectiva enriquecedora, desde el punto de vista afectivo y personal, los profesores de Matemáticas necesitan proponer situaciones motivadoras, favorecedoras de la creatividad y compatibles con la diversidad.

A esta finalidad pretende contribuir el trabajo que publica la Consejería de Educación y Juventud. Ofrecer al profesor interesado, el resultado de la recopilación de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas que, dirigidas a alumnos y alumnas de 14 años, se han venido celebrando en Extremadura bajo la organización de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper".

Desde sus comienzos en 1992, esta iniciativa de un grupo de profesores extremeños ha contado con el impulso de la Consejería, por entender que esta actividad educativa favorece el acercamiento lúdico a las Matemáticas y la convivencia entre el alumnado de distintas zonas de nuestra Comunidad Autónoma. Este apoyo ha culminado en 1997 con la asunción por parte de la Consejería de Educación y Juventud de la responsabilidad de la convocatoria y de su financiación, quedando la Sociedad Extremeña de Educación Matemática encargada del seguimiento y organización de la misma.

Así pues, la colección de problemas que se presentan están avalados por el entusiasmo de los cientos de jóvenes extremeños que han participado en dichas Olimpiadas y que pueden atestiguar que matemáticas y diversión no son incompatibles.

Esperamos, en fin, que sea bien acogida por profesores y alumnos y cale en la comunidad educativa, y en toda la sociedad, el intento que suponen de ayudar a resaltar el papel humanista del profesor de matemáticas, capaz de despertar una inquietud intelectual en sus alumnos y alumnas y capaz, sobre todo, de presentar la Matemática como una ciencia amiga.

El Consejero de Educación y Juventud
Luis Millán Vázquez de Miguel

Introducción

La Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", que agrupa a enseñantes de todos los niveles educativos interesados en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, se fundó en el año mil novecientos noventa como foro de encuentro de todas las personas con inquietudes en nuestra Región por las Matemáticas, quedando integrada en la Federación Española de Sociedades de Educación Matemática.

Comenzó sus andaduras con los I Encuentros de Profesores de Matemáticas Extremeños, celebrados en Mérida, junto con la presentación en Extremadura a Profesores y alumnos de la exposición Horizontes Matemáticos, en la que podían ir realizándose una serie de actividades manipulativas matemáticas durante su recorrido y que fue visitada por numerosos centros escolares extremeños de los niveles de primaria y secundaria.

Con este comienzo de participación de los escolares extremeños en las actividades de esta Sociedad, surge el movimiento olímpico matemático en Extremadura cuya finalidad es fomentar el gusto por la imaginación y la creatividad matemática, a la vez que servir como vehículo de comunicación y convivencia entre alumnos, profesores y padres.

El movimiento olímpico se ve consolidado durante el curso escolar 1991-92 con la convocatoria de la I Olimpiada Matemática para escolares de octavo de E.G.B. de centros educativos de Extremadura.

Se celebró en dos fases una primera comarcal con sede en las localidades de Badajoz, Cáceres, Coria, Don Benito, Herrera del Duque, Jarandilla de la Vera, Mérida, Plasencia, Valencia de Alcántara y Zafra, donde se dieron cita seiscientos ochenta y ocho chicos/as provinientes de numerosas localidades extremeñas.

La segunda fase, autonómica, se celebra en Castuera, cuna del Matemático que da nombre a esta Sociedad (D. Ventura Reyes Prósper); con tal motivo el Excelentísimo Ayuntamiento reconoce la labor de este insigne matemático extremeño dando su nombre a una calle de esta bonita y cordial localidad.

A esta fase asisten los treinta clasificados/as en la fase comarcal, que durante tres días conviven en torno a las matemáticas, realizando pruebas por parejas e individuales, a la vez que visitas culturales tanto en la localidad como en el entorno.

No podemos olvidar el gran esfuerzo que realizó el compañero de esta Sociedad José Macías Marín (Coordinador Regional de la Olimpiada), para que esta I Olimpiada culminase con la gran acogida por parte de los centros educativos extremeños y fuese el incio de una aventura matemática que se encuentra ya consolidada en nuestra Región.

Ciertamente pensar que casi setencientos chavales habían disfrutado en torno a las matemáticas, supuso para esta Sociedad un gran ánimo que junto con las peticiones de numerosas localidades y Centros para ser sedes en proximas olimpiadas, nos llevó a todos a convocar en años sucesivos, las olimpiadas que se han venido desarrollando de forma ininterrupida con gran participación.

Desde su inicio en Castuera, se han celebrado fases comarcales en numerosas localidades, siempre abiertas y dispuestas a prestar colaboración para el perfecto desarrollo de las mísmas.

La fase autonómica de la II Olimpiada se celebra en Jarandilla de la Vera (1993), la III en Zafra (1994), IV en Valencia de Alcántara (1995), V en Hervás (1996), VI en Don Benito (1997) y la VII, correspondiente a 1998 se celebrará en Monesterio.

Conscientes del interés despertado en nuestros escolares por la Olimpiada Matemática y del apoyo prestado por los diferentes estamentos educativos, en el curso 1995-96, la Federación de Sociedades de Educación Matemática, nos concede la organización de la VI Olimpiada Nacional de Matemática, que se celebra con sede oficial en Valencia de Alcántara, y sedes volantes en Cáceres y Mérida.

Desde sus inicios la Consejería de Educación y Juventud de la Junta de Extremadura comprendió el alcance y el interés para la Comunidad Educativa de esta actividad. Su impulso y ayuda decidida ha sido decisiva para que la Olimpiada Matemática se haya desarrollado de forma ininterrumpida desde entonces. Nos encontramos ya ante una actividad consolidada que asume la Consejería de Educación (desde el curso escolar 1996-97) mediante la firma de un convenio de cooperación. A tenor del mismo la Consejería convoca como propia la actividad asumiendo el coste de la misma, mientras que la Sociedad Extremeña de Educación Matemática es la encargada de su organización.

La preparación cada año, por parte de los profesores de los Centros, de los alumnos participantes de la Olimpiada provoca la necesidad de contar con materiales e ideas que difícilmente se encuentran en las editoriales. Los propios problemas propuestos en las olimpiadas anteriores constituyen una información valiosa para la preparacion de las siguientes que no debemos permitir que se pierda.

Esta idea de recopilar el material es una sugerencia continuada de los numerosos profesionales de la enseñanza que han intervenido en las diversas convocatorias de esta actividad.

Tratando de satisfacer esta necesidad sentida, la Junta Directiva de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática decide proponer a la Consejería de Educación esta publicación que recoge todos los problemas propuestos en las fases comarcales y autonómicas de las olimpiadas celebradas en Extremadura, junto con los de la VI Olimpiada Nacional. La Consejería acepta la propuesta y publica este libro que, en nuestra opinión, constituye un valioso material de orientación y refuerzo que ayudará sin duda a los chavales a enfocar la Matemática como una asignatura amena y divertida.

No nos queda más que agradecer el apoyo continuo y el patrocinio de la Consejería de Educación y Juventud de la Junta de Extremadura. Por otra parte queremos también agradecer el apoyo que los profesores de Matemática han prestado y prestan para que esta actividad olímpica llegue cada vez a más Centros y localidades de Extremadura.

Cipriano Sánchez Pesquero
(Coordinador de la VII Olimpiada Regional)
Ricardo Luengo González
(Presidente de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper")

I OLIMPIADA 1992

Fase comarcal

Problema 1. Utilizando obligatoriamente 4 cuatros y las operaciones +, -, x, : y potenciación, expresa el número 16 de cuatro formas distintas como mínimo.

Solución

Entre otras posibilidades, se apuntan las siguientes:

a)	$4 + 4 + 4 + 4 = 16$	b)	$4 \times 4 + 4 - 4 = 16$
c)	$4 \times 4 \times 4 : 4 = 16$	d)	$(4 \times 4):(4 : 4) = 16$
e)	$4^4 : (4 \times 4) = 16$	f)	$4 \times 4 : 4 \times 4 = 16$
g)	$4^{4:4} \times 4 = 16$	h)	$4^{(4+4):4} = 16$

Problema 2. Las letras A, M y H representan números y ? es una operación.

$$A \,?\, M = 6$$
$$H \,?\, A = 10$$
$$M \,?\, H = 15$$
$$M \,?\, A \,?\, H = 30$$

Calcular el valor de A, M y H y expresar qué operación es ?
Razona tu respuesta.

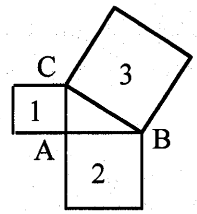
Solución

Suponiendo que los números buscados son naturales, fácilmente se llega a que la operación ? es la multiplicación, siendo la solución:

$$A = 2, \quad M = 3, \quad H = 5.$$

Al no indicar en el enunciado de qué clase de números se trata, e investigando con las restantes operaciones, adición, sustracción y división, se llegaría en los tres casos a sistemas de ecuaciones sin solución.

Problema 3. Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se construyen, utilizando láminas de madera, los cuadrados 1, 2 y 3.



Sabiendo que el cuadrado nº 1 pesa 15 gramos y el nº 2 pesa 20 gramos, ¿sabrías averiguar el peso del nº 3?

Da una justificación del método empleado.

Solución

Según el teorema de Pitágoras, el cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene un área igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos.

Por tanto el peso del cuadrado nº 3 es la suma de los pesos de los cuadrados 1 y 2: 15 + 20 = 35 gramos.

Problema 4. La gente piensa que se ahorra mucho comprando en los grandes hipermercados. Carlos discute con una amiga que a veces no son tan rentables, y lo argumenta diciendo que lo que te ahorras por un lado, por otro te lo gastas en gasolina.

Carlos comenta que el ahorro aproximado, comprando en un hiper, se calcula en un 15 % sobre la misma compra en la tienda de al lado de su casa. Ambos viven en un pueblo situado a 25 km de la ciudad donde se encuentra el hiper. Siguiendo la conversación, su amiga dice que el coche de su padre es ya antiguo y le cuesta desplazarse unas 10 pts por km.

En esto, llega la madre de Carlos y les informa que ella suele hacer una compra semanal de unas 8.000 pts, preguntándole si le merecería la pena desplazarse al hiper y, en su caso, cuánto se ahorraría.

Ayuda a Carlos y a su amiga respondiendo a la pregunta de su madre y calcula también a partir de qué precio total de la compra comienza a ser rentable, a la madre de Carlos, comprar en el hiper.

Solución

La compra del hiper tiene el gasto del coche, que supone 50 km por 10 pts, y la ventaja del descuento del 15 %, esto es:

$$8.000 + 500 - 8.000 \times \frac{15}{100} = 7.300 \text{ pts.}$$

Por tanto es ventajoso comprar en el hiper.

Si llamamos x al dinero que cuesta la compra, hemos de resolver la inecuación

$$\frac{15\,x}{100} > 500 \quad \Rightarrow \quad x > 3.333,\widehat{3}$$

Es decir, a partir de 3.334 pts, redondeando, empieza a ser rentable desplazarse al hiper a hacer la compra.

Problema 5. En mis últimas vacaciones llovió 9 días y hubo 10 mañanas y 9 tardes soleadas. Además, cuando llovió por la mañana, la tarde fue soleada. ¿Cuántos días duraron mis vacaciones?

Solución

Sean:

	Lluviosas	Soleadas
Mañanas	x	10
Tardes	y	9

Como llovió durante 9 días, debe ser $x + y = 9$.
Además, el número de mañanas es igual al número de tardes, por tanto:

$$x + 10 = y + 9.$$

De donde el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=9 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=4 \quad y=5$$

Por tanto las vacaciones duraron 4 + 10 = 5 + 9 = 14 días.

Problema 6. Pedro ha forrado un cubo de tela para que juegue su hermana, y aún le ha sobrado parte de la pieza de tela que compró su madre.

Ahora quiere forrar un cubo cuya arista mide el doble que el anterior.

La tela sobrante tiene aproximadamente el triple de superficie que se utilizó en el forro, con lo que cree que podrá forrar el "cubo doble".

¿Crees que conseguirá Pedro su objetivo? Razona tu respuesta.

Solución

Si la arista del cubo mide a unidades de longitud (u), la superficie forrada es igual a $6a^2\ u^2$.

Para un cubo de arista doble, 2a, la superficie a forrar sería: $6.4a^2 = 24a^2\ u^2$.

Como dispone del triple de tela empleada para forrar el primer cubo, tiene en total $3 \times 6\ a^2 = 18\ a^2\ u^2$.

Pero necesita $24a^2\ u^2$.

Conclusión: No puede forrar el cubo de arista doble.

Fase regional. Castuera

Problema 1. Colocar en cada casilla un número del 1 al 9, sin repetir ninguno, de modo que los productos horizontales y verticales sean los que se indican en la figura. Razona cómo lo haces.

			36
			48
			210
48	56	135	

Solución

Si nos fijamos en la 3ª fila y 2ª columna, los números 210 y 135 son múltiplos de 5; por lo tanto, en su intersección debe figurar el 5,

Por un razonamiento análogo, en la intersección de la 1ª fila y 3ª columna debe estar el 9.

Repitiendo este procedimiento es fácil llegar a estas soluciones:

1	4	9	36
8	2	3	48
6	7	5	210
48	56	135	

4	1	9	36
2	8	3	48
6	7	5	210
48	56	135	

Problema 2. Dos alumnos de un curso de 8º de EGB quieren hacer participaciones de lotería para venderlas con un pequeño recargo y así obtener fondos para la excursión de fin de curso.

El mayor recargo permitido por Hacienda es el 20 %.

Uno propone hacerlas de 80 ptas y venderlas a 100 ptas, mientras que el otro las quiere hacer de 100 ptas y venderlas a 120.

Da tu opinión, razonando qué opción tomarías y por qué?

Solución

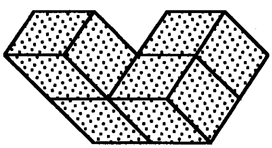
La primera propuesta no estaría permitida por Hacienda, pues el aumento permitido es el 20 % de 80 ptas, que supone 16 ptas. El precio de la papeleta debería ser de 96 ptas.

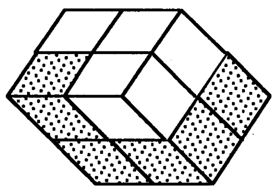
Sin embargo, la segunda propuesta sí es correcta, pues el 20 % de 100 ptas es 20 ptas y la papeleta se venderá a 120 ptas.

Problema 3. Utilizando cubos de colores de dimensiones 1 x 1 x 1, construye dos figuras idénticas a la que aparece en el dibujo. Observa que las dos pueden encajarse para formar otro cubo.

Construye y dibuja en la trama el mayor número de figuras formadas por 4 cubos de 1 x 1 x 1 y que cumplan la observación anterior.

Figura



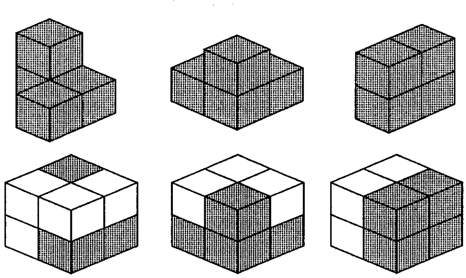


Dos figuras iguales encajadas

Se les entrega un folio con la trama

Solución

Los cubos serían:



Todos ellos de dimensiones 2 x 2 x 2.

Problema 4. A una fiesta asisten 5 personas, Cuando se saludan lo hacen dándose la mano. ¿Cuántos apretones de manos se darían en total?

¿Y si lo hiciérais entre los 31 alumnos participantes en esta fase final de la Olimpiada Matemática?

Solución

Sean A, B, C, D y E las cinco personas. A saluda a B, C, D y E, dando por tanto, cuatro apretones de mano. Análogamente B saluda a A, C, D y E y da otros cuatro apretones.

Cada persona da, pues, cuatro apretones de manos. En total serán 4x5 = 20 apretones. Como cada apretón se ha contabilizado dos veces, en definitiva se darán 10 apretones de mano.

Si fueran 31 alumnos los que se saludan, darían $\frac{31 \times 30}{2} = 465$ apretones de mano.

II OLIMPIADA 1993

Fase comarcal

Problema 1. Los bombones fáciles.

Una pastelería ofrece como premio una caja de bombones para aquel que sea capaz de averiguar el número de bombones que contiene la caja valiéndose de las tres pistas siguientes:

a) La caja contiene menos de 50 bombones.
b) Al contar de nueve en nueve da un resultado exacto.
c) Al contar de once en once sobra uno.

¿Serás capaz de averiguar el número de bombones?

Solución

Según los apartados a y b, la cantidad de bombones ha de ser un múltiplo de 9 menor de 50, luego puede haber 9, 18, 27, 36 ó 45 bombones. Por la condición c el número debe ser múltiplo de once más uno, siendo el número $45 = 4 \times 11 + 1$, el único que lo cumple.

Hay 45 bombones.

Problema 2. Los bichejos.

Rosa colecciona lagartos, escarabajos y lombrices. Tiene más lombrices que lagartos y escarabajos juntos. En total, tiene en la colección 12 cabezas y 26 patas.

¿Cuántos lagartos tiene Rosa?
(Los escarabajos tienen 6 patas).

Solución

Llamamos L al número de lagartos, E al de escarabajos y Lo al de lombrices.
La relación entre las incógnitas es:

$$Lo > L + E$$
$$Lo + L + E = 12$$
$$6E + 4L = 26$$

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} Lo + L + E = 12 \\ 2L + 3E = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2Lo + 2L + 2E = 24 \\ 2L + 3E = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow E = 2Lo - 11$$

Como el número de escarabajos debe ser positivo, es $Lo \geq 6$
De la primera ecuación:

$$L = 12 - Lo - E = 12 - Lo - (2Lo - 11) = 23 - 3\,Lo$$

y como el número de lagartos debe ser positivo, es $Lo < 8$.

Las condiciones anteriores nos permiten asegurar que $Lo = 6$ ó $Lo = 7$, pues $6 \leq Lo < 8$.

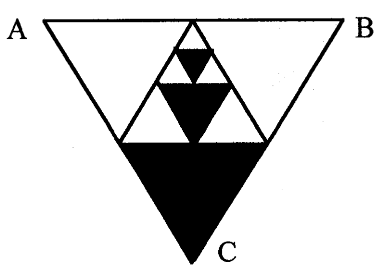
Si $Lo = 6$, entonces $E = 1$ y $L = 23 - 3 \,.\, 6 = 5$. Solución no válida pues $Lo > L + E$ y $6 \quad 5 + 1$.

Si $Lo = 7$, entonces $E = 2 \,.\, 7 - 11 = 3$, $L = 23 - 3 \,.\, 7 = 2$. Por tanto

LOMBRICES: 7 ESCARABAJOS: 3 LAGARTOS: 2

Problema 3. Triangulitis.

El triángulo ABC de la figura es equilátero y su área es 4 m^2. Los triángulos interiores se forman uniendo los puntos medios de los lados. Calcula el área de la zona sombreada.



Solución

El problema puede acometerse de varias formas, pero creemos que lo más elegante es observar que cada triángulo sombreado es la cuarta parte del triángulo que lo contiene.

Llamemos T_1 al mayor triángulo sombreado, T_2 al segundo y T_3 al tercero en tamaño:

$$T_1 = \frac{1}{4} \text{ área de ABC} = \frac{1}{4} . 4 = 1 \text{ m}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{4} T_1 = \frac{1}{4} \text{ m}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{4} T_2 = \frac{1}{4} . \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{m}^2$$

Siendo el área:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16} \text{ m}^2$$

Posible ampliación: Si el proceso de construcción de triángulos equiláteros lo continuamos, la suma $T_1 + T_2 + T_3 ... + T_n$ se puede calcular por ser la suma de n términos de una progresión geométrica.

Problema 4. Vendedores de espárragos.
En el mercado un comprador le dice al vendedor lo siguiente:

"Ese manojo de espárragos cuesta 150 pts. Te daré el doble, 300 pts., por un manojo que esté atado con una cuerda el doble de larga que la del primero y que contenga todos los espárragos que quepan dentro".

¿Qué harías si fueses el vendedor? ¿Aceptarías el trato?

Solución

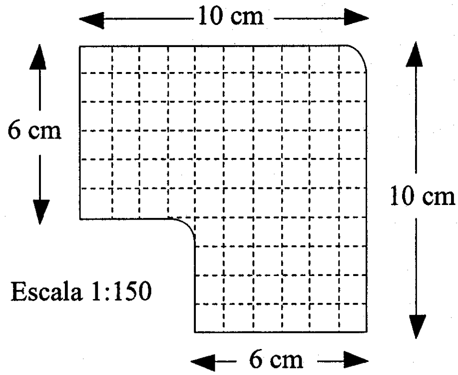
El área del círculo correspondiente al primer manojo es πr^2, la longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r$ y los espárragos que caben cuestan 150 pesetas.

La longitud del círculo correspondiente al segundo manojo es 2l, y su radio R debe ser tal que $2l = 4\pi r = 2\pi R$, por tanto $R = 2r$. El área del círculo será $A = \pi R^2 = 4\pi r^2$, el cuádruple de la anterior. Por tanto debería costar 4 veces, es decir, 600 ptas.

Si fuese el vendedor, no aceptaría el trato.

Problema 5. Local de negocios.
Eduardo quiere comprar un local para montar un negocio. En la inmobiliaria le han dado el plano de uno que está bien situado y que puede interesarle. Al llegar a casa se le ha olvidado el precio exacto del local; recuerda que que el metro cuadrado costaba

80.000 pts. y necesitaba conocer el importe total. Para ello ha medido el dibujo y anotado los valores obtenidos tal y como puedes ver. Utilizando esta información ¿cómo calcularías el precio del local?



Solución

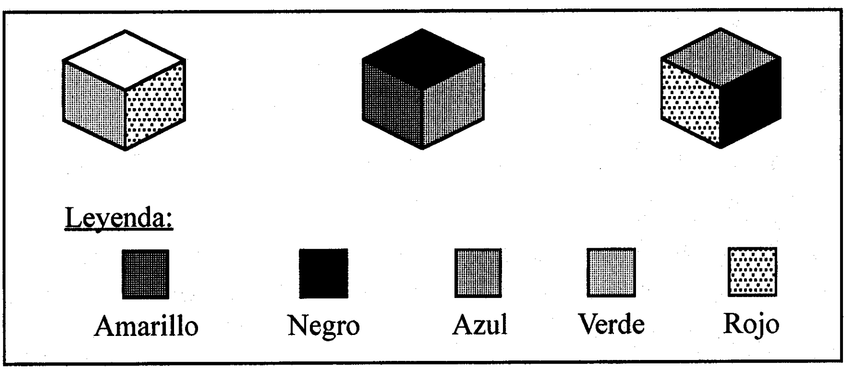
Si observamos la figura del problema, el espacio que se pierde en la esquina redondeada de la derecha, se gana en la redondeada de la izquierda, el recinto está formado por un cuadrado de 10 x 10 cm^2 menos un cuadrado 4 x 4 cm^2. En total hay 100 - 16 cm^2.

Pero 1 cm del plano equivale a 150 cm, 1'5 m, en la realidad, y 1 cm^2 del plano equivale a $1'5^2 = 2'25$ m^2 en la realidad, por tanto la superficie del local es:

$$84 \times 2'25 = 189 \text{ m}^2.$$

y el coste: 189 x 80.000 = 15.120.000 ptas.

Problema 6. Dado de colores.
En un dado hemos pintado cada una de sus caras de un color distinto.



Observando las tres posiciones del dado, ¿cuál es el color de la cara opuesta a la de color verde?

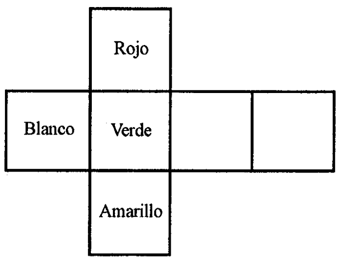
Explica el razonamiento seguido.

Solución

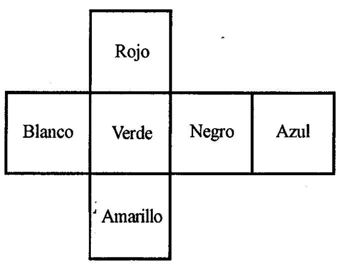
Observamos las figuras 1 y 3:
Fig. 1: Frente al rojo no están ni blanco ni verde.
Fig. 3: Frente al rojo no están ni negro ni azul.

Por tanto, frente al rojo está el amarillo.

Hacemos el desarrollo del cubo y situamos los colores como indica la primera posición, incluido el amarillo:



A continuación colocamos en el mismo desarrollo los colores como indica la tercera vista:



El color de la cara opuesta a la verde es el azul.

Problema 7. El hotel.
En el hotel Galipandrón (pueblo de la montaña pirenáica) los precios de las habitaciones son los siguientes: 4.000 pts. la habitación individual, 6.000 pts. la doble y 8.000 pts. la triple.

Esta tarde llegarán al hotel seis excursionistas y no sabemos cuántos hombres ni cuántas mujeres hay en el grupo. Teniendo en cuenta que hombres y mujeres deben dormir en habitaciones separadas, cuántas habitaciones prepararías y cuántas camas pondrías en cada una de forma que el precio final fuera el menor posible y que pudieran dormir los seis sin tener que trasladar ninguna cama cuando lleguen.

Solución

Las posibles distribuciones son:

0 hombres y 6 mujeres			
Habitaciones			
I	D	T	Precio
		2	16.000
	3		18.000
1	**1**	**1**	**18.000**
2	2		20.000
4	1		22.000
6			24.000

1 hombre y 5 mujeres			
Habitaciones			
I	D	T	Precio
1	**1**	**1**	**18.000**
2	2		20.000
4	1		22.000
6			24.000

2 hombres y 4 mujeres			
Habitaciones			
I	D	T	Precio
1	**1**	**1**	**18.000**
	3		18.000
2	2		20.000
4	1		22.000
6			24.000

3 hombres y 3 mujeres			
Habitaciones			
I	D	T	Precio
		2	16.000
1	**1**	**1**	**18.000**
4	1		22.000
6			24.000

Los casos de 4 hombres y 2 mujeres, 5 hombres y 1 mujer o 6 hombres son análogos a los anteriores.

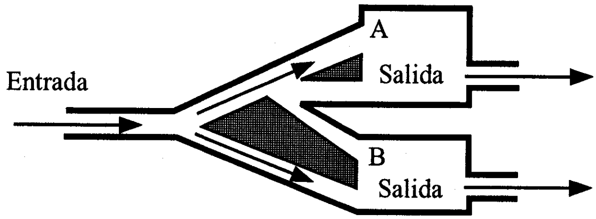
Según se aprecia en los cuadros anteriores se ve que las combinaciones comunes son, o 1 habitación de cada clase, o 4 individuales y una doble. En el primer caso el coste sería de 18.000 ptas, mientras que en el segundo sería de 22.000 ptas.

Por tanto la combinación que cumple con los dos requisitos es la de una habitación de cada clase.

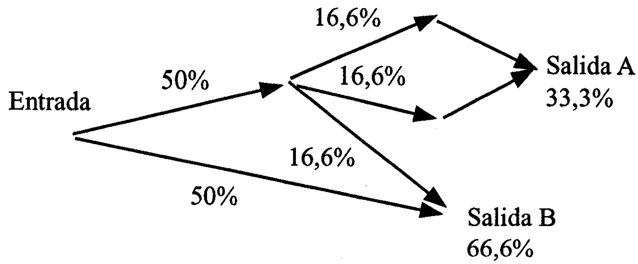
Fase regional. Jarandilla

Problema 1. El laberinto.

Este esquema representa la parte final de un laberinto que existe en un parque de atracciones. Como se observa, tiene dos salidas distintas. ¿Por cuál de ellas crees que escaparán más personas? Razona la respuesta.



Solución



Al llegar las personas a la primera bifurcación, tienen iguales posibilidades de ir por las dos direcciones, por lo que el 50 % irán por la izquierda y el otro 50 % por la derecha. De las que fueron por la izquierda, un tercio de las personas, 16,6 %, cogerán cada uno de los tres caminos; como uno de éstos va hacia la salida B y los otros dos hacia la salida A, tenemos que en total saldrán por la salida B el 66,6 % y hacia la salida A el 33,3 %.

Es evidente que salen más personas por la salida B.

Problema 2. El montón de bolas.

En la época en que los cañones lanzaban E, éstas eran almacenadas en algunos parques de artillería formando pirámides de base cuadrada; cada lado del cuadrado de la base contaba con 15 balas. ¿Cuál era el número de balas por pirámide?

En otros parques de artillería las balas se almacenaban en pirámides de base triangular y cada uno de los tres lados de la base contaba con 12 balas. ¿Cuál es el número de balas por pirámide?

Solución

a) Como la base es cuadrada, la primera capa tendrá $15^2 = 225$ balas. La segunda capa tendrá una bala menos por lado, es decir, $14^2 = 196$ bolas. Así sucesivamente hasta llegar a la última capa, que tendrá 1 bala.

En total, el número de balas será

$$15^2 + 14^2 + 13^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 1.240 \text{ balas}$$

b) La cantidad de bolas que hay por capa es la siguiente:

La primera capa tiene: 12+11+10+.... +3+2+1 = 78 bolas.
La segunda capa tiene 12 balas menos que la primera, 66 balas.
La tercera capa tiene 11 menos que la segunda: 55 balas.

Así cada capa tiene 10, 9, 8, ... balas menos hasta llegar a la última, que tiene 1 bala. En total hay:

$$78 + 66 + 55 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 364 \text{ balas}$$

Problema 3. El corral de gallinas.
Un granjero quiere cercar un corral de gallinas de forma rectangular. Para ello dispone de una valla metálica de 22 metros de longitud. El granjero está interesado en saber cuáles deben ser las dimensiones adecuadas, largo y ancho del corral, para que las gallinas dispongan de la mayor superficie posible. Piensa detenidamente sobre esta situación e intenta ayudar al granjero a calcular las dimensiones.

Intenta, por último, dar una relación que permita calcular el área de la cerca sabiendo el largo del corral.

Solución

Hacemos un cuadro con los cálculos de las áreas para diferentes largos y anchos:

Largo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ancho:	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Área:	10	18	24	28	**30**	**30**	28	24	18	10

Se observa que las soluciones enteras correspondientes a áreas máximas son 5 y 6.

Veamos qué sucede entre 5 y 6:

Largo:	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
Ancho:	6	5,9	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5
Área:	30	30,09	30,16	30,21	30,24	**30,25**	30,24	30,21	30,16	30,09	30

El área máxima la alcanza cuando la parcela tiene forma cuadrada de área 20,25 m^2.

Si llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo, se ha de cumplir que $2x + 2y = 22$, por tanto las medidas serán x y $11 - x$. El área es:

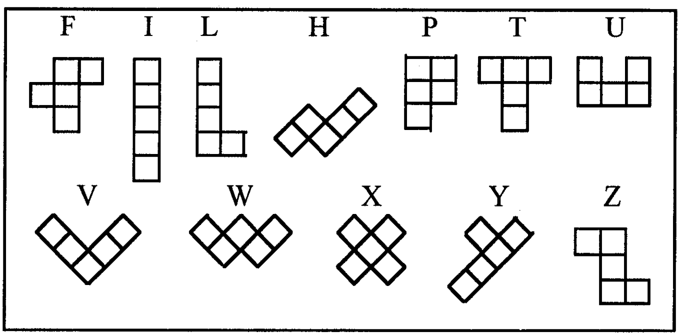
$$A = x\,(11 - x) = 11x - x^2$$

La función área es polinómica de 2° grado y su gráfica es una parábola con punto máximo en el vértice de coordenadas (5'5, 30'25), que es precisamente la solución encontrada en el apartado anterior.

Problema 4. Pentominós.

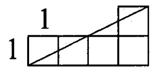
Te han entregado una cartulina en la que están troqueladas las doce piezas del llamado PENTOMINÓ. Cada una de ellas está formada por cinco cuadrados de lado unidad, adosados unos a otros de todas las formas posibles, y sólo hay doce posibilidades distintas.

Para reconocerlas hemos puesto un nombre de letra a cada una, como puede observarse en la figura.



Sirviéndote de la cuadrícula, dibuja todas las posibles posiciones de las piezas U, W, Z.

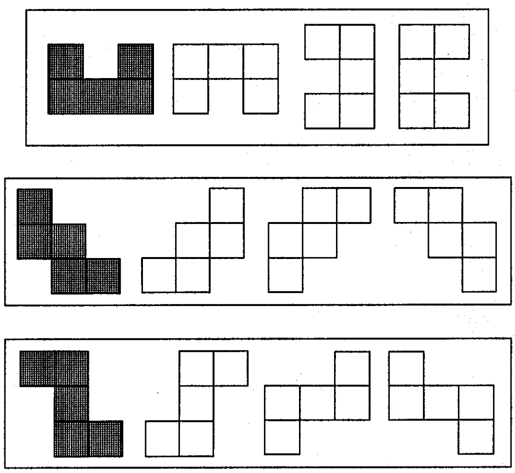
Llamamos diámetro de un pieza a la máxima distancia existente entre dos puntos cualesquiera de la pieza. Por ejemplo: en el caso de la L, su diámetro sería la recta dibujada, que, mediante un sencillo cálculo, sabemos que vale $\sqrt{20}$.



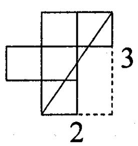
Calcula el diámetro de las piezas F, W, Y.

Solución

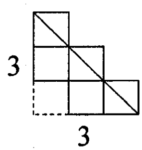
Todas las figuras tienen 4 posiciones obtenidas por giros y simetrías. Son:



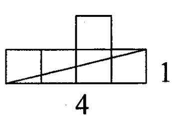
Los diámetros son:



Diámetro de F = $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$



Diámetro de W = $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

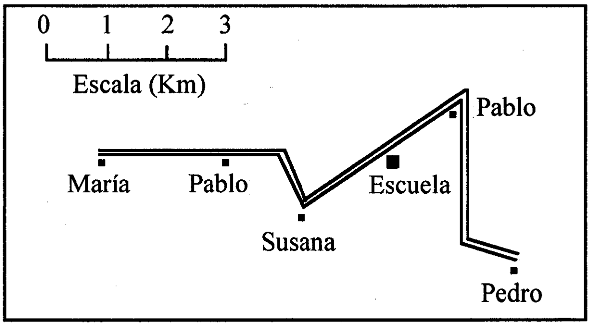


Diámetro de Y = $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

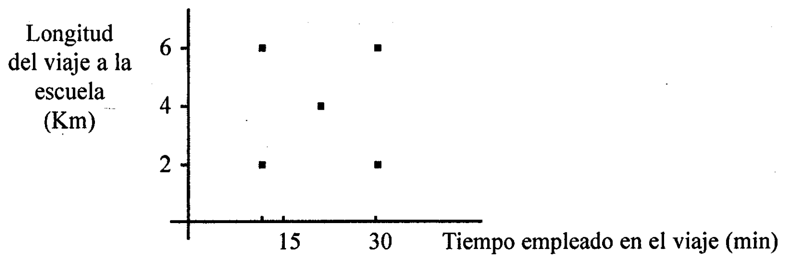
Problema 5. El camino a la escuela.

María, Miguel, Susana, Pablo y Pedro van a la escuela por la misma carretera comarcal todas las mañanas. Pedro va en el coche de su padre, María en bicicleta y Susana andando. Los otros dos van cada día de una forma.

El mapa siguiente muestra dónde vive cada uno:



La gráfica describe el viaje a la escuela de cada uno el lunes pasado:



Anota en el eje horizontal, debajo de cada punto, el nombre de la persona a que representa, explicando en cada caso el razonamiento seguido.

¿Cómo viajaron Pablo y Miguel ese día?

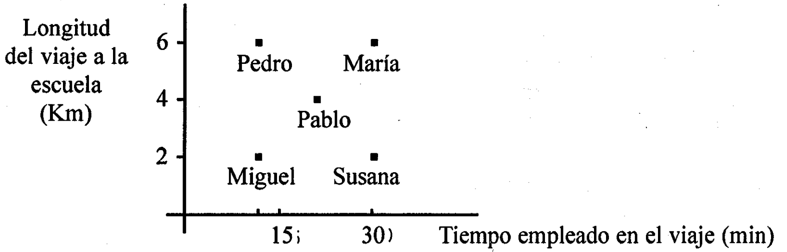
Solución

Comparando el mapa y la gráfica, los dos puntos más altos corresponden a las personas que más lejos viven de la escuela, es decir, María y Pedro.

Como Pedro va en coche, empleará menos tiempo en ir, por lo que está representado a la izquierda y María a la derecha.

A su vez los dos puntos más bajos corresponden a las personas que más cerca viven, Susana y Miguel. Como Susana va andando, tardará más tiempo en ir, luego está a la derecha y Miguel a la izquierda.

Por exclusión, Pablo está representado en el punto central.



Miguel no va andando, pues al vivir a la misma distancia que Susana, tardaría igual tiempo en ir. Tampoco va en coche, pues tarda el mismo tiempo que Pedro y éste vive más lejos, con lo que fue en bicicleta. Pablo no fue andando, pues vive más lejos que Susana y tardó menos tiempo. Tampoco fue en coche, pues vive más cerca que pedro y tardó más tiempo; luego también fue en bicicleta.

Otro procedimiento:
La velocidad de cada uno de ellos, en km / h es:

Veloc. de Pedro: $\frac{3}{5}$ Veloc. de Pablo: $\frac{1}{5}$ Veloc. de Miguel: $\frac{1}{5}$

Veloc. de Susana: $\frac{1}{15}$ Veloc. de María: $\frac{1}{5}$

Como Pablo, Miguel y María llevan la misma velocidad, deben usar el mismo medio de locomoción. Como María va en bicicleta, Pablo y Miguel también deben ir en bicicleta.

III OLIMPIADA 1994

Fase comarcal

Problema 1. Medida a la media.
La media de las estaturas de tres personas es 170 cm. Si una mide 170 cm., ¿cuáles son las estaturas de las otras dos?

Solución

La solución no es única. Las dos personas deben medir 170-x, 170+x, o sea 340 cm. entre las dos.

Cuanto menor sea x, más significativo será el valor de la media, pues las dos personas tendrán una estatura próxima a la media.

Problema 2. La excursión sexista.
Los encargados de organizar la excursión de los 120 alumnos (60 son chicas y 60 chicos) de 8° de EGB, han contratado dos autobuses con 60 plazas cada uno. Para fastidiar, los organizadores deciden ocupar un autobús con todos los chicos y el otro con todas las chicas.

En la primera parada hay un grupo de chicos que se introducen en el autobús de las chicas. Este conductor, al comprobar que había más viajeros que plazas, devolvió al otro autobús todas las personas que sobraban. Entre ellas había chicos y chicas.

Una vez que todas las plazas estaban cubiertas en los dos autobuses, reanudaron la marcha. Por tanto, en el autobús de las chicas van algunos chicos, y en el de los chicos algunas chicas. En ese momento, ¿qué será mayor, el número de chicos en el autobús de las chicas o el número de chicas en el autobús de los chicos? Razona la respuesta.

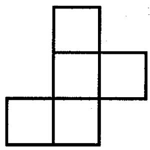
Solución

Si analizamos el enunciado, observamos que cada chico que ocupe un asiento en el segundo autobús, desplaza a una chica, que pasa al primero. El número de chicas en el primero será siempre igual al de chicos en el segundo.

Problema 3. El mosaico.

Un restaurador debe reparar un antiguo mosaico del que se sabe que estaba compuesto por piezas cuadradas de una unidad de lado, y tenía un perímetro total de 18 unidades.

Actualmente, sólo quedan 5 piezas dispuestas como indica la figura.



¿Cuál es el número máximo de piezas que deberá añadir para completar el mosaico?

Solución

Para utilizar el máximo número de piezas cuadradas manteniendo fijo el perímetro, debemos conseguir el mínimo número de esquinas, y éste número es cuatro. Por tanto, buscamos rectángulos de perímetro 18 unidades.

Si designamos por x e y las dimensiones del rectángulo: $2x+2y=18$, o sea: $x+y=9$.

Para que la figura dada encaje en el rectángulo, x e y deben ser mayores o iguales que 3. Por tanto, sólo sirven $x=3$, $y=6$, o $x=4$, $y=5$.

Para $x=3$, $y=6$, resulta un área de 18, con 18 piezas cuadradas.
Para $x=4$, $y=5$, resulta un área de 20, con 20 piezas cuadradas.

El número máximo de piezas cuadradas que debemos añadir es $20-5=15$.

Problema 4. La máquina de vender bebidas.

La cafetería de una fábrica tiene una máquina que vende bebidas.

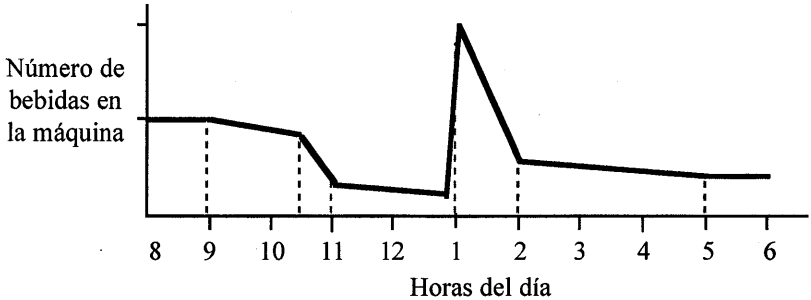
En un día normal:

- La máquina comienza el día medio llena.
- No se venden bebidas antes de las 9 de la mañana o después de las 5 de la tarde.
- Las bebidas se venden a un ritmo lento durante el día, excepto en los descansos de la mañana (10,30 a 11) y de la comida (1 a 2) en que hay mayor demanda.
- La máquina se llena justo antes del descanso de la comida (lleva unos 10 minutos llenarla).

Dibuja una gráfica que muestre cómo varía el número de bebidas que hay en la máquina desde las 8 de la mañana hasta las 6 de la tarde.

Solución

Esta sería la gráfica:



Problema 5. El bodeguero.

Un bodeguero deja al morir la siguiente herencia: 7 barriles llenos de vino, otros 6 a medias y 5 llenos hasta la cuarta parte de su capacidad; además, en el almacén, quedan 9 barriles vacíos. En su testamento pide que el vino y los barriles se repartan entre sus tres hijos en partes iguales y advierte que por razones de conservación, el vino no debe ser cambiado de barril ni mezclado con el contenido de otro. ¿Cómo harías el reparto?

Solución

El número total de barriles es 27, por lo que a cada hijo le corresponden 9 barriles.

El número total de "cuartos" de vino es: 7x4+6x2+5 = 45. A cada hijo le corresponden 15 cuartos.

El máximo número de barriles llenos que puede recibir un hijo es 3, que son 12 cuartos, pues si recibe alguno lleno más obtendría 16 cuartos.

El reparto es el siguiente:

Hijo	Llenos	Medios	Cuartos	Vacíos	Total barriles	Total cuartos
1°	3:12 ctos	1:2 ctos	1:1 cto	4	9	15
2°	3:12 ctos	1:2 ctos	1:1 cto	4	9	15
3°	1:4 ctos	4:8 ctos	3:3 ctos	1	9	15

Problema 6. La isla cuadrada.

Los habitantes de una isla cuadrada (figura 1) deciden aumentar la superficie de la misma ganando terreno al mar. Para ello, cada siglo añadirán nuevos cuadrados, dividiendo cada lado en tres partes iguales, y en la parte central formarán otro cuadrado (figura 2).

Tras dos siglos, la isla tendrá la forma de la figura 3.

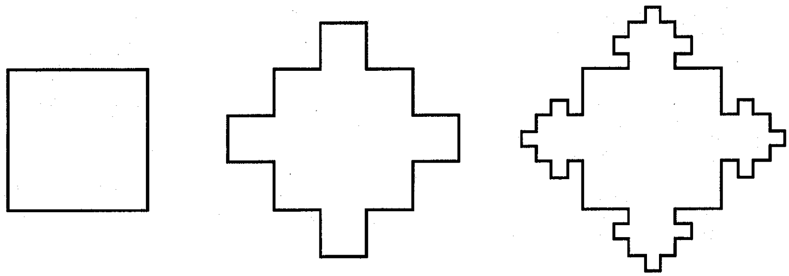


Figura 1 Figura 2 Figura 3

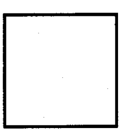
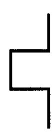
¿Cuánto aumentó la superficie de la isla a lo largo del primer siglo si inicialmente la isla tenía 2.400 Km. de costa? ¿Y a lo largo del segundo siglo?

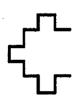
Solución

La superficie inicial de la isla es: $\left\{\frac{2.400}{4}\right\}^2 = 36.10^4\ \text{km}^2$

Aumento de superficie después del primer siglo: $200^2\ \text{x} = 16 \text{ x } 10^4\ \text{km}^2$

Después del segundo siglo el aumento es de $4 \text{ x } 3 \text{ x } \left\{\frac{200}{3}\right\}^2 = \frac{16}{3} \text{ x } 10^4\ \text{km}^2$

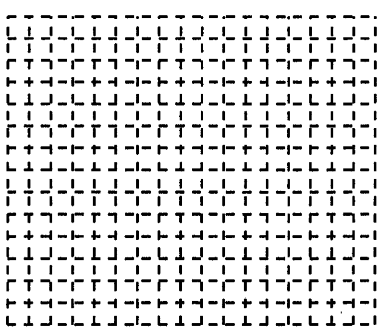
l_1  $l_1 = 600$ km l_2  $l_2 = 600/3 = 200$ km

l_3  $l_3 = 600/9 = 200/3$ km

Fase regional. Zafra

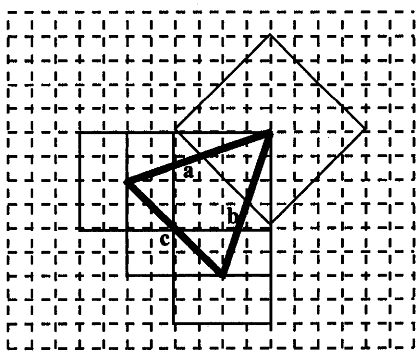
Problema 1. La figura invisible.

Dibuja un triángulo rectángulo isósceles en la trama. Sobre cada uno de los lados construye, hacia el exterior, un cuadrado. Une los centros de estos tres cuadrados por líneas rectas. ¿Qué figura resulta? Describirla justificadamente. Calcula su área.



Solución

Elegimos el triángulo rectángulo isósceles de catetos 4 unidades.



$$a = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \quad 2\sqrt{10}$$
$$b = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \quad 2\sqrt{10}$$
$$c = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}5 \; 4\sqrt{2}$$

Resulta, por tanto, un triángulo isósceles.

El área puede obtenerse restando al cuadrado de lado 6 y área 36, dos triángulos rectángulos de catetos 2 y 6 y área 6 cada uno, y otro también rectángulo e isósceles de lado 4 y área 8.

Área del triángulo isósceles: 36 - 2 x 6 - 8 = 16 u.s.

Problema 2. Competición de tenis.

En una competición individual de tenis hay 6 eliminatorias para llegar a la final. Si en cada una de ellas se eliminan la mitad más uno de los participantes, ¿cuántos jugadores había inscritos en un principio?

Solución

Comencemos por el final.

A la final llegan 2 jugadores; en la fase anterior habría x, de los cuales se eliminan $\frac{x}{2} + 1$ y continúan $\frac{x}{2} - 1$

Entonces: $\frac{x}{2} - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

Si seguimos este razonamiento, de atrás hacia adelante:

$2 \rightarrow 6 \rightarrow 14 \rightarrow 30 \rightarrow 62 \rightarrow 126 \rightarrow 254$

Había inscritos en un principio 254 jugadores.

Problema 3. La medición de Eratóstenes.

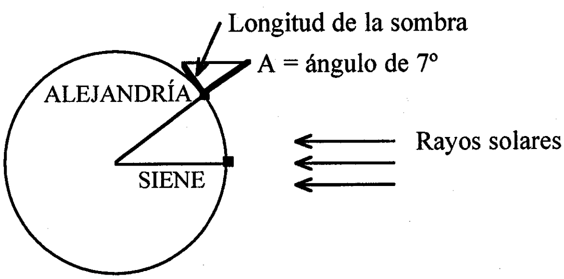
Eratóstenes, filósofo griego del siglo IV a.C., ideó un procedimiento para intentar calcular la circunferencia y el radio de la Tierra, que por entonces ya se creía redonda.

Como fue Director de la Biblioteca de Alejandría, leyó que Siene, actual Assuan, el día 21 de junio (solsticio de verano) al mediodía, las columnas de los templos no proyectaban ninguna sombra. El Sol estaba justo encima de sus cabezas.

Él lo comprobó ese mismo día del año en Alejandría, con un palo vertical y resultó que sí proyectaba sombra.

Había enviado una expedición de camellos hasta Siene para saber la distancia entre ambas ciudades, que resultó ser de 5.442 estadios (unos 800 km.).

Basándote en la figura, haz los cálculos necesarios para resolver el problema.



Nota: El dibujo no está hecho a escala.

Solución

El ángulo A y el formado por los radios correspondientes a Siene y Alejandría son iguales por alternos internos. Entonces, si designamos por L la longitud de la circunferencia de la Tierra:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si a } 7^\circ \text{ le corresponden } 800 \text{ km}\\ \text{a } 360^\circ \text{ le corresponden } L\end{array}\right\} \Rightarrow L = \frac{800 \times 360}{7} = 41.142 \text{ km}$$

El radio de la Tierra será: $R = \dfrac{41.142}{2\pi} = 6.548 \text{ km}$

Problema 4. Los turistas desconocidos.

Un grupo de hombres, algunos acompañados de sus mujeres, gastó 1.000 dólares en un hotel. El gasto fue de 19 dólares por cada hombre y de 13 por cada mujer. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había?

Si h es el número de hombres y m el de mujeres, será:

$$19\,h + 13\,m = 1.000 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1.000 - 13\,m}{19} = 52 + \frac{12 - 13\,m}{19}$$

$$\frac{12 - 13\,m}{19} = \text{número entero} \quad \Rightarrow \quad 12 - 13\,m = \dot{19} \quad \Rightarrow \quad m = \dot{19} + 17$$

Además: $13\,m \leq 1.000 \quad \Rightarrow \quad m \leq 76$

Luego: m = 17; m = 36; m = 55; m = 74.

Si m = 17, entonces h = 52 - 11 = 41.
Si m = 36, entonces h = 52 - 24 = 28.
Si m = 55, entonces h = 52 - 37 = 15.
Si m = 74, entonces h = 52 - 50 = 2.

Del enunciado se deduce que hay más hombres que mujeres, luego el número de hombres es 41 y el de mujeres 17.