12 de mayo de 2006,
día escolar de las Matemáticas

Mirar el Arte con ojos matemáticos

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Francisco Martín Casalderrey

Mirar con ojos matemáticos

Desde el año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, cada curso la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, celebra el 12 de mayo, aniversario del nacimiento del profesor Pedro Puig Adam, el Día Escolar de las Matemáticas. Se intenta ese día, abandonar el a veces encorsetado prisma de la clase de matemáticas y, en colaboración con otras áreas didácticas, hacer incursiones en terrenos fronterizos. Se pretende mirar a nuestro alrededor desde el ámbito de las matemáticas. Anlizar cómo éstas ayudan a comprender la realidad que nos rodea, las otras ciencias, la Tecnología, pero también , la Música, la Lengua, el Arte... Cada año se elige un tema que vincule las matemátcicas con los otros saberes. Este año el tema elegido es Mirar el Arte con ojos matemáticos. Presentamos un conjunto de propuestas de actividades que pueden ser llevadas a cabo el 12 de mayo de 2006, bajo el paraguas unificador del título elegido para este año. Pero no son propuestas nuevas ni cerradas. Lo mejor sería que en cada Centro, en base a éstas u otras ideas, aprovechando el cercano museo, la catedral, o el palacio de la esquina, se diseñasen actividades que respondan a nuestro título. Las que proponemos nosotros las hemos agrupado en cuatro apartados:

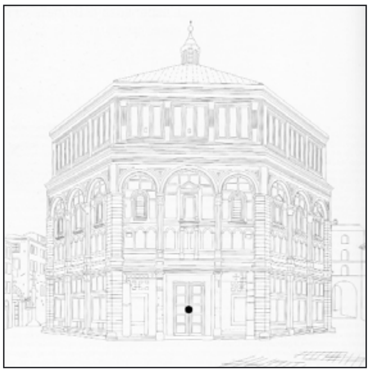
- Perspectiva matemática*, que podría ser desarollado en colaboración con el área de Dibujo.*
- Objetos matemáticos en el Arte*, un recorrido por algunos de los innumerables objetos matemáticos que aparacen en el Arte, se trata de observar esos objetos, reproducirlos y estudiarlos matemáticamente. Los que presentamos se pueden descargar de Internet. Sugerimos también el estudio de mosaicos.*
- Proporción*, aunque nos centramos en el estudio de la proporción áurea, ésta no es la única que puede ser abordada.*
- Interpretación matemática*, muchas veces mirando con ojos matemáticos una obra de arte podemos descubrir ideas que en ella permanecen ocultas, podemos intepretar mejor lo que vemos.*

Por último, no podemos dejar de citar como fuente de otras ideas la sección En un cuadrado*, dedicada al Arte y las Matemtaicas que publica en la revista* SUMA*, la profesora Capi Corrales.*

Francisco Martín Casalderrey

Perspectiva matemática

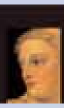
Durante muchos siglos, para representar un espacio tridimensional, por ejemplo el interior de una habitación, se seguían normas intuitivas. Se sabía que las líneas paralelas de la realidad situadas perpendicularmente al plano del dibujo debían converger en un punto, aunque se creía que ese punto debía ser distinto para cada plano. Así, los lados paralelos del suelo de una habitación convergían en un punto, pero los del techo en otro. El problema era determinar dónde situar estos puntos sobre el plano del dibujo. Ya en algunos frescos de Pompeya se observa la tendencia a situar estos puntos sobre una misma recta vertical, paralela por tanto al plano del dibujo.



Pasarían muchos siglos hasta que los pintores se plantearan matematizar el proceso de hacer un dibujo que representara una realidad tridimensional de manera que, al mirarlo lo observado no se distinguiera de la realidad.

El primero en hacerlo fue el pintor y arquitecto Filippo Brunelleschi (a.1377-d.1446). Para su sorpresa descubrió que tanto las líneas del suelo, como las del techo, debían converger en un mismo punto. Un único punto para todas las líneas perpendiculares al plano del dibujo. Desgraciadamente no nos ha llegado su método, sin embargo, si que conocemos la *prueba* que propuso para comprobar si un dibujo estaba bien hecho desde el punto de vista de la teoría de la perspectiva matemática.

Brunelleschi vivía en Florencia, donde era arquitecto de las obras de la catedral de *Santa María del Fiore.* La pila baustismal de esta catedral no se encuentra en su interior, sino —como en la famosa catedral de Pisa —en un edificio separado, el *batisterio,* que en este caso se llama de San Juan, en honor de San Juan Bautista.



Brunelleschi realizó una pintura del batisterio en perspectiva sobre una tabla. Pero este cuadro tenía dos características que lo hacían especial. La primera: estaba pintado *del revés*, es decir, lo que en la realidad aparecía en la izquierda en el cuadro de Bruneleschi aparecía a la derecha y, recíprocamente, lo de la derecha en la izquierda; exactamente igual que si lo estuviéramos viendo reflejado en un espejo. La segunda característica de este cuadro era que tenía un pequeño agujero en el centro, del tamaño justo para poder acercar un ojo y mirar a través de él.

Brunelleschi prponía la siguiente prueba: Situaba el cuadro sobre un trípode, enfrente del batisterio, con la cara pintada hacia el edificio. Acercando el ojo al orificio miraba a través ¿y que veía? Naturalmente, el batisterio real. Pero ahora sujetaba un espejo en una mano, en un plano paralelo al cuadro, de manera que, mirando por el agujero, viera en parte el batisterio, en parte el reflejo de su cuadro en espejo. Si su cuadro estaba correctamente pintado, ambas imágenes deberían casar perfectamente. En esto consistía su prueba.

Te proponemos un experimento que puedes realizar en colaboración con el departamento de Dibujo:

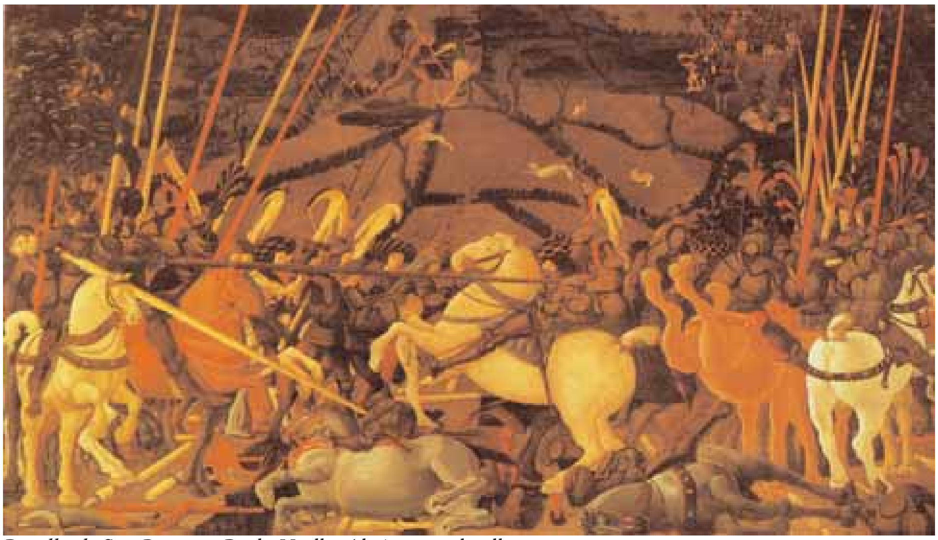
Haz un dibujo de un edificio famoso de tu ciudad, o de tu propio instituto o colegio. Hazlo desde un lugar preciso. Para ello es bueno valerte, por ejemplo de un trípode como los de fotografía y mirar el edificio que quieres pintar a través del punto que define la punta del tornillo al que se sujeta la cámara. Si no eres muy hábil dibujando, puedes hacer primero una fotografía y tu dibujo después, calcando de la fotografía. Si lo haces así recuerda usar un objetivo que imite la visión humana, es decir, de 50 mm en fotográfía analógica y de unos 30 mm en fotografía digital aproximadamente. Recuerda el punto exacto desde el que hiciste el dibujo o la fotografía. No olvides ahora darle la vuelta, es decir, copiarlo como lo verias en un espejo, Puedes valerte de un papel cebolla o, si te gusta la tecnología, escanéalo y dale la vuelta con un programa de gráficos.

Ahora estás en condiciones de reproducir la *prueba de Brunelleschi*. Necesitas un trozo de espejo pequeño. Uno de esos que a veces llevan las señoras en los bolsos puede servir. Sitúate en el punto exacto desde donde hiciste el dibujo (o la foto). Haz un pequeño agujero de unos milímetros en el dibujo y mira el edificio a través del orifico, como hizo Brunelleschi. Si tu dibujo está bien hecho, al interponer el espejo, verás que las líneas del edificio y las de tu dibujo casan perfectamente. Si así es, verás que prolongando en tu dibujo los trazos que representan líneas paralelas en la realidad, todos convergen en un punto.

Si la primera no te sale, es que hay algo mal en tu dibujo o que no pusiste bien paralelos tu dibujo y el espejo. Habla con el profesor de Dibujo para mejorar la perspectiva y repítelo de nuevo.

Cuando te salga bien, recuerda, fue Filippo Brunelleschi, el primero que hizo esto, hace ya casi 600 años.

Objetos mátemáticos en el Arte



Batalla de San Romano, Paolo Ucello. Abajo , tres detalles

Observa este cuadro. Se trata de una de las tres grandes tablas tituladas la *Batalla de San Romano*, pintadas por Paolo Ucello, pintor italiano del siglo XV, un poco posterior a Brunelleschi. La que ves, en concreto, se encuentra actualmente en los Uffizi, de Florencia.

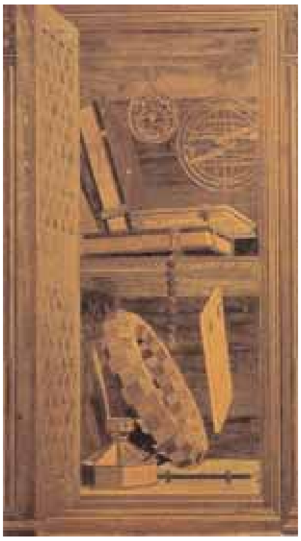
El día 1 de junio de 1432 tuvo lugar una batalla entre las tropas florentinas de los Médicis, capitaneadas por Niccolò da Tolentino, y las de Siena. La batalla duró 8 horas pero no hubo ningún muerto. Al final, vencieron los florentinos. Por ese motivo, los Medicis encargaron a Paolo Ucello la realización de estos tres cuadros, que decoraban sendas paredes de una misma sala. Hoy los tres cuadros se encuentran en tres distintos museos.

Busca en el cuadro los fragmentos que reproducimos aquí debajo. ¿Ves ese curioso gorro que llevan esos personajes? Era el gorro que usaban muchos florentinos en esa época; se llama *mazzochio* y es un objeto matemático. Paolo Ucello lo representó muchas veces, además de en las tres batallas de San Romano.

En las imágenes de esta página puedes ver otros *mazzochios* de distintos autores. Ésta de la derecha es un fragmento del *Diluvio Universal*, también de Ucello, que se encuentra en el *Claustro Verde* de la Iglesia de Santa María Novella, en Florencia. Ese curioso personaje lleva un mazzochio al cuello. Más abajo, se ve una puerta de un armario, hecha por Giovanni da Verona, que representa a su vez un armario abierto. En él, entre otros objetos, hay un *mazzochio.* La representación de objetos matemáticos se convirtió en una especie de género en la pintura del Renacimiento. El *mazzochio* es uno de los objetos más retratados, posiblemente debido a la dificultad de dibujarlo bien en perspectiva.

El diluvio, Paolo Ucello

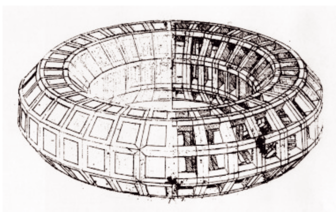
Como ves, es una especie de rosquilla. A esta figura los matemáticos le llamamos *toro.* Puedes imaginar esta figura como un círculo cuyo centro recorre una circunferencia situada en un plano perpendicular al del círculo.



Mazzochio, Giovanni da Verona

Los que vemos en esta página son poliedros hechos sobre un toro, al igual que, por ejemplo, el dodecaedro es un poliedro construido sobre una esfera. Es fácil *ver* que su volumen es equivalente al de un tubo cilíndrico, de la misma sección que el toro y de altura equivalente a la longitud de la circunferencia que recorre el centro de esa sección al generar el toro. Si el tubo tiene radio r, y el radio del círculo que describe el centro es R, ¿sabrías dar la fórmula del volumen del toro?

Mazzochio, Leonardo da Vinci



Para encontrar la superficie de un *toro,* imagina que el tubo cilíndrico del que hablamos antes lo cortas siguiendo una generatriz, hasta obtener un rectángulo. Calcula la medida de los lados de ese rectángulo y obtendrás la fórmula del área del toro.

Pero las cosas se ven mejor si se construyen y se pueden tocar con las manos. Por eso te proponemos que cojas pegamento y cartulina y que montes un *mazzochio* en recortables. Los dibujos los puedes descargar de la siguiente dirección en Internet:

www.dem2006.revistasuma.es

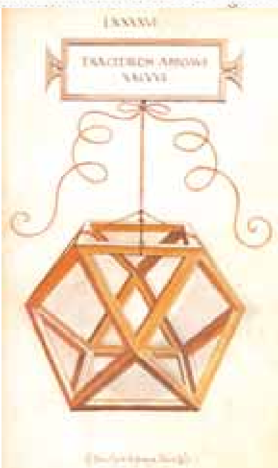
Sólo tienes que imprimirlos sobre una cartulina y manos a la obra; necesitarás también algo de paciencia. Hay dos modelos distintos y te quedarán como los que se ven en la fotografía. Ánimo.

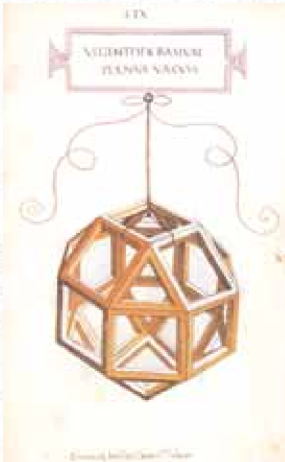
Hay muchos otros objetos matemáticos que aparecen en obras de arte. Muchas veces sólo es cuestión de fijarte. En esa misma página de Internet, puedes descargar otros. Por ejemplo éste, que es un mosaico del suelo de San Marcos de Venecia y que también fue hecho Paolo Ucello.

Se trata de un *Gran Dodecaedro Estrellado*, nombre que le puso Kepler a esta figura. Sus caras son estrellas de cinco puntas. Nuevamente, con una cuchilla o tijeras, pegamento, los recortables que puedes

obtener esa página de Internet, y un poco de paciencia podras construirte uno. En esta ocasión, en vez de cartulina usa papel fotográfico, es un poco más caro pero el resultado será brillante, como el de la fotografía. Si le cortas a esta estrella todas las puntas ¿qué figura obtienes? No esperes a montarlo. Trata de averiguarlo mirando sólo el mosaico de Paolo Ucello en el suelo de la catedral de Venecia que reproducimos en la otra página.

Terminaremos esta serie de objetos matemáticos en el Arte con otros tres, que también puedes descargar de la misma página web.





Se trata del *Cuboctaedro* y el *Rombicuboctaedro*, dos figuras dibujadas por Leonardo da Vinci para ilustrar el libro *La divina proporción,* de su amigo el matemático Luca Pacioli.

En las imágenes de abajo puedes ver unas fotos de las figuras que puedes hacer tú descargando los correspondientes recortables.

Observando estas figuras puedes estudiar muchas propiedades. Tomemos el cuboctaedro; si lo apoyas sobre una de las caras cuadradas y miras desde arriba verás un cuadrado, con otro cuadrado en su interior. ¿Qué otros polígonos puedes ver poniéndolo en otras posiciones?

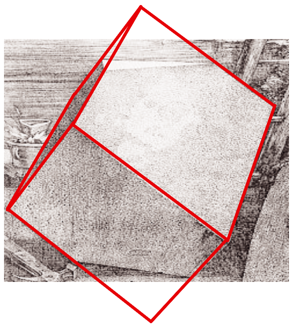
Calcula ahora el área de ambas figuras. No es tan difícil. A fin de cuentas están formadas por triángulos equilateros y cuadrados, y todas las aristas son iguales. Por tanto, basta contarlos y...

Calcular el volumen del cuboctaedro es una tarea más dificil, pero si has montado la figura antes todo se simplifica. Piensa. Una ayuda: el cuboctaedro es un cubo al que se le ha quitado una cierta pirámide en cada vértice. Tendrás que calcular el volumen del cubo original, el de cada pirámide que hemos quitado y después... La fórmula la deberás expresar en función del lado en todos los casos. El volumen del rombicuboctaedro es más complicado. Trata de descomponerlo en piezas sólidas de formas conocidas.

Por último, no podíamos terminar esta sección sin hacer referencia al más conocido grabado de Alberto Durero, *Melancolía II,* de 1514. Obsérvalo, también aquí se ve otro poliedro. Por la posición parece un poco difícil averiguar de qué se trata. Además, en el grabado, aparece ligeramente alargado en sentido vertical. Pero si observas la imagen pequeña, donde hemos corregido ese alargamiento y dibujado unas líneas, la cosa es mucho más fácil. ¿Lo has adivinado?

Ahora te resultará más sencillo hacer tú mismo el desarrollo plano y construirte el recortable. Piénsalo y a trabajar. ¡Ah! y no te olvides de hacer las solapas para poderlo pegar. Recuerda: una solapa por cada arista. Basta que sepas qué dos lados de qué dos caras se juntan en cada arista y a uno de ellos dibújale la solapa. Un último consejo, conviene que una cara la hagas sin ninguna solapa y que ésta sea la última que pegues, para cerrar con ella la figura.

Si has construido el *cuboctaedro de Leonardo y Pacioli* y el *poliedro de Durero* habrás adivinado que tienen bastante en común. Pero nos interesan más la diferencias: ¿qué habría que quitarle al poliedro de Durero para convertirlo en un cuboctaedro sólido? Por último, como en los casos anteriores, deberías calcular el área y el volumen de esta nueva figura. La ideas que señalamos antes para hacer los cálculos en el caso del cuboctaedro te servirán como pista también ahora para calcular el volumen y el área del poliedro de Durero.



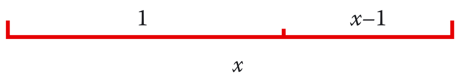
Proporción

Ese es el secreto de esta catedral: está construida siguiendo las proporciones del número áureo, el que Dios eligió para construir el universo...

José Luis Corral
El número de Dios

La proporción juega un papel importante en el Arte. La relación armoniosa entre las partes y el todo hacen que un objeto pueda producir emociones en quien lo contempla, en quien lo usa. También en la Naturaleza la proporción juega un papel esencial. Pitágoras afirmaba: *En la Naturaleza, todo es proporción.*

Y de todas las proporciones, la *proporción de oro* es la más frecuente en el Arte, aunque no la única. Recordemos en que consiste: *El todo es a la parte, como la parte es al resto*. Es decir, si partimos de un segmento y lo dividimos en dos partes, diremos que esa división es áurea si verifica que:



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Si operamos se llega a:

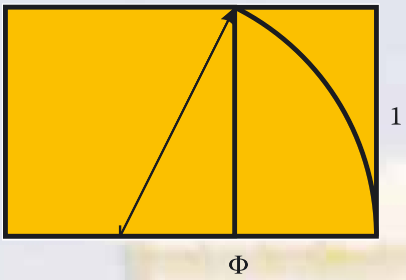
$$x^2 - x - 1 = 0$$

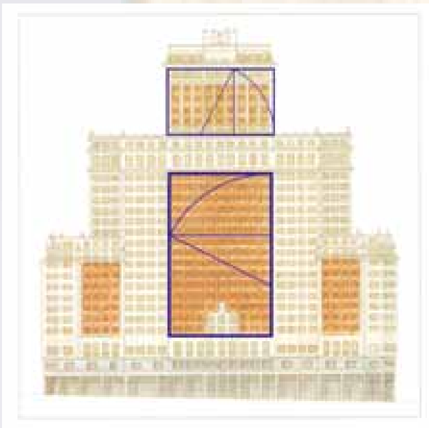
Una de cuyas soluciones es:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948$$

Es el llamado número áureo y representado habitualmente mediante la letra griega Φ.

Un rectángulo es áureo si sus lados son proporcionales a 1 y Φ. Puedes dibujar fácilmente un rectángulo áureo siguiendo estos pasos: Primero, dibuja un cuadrado y prolonga uno de sus lados. Segundo, marca el centro del lado que habías prolongado y con centro en ese punto y radio la distancia que va de ese punto a uno de los vértices del lado opuesto, traza un arco de circunferencia hasta que se corte con la





línea de prolongación del lado. Tercero, usando este punto cierra un rectángulo que comparta dos vértices con el cuadrado. Y ya está. Has dibujado un rectángulo áureo.

No te debería costar mucho comprobar que si el cuadrado inicial tenía lado uno, el lado más grande del rectángulo medirá Φ. Inténtalo. Acuérdate de Pitágoras.

En arquitectura, desde la antigüedad se ha usado muy frecuentemente la proporción áurea. Desde la fachada del *Partenón* (s. V a.C.) hasta la del edificio *España*, en la plaza de España de Madrid (1953), de José M. y Joaquín Otamendi, reflejan está sabia proporción.

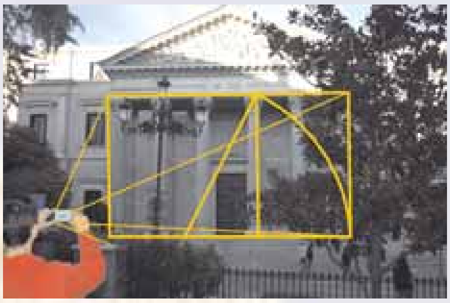
Te proponemos que busques edificos con proporciones áureas en tu ciudad. Y para que te sea más fácil te contaremos un trunco que puede resultarte de utilidad.

Tanto el carné de identidad, como las tarjetas de crédito, tienen propociones áureas, como puedes ver en las imágenes de la izquierda.

Valiéndote de tu carné de identidad, cuando des un paseo o realices un viaje de vacaciones, puedes comprobar si una puerta, un arco, un frontón o la fachada de un palacio tienen proporciones áureas.

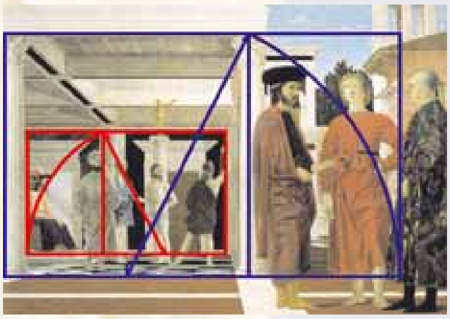
Para ello bastará que sujetes tu DNI en la mano y que, mirando al edificio, lo muevas hasta ver si *tapa* el rectángulo que quieres combrobar. Si los bordes de ambos coinciden exactamente es que el rectángulo que estás mirando es *áureo*.

En la fotografía puedes ver cómo hacerlo. Te sorprenderá la cantidad de veces que encontrarás proporciones áureas y no sólo en edificios. También hay muchos cuadros que contienen el famoso rectángulo áureo.



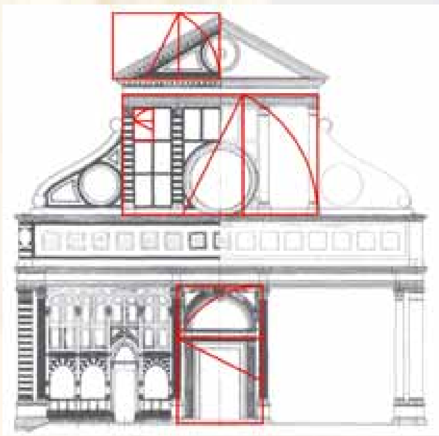
En esta página puedes ver algunos ejemplos más. El primero, el de la foto, es el *Palacio de las Cortes,* en la Carrera de San Jerónimo en Madrid, de Pascual y Palomer, 1850.

El segundo, es un cuadro de Piero della Francesca (1416-1492) y se titula *La Flagelación.* Los dos rectángulos señalados no son los únicos de proporciones áureas que se pueden descubrir en este cuadro.



En el Renacimiento, la proporción áurea se extendió profusamente, porque se consideraba que en ella se escondía la belleza.

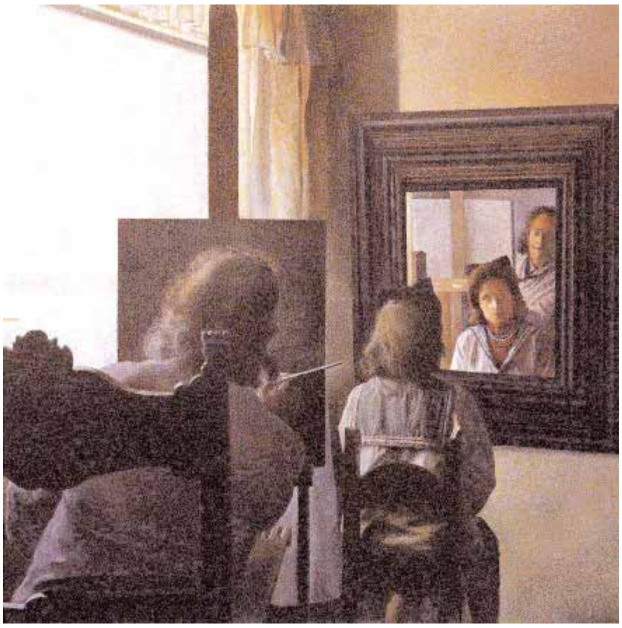
Coge una hoja de papel cebolla y sobre ella dibuja, con regla y compás, un rectángulo áureo. Traza después la diagonal. Ahora toma un libro de Arte. Si en una imagen de un cuadro o una fotografía de un edificio, sospechas que un cierto rectángulo, puede ser áureo, bastará que coloques encima el papel cebolla y hagas coincidir el vértice inferior izquierdo y los dos correspondientes lados del rectángulo sospechoso con los del papel cebolla. Si el vértice opuesto del rectángulo se encuentra en la diagonal, entonces puedes estar seguro: el rectángulo que analizabas es áureo.



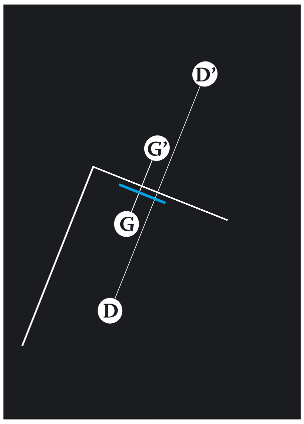
Ésta es la fachada de la iglesia de Santa María Novella, en Florencia, fue diseñada por Leonbattista Alberti. Toda ella es proporción.

Interpretación matemática

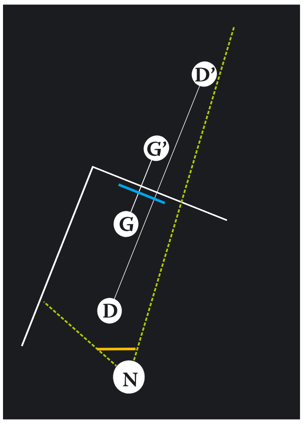
Muchos cuadros se interpretan mejor si al mirarlos lo hacemos con ojos matemáticos, si nos servimos de nuestros conocimientos de geometría, de álgebra, de la capacidad que las matemáticas nos proporcionan para observar las relaciones entre los objetos, sean éstas del tipo que sean. Es cierto que algunas obras de Arte se prestan más a ello que otras. Para que se comprenda cuál es la idea de lo que tratamos de decir, tomaremos una obra de Salvador Dalí (1904-1989). Se trata de *Dalí de espaldas que pinta a Gala de espaldas* (1973). Esta obra es un un retrato, que es a la vez autorretrato y resulta de algún modo recurrente y hasta autorreferente: el lienzo que pinta Dalí en este cuadro es, sin duda, el mismo cuadro que nosotros contemplamos. La pintura en la pintur como cuando un espejo refleja la imagen que refleja otro enfrentado a él, haciéndola múltiple e infinita.



Miremos con ojos matemáticos. Observemos el espacio en el que sucede la escena. Vemos el rincón de una habitación que no sabemos si es grande o pequeña. La cortina y su sombra nos señalan y ocultan la línea de encuentro de las dos paredes, la de la ventana y la del espejo. Sentada, delante del espejo, Gala. Detrás de ella Dalí, pincel en mano, pintando un lienzo. Probablemente este mismo que estamos interpretando. En el primer plano, el respaldo de la silla de Dalí, enorme en comparación con la silla en la que está sentada Gala. Dalí se inclina ligeramente para que el lienzo que pinta no le impida ver a Gala, de espaldas, y a Gala, de frente, reflejada en el espejo. Al hacerlo, también él se ve reflejado.

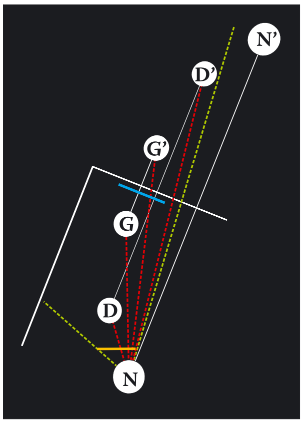


Un simple esquema nos ayudará a comprender mejor la escena. En el primero vemos el rincón de la habitación, el espejo, representado por la línea azul, y las posiciones en ese espacio de Dalí (D) y Gala (G) y sus correspondientes proyecciones (D' y G'). La pared, el espejo, Gala, el cuadro que pinta Dalí y Dalí se encuentran sobre planos pararalelos, que se extienden desde el fondo de lo representado hacia el primer plano. Al otro lado del espejo, se reproducen esos mismo planos, virtualemente y en sentido contrario.



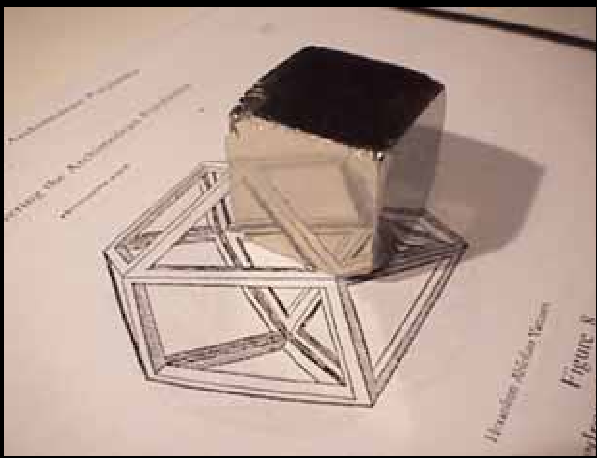
Hay otro plano más, paralelo a todos los anteriores y es el que ocupamos nosotros como espectadores del cuadro, de la escena en él representada. Esta disposición en profundidad de los objetos y las personas ayuda de algún modo a que nos sintamos integrados en el cuadro, idea reforzada por la doble presencia de Dalí, en el exterior del cuadro, porque lo pinta, y en el interior, porque él también aparece dentro del cuadro.

Si nos fijamos bien, notaremos que todos esos planos no son paralelos al plano del lienzo que miramos, representado por la línea amarilla en nuestras figuras.



Si imaginamos el lienzo como una ventana, desde nuestra posición (N) alcanzamos a ver a través de ella lo que abarcan las líneas verdes. Vemos (líneas rojas) a Gala de espaldas, a Dalí de espaldas pintando a Gala y los reflejos de ambos en el espejo.

Casi dan ganas de movernos un poco hacia nuestra izquierda, para ver cómo aparecemos reflejados, detrás de Dalí, en el espejo. Pero nuestro ángulo de visión nos lo impide. La genialidad de Dalí nos integra en el cuadro, pero, de manera coherente, nos impide vernos reflejados en el espejo.



Servicio de publicaciones
de la
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Apartado de Correos 590
06080 BADAJOZ
correo-e: *publicafesmp@wanadoo.es*
http://www.fespm.org

Mirar el Arte con ojos matemáticos
Autor: Francisco Martín Casalderrey
Diseño: FMC
Imprime Tecnigraf, S.A.