

Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas.

Obstacles and errors in the teaching and learning of geometrical figures.

Resumen

En este trabajo reflexionamos sobre los distintos obstáculos y errores que hacen que los alumnos de Primaria y Secundaria desarrollen esquemas conceptuales incompletos o mal construidos sobre los conceptos, propiedades y clasificación de las figuras geométricas tanto planas como espaciales. Al final damos también algunas recomendaciones, basadas en una metodología constructiva, para corregir y erradicar estos obstáculos y errores que impiden una eficaz enseñanza-aprendizaje de las figuras.

Palabras clave: Matemáticas, geometría, Aprendizaje, enseñanza, primaria, secundaria, errores, educación.

Summary

In this work we reflect on the various errors and obstacles which cause pupils from primary and secondary education to develop conceptual models which are incomplete or are badly constructed on the basis of concepts, properties and classification of two and three-dimensional geometric figures. Finally, we propose several recommendations, based on constructive methodology, which correct and remove these errors and obstacles which prevent the effective teaching and learning about figures.

Key words: Mathematics, geometry, teaching, learning, primary, secondary, errors, education.

1.- Introducción

En las enseñanzas de tendencia tradicional y en los libros de textos es frecuente encontrarse con ciertos estilos generalizados sobre las figuras y los conceptos geométricos, que crean esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente. Dichos estilos obstaculizan los proceso de abstracción y la agilidad en el manejo de ideas y contenidos.

En este trabajo presentamos algunos de los casos, más significativos, de errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría que pueden ser generados en el propio proceso de aprendizaje, aunque algunas veces esos errores ya aparecen en los estudiantes antes de que comience dicho proceso de aprendizaje. Este estudio es una parte de otro más amplio realizado a los estudiantes para maestros en el que investigábamos sobre sus recuerdos como discentes, sus expectativas como profesor y sus concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la Geometría (Barrantes, 2002 Barrantes y Blanco, 2006).

Desde hace tiempo los errores que comenten los alumnos han dejado de ser elementos sancionables o incapacidades carentes de interés y que había que ignorar hasta que se corrigieran por sí solos. Actualmente los errores son considerados, en coherencia con la tendencia constructivista, como una línea de trabajo en la que se investigan las concepciones erróneas, el examen de sus causas y la evolución de dichos errores en la formación académica. En los últimos diseños curriculares, que consideran

al alumno como el eje del aprendizaje, se admiten los errores como un elemento más de los procesos de aprendizaje.

Es notorio que algunos estudiantes muestran errores que no evolucionan ni son corregidos durante los distintos niveles educativos. Estos errores suelen perdurar durante toda su formación académica incluso son detectados en su formación de maestros por lo que si no son subsanados pueden ser transmitidos a sus futuros alumnos (Contreras y Blanco, 2001).

También ha sido probado y hemos experimentado en nuestro trabajo docente la resistencia que los estudiantes para maestro ponen para eliminar los errores, incluso después de comprobar su falsedad, lo que muestra su profunda interiorización de la que se ven influidas sus concepciones (Gómez, 1996).

Consideramos, por tanto, que hacer surgir y conocer los errores ayuda a captar sus concepciones, la forma en que los estudiantes de Primaria y Secundaria aprenden o han aprendido, y las dificultades con las que se encuentran en la realización de tareas. Este conocimiento es eficaz para los profesores pues constituye un modelo para la reflexión que le ayuda a desarrollar una enseñanza y un aprendizaje más significativos.

2.- De los errores y los esquemas conceptuales.

Empezamos estudiando algunos errores sobre la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas que pueden haber sido generados en el mismo proceso de aprendizaje de las figuras. Estos errores, en la enseñanza de la geometría, son causados muchas veces por una utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno.

En primer lugar tenemos que preguntarnos ¿qué ocurre en la mente de los alumnos cuando una vez que se supone que el concepto ha sido adquirido se les pide que identifiquen o construyan ejemplos?

La identificación o construcción de ejemplos de un concepto supone que hay que tener en cuenta la imagen del concepto (el reflejo en la mente del alumno) y la definición del concepto (verbal) así como aquellas operaciones mentales (ej.: esquemas lógicos) o físicas (ej.: giros de la figura) en las que una comparación con el dibujo mental sea más fácil (Vinner y Hershkowitz, 1983).

Vinner (1991) habla de esquema conceptual como aquello que se presenta en la mente cuando se nombra el concepto, es decir, la estructura cognitiva de un estudiante asociada a un concepto matemático estaría formada por las imágenes mentales que fruto de la experiencia, en la que se interiorizan propiedades y se desarrollan procedimientos, ha asociado con dicho concepto.

Así pues comprender significa *“tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias”* (Azcárate, 1997, 29).

3.- De la simbología visual del concepto.

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría de tendencia tradicional, en la que ya hemos dicho no se suelen utilizar materiales o recursos distintos al libro de texto, las imágenes juegan un papel muy importante en su enseñanza.

Dichos libros de textos presentan las distintas figuras geométricas mediante un único dibujo o un número tan pequeños de ellos que el alumno construye esquemas

conceptuales estándar sobre ellas (cuadriláteros, prismas, etc) que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto.

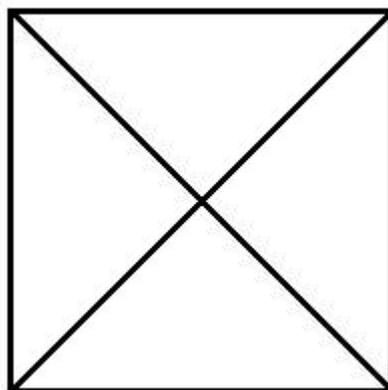


Figura 1

En estas figuras, a veces, no se presta atención a la simbología del lenguaje visual de forma que el profesor y el alumno interpretan cosas distintas sobre un dibujo, sobre todo si es representación plana de una figura tridimensional. Así el dibujo de la figura 1 puede ser interpretado como una pirámide cuadrada, una bipirámide cuadrada o un cuadrado y sus diagonales. Otras veces los alumnos no son capaces de ver en el plano ángulos rectos por su falta de dominio del sistema de representación en el que está construidas las figuras (figura 2).

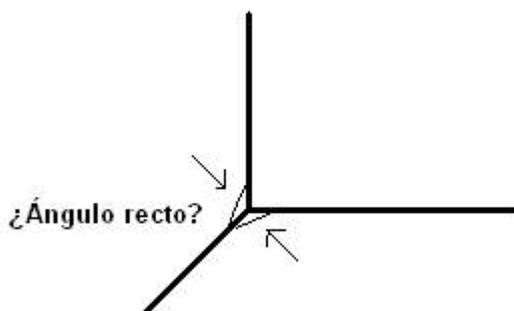


Figura 2

Las tareas de los profesores y los libros de textos es posible que incluyan representaciones que los alumnos interpreten de maneras distintas debido a que el paso del espacio al plano admite varias posibilidades como en los casos anteriores.

4.- De los distractores de orientación

Para Hershkowitz (1990), el concepto se deriva de su definición matemática, por ello, tiene atributos relevantes críticos que son los adecuados para ser ejemplo del concepto, y atributo no críticos que son los que sólo poseen algunos ejemplos. Los alumnos comienzan por tener una imagen del concepto muy amplia que da lugar a ejemplos estándares que mejoran con la práctica (procesos visuales o analíticos) de los que se obtienen ejemplos más críticos y analíticos. Sin embargo, ciertos atributos irrelevantes tienen fuertes características visuales y actúan como distractores.

Uno de los distractores más conocidos son los distractores de orientación (Vinner y Hershkowitz, 1983) que se refieren a aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto.

En el tema de Ángulos podemos observar como éstos suelen ser presentados con un lado horizontal paralelo al borde inferior del libro. Los alumnos incluyen en su esquema conceptual de ángulo dicho atributo de forma que consideran que siempre tienen que dibujarlos con un lado horizontal, sobre todo el ángulo obtuso (figura 3).

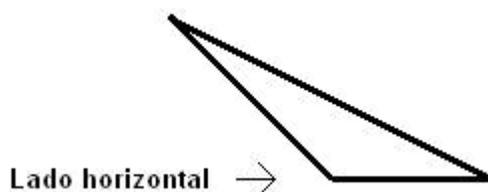


Figura 3

El paralelismo de la figura con los lados de libro o del folio se acusa mayormente cuando se trazan rectas perpendiculares o paralelas que se dibujan siempre siguiendo la dirección de estos lados. Igualmente ocurre con la construcción del triángulo rectángulo que se presenta apoyado sobre el vértice del ángulo recto o los rombos apoyados siempre en un vértice (figura 4).

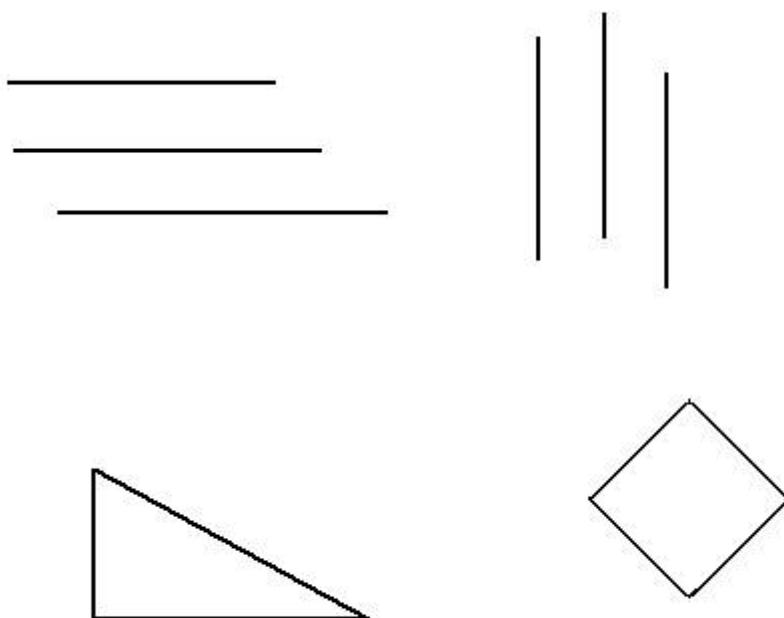


Figura 4

Así los alumnos pueden no interiorizan como ejemplos también válidos las rectas perpendiculares no paralelas a los bordes del libro, triángulos rectos colocados en otras orientaciones o rombos apoyados en uno de sus lados (figura 5).

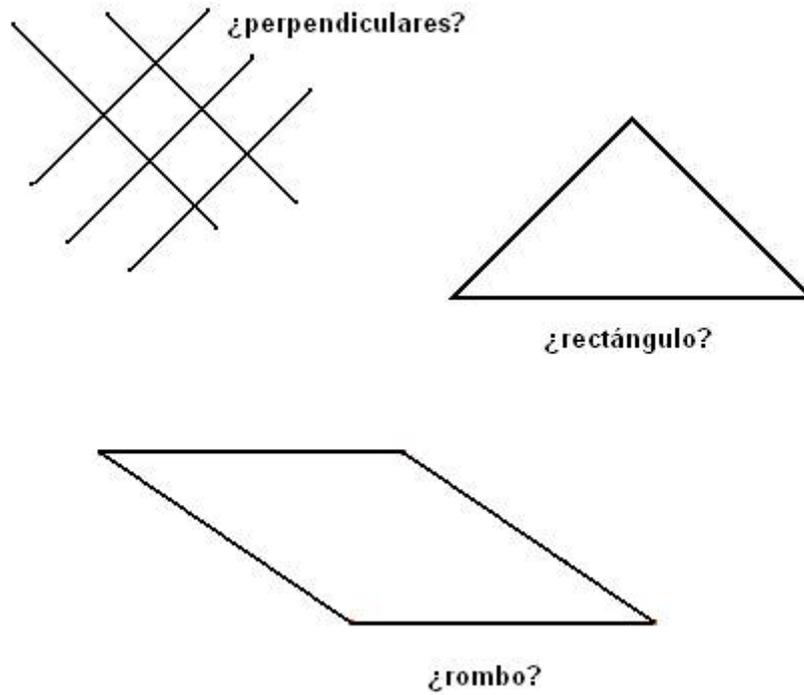


Figura 5

La orientación de los sólidos apoyados siempre sobre la base forma también en los alumnos imágenes mentales que hacen que no identifiquen como prismas aquellos que están apoyados sobre una cara lateral o como cubos los apoyados sobre un vértice (figura 6).

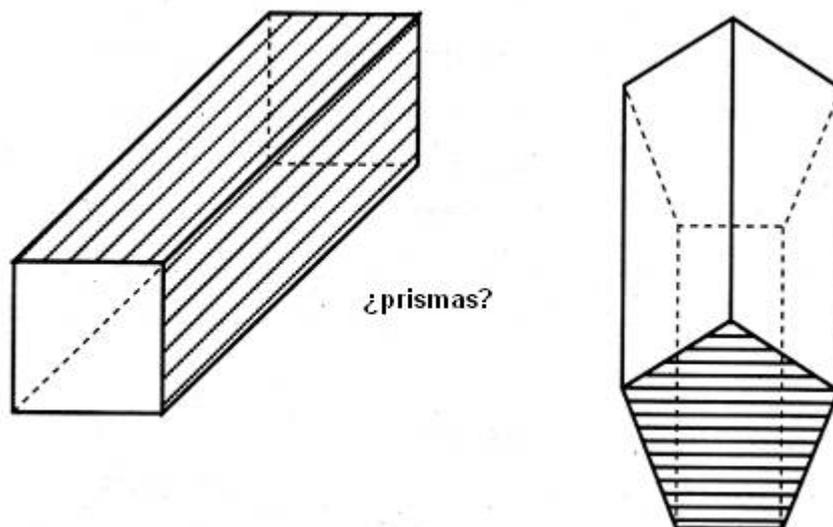


Figura 6

Errores comunes en los alumnos son considerar que la base *es la cara en la que apoyan los objetos* o que la base no es una cara, sobre todo en figuras como los prismas y las pirámides donde sólo consideran las laterales como caras de la figuras (Guillén,

2000). Hemos observado como los libros de textos contribuyen a esa imagen del concepto debido a la importancia que se le da a la base como objeto clasificador. Por ejemplo, la base determina el nombre de los prismas y si el prisma es regular o no.

5.- De los distractores de estructuración

Puede ocurrir que los esquemas mentales se presentan incompletos debido a los distractores de estructuración, es decir, a una presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos, probablemente sin intención. A veces los alumnos tienen ideas erróneas que se desarrollan con el proceso de aprendizaje y que tienen incidencia durante varios cursos. Un ejemplo alusivo a estos distractores es la presentación de los triángulos isósceles con los lados iguales siempre más grande que el lado desigual y siempre apoyado sobre este lado (figura 7).

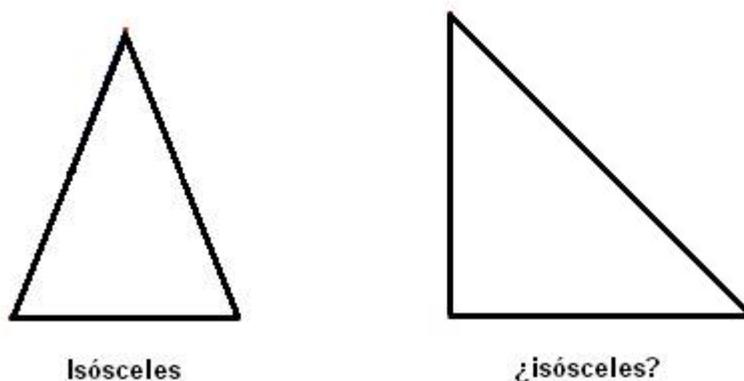


Figura 7

También el estudio de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices presupone que todas son siempre interiores al triángulo, así la dificultad de los alumnos para trazar alturas a los lados de un triángulo obtusángulo o el caso del triángulo rectángulo en el que dos alturas coinciden con los lados. Es interesante observar como en el trazado de alturas el alumno puede busca también la vertical paralela al borde del libro más que la perpendicular a la base (figura 8). En nuestro estudio hemos encontrado libros de textos en los que las alturas de los triángulos siempre presentaban esta orientación, es decir eran paralelas al borde del libro.

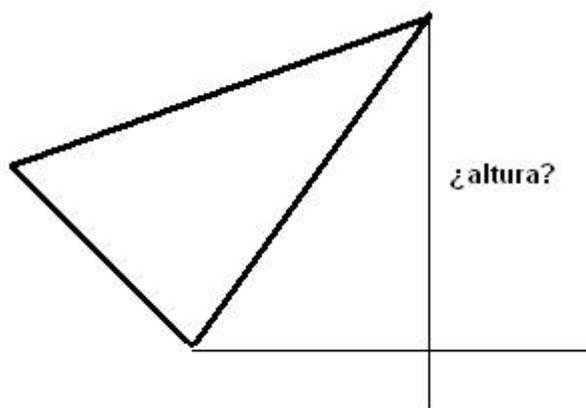


Figura 8

La presentación constante de esta altura estándar paralela al borde, siempre única, tanto en la definición como en las actividades de medida, teorema de Pitágoras, etc. hace también concebir a los alumnos la existencia de una sola altura en los triángulos. Así, cuando se les pide trazar las alturas de un triángulo solo trazan esta altura estándar pues podemos observar como los alumnos desconocen que existen otras alturas o tienen dificultad para trazar otras alturas que no sean la estándar. Esto hace que les sea difícil trabajar en las actividades con alturas no estándar.

Es característico observar también la escasez de figuras planas o sólidos de forma cóncava en las imágenes que recibe el alumno durante la enseñanza de la geometría, bien en Primaria o en Secundaria. Esto hace que no sean capaces de identificarlas ni de clasificarlas. Los alumnos conciben que solamente existan figuras y sólidos convexos. Igualmente ocurre con los trapecios en las clasificaciones de polígonos de la geometría plana. La imagen tan pobre que los alumnos reciben de estos polígonos hace que los alumnos no los consideren en la clasificación de cuadriláteros.

6.- De los nombres

El estudio de Medici y otros (1986) apunta el error que se comete al considerar como figuras geométricas solamente aquellas que tienen un nombre común “oficial” pues se hace demasiada insistencia sobre la nomenclatura tradicional.

De acuerdo con este estudio hemos podido constatar como los alumnos identifican más fácilmente como polígonos o como sólidos aquellos que conocen su nombre como cuadrado o pentágono, o poliedro y cilindro. Éstos sienten bastante reticencia a identificar, por ejemplo, como polígonos a aquellos que tienen más de diez lados pues no tienen un nombre común.

Estos autores señalan también el error que origina el confundir conceptos colectivos y conceptos individuales. Muchas veces el profesor se expresa de forma general hablando de “el cuadrado” o “el círculo” como si no existieran las figuras individuales sino solamente un arquetipo.

También con respecto a la nomenclatura, en la mayoría de los textos se presentan nombres como el trapezoide para un cuadrilátero convexo sin lados opuestos paralelos o el de romboide para un paralelogramo no equilátero ni equiángulo. Estas nomenclaturas son redundantes pues estas figuras planas quedarían siempre nombradas como cuadriláteros o paralelogramos respectivamente sin necesidad de añadirles un nuevo nombre. No merece la pena dar nombre a las figuras por las características que no tienen ya que normalmente se atiende más a las cualidades que poseen que a las que carecen (Mora, 1995).

7.- De las imágenes reales del concepto

En el aprendizaje de las figuras geométricas tenemos que tener también en cuenta otros obstáculos como los que Mesquita (1992) llama “doble estatus de los objetos geométricos” es decir, todo aquello que se apoya en objetos generales y abstractos que no puede ser expresado más que por una configuración específica que implica objetos concretos y particulares. Los conceptos en Geometría son distintos de sus representaciones externas por lo que son difícilmente dissociables de ellas.

Esta ambigüedad, aunque no la perciba el alumno, puede ser una fuente de conflictos para los alumnos que se enfrentan con un problema geométrico. En la Geometría se habla de abstracciones mientras los niños encuentran en las habitaciones

objetos reales que solamente se asemejan a esos objetos ideales geométricos (De la Torre, 1998).

A la complicación que supone el separar el objeto abstracto del real se añade otras veces la presentación en los libros de textos de fotografías que no son muy adecuadas para una primera presentación del sólido correspondiente. Así observamos caramelos de palo, además con superficie rugosa e irregular, como ejemplo de esfera; botes de bebidas con extremos curvados como ejemplos de cilindros, o jabones con formas redondeadas y con huecos como ejemplos de prismas. Un ejemplo también poco cercano al niño es presentar como primera pirámide una fotografía de las pirámides de Egipto que no están en planos principales y que no pueden formar una imagen mental adecuada al concepto.

En distintos trabajos con estudiantes para maestros observamos como estos identifican vasos como cilindros, o tiendas canadienses como prismas triangulares o sombrillas con lados curvos como octógonos lo que muestra la poca rigurosidad de los esquemas mentales construidos sobre esos conceptos.

8.- De las definiciones

Otro problema importante que hay que tener en cuenta en la enseñanza-aprendizaje de la geometría son las definiciones de los conceptos.

Gutiérrez y Jaime (1996) apunta cómo los maestros y los libros de texto presenta los conceptos de Geometría elemental de dos formas distintas: o bien mediante el enunciado de la definición, ejercicios de memorización y reconocimientos de algunas figuras concretas, o bien presentando primeramente ejemplos de figuras, describiendo sus características para pasar a definir las, realizar ejercicios memorísticos de la definición así como actividades de reconocimiento de otras figuras.

Ambas metodologías ponen el acento en las definiciones más que en los ejemplos que son los “*que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo*” (Gutiérrez y Jaime, 1996, p.145). Debido a estas metodologías los alumnos memorizan las definiciones cuando el maestro les pregunta pero no las utilizan para resolver las actividades que se le plantean, pues carecen de una imagen conceptual correcta (Vinner, 1991). Esta forma de actuar hace que se formen alumnos que conocen los conceptos geométricos de forma teórica pero poco práctica, incapaces de afrontar los problemas geométricos que se le plantean o se le plantearán en su vida cotidiana.

Esta importancia de las definiciones se ve agravada debido a los errores que sobre éstas presentan los libros de textos. Así ciertos objetos geométricos pueden ser definidos de formas diferentes y llevar a los alumnos a graves confusiones. Por ejemplo, las definiciones de los elementos notables de un triángulo como altura o medianas tienen dos acepciones: bien como segmentos (en textos de Primaria) o bien como rectas (textos de E.S.O.). Si nos fijamos, por ejemplo, en las alturas y las definimos como rectas, cuando el alumno trabaja el tema de medida tiene que dar valores finitos a las alturas que aparecen en los problemas que se le plantean. Esto lleva a contradicción en la construcción del esquema conceptual del alumno referente a la altura pues, por una parte se considera una recta ilimitada y por otra podemos medirla en metros y obtener un resultado finito. Sin embargo, si las definimos como segmentos no podríamos deducir la propiedad de que “las tres alturas se cortan en un punto”, ya que para el caso del triángulo obtuso no se cumpliría (figura 9).

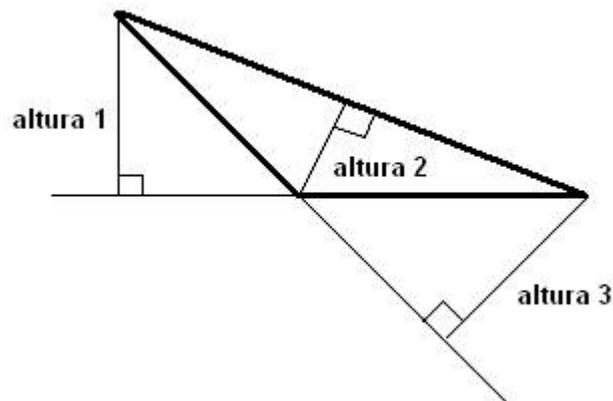


Figura 9

Los errores pueden también ser ocasionados por las interpretaciones distintas que se le pueden dar a la misma expresión gramatical. Así la definición de triángulo isósceles como *el triángulo que tiene dos lados iguales* puede ser interpretada como que *dos lados son iguales y uno desigual* o bien que *tiene dos lados iguales y el otro puede ser desigual o no*. En esta última definición el triángulo equilátero se podría incluir como isósceles pero no sería así en la primera interpretación. Por tanto, distintas interpretaciones de la misma expresión gramatical puede llevar a los alumnos a clasificar un mismo conjunto de elementos geométricos en diferentes familias de polígonos.

9.- De las clasificaciones.

Un problema que se plantea desde la Primaria y que los alumnos arrastran hasta la universidad, en particular los estudiantes para maestros, es la clasificación de la formas planas, tanto de triángulos como de cuadriláteros. Las confusiones que los alumnos tienen sobre estas clasificaciones hace que les sea imposible clasificar otros conjuntos donde repercuten éstas como es la clasificación de los sólidos, en particular en el caso de los paralelepípedos.

Dentro de los tipos de clasificaciones que distingue De Villiers (1994) nos fijamos en la clasificación por particiones y en la clasificación por inclusiones o jerárquica.

En Primaria a partir de las definiciones que se dan en los libros de textos se clasifican los triángulos y los cuadriláteros en particiones. Así aparece la definición de isósceles *como el triángulo que tiene sólo dos lados iguales* o también como *el que tiene dos lados iguales y uno desigual*. Estas definiciones predispone a una clasificación por partición de los triángulos en: escalenos, isósceles y equiláteros que es la que los maestros enseñan en Primaria.

Sin embargo, en 2° de E.S.O. encontramos la definición de triángulo isósceles *como el que tiene dos lados iguales al menos* lo que presupone una clasificación por inclusión en la que el triángulo equilátero es un subconjunto de los triángulos isósceles y éstos de los triángulos en general (figura 10)

Clasificación por partición



Clasificación por inclusión

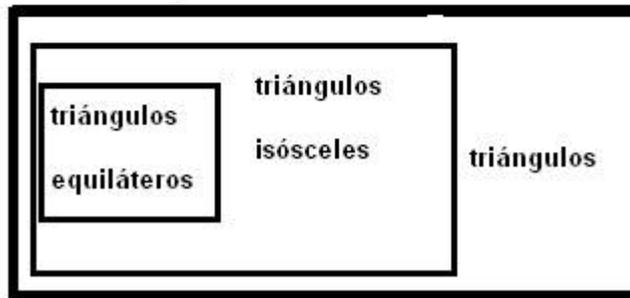


Figura 10

Igualmente ocurre con los cuadriláteros que son clasificados en Primaria como clases disjuntas en las que el rectángulo, el cuadrado y el rombo pertenecen a clases distintas.

Clasificación por partición de los cuadriláteros

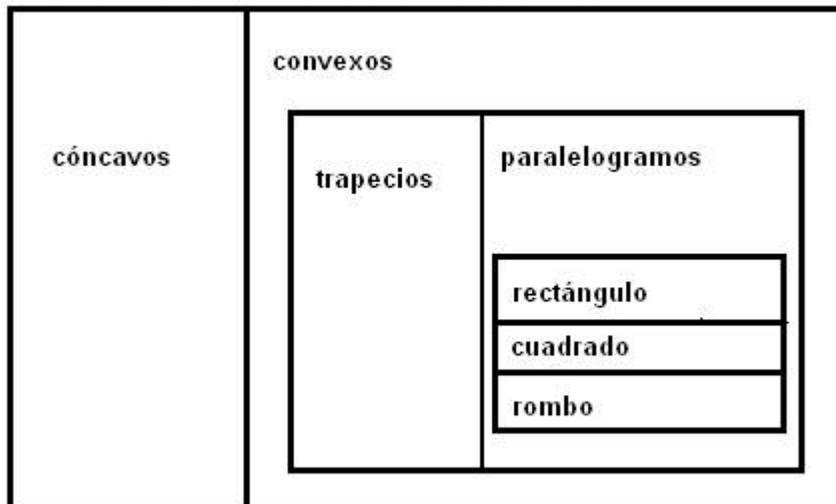


Figura 11

Posteriormente en Secundaria y en la formación de maestros se clasifican por inclusión. Así a partir de las definiciones que se dan en la figura 12, los alumnos tienen serias dificultades para admitir que el cuadrado pertenece a la familia de los rombos o a la familia de los rectángulos, incluso después de entender perfectamente las propiedades que corresponden a cada figura.

Definiciones

Los cuadriláteros pueden ser cóncavos y convexos

En el conjunto de los convexos encontramos

Paralelogramos : Dos pares de lados paralelos

Rectángulos: cuadriláteros, paralelogramo, equiángulo.

Cuadrados: cuadriláteros, paralelogramo, equiángulo, equilátero

Rombos: cuadriláteros, paralelogramo, equilátero.

Trapezios :Un par de lados paralelos.

Figura 12

De igual forma les cuesta trabajo admitir que los paralelogramos están incluidos en el conjunto de los trapezios, incluso entendiendo que si los paralelogramos tienen dos pares de lados paralelos entonces tienen también uno (figura 13).

Clasificación por inclusión de los cuadriláteros

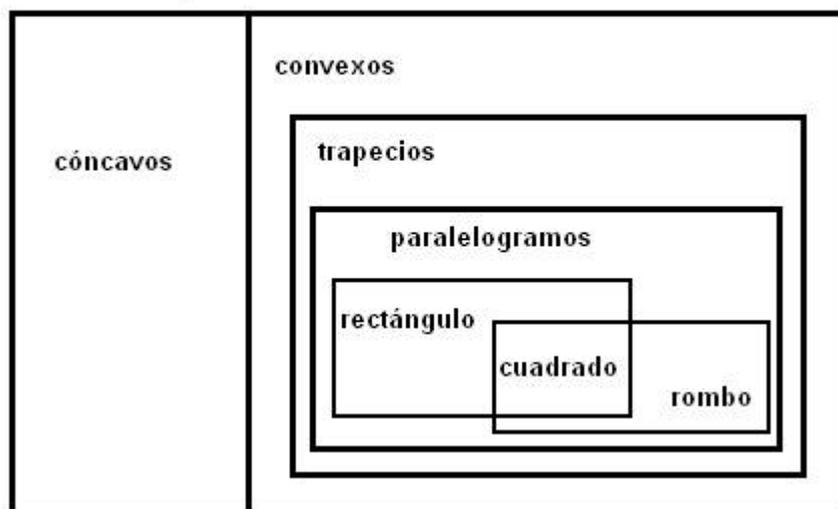


Figura 13

La falta de criterios claros de clasificación de las figuras planas hace que los alumnos manifiesten serias dificultades en la clasificación de sólidos. Un ejemplo claro es la clasificación de los paralelepípedos y, por el mismo motivo que con el cuadrado, la inclusión del cubo en la familia de los romboedros o los ortoedros.

Las imágenes conceptuales y las definiciones de los alumnos en el segundo nivel de Van Hiele (Primaria) están muy arraigadas, de forma que las nuevas definiciones que implican un cambio de imagen conceptual no son admitidas incluso cuando alcanzan el tercer nivel debido a que no hay atenciones de alerta ni por parte del libro, ni del profesor que les adviertan del cambio de definiciones (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992). Los alumnos llegan a su formación como maestros admitiendo solamente la ordenación por partición y mostrando grandes recelos sobre la ordenación por inclusión. Estos cambios originan muchas confusiones en los alumnos que incluso pueden generar concepciones y actitudes de rechazo hacia la Geometría.

10.- Recomendaciones finales

Nuestro interés en este artículo al comentar los distintos errores no es otro que mostrar a los profesores de los distintos niveles una fuente de información de lo que pueden haber aprendido sus alumnos y cómo lo han aprendido.

Es notorio como en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, se fuerzan los tiempos de la conceptualización y se introducen muy pronto los conceptos abstractos obviando la realización de actividades concretas como consecuencia de esa utilización temprana de la nomenclatura definitiva.

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría los profesores deben detenerse más en el mundo de las figuras realizando actividades de interdisciplinariedad con otras materias como el Arte. Es necesario aumentar el número de actividades de laboratorio en las que los conceptos y propiedades de las figuras geométricas se manipulen o realizar investigaciones y proyectos de estudios de las figuras geométricas (Barrantes, 1998). Estas actividades deben incluir tareas de orientación de las figuras, de estructuración y de las distintas representaciones de una figura en el plano (Gracia, 95), así como reflexiones o debates sobre los nombres de las figuras, la relación imagen real y concepto...

Por otra parte, como hemos comentado, las definiciones de los libros de textos crean un problema en el aprendizaje (Azcarate, 1997). Los libros de textos y los profesores parten de que los esquemas conceptuales se construyen a partir de las definiciones y por tanto en la resolución de problemas y actividades es la definición la que se activa en la mente del alumno y la que domina el proceso. Esto produce la incapacidad del alumno de resolver situaciones cotidianas. Por ello, el esquema conceptual se construirá a partir de la experiencia del alumno, a partir de situaciones muy variadas y sin necesidad de recurrir en un principio a la definición.

Es esencial que los profesores presten principal atención a las definiciones, propiedades, a las imágenes visuales y reales de los conceptos que trabajan con los alumnos. Deben recordar permanentemente que los conceptos fundamentales en los distintos lenguajes (verbal o gráfico) pueden esconder objetos mentales distintos a los que piensan, produciéndose una falta de entendimiento entre el discurso como profesor y el conocimiento del alumno. Esta especial atención nos hará descubrir, cuando los alumnos realicen tareas, si su esquema conceptual es incompleto o mal construido y nos dará oportunidad para modificarlo.

También, los profesores tienen que especificar a sus alumnos el cambio de definiciones y clasificaciones que se produce al pasar de Primaria en donde, de acuerdo con los niveles de Van Hiele, los alumnos clasifican por particiones a las etapas posteriores en las que, el paso al tercer nivel, permiten otras clasificaciones como la inclusión.

Entre los problemas que detectamos en la formación de maestros observamos como la inclusión del cuadrado como rectángulo o como rombo tiene bastante dificultad, Siguiendo a De Villiers (1994) hemos obtenido resultados favorables utilizando la palabra *especial* afirmando que un cuadrado *es un rectángulo especial*. Los alumnos suelen tener problemas de considerar el cuadrado como rectángulo pues en lugar de fijarse en las definiciones recurren a su imagen mental de las figuras en las que no se admite en ningún caso que *un cuadrado sea igual a un rectángulo*.

Con respecto a la inclusión del cuadrado en las familias de los rombos ayuda también bastante la utilización de programas dinámicos de Geometría (Cabri en sus

versiones u otros) y los materiales dinámicos como los mecanos (Mora 95) con los que podemos observar mediante movimientos como cada cuadrado pertenece a la familia de todos los rombos que tienen los mismos lados. La geometría dinámica permite que los alumnos prueben las nuevas ideas, las examinen y las interioricen produciéndose las modificaciones necesarias.

Sin embargo es preciso que observemos que los errores considerados no se deban a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de la memoria sino a errores que sean persistentes y reproducibles. A veces, podemos pensar que el alumno ha rebasado un error y sin embargo se vuelve a presentar en otras actividades con el consiguiente desencanto del profesor. Por tanto, no basta con advertir al alumno de su error sobre determinado tópico dándole una explicación, sino que debemos desarrollar un proceso continuo ya que no se puede sustituir una concepción antigua por otra nueva de una forma radical.

Esta metodología constructivista hace que los alumnos se enfrenten a sus propios errores mediante tareas en las que necesiten comprobar y reflexionar. Debemos provocar conflictos en sus mentes que verifiquen la inconsistencia de sus ideas frente a los distintos errores. Así estaremos en el camino de conseguir una mejora del conocimiento de las concepciones que los alumnos tienen sobre las figuras geométricas y todos los tópicos relacionados con ellas.

Referencias bibliográficas

- AZCÁRATE, C. Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma*, 1997, n 25, p. 23-50.
- BARRANTES, M. (ed.). *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 1998.
- BARRANTES, M. *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje*. Tesis doctoral. CD Rom. Cáceres: Servicio de publicaciones Universidad de Extremadura. 2002.
- BARRANTES, M; y BLANCO, L. J. A study of prospective Primary teacher's conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2006, v.9, nº 5, P. 411-436.
- CONTRERAS, L. C. y BLANCO, L. J. ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. En Perales, Ej.; García, A.L. y otros (eds.). *Congreso Nacional de Didácticas específicas*. 2001, Vol II. G. Ed. Universidad de Granada.
- DE LA TORRE, E. Estrategias de enseñanza de la Geometría en Primaria y Secundaria. En M. Barrantes (ed.). *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 1998, p. 23-38.
- DE VILLIERS, N. D. The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilateral. *For the Learning of Mathematics*, 1994, n 14 (1), p. 11-18.
- GÓMEZ, B. Mecanismos de una falta de competencia en cálculo mental. Un estudio en la formación de maestros. *Educación Matemática*, 1996, 8 (1). p. 5-12.
- GRACIA, E. Representación del espacio en el plano. *UNO*, 1995, 4, p. 29-40.

- GUILLÉN, G. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 2000, 18(1), p. 35-53.
- GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, M.V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Ed. Comares. 1996, p. 145-169.
- HERSHKOWITZ, R. Psychological Aspects of Learning Geometry. En Nesher, P. y Kilpatrick, J.(eds.). *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press. 1990, p. 70-95.
- JAIME, A, CHAPA, A. y GUTIÉRREZ, A. Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de textos de E.G.B. *Épsilon*, 1992, n 23, p. 49-62.
- MORA, J. A. Los recursos didácticos en el aprendizaje de la Geometría. *UNO*, 1995, n 3, p. 101-115.
- MEDICI, D. y otros. Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico. *Enseñanza de las Ciencias*, 1986, n 4(1), p. 16-22.
- MESQUITA, A.L. The Types of Apprehension in Spatial Geometry: Sketch of a Research. *Structural Topology*, 1992, n 18, p. 19-30.
- VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. En Tall, D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 1991, p. 65-81.
- VINNER, S., y HERSHKOWITZ, R. (1983). On concept formation in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik*, 1993, n 1(83), p. 20-25.