

PITAGORAS EN EL PAIS DE LOS PUZZLES

MANUEL BARRANTES LOPEZ
Departamentos de Didáctica
de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas.
Universidad de Extremadura

"A diis precatus ut perficiant"
(Versos de oro. Pitágoras)

RESUMEN

Existen múltiples maneras de demostrar el teorema de Pitágoras. Nosotros hemos elegido una que consiste en trocear en piezas de puzzles las figuras geométricas construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo, para después recubrir con estas piezas la figura construida sobre la hipotenusa.

Creemos que es una forma motivante de trabajar esta demostración, que ayuda al alumno a desarrollar un comportamiento más inteligente que de tipo reflejo o automático.

SUMMARY

PYTHAGORAS IN PUZZLELAND

There exist many ways of demonstrating Pythagorus' theorem. We have chosen one which consists of breaking up into jigsaw pieces the geometrical figures constructed on the adjacent sides of a right-angled triangle. Then the figure constructed on the hypotenuse is covered with these pieces. We believe that this is a motivating way to work on this demonstration, helping the pupil to develop a more intelligent rather than an automatic reflex type of behaviour.

A Pitágoras lo conocemos todos los de oídas desde la escuela, *¿Quién no sabe recitar aquello de que “el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”?*. Desde la Educación General Básica hasta los estudios superiores, alguna vez, frente a diferentes situaciones, hemos tenido que utilizar este teorema del que, además de su enunciado, conocíamos su demostración geométrica mediante la colocación de los cuadrados sobre los respectivos lados del triángulo rectángulo (figura 1).

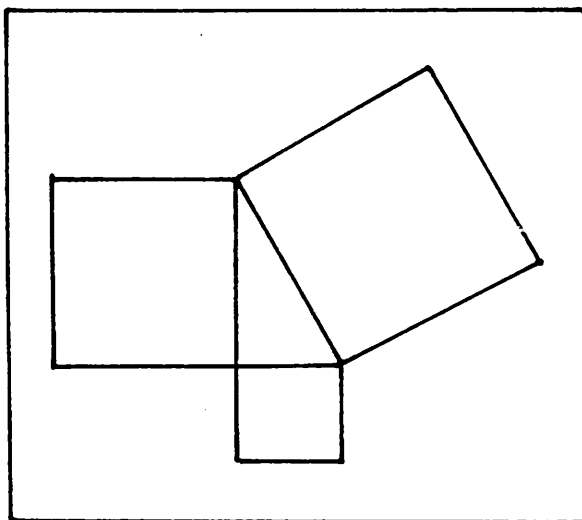


FIGURA 1

El objetivo de este trabajo consiste en aportar a las diversas demostraciones que existen sobre el teorema de Pitágoras una más, basada en el troceado mediante piezas de puzzles de los cuadrados construidos sobre los catetos para posteriormente con estas piezas cubrir el cuadrado de la hipotenusa.

Este tipo de actividad creemos que puede ayudar, tanto a los Profesores del Ciclo 12-16 con sus alumnos como a los estudiantes de las Escuelas Universitarias, sin olvidar por ellos tampoco a todo lector interesado en las cuestiones relacionadas con el teorema de Pitágoras. Queremos hacer hincapié en que utilizaremos la palabra “alumno” refiriéndonos siempre a los alumnos de dichos Profesores.

Las distintas actividades que planteamos siguen una pedagogía que podemos llamar de situaciones abiertas, diferenciando claramente entre **ejercicio** como situación que se sabe resolver y que permite fijar unas técnicas, y **situaciones abiertas** como una situación en la que a priori no se sabe encontrar la solución pero que en el desarrollo de la misma se da lugar a nuevas cuestiones, distintas direcciones de investigación, adquisición de conceptos nuevos; es decir, lo que podemos llamar un verdadero problema.

Este tipo de situaciones creemos que son muy importantes en la enseñanza porque suscitan en el alumno el deseo de aprender, de conocer y le conducen a la curiosidad, indagación e investigación, exigiéndole un comportamiento más inteligente que de tipo reflejo o automático.

SITUACIONES ABIERTAS DE PREPARACION AL TEOREMA DE PITAGORAS

Generalmente se presenta la propiedad pitagórica trabajando con cuadrados contruidos sobre los catetos y la hipotenusa. Sin embargo, es conocido también que la propiedad pitagórica no es solamente válida para los cuadrados, sino para cualquier figura construida sobre los lados del triángulo rectángulo siempre que las tres figuras sean semejantes entre sí. Esto se debe a que las relaciones de superficies entre figuras semejantes sólo dependen del cuadrado de uno de sus lados.

Basándonos en este hecho nuestras actividades van encaminadas a que el alumno obtenga el área de la figura construida sobre la hipotenusa como suma de las áreas construidas sobre los catetos mediante troceado en piezas de puzzles.

Nosotros trabajaremos principalmente sobre mallas de puntos, triangulares y cuadrados construidas sobre una hoja de papel, aunque este tipo de actividad se puede realizar también sobre el geoplano o recortando las piezas correspondientes en papel o cartón. También es posible desarrollar estas actividades calculando las áreas correspondientes, siempre que el alumno tenga los conocimientos precisos para ello.

Las actividades las presentamos a modo de muestra en las fichas I y II, que comentamos a continuación:

En la ficha I podemos observar que trabajamos sobre una malla triangular, en éste caso, la unidad de área va a ser un triángulo equilátero que marcamos como 1 (figura I.1).

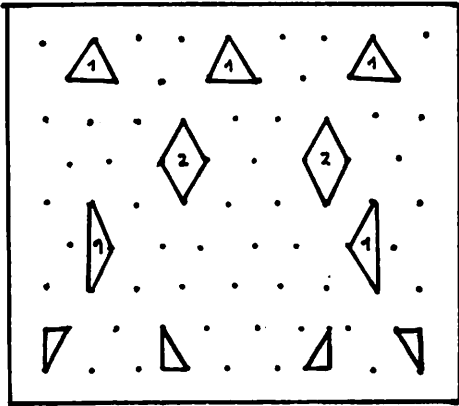


FIGURA 1 - 1

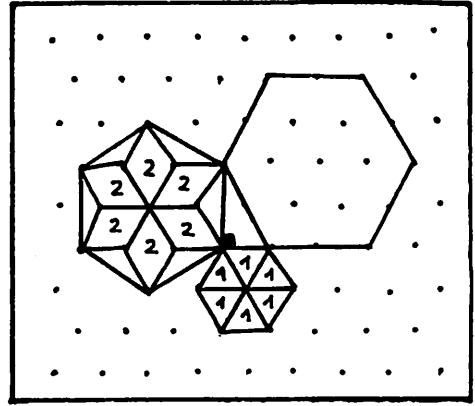


FIGURA 1 - 2

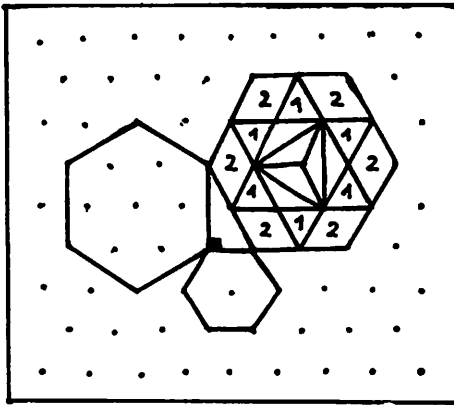


FIGURA 1 - 3

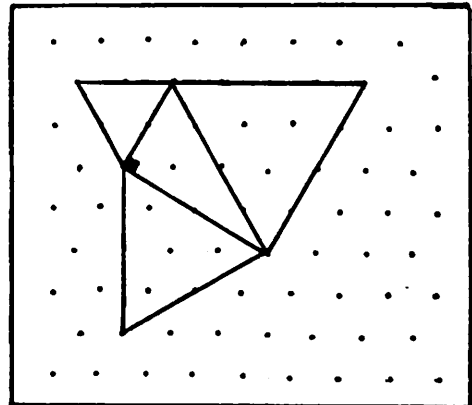


FIGURA 1 - 4

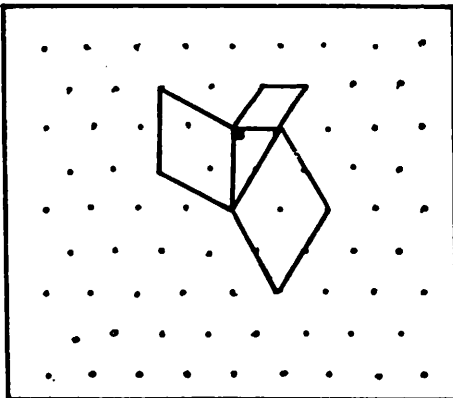


FIGURA 1 - 5

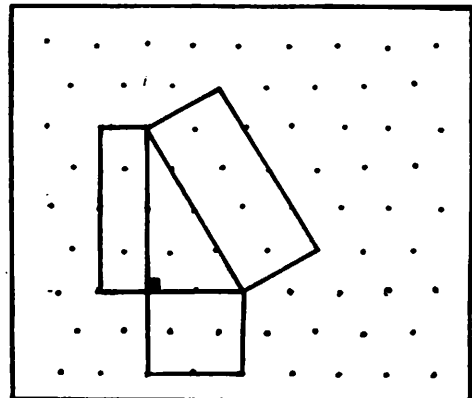


FIGURA 1 - 6

Nos resulta interesante trabajar con unidades triangulares pues generalmente estamos acostumbrados y acostumbramos a nuestros alumnos a trabajar los conceptos de área exclusivamente con unidades cuadradas.

Podemos observar también (figura I.1) distintas fracciones y múltiplos de las unidades triangulares cuyo valor nos pueden ser útiles al obtener las diferentes piezas del puzzles. Siempre sería adecuado ir añadiendo a este cuadro las diferentes piezas (fracciones o múltiplos) más usuales que vayamos obteniendo en la realización de actividades y no estén contenidas en él.

Proponemos tres modalidades para trabajar con este tipo de fichas: Una de ellas sería (figura I.2) trocear las dos figuras construídas sobre los catetos y que el alumno mediante estas piezas forme la figura correspondiente sobre la hipotenusa. Como podremos preveer la solución no es única, en la figura I.3 mostramos una posible solución.

Otra actividad consistiría en que el alumno obtenga sus propias piezas de puzzle sobre las figuras construídas sobre los catetos y una vez obtenidas cubrir la figura semejante de la hipotenusa. Para ejercitar esta actividad proponemos las figuras (I.4, I.5 y I.6), teniendo en cuenta que es interesante realizarlos con el menor número posible de piezas.

La última actividad consistiría en buscar figuras semejantes que cumplan la propiedad pitagórica de la que la suma de las áreas sobre los catetos nos dé el área sobre la hipotenúsa.

En la ficha II realizamos las mismas actividades pero sobre una malla cuadrada. En éstas hemos dejado intencionadamente sin completar las diferentes figuras para que el lector las resuelva.

Como se puede observar (figura II.1) presentamos la unidad que en este caso corresponde al cuadrado, así como sus múltiplos y fracciones que nos facilitarán la construcción de los puzzles.

Trabajando con uno y otro tipo de mallas el número de posibilidades que se pueden dar es ilimitado, y haciendo hicapié en la metodología de situaciones abiertas que planteabamos al principio, el alumno puede ser orientado en diferentes direcciones de trabajo: mallas triangulares, cuadradas, figuras de tres lados, cuatro lados..., a su vez, podemos profundizar en conceptos como el de área, y obtener otros nuevos como el cálculo de diferentes áreas de polígonos, estudios de perímetros, figuras semejantes y así sucesivamente.

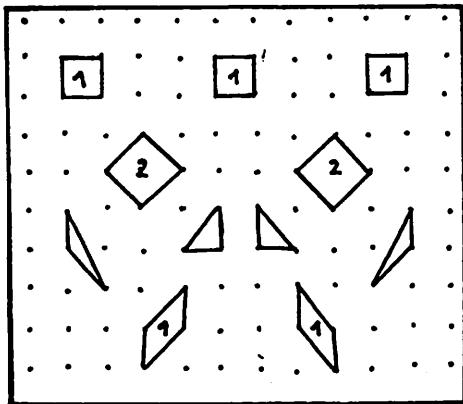


FIGURA II - 1

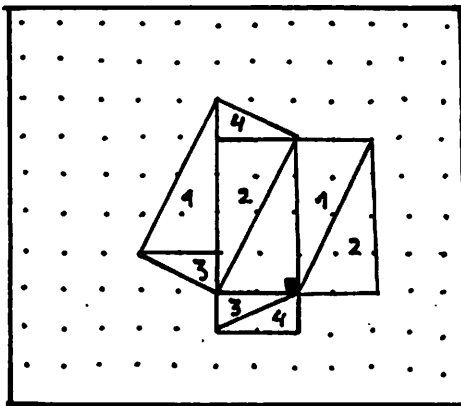


FIGURA II - 2

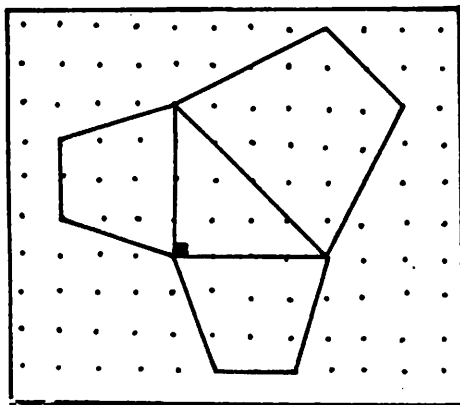


FIGURA II - 3

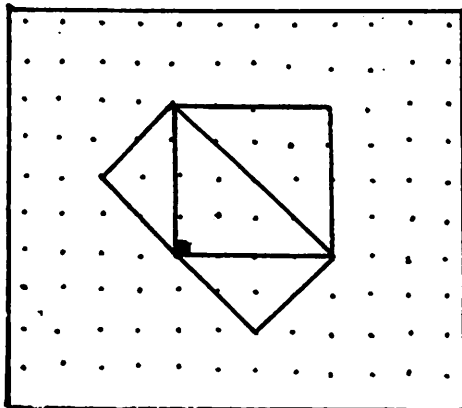


FIGURA II - 4

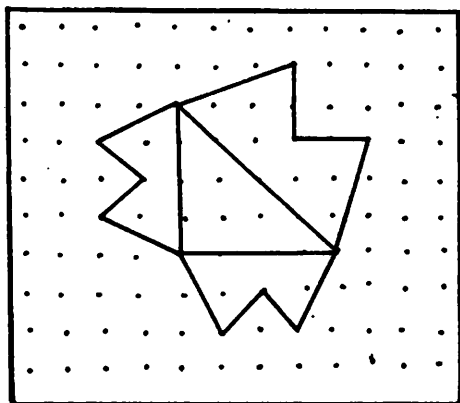


FIGURA II - 5

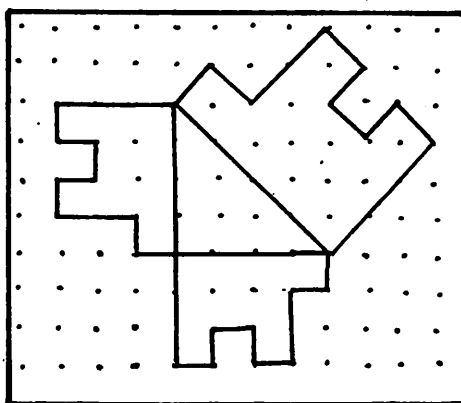


FIGURA II - 6

EL TEOREMA DE PITAGORAS A TRAVES DE LOS PUZZLES

En las fichas I y II hemos omitido intencionadamente casos en los que deberíamos construir cuadrados sobre los catetos y la hipotenusa. Eso no significa que en los trabajos con los alumnos este tipo de configuraciones no sean posibles en esa primera etapa, es más, consideramos que deben ser incluidos.

Nosotros, sin embargo, los hemos reservado para esta segunda etapa en la que nos vamos a ceñir exclusivamente al teorema de Pitágoras en puzzles y con la configuración clásica de todos conocida.

La labor consistirá (figura III.1), como siempre, en partir en piezas de puzzles los cuadrados de los catetos para con las piezas obtenidas de estos cuadrados recubrir el cuadrado de la hipotenusa.

Las modalidades para realizar este tipo de actividades son las mismas que hemos descrito en el apartado anterior, aunque nos gustaría insistir en el intento de conseguir que las participaciones se hagan con el menor número de piezas posible.

En la ficha III presentamos seis de estas posibles particiones todos conocidas, como la partición en triángulos isósceles (figura III.1) o las particiones en las que el cuadrado de uno de los catetos va situado en el centro del cuadrado de la hipotenusa (figuras II.2, III.5).

En este caso la ficha III la dejamos también incompleta en su resolución para que el lector la complete.

Por último queremos presentar una partición basada en la demostración que hace de este teorema el matemático árabe Thabit Ibn Qurra del s. IX, en la que se consigue formar el cuadrado de la hipotenusa a partir de tres piezas del puzzle construídas sobre los cuadrados de los catetos cuyo desarrollo presentamos en la ficha IV, y que como podemos ver, las piezas se han obtenido juntando los dos cuadrados. Una nueva posibilidad, que sería objeto de un posterior trabajo, se abre ante nosotros: Estudiar los puzzles juntando los dos cuadrados.

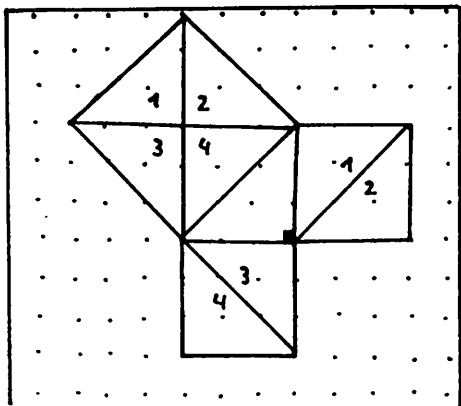


FIGURA III - 1

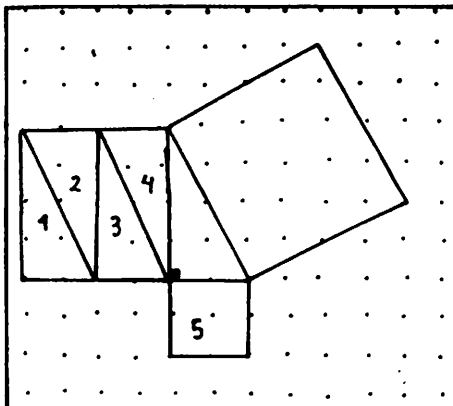


FIGURA III - 2

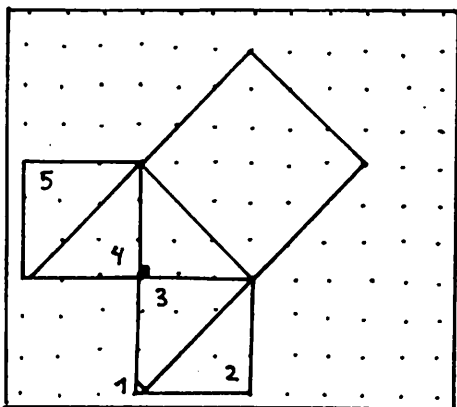


FIGURA III - 3

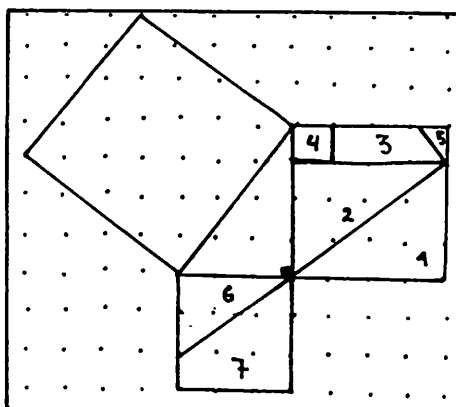


FIGURA III - 4

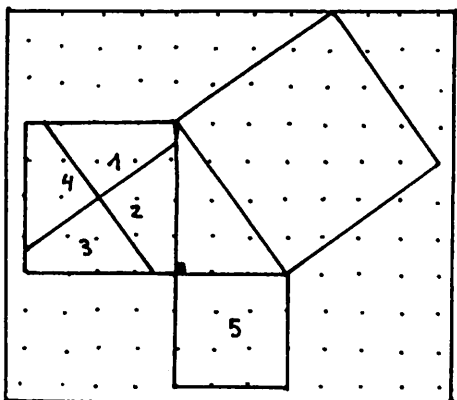


FIGURA III - 5

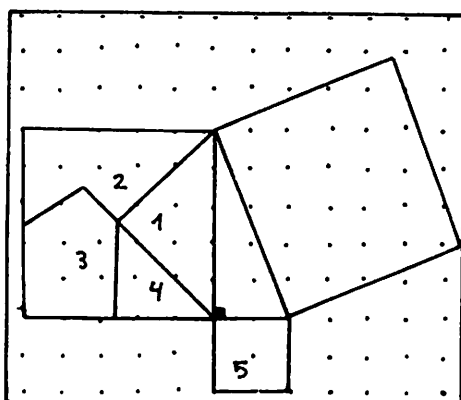
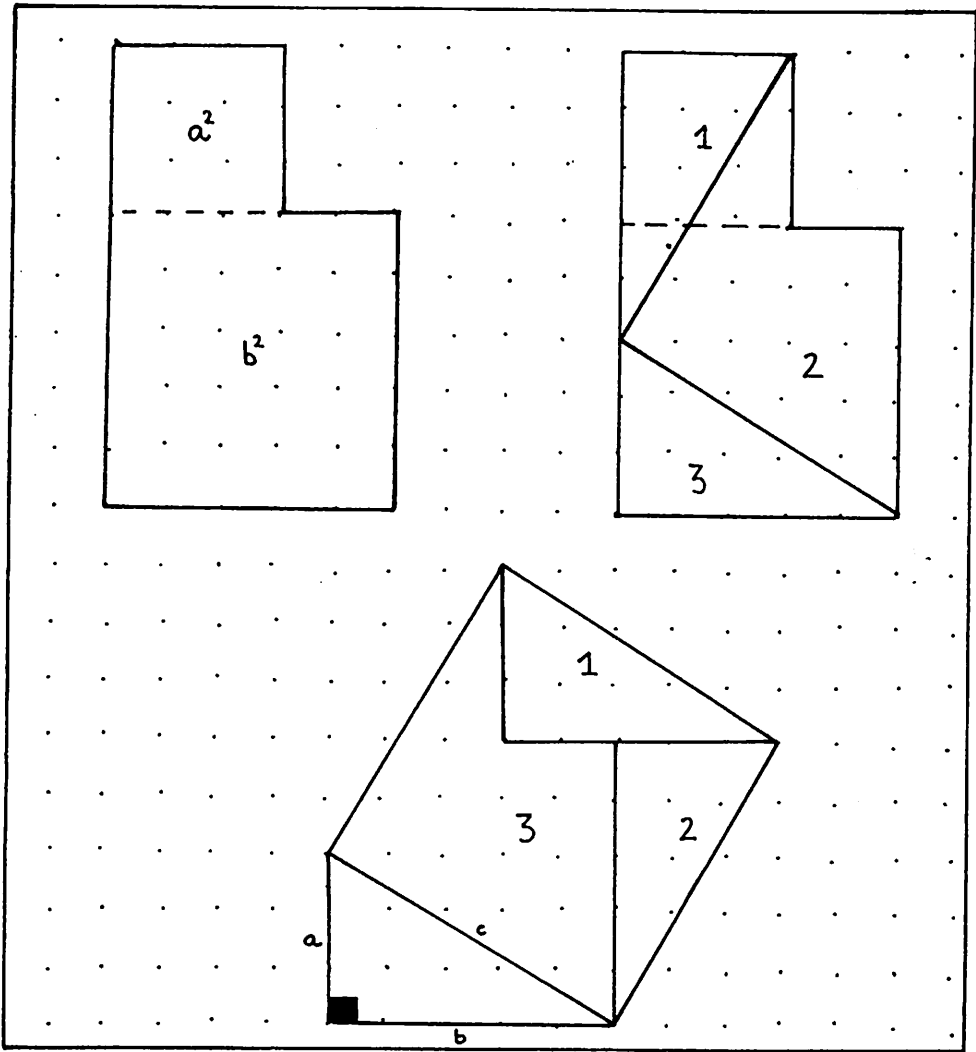


FIGURA III - 6



FICHA IV

BIBLIOGRAFIA

- Boyer, C.B. (1986).
Historia de las Matemáticas. Madrid. Alianza.
- Beamer J. E. (1989).
Using Puzzles to teach the Pythagorean Theorem en
Mathematics Teacher, 5, Vol. 82, pp. 336-342.
- Clark, M. (1986).
Pythagoras Two en Mathematics Teaching, 114, pp. 11-12.
- Laing, R.A. (1989).
Preparing for Pythagoras en Mathematics Teacher, 6, Vol. 82, pp. 271-275.
- Loomis, E. Scott. (1968).
The Pythagorean Proposition. Wahington, D.C. National
Council of Teachers of Mathematics.