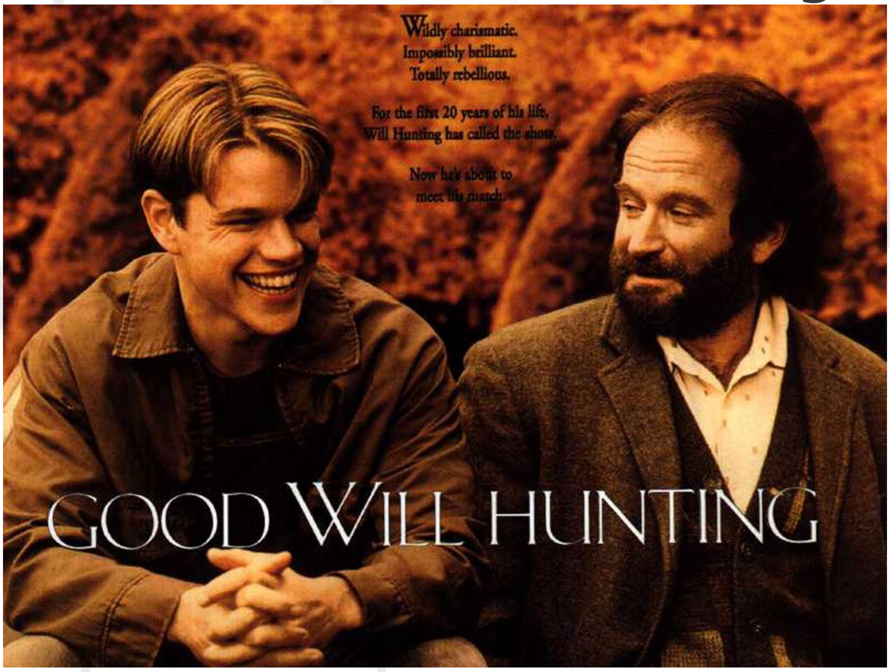
El indomable Will Hunting



Índice de contenido

El indomable Will Hunting

Ficha técnica y artística

Director: Gus Van Sant **Año**: 1997 **Duración**: 126 minutos
Reparto: Matt Damon (Will Hunting), Robin Williams (Sean), Ben Affleck (Chuckie), Stellan Skarsgard (Lambeau), John Mighton (Tom), Minnie Driver (Skylar), Rachel Majowski (Krystyn), Casey Affleck (Morgan), Cole Hauser (Billy)...

Título original: Good Will Hunting
Producción: Lawrence Bender
Guión: Ben Affleck y Matt Damon
Música: Danny Elfman
Fotografía: Jean-Yves Escoffier
Montaje: Pietro Scalia
Dirección artística: James McAteer

Género: Drama
Nacionalidad: Estados Unidos
Fecha de estreno: 5/12/97
Estreno en España: 22/02/98
Presupuesto: 10 millones de $
Recaudación: 220 millones de $

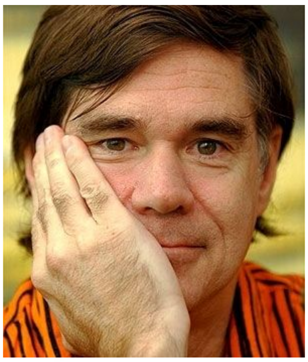
Sinopsis

Está ubicada en **Boston**, Massachusetts y cuenta la historia de **Will Hunting** (Matt Damon), un joven prodigio autodidacta pero problemático, que vive en los suburbios y trabaja en los servicios de mantenimiento de la Facultad de matemáticas del **MIT**, uno de los centros universitarios de investigación más prestigiosos del mundo. Carismático, criado en un ambiente marginal y rebelde, pasa el tiempo libre con sus inseparables amigos y, debido a su carácter, en ocasiones tiene problemas con la ley.

Tras una pelea en la calle, Will es **detenido** por la policía y **condenado** a ir a la **cárcel**. Su única esperanza es **Sean McGuire** (Gerald Lambeau), un profesor de matemáticas que intentará que reconduzca su vida. Ha descubierto casi por casualidad sus **portentosas facultades** a través de unos problemas de "gran dificultad" que ha ido poniendo en un encerado que tiene colocado en el pasillo cercano al aula. Después de pagar la fianza, la condición para no volver a la cárcel será que acepte trabajar con Lambeau en temas de investigación de matemáticas avanzadas y someterse a la terapia de un **psicólogo** (en este caso, Robin Williams) con el que entablará una profunda, conflictiva y extraña relación.

Al mismo tiempo se **enamorará** de una joven y la **relación con sus amigos**, especialmente con uno de ellos, sufrirá una ligera transformación. Todo ello concluye con un giro favorable en su vida.

Breve filmografía del director



Gus Van Sant nació en Louiseville el 24 de julio de 1952, Kentucky (USA). El trabajo de su padre, agente comercial, hizo que durante su infancia se trasladara en numerosas ocasiones. Estudió en la *Rhode Island School of Design* antes de trasladarse a Hollywood. Al principio de su carrera pasó dos años en Nueva York trabajando en publicidad. Más tarde se estableció en Portland, Oregón donde, además de dirigir y producir, se dedicó a la pintura, fotografía y escritura. En 1995 publicó una colección de fotografías, "**108 Portraits**", y dos años después "**Pink**", una sátira sobre el mundo del cine. Además ha dirigido vídeos para muchos artistas, entre ellos David Bowie, Elton John, Red Hot Chili Peppers y Hanson.

Gus Van Sant comenzó a hacer películas con una cámara de *súper 8* en 1964 y como ayudante de Roger Corman. Tras unos inicios rodando cine independiente, este director de cine, productor, guionista y escritor estadounidense se ha ido ganando al público y a la crítica por igual a lo largo de los años desde su irrupción en escena con su aclamada película "**Mala Noche**" en 1985, que ganó el Premio Los Ángeles *Film Critics Award* a la mejor película independiente de 1987. Le siguieron títulos como "**Drugstore Cowboy**" (1989) y "**Mi Idaho Privado**" (1991), siempre fascinado por personajes marginales.

"**Ellas también se deprimen**" (1993) surge a partir de una novela de Tom Robbins, pero constituye un verdadero fracaso de público y crítica, lo que hace que la trayectoria de Van Sant se dirija hacia referentes más cercanos a nuestro tiempo. En "**Todo por un sueño**" (1995) establece una mirada crítica en clave de parodia sobre la manipulación de los medios de comunicación a través de una joven arribista (Nicole Kidman) y marca una nueva tendencia en la trayectoria de Gus Van Sant, que se haría realidad en "**El indomable Will Hunting**" (1997), un film que marca la salida del cine independiente y el inicio de una nueva etapa de producciones con un claro enfoque comercial. Esta película tuvo nueve nominaciones al "Óscar", entre ellas las de mejor director, ganando las estatuillas a mejor guión y mejor actor secundario.

A partir de este momento Gus Van Sant pasa a dirigir películas con un carácter "comercial": el *remake* de "**Psicosis**" (1999), producida por él y que es una recreación toma por toma del original de Hitchcock, y "**Descubriendo a Forrester**" (2000) con Sean Connery, momento en el que parece retornar a sus orígenes con un cine comprometido, capaz de mover a la reflexión a los espectadores con la denominada "trilogía de la muerte", con las obras "**Gerry**" (2002), "**Elefante**" (2003) y "**Last Days**" (2005).

Con "**Paranoid Park**" (2007) vuelve a la temática de adolescentes introvertidos, sensibles y arrastrados por circunstancias externas a sus voluntades.

Actualmente está rodando "**Milk**" (2009) donde afronta un viejo proyecto, la adaptación de la biografía de Harvie Milk, el primer político estadounidense que reconoció su homosexualidad y luchó por la igualdad de derechos del colectivo gay en la década de los 70.

Durante su carrera Van Sant ha continuado realizando *cortos* que también han sido premiados; entre estos destacan la adaptación del relato de William S. Burroughs "**The Discipline of De**", (1982) que se exhibió en el festival de Nueva York, "**Ballad of the skeletons**" (1997) y "**París, je t'aime**" (2005).

Guión

En este trabajo ocupa un lugar muy destacado el guión original de **Matt Damon** y **Ben Affleck**, amigos desde la infancia. En un principio concibieron un *thriller* en el que el FBI intenta reclutar a un joven de los barrios marginales de Boston, dotado de una inteligencia excepcional. Cuando presentaron el guión en la "*Castle Rock Entertainment*" se les sugiere volcar la historia hacia la relación entre Will y el psicólogo. Compran el guión pero se niegan a que lo protagonicen. Tenaces en la empresa, consiguen que Miramax se haga con los derechos del guión y se les permite figurar como guionistas. A la hora de elegir el director, se decantan por Gus Van Sant, al que conocen de trabajos anteriores.

Para darle la **mayor verosimilitud** posible en cuanto al tema matemático, se cuenta que asisten a clases con el profesor Patrick O'Donnell (Universidad de Toronto), que hará un *cameo* en el papel de Marthy y aparece en los títulos de crédito del final como "*Math consultant*", y contaron con colaboradores científicos como Sheldon Glashow (Nobel 1979) y Daniel J. Kleitman (del MIT de Massachusets).

Premios

- Globo de Oro 1997, *Golden Satellite* y premio de la *National Board of Review* al mejor guión original.
- Premio Alfa y Omega 1998 al mejor actor secundario (Robin Williams).
- Óscar 1997 al mejor actor de reparto (Robin Williams) y al mejor guión original.
- Nominaciones a la mejor película, director, actor (Matt Damon) y actriz de reparto (Minnie Driver).
- Oso de plata del Festival de Berlín de 1998 a Matt Damon.
- Premio al mejor actor europeo (Stellan Skarsgård) de 1998.
- Premio de la Crítica de Londres a la mejor actriz secundaria británica (Minnie Driver), 1999

... y otros muchos premios y nominaciones en diferentes festivales internacionales menos conocidos.

Justificación de la elección de la película.

Se ha elegido esta película porque tiene un argumento interesante y educativo, ya que trata de un joven con un don desaprovechado para las Matemáticas. Uno de los objetivos básicos de nuestras actividades es popularizar y divulgar las matemáticas por lo que hemos elegido una película de "Óscar". El tema es idóneo para los alumnos de Bachillerato, tanto 1º como 2º, ya que el protagonista es un adolescente, cuyos problemas e inquietudes giran en torno a la amistad, el amor y la toma de decisiones.

Nivel curricular

El nivel educativo recomendado es

- 1º y 2º Bachillerato en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales para los temas de matrices y grafos.
- ESO y Bachillerato en los objetivos de:
  - introducción a los grafos mediante juegos.
  - relacionar las altas capacidades y las matemáticas.
  - Lenguaje matemático.

Objetivos didácticos generales

- Percatarse de algunas particularidades del alumnado con altas capacidades y superdotados, con los que quizás podemos convivir en el aula como profesor o como alumno.
- El lenguaje matemático. Importancia y universalidad del mismo.
- Álgebra: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Introducción a la teoría de grafos, y aplicación a contextos cotidianos.
- Conceptos de probabilidad y de integral.
- Buscar premios que se conceden en el mundo de las Matemáticas.
- Conocer algún matemático que responda a las características de nuestro protagonista.

Puntos "calientes" del episodio

OBJETIVOS DIDÁCTICOS CONCRETOS	TIEMPO
Reconocer diferentes símbolos propios del "lenguaje matemático" en los títulos de crédito y en las pizarras del aula del profesor Lambeau.	00:00:14 - 00:02:23 00:03:24 - 00:04:51
Conocer y trabajar con matrices y determinantes.	00:07:10
Obtener autovalores y autovectores asociados a una matriz.	00:09:13
Diagonalizar matrices.	00:13:13
Resolver sistemas dependientes de un parámetro.	00:05:43
La teoría de grafos: problemas y construcción de árboles.	00:52:38
Construir la matriz de adyacencia dado un grafo.	
Obtener una matriz a partir de un grafo.	
Calcular probabilidades.	01:54:20
Manejar el concepto de integral.	00:04:25

Temporalización

La temporalización adecuada para esta película sería de cinco sesiones distribuidas de las siguiente manera:

- Una clase para la introducción a la película y al tema a tratar, con el comienzo de la proyección (sesión 1).
- Dos clases para ver la película y comentarla (sesiones 2 y 3).
- Una para las primeras impresiones y realización individual de las actividades (sesión 4).
- Una sesión para, con herramientas como Internet, ampliar las cuestiones más importantes que se hayan tratado (sesión 5).

Se propone utilizar también sesiones de tutoría.

Puntos de interés antes del visionado de la película

Veamos algunos conceptos que se deben presentar y explicar y que, además, pueden ser importantes de cara a entender mejor determinadas escenas o contenidos:

1. Matemáticas:

- Observar y tomar nota de todos los conceptos matemáticos, conocidos o no, que se comentan a lo largo de la película.
- Observar en qué escenas aparecen conceptos matemáticos (en la pizarra, en diapositivas, ...) y cuáles son.
- Fijarse en las relaciones que se hacen con otras materias (Física) o con la vida real:
  - probabilidad de que toque la lotería
  - probabilidad de que te caiga un rayo
- Comprender que el mundo utiliza las formas matriciales para disponer grandes cantidades de datos.
- Teoría de grafos:
  - Conocer el antecedente histórico de los puentes de Königsberg.
  - Explicar brevemente y de manera simple la teoría de grafos.
  - Cómo pasar de grafos a matrices.
  - Interpretación.

2. Transversalidad educativa

- Observar los estereotipos de los personajes que aparecen en la película: los distintos tipos de jóvenes y sus inquietudes, los estudiantes de Harvard, los amigos de Will, el profesor, su ayudante, ...
- Comportamiento y actitud de Will:
  - ¿Cómo se comporta Will en el juicio? ¿Con respeto? ¿Con buenos modales?
  - ¿Cómo acepta Will la ayuda que le ofrece Lambeau? ¿Cuál es su actitud?
- ¿Qué importancia tiene el diálogo en las relaciones de pareja y en la solución de los problemas personales?
- ¿Cómo es la vida de Will al inicio y al final de la película?
  - ¿Experimenta cambios en su metas?
  - ¿En las relaciones personales?
  - ¿Quién le ayuda?
- Observar bien las escenas donde la creatividad de Will como actitud vital se manifiesta frente al convencionalismo y la mediocridad.
- Meditar acerca de las diferencias entre niños y niñas precoces, prodigios, genios, talentos, altas capacidades, brillantes, excepcionales y superdotados.
- Conocer algunos detalles importantes de cara a la detección de estos niños.
- Reflexionar acerca de los 3 tipos de inteligencia que propone Sternberg:
  - Inteligencia analítica
  - Inteligencia práctica
  - Inteligencia creativa.

Aspectos a comentar tras el visionado de la película

- Comentar y dar a conocer las Medallas Fields.
- Preguntarnos y reflexionar acerca de por qué no existe el Premio Nobel de Matemáticas.
- Conocer otros premios relacionados con las Matemáticas.
- Reconocer y analizar el personaje de Srinivasa Ramanujan.
- Comentar el personaje real de Theodore Kaczynski.
- Actividades relacionadas con la teoría de grafos y el lenguaje matemático.

Sugerencias didácticas

1. Investigación Matemática

1. Desde los títulos de crédito ya se puede observar la presencia matemática.
   a) Coméntalos brevemente.
   b) ¿Ves algún significado en esa forma tan particular de presentarse?
   c) ¿Qué otros aspectos relacionados con las matemáticas has encontrado a lo largo de la película?
2. Investiga y explica brevemente cada uno de los siguientes conceptos de tipo matemático que aparecen a lo largo de la película:
   a) Teoría de Grafos. Profundizando un poco, describe brevemente en qué consiste un grafo Hamiltoniano y un grafo Euleriano.
   b) Combinatoria. Profundizando en este tema, describe brevemente en qué consisten los conceptos de Variaciones, Permutaciones y Combinaciones.
3. A lo largo de la película se hacen diferentes referencias a personas, instituciones o lugares reales. Comenta muy brevemente algunos de ellos:
   a) Matemáticas:
      - Joseph Fourier,
      - Leonhard Euler,
      - Srinivasa Ramanujan,
      - Godfrey H. Hardy,
      - Theodore Kaczynski (Unabomber).
      - La Medalla Fields, ¿por qué no existe el Premio Nobel de las Matemáticas?
   b) Ciencia en general:
      - Albert Einstein,
      - Jonas Salk.
   c) Geografía:
      - el MIT (Massachusetts Institute of Technology),
      - la Universidad de Harvard,
      - el NSA (National Security Agency) …
4. La película aborda la relación entre las Matemáticas y la sociedad. El profesor Lambeau y el psicoterapeuta McGuire confrontan en el bar sus puntos de vista sobre el papel y la utilidad de las Matemáticas. ¿Te sientes más cercano a alguno de los dos? ¿Por qué?
5. ¿Recuerdas alguna otra película en la que escriban sobre cristales expresiones relacionadas con las matemáticas? Comenta su título o algo que la identifique.

2. Aspectos Sociales y Culturales

1. ¿Consideras que el comportamiento de Will es justificable?
2. Analiza la relación existente y el papel que juegan las diferentes personas que trabajan en matemáticas:
   a) el profesor Lambeau,
   b) Tom el ayudante,
   c) los alumnos de Lambeau,
   d) el profesor mayor y Will.
   ¿Te parecen sus relaciones correctas, realistas y creíbles?
3. En cuanto a otros personajes no relacionados con las matemáticas,
   a) ¿qué opinas de?
      - Sean Maguire,
      - Los amigos de Will,
      - Skylar.
      -
   b) ¿Te parecen personajes reales o estereotipados?
   c) ¿Qué personaje cambiarías y en qué sentido?
4. Una de las características personales más llamativas del protagonista es su gran inteligencia.
   a) Comenta en cuál de los tres tipos de inteligencia destaca Will y en cuál tiene mayor posibilidad de mejorar.
   b) Pon un ejemplo que ilustre cómo Will destaca en cada uno de estos tres tipos de inteligencia (argumenta citando escenas concretas).
5. ¿Es Will una persona creativa? Coméntalo brevemente con ejemplos concretos.

6. En muchos debates y bibliografía acerca de la película, se dice que cómo es posible que nuestro protagonista tenga estas capacidades si, incluso, en toda la película no se le ve leer un solo libro. ¿Es cierta esta última afirmación?
7. Acerca de la importancia de los amigos:
    a) ¿Crees que son un buen ejemplo para Will?
    b) ¿Quiénes aconsejan a Will? ¿A quién hace más caso?
    c) ¿Cómo reacciona su mejor amigo al ver que se ha ido?
    d) ¿Qué habrías hecho tú en su lugar?
8. ¿Crees posible que ocurra en la realidad lo que sucede en esta película?
9. ¿Quién crees que pintó el cuadro de la barca que tiene Sean Maguire en su despacho?
10. La película habla sobre un joven genio en matemáticas. ¿Conoces algún ejemplo real en el campo científico, aparte de los citados en la película?
11. Valoración personal:
    a) ¿Qué te ha aportado la película?
    b) ¿Te ha hecho reflexionar sobre alguno de los siguientes temas?:
        - unidad familiar,
        - valor de la amistad,
        - rebeldía de la juventud.
12. Haz un breve resumen y valoración de la película. Escribe un final alternativo.

Actividad 1. El lenguaje matemático

A lo largo de la película que has visto, desde los títulos de crédito pasando por numerosas escenas, aparece un lenguaje escrito que te puede resultar algo extraño. La matemática tiene, como la mayoría de las ciencias y otras disciplinas del saber, un lenguaje particular, específico, que simplifica la comunicación y clarifica y designa sus contenidos de una manera exacta, sin confusión posible. Es un “actor“ más de la película y un nexo de unión entre los personajes que se relacionan a través de este lenguaje.

Como ya habrás ido descubriendo a lo largo de tu vida como estudiante, este lenguaje está repleto de signos o caracteres gráficos (como por ejemplo: ∀, ∃, ⇔, ≌, /, ∈, ⊂, etc.), que son las “palabras” de este idioma. Cada uno de estos símbolos tiene un significado particular, y no existen sinónimos.

Actividad 1

A lo largo de toda la E.S.O has trabajado con los diferentes tipos de números. Vamos a refrescar un poco la memoria sobre el lenguaje matemático con la siguiente actividad

¿Con qué letra indicamos que nos estamos refiriendo a los siguientes conjuntos numéricos?		**Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenece cada número**
Conjunto de números Naturales.	**N**	– 2 ∈
Conjunto de números Enteros		5 ∈ **N**
Conjunto de números Racionales		2.52525252……∈
Conjunto de números Reales		3/2 ∈
Conjunto de números Irracionales		2,52552555255552…. ∈
¿Qué significado tiene la siguiente secuencia de símbolos referidos a los conjuntos numéricos? N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R		

Actividad 2

En esta tabla se recogen algunos símbolos utilizados en matemáticas. Completa la tabla en todos aquellos apartados que te sea posible.

Símbolo	**¿Lo conoces?**	**¿Lo has usado en alguna ocasión?**	**Describe en pocas palabras su significado**
∀			
∃			
∉			
⊂			
≅			
⇒			
⇔			
∑			
/			
∪			
{… }			

Actividad 3

1. Expresa en lenguaje matemático las siguientes afirmaciones:
   (a) *x* está incluida en el conjunto *A*. **Solución : $x \in A$**
   (b) Para todo numero natural existe otro número natural que es mayor que él.
   (c) El conjunto de los números enteros menores que 5.
2. ¿Qué quieren decir las siguientes expresiones matemáticas?
   (a) $\forall x \in R, \exists y \in R / y \geq x$
   (b) $\forall$ A, B conjuntos cualesquiera / $A = \varnothing \Rightarrow A \cup B = B$ y $A \cap B = \varnothing$

Actividad 4

La presentación de los **contenidos matemáticos** se realiza mediante enunciados con nombres como: Definición, Teorema, Demostración, Corolario, etc., de manera que cada una de ellas predice su contenido. Así, toda afirmación en matemáticas debe ser presentada dentro de uno de estos epígrafes, ayudando así a la organización y estructura de los contenidos.

Investiga y une cada término matemático con su significado:

Deducción o demostración			Sucesión coherente de pasos que, tomando como verdadero un conjunto de premisas llamado **hipótesis**, permite asegurar la veracidad de una **tesis.**
Teorema			Expresión lógica utilizada en una deducción para llegar a una conclusión
Corolario			Afirmación matemática que se cree verdadera pero no ha sido demostrada
Lema			Resultado no asociado a ningún teorema en particular
Proposición			Excepción particular a una regla general propuesta.
Conjetura o hipótesis			Afirmación que puede ser demostrada como verdadera dentro de un marco lógico.
Axioma			Afirmación lógica que es consecuencia inmediata de un teorema, pudiendo ser demostrada usando las propiedades del teorema previamente demostrado
Contraejemplo			Representación real de una regla general propuesta

Actividad 5

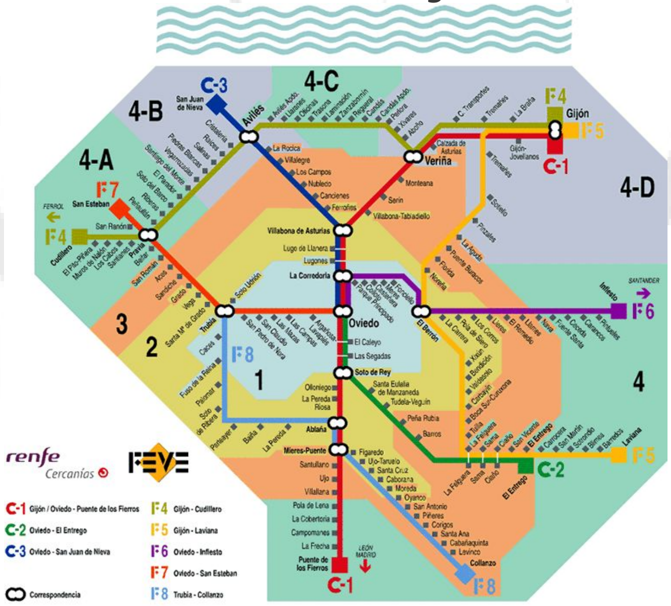
1. ¿Consideras este lenguaje matemático como algo universal, en el sentido de que puede ser comprendido fácilmente por otra persona que conozca sus reglas y símbolos, sea del país que sea y hable una lengua distinta a la nuestra?
2. ¿Cómo afecta el conocimiento de este lenguaje a las relaciones de Will con los demás miembros de su grupo de amigos?

Actividad 6

1. Existe un mecanismo para realizar demostraciones llamado **inducción matemática**, investiga en qué consiste y trata de probar las siguientes afirmaciones:
   a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
   b) $3^{2n} + 4^{n+1}$ es múltiplo de 5

Actividad 2. Introducción a la Teoría de Grafos

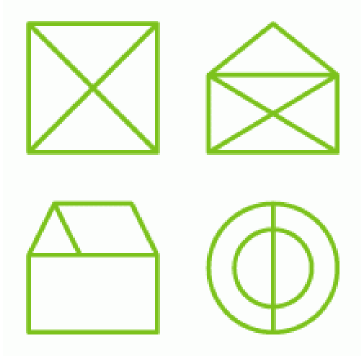
¿Qué es la teoría de grafos? ¿Quién ha oído hablar de ella? Seguro que casi ninguno.
Pero, ¿alguna vez hemos visto un grafo? La respuesta es que, casi con toda certeza, sí. Tenemos a nuestro alcance planos, mapas, … que muchas veces se simplifican para hacerlo más fácilmente inteligible: acabamos de descubrir **un grafo**.



Actividad 1
Intenta dibujar las letras mayúsculas del alfabeto *con un sólo trazo*, es decir, sin levantar el lápiz del papel y sin recorrer una misma línea dos veces.

Resolución
Ya la primera letra nos pone sobre aviso: Es imposible dibujar la A mayúscula con un solo trazo. ¿No te lo crees? Haz la prueba.
Si estudiamos el resto del abecedario, siempre con mayúsculas, ¿qué letras tampoco se pueden dibujar con un solo trazo? Hay varias; la H, la X o la F. Naturalmente, la Ñ exige levantar el lápiz, porque está formada por líneas separadas. ¿Hay alguna que sí se pueda dibujar? Claro: la O, la R o la M.

Actividad 2
¿Puedes dibujar un sobre cerrado sin levantar el lápiz del papel? ¿Y un sobre abierto?

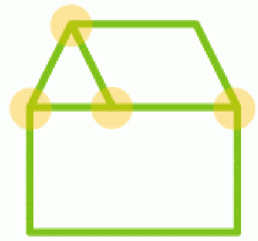


Coge papel y lápiz, e intenta dibujar las cuatro figuras con un solo trazo. ¿Qué observas?

Resolución
Los dos diseños de la derecha se pueden dibujar con un solo trazo. Los dos de la izquierda, en cambio, no.

- ¿Por qué?
- ¿Cómo podemos estar seguros? Quizás haya una manera de hacer el dibujo pero todavía no la encontramos.
- ¿Se puede saber de antemano, sin gastar cuadernos completos en garabatos, qué dibujo se puede realizar con un solo trazo y cuál no?

Tomemos la casa. Fijémonos solamente en los vértices: los puntos donde se encuentran tres o más líneas. Hay cuatro vértices:



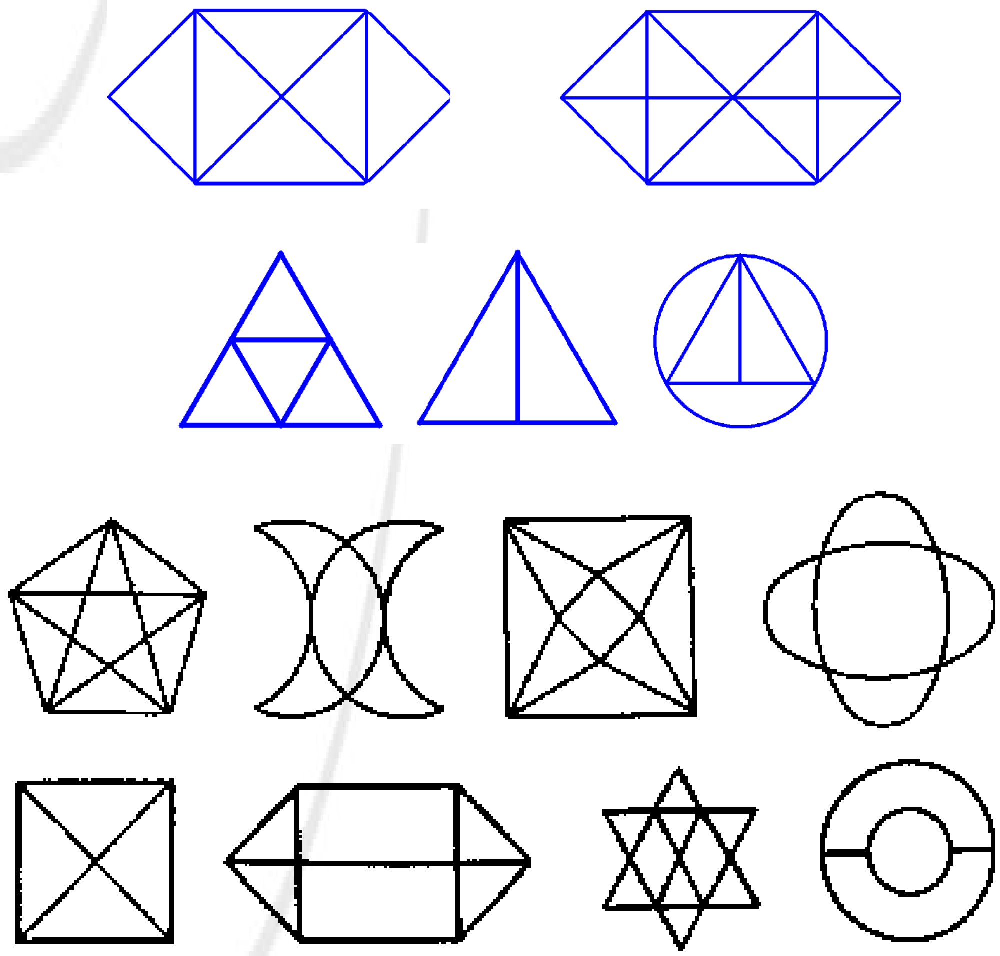
Diremos que un **vértice** es **impar** si allí se encuentran una cantidad impar de líneas. Si en un vértice se encuentran una cantidad par de líneas, entonces lo llamaremos **vértice par**.
En nuestra casa, los cuatro vértices son impares, porque en todos se encuentran tres líneas.

Si en un diseño hay más de dos vértices impares, entonces no se puede dibujar con un solo trazo.

Podemos comprobar que en el sobre cerrado hay 4 vértices impares (que serían los vértices exteriores de la figura), mientras que en el sobre abierto sólo hay 2 vértices impares (los dos vértices inferiores de la figura).

¿Por qué? Fíjate en un vértice impar; supongamos que tiene sólo tres líneas. Tu lápiz usará una línea para llegar a ese vértice, y usará otra para salir de ese vértice. Si usas la línea restante para llegar, no podrás salir. Puedes permitirte el lujo de tener hasta dos vértices impares. En ese caso, tienes que empezar tu trazo en uno de ellos y terminarlo en el otro. Pero si tienes más de dos vértices impares, entonces no podrás recorrer el diseño con un solo trazo.

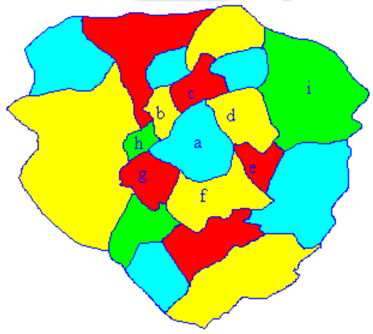
Actividad 3
Aplica el razonamiento anterior para determinar si estas figuras pueden dibujarse de un sólo trazo o no:



Actividad 4
Entregando un mapa político en blanco, podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Cuántos colores son necesarios para colorear un mapa político, con la condición obvia de que dos países adyacentes no puedan tener el mismo color?

Hagamos la prueba con este mapa de Europa:
http://www.educima.com/mapa-en-blanco-de-europa-t7464.jpg

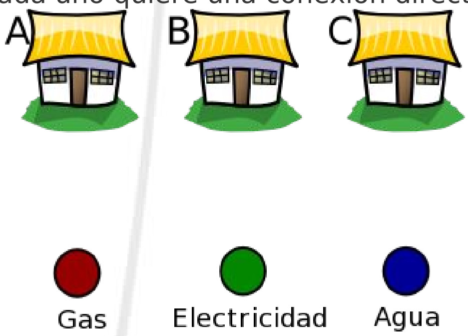
Resolución



Cuatro colores son siempre suficientes para colorear un mapa. El mapa anterior muestra que tres colores no bastan: Si se empieza por el país central *a* y se esfuerza uno en utilizar el menor número de colores, entonces en la corona alrededor de *a* alternan dos colores. Llegando al país *h* se tiene que introducir un cuarto color. Lo mismo sucede en *i* si se emplea el mismo método. La forma precisa de cada país no importa; lo único relevante es saber qué país toca a qué otro. Estos datos están incluidos en el grafo donde los vértices son los países y las aristas conectan los que justamente son adyacentes. Entonces la cuestión equivale a atribuir a cada vértice un color distinto del de sus vecinos.

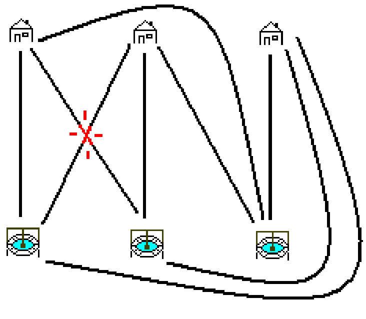
Hemos visto que tres colores no son suficientes, y demostrar que con cinco siempre se llega es bastante fácil. Pero el teorema de los cuatro colores no es nada obvio. Prueba de ello es que se han tenido que emplear ordenadores para acabar la demostración (un programa permitió verificar una multitud de casos, aquellos que incluían cualquier mapa posible, lo que ahorró muchísimo tiempo a los matemáticos). Fue la primera vez que la comunidad matemática aceptó una demostración asistida por ordenador, lo que ha creado una fuerte polémica dentro de la comunidad, llegando en algunos casos a plantearse la cuestión de que esta demostración y su aceptación es uno de los momentos que han generado una de las más terribles crisis en el mundo matemático.

Actividad 5: Grafos de Kuratowski
Tres casas (A, B y C) quieren tener acceso a agua, electricidad y gas. Como resulta que los vecinos no se llevan muy bien, cada uno quiere una conexión directa con la toma de la ciudad.



Además los cables y/o tuberías no se pueden cruzar en ningún punto. ¿Cómo han de colocarse las líneas?

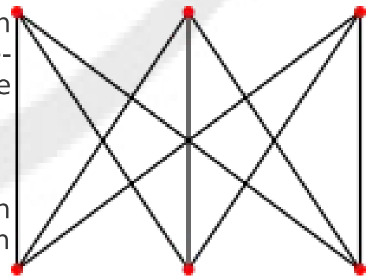
Resolución matemática usando teoría de grafos
El caso es que este problema NO TIENE SOLUCIÓN MATEMÁTICA, cualquier disposición de las casas, los pozos y los caminos implica la presencia de al menos un cruce.



Si representamos cada uno de los iconos (tanto las casas como los círculos) mediante puntos (vértices) y tomamos también las líneas de conexión (aristas) lo que obtenemos es, claramente, **un grafo**.

Llamando u_1, u_2, u_3 a los vértices superiores y v_1, v_2, v_3 a los inferiores y representando como u_i, v_j a la arista que une el vértice u_i con el vértice v_j obtenemos el grafo conocido como $K_{3,3}$:

$$K_{3,3} = \{ u_i, v_j \,/\, i, j = 1, 2, 3\}$$



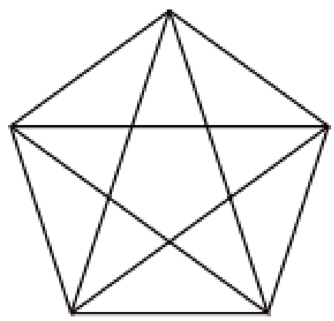
Partiendo de que dos aristas de un grafo sólo pueden cortarse en un vértice (es decir, que si tenemos dibujados los vértices de antemano dos aristas no pueden cortarse en ningún punto nada más que en ellos) vamos a definir ahora lo que es un grafo plano:

Se dice que un grafo es plano si puede embeberse en $\mathbf{R}^2$.

Es decir, un grafo es plano si podemos dibujarlo en un papel sin que ninguna de las aristas corte a otra en un punto que no sea un vértice.

Ahora, antes de dar la solución del juego, vamos a definir otro grafo, K_5:

$$K_5 = \{ u_i, u_j \,/\, i, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$$



Es decir, K_5 es un grafo que tiene 5 vértices y que tiene como aristas todas las líneas que conectan cada vértice con todos los demás, como podéis ver en la imagen. A este grafo también se le denomina grafo completo de 5 vértices.

El matemático polaco *Kazimierz Kuratowski* demostró el siguiente teorema (esta es una versión débil):

Teorema de Kuratowski:

Un grafo es plano si no contiene como subgrafo a K_5 ni a $K_{3,3}$.

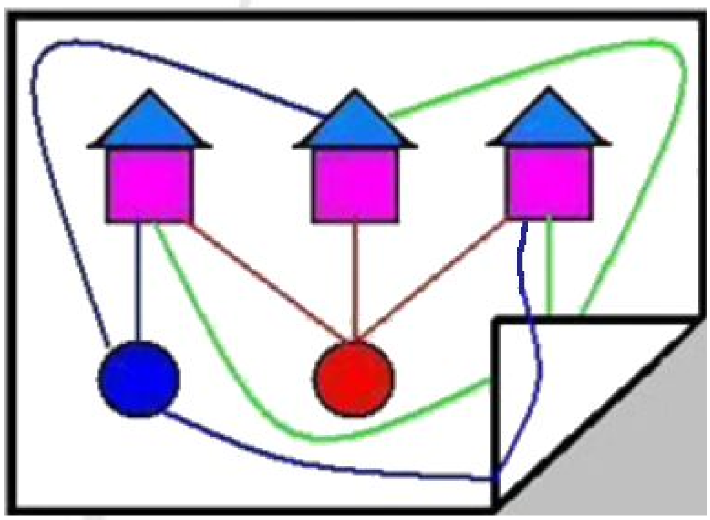
Es decir, ni K_5 ni $K_{3,3}$ son grafos planos (ya que cada uno de ellos se contiene a sí mismo como subgrafo). O lo que es lo mismo, no pueden dibujarse en un papel con la condición de que ninguna arista corte a otra en un punto que no sea desde el principio un vértice.

La demostración de este teorema necesita de ciertos conocimientos previos sobre teoría de grafos relativamente avanzados y es algo complicada, por eso no se adjunta.

Este razonamiento responde a la típica pregunta que mucha gente se hace con las matemáticas: ¿pueden las matemáticas resolver problemas, digamos, tangibles? La respuesta es sí: en este caso las matemáticas nos dicen por qué no podemos realizar ese dibujo con esas condiciones.

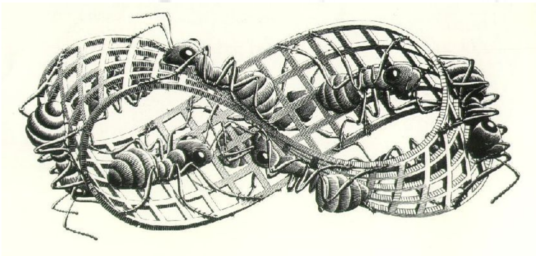
Resolución NO matemática

Existe una forma práctica de resolver el problema, introduciendo una variante que no está reflejada en el enunciado:



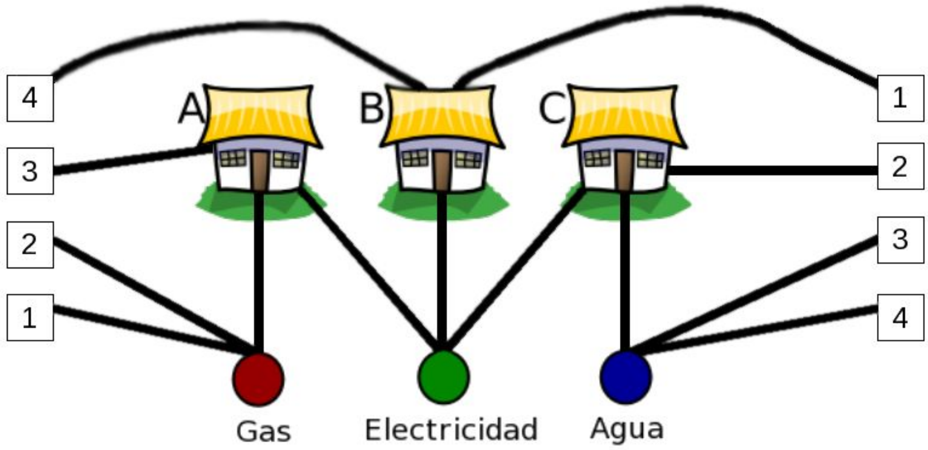
es decir: DOBLANDO UNA ESQUINA DEL PAPEL. ¿Alguien lo había prohibido?

Resolución NO euclidiana
Si la solución anterior no te convence por "tramposa", veamos si hay alguna objeción que poner a esta. Imprime y recorta la figura anterior en una hoja larga, pero fina, y ahora construye una cinta de Moëbius con ella.



Como sabemos, la cinta de Moëbius sólo tiene una cara. Si intentamos resolver el problema ahora, fácilmente podremos llevar la última conexión a la tercera casa yendo "por debajo" de ella. Pero … ¿no acabamos de decir que la cinta sólo tiene una cara? Luego decir que va por "debajo" no tiene sentido alguno, porque sólo hay una superficie a tener en cuenta.

¿Tampoco te convence la resolución? Podemos ser un poco más *puristas* y recordar que estamos resolviendo un problema *plano*, es decir, en una **superficie**. Por definición una superficie tiene espesor nulo, y podemos afirmar que las líneas están *embebidas* en ella (como si la tinta la hubiera traspasado) y, por lo tanto, **no** hemos ido por *debajo*, (en el plano no existiría esa palabra, recordemos lo ocurrido en Planilandia, el libro de Edwin A. Abbot) llegamos limpiamente a la tercera casa.



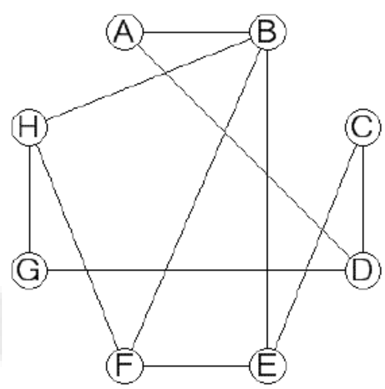
Actividad 6: Vecinos incompatibles.
Se desea sentar a 8 personas en los vértices de una mesa octogonal, pero prestando atención a la siguiente condición: cada uno de ellos no acepta sentarse junto a algunos de los demás. Deducir si es posible hacerlo, respetando que A no quiere sentarse junto a B ni D; B no quiere sentarse junto a A, E, F ni H; C no quiere sentarse junto a D ni E; D no quiere sentarse junto a A, C ni G; E no quiere sentarse junto a B, C ni F; F no quiere sentarse junto a B, E ni H; G no quiere sentarse junto a D ni H; y, por último, H no quiere sentarse junto a B, F ni G.

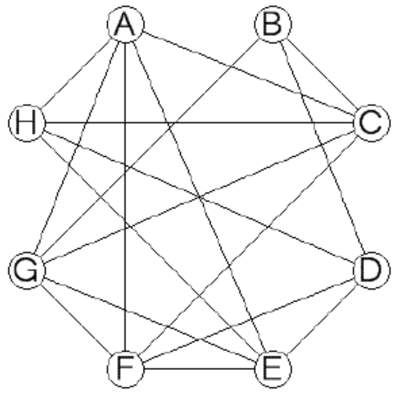
Resolución
Normalmente, este problema se intenta resolver probando una a una las posibilidades que a cada uno se le ocurran sin orden ni concierto, es decir, sin emplear ni una estrategia ni un procedimiento sistemático de actuación.

Por otra parte, dado que el número total de posibilidades que hay para sentar a las 8 personas en una mesa octogonal es (8 – 1)! = 7! = 5040, sería un esfuerzo bastante improductivo intentar escribirlas todas e ir eliminando una a una aquellas que no satisficiesen las condiciones exigidas. Sin embargo, la Teoría de Grafos nos ofrece una forma de resolver el problema muy corta, sencilla y elegante.

Para ello, construiremos un grafo asociado al enunciado de tal forma que cada persona será un vértice y dos vértices compartirán arista en caso de que sus representantes no acepten sentarse juntos (grafo de la izquierda de la figura).

Basta tomar entonces el grafo **complementario** del anterior, en el que las aristas representarán ahora las posibles compatibilidades. Es muy fácil encontrar entonces en este último grafo un 8-ciclo que nos proporciona la solución.





Una posible configuración de la mesa sería la siguiente: **[B,C,H,A,F,G,E,D]**, y puede resolverse en clase de forma visual simplemente con monedas y cuerdas para **ver**, literalmente, la solución.

Actividad 7: El zorro, el conejo y la lechuga.
Un pastor (P) necesita cruzar un río junto con sus tres pertenencias: un zorro (Z), un conejo (C) y una lechuga (L). Para ello dispone de una pequeña barca de remos en la que sólo cabe él junto con una sola de sus pertenencias. Sin embargo, no puede dejar solos en una misma orilla y al mismo tiempo ni al zorro con el conejo, ni al conejo con la lechuga, para evitar una catástrofe. ¿Le será posible al pastor cruzar el río en estas condiciones? En caso afirmativo, dar los pasos que debe seguir.

Resolución
Éste es un problema clásico y muy conocido, y no es difícil comprobar que tiene solución, aunque deben darse palos de ciego hasta encontrarla. Sin embargo, veamos que la resolución mediante un grafo de este problema y de otros similares simplifica mucho el proceso de hallar la solución, o de demostrar que no existe.

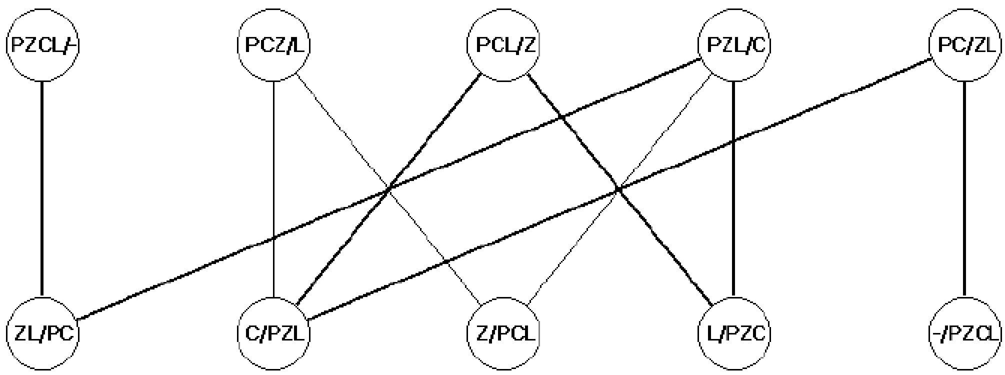
Para ello, sea pues $G = (V, A)$ un grafo tal que cada vértice v_i esté formado por un par (a_i,b_i), de modo que cada uno de los elementos del conjunto {P, Z, C, L} esté contenido en a_i ó en b_i para cada i. El primer elemento de cada par representará la orilla izquierda del río y el segundo, la orilla derecha.

Obsérvese que no todas las configuraciones son posibles. Por ejemplo, ({P, Z}, {C, L}) no cumple las hipótesis porque el conejo podría comerse la lechuga. Por comodidad y para simplificar la notación, podemos suponer que $v_i = (a_i)$, ya que el segundo elemento del par es evidente si se conoce el primero. No es muy difícil ver entonces que V tendrá 10 elementos:

V = {Ø, {L}, {C}, {Z}, {Z, L}, {P, C}, {P, Z, C}, {P, Z, L}, {P, C, L}, {P, Z, C, L}}

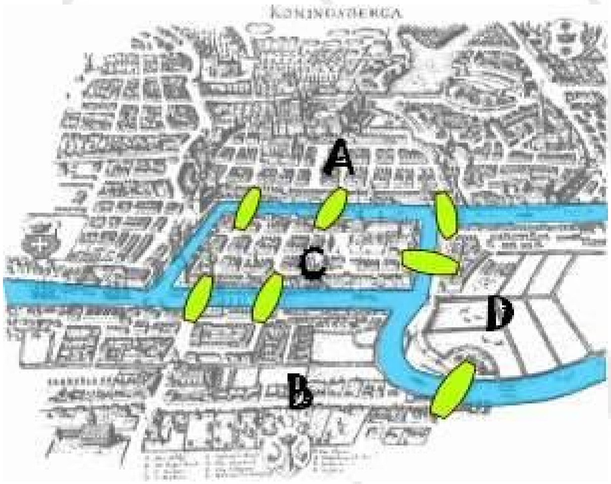
Dos vértices estarán unidos si puede pasarse de una situación a otra. Por ejemplo, Ø y {P, C} estarán unidos porque el pastor puede llevarse a la otra orilla al conejo en un único movimiento sin desembocar en una posición de peligro, pero Ø y {L} no compartirán arista porque la lechuga no puede cruzar sola el río.

Ya sólo nos queda representar el grafo G y ver que, efectivamente, existe un camino entre {P, Z, C, L} y Ø. Por lo que el problema tiene solución y, además, es posible darla explícitamente:



Actividad 3. Los puentes de Königsberg

Planteamiento

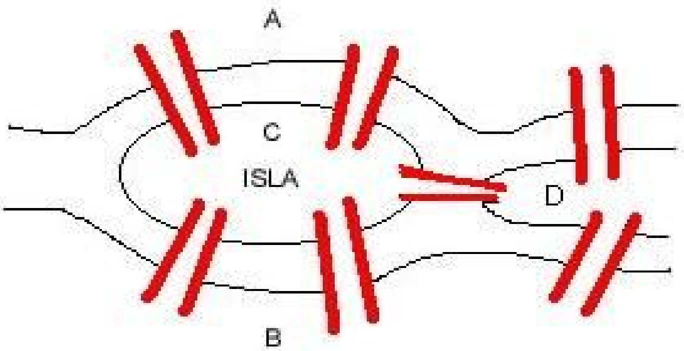


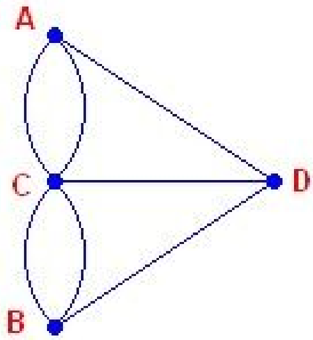
El problema que Will Hunting resuelve al principio de la película se enmarca dentro de la teoría de grafos. Esta rama de la matemática discreta se ocupa de problemas que tienen que ver únicamente con puntos y sus conexiones, y surgió del estudio de problemas concretos.

A continuación, trataremos de describir el problema que la mayoría de los autores señalan como el origen histórico de la teoría de grafos:

El problema de los siete puentes de Königsberg (Prusia oriental en el siglo XVIII – ciudad natal de Kant y actualmente Kaliningrado, provincia rusa) es un célebre problema matemático que fue resuelto por Leonhard Euler en 1736.

Tiene como protagonista a un río, el Pregel, que cruzaba la ciudad de Königsberg, a dos islas que se encontraban en el mismo y a siete puentes que comunicaban las dos partes de la ciudad con las mismas. Concretamente la situación era como se describe en la imagen: A y B son las dos partes de la ciudad y C y D las dos islas. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?



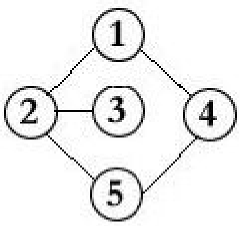


Algunos de los habitantes de Königsberg opinaban que sí y otros que no. Antes de seguir, podéis intentarlo vosotros mismos, aunque se recomienda no dedicarle demasiado tiempo...
Euler (1707-1783) enfocó el problema representando cada parte de tierra por un punto y cada puente, por una línea, uniendo los puntos que se corresponden. Entonces, el problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta:
¿Se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas?

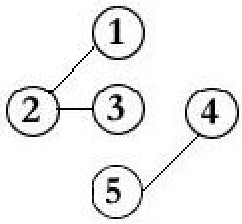
Iniciación a la teoría de grafos

¿Qué es un grafo? Un grafo es un conjunto no vacío formado por **nodos** o **vértices** conectados por un conjunto de líneas mediante arcos o **aristas**. En ocasiones, se indican sobre los arcos (o sobre los nodos) unos valores, con interpretación muy variada según los casos (distancias, tiempos, costes, beneficios, etc.). Se llama **lazo** a una arista que une un vértice consigo mismo. Se dice que dos vértices son *adyacentes* si existe una arista que los une.

Se dice que un grafo es *simple* si para cualesquiera dos vértices existe a lo sumo una arista que los une. En otro caso se denomina *multigrafo*.



Grafo conexo



Grafo no conexo

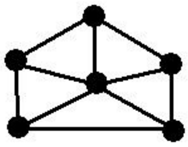
Un grafo se dice *conexo* si todo par de nodos está unido por un camino.
Un camino de longitud "n" es una sucesión de vértices y aristas. Se dice que un camino es *cerrado* si el vértice inicial y el final son el mismo. Se dice que es *simple* si todas sus aristas son distintas. Se llama *trayectoria* a un camino simple en el que todos sus vértices (salvo probablemente el inicial y el final) son distintos y se denomina *circuito* a una trayectoria cerrada con al menos una arista.

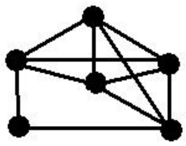
Resolución del problema
Leonhard dio la solución a este asunto. La idea genial de Euler fue representar la ciudad de Königsberg como un grafo en el que las cuatro partes de la misma eran los vértices y los siete puentes eran las aristas.

Observa el grafo resultante. En él está contenida toda la información necesaria: para pasar de las zonas C a la A y de la C a la B hay dos puentes, y para hacerlo de D al resto, sólo hay un puente. Por tanto el problema de los puentes de Königsberg pasa a ser un problema de teoría de grafos cuya solución publicó Euler en su artículo "Solución de un problema relativo a la geometría de posición".

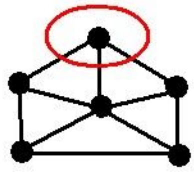
Para conocer la solución debemos conocer el concepto de **camino euleriano:** Son aquellos caminos que, partiendo de un nodo, regresan a ese nodo recorriendo una, y sólo una vez, cada uno de los arcos del grafo.

Hierholzer probó en 1873 que los caminos eulerianos se pueden construir en aquellos grafos conexos a cuyos nodos llegan un número par de arcos. Según lo dicho, ¿alguno de estos 2 son caminos eulerianos?





Como vemos, en el primero, hay nodos a los que les llegan un número impar de nodos. Concretamente al señalado a la derecha (en rojo) le llegan 3.



Conclusión del problema
1. Si todos los vértices de un grafo son de orden par (es decir, llegan a él un número par de lados), éste se puede recorrer de una sola pasada y volver al punto de partida. Es un grafo euleriano.
2. Si dos de los vértices son de orden impar y el resto de orden par, se puede recorrer el grafo de una sola pasada pero no se puede acabar en el punto de partida. En este caso el grafo se llama semieuleriano.
3. Si el grafo tiene más de dos vértices con un número impar de lados concurrentes, el problema planteado no tiene solución.

Actividad 1
En el Kaliningrado actual se han construido dos puentes más que permiten recorrer todos los puentes una sola vez y acabar en el punto de partida. ¿Puedes indicar dónde se han construido y dar un posible camino euleriano que los recorra?

Actividad 2
Si no hiciera falta volver al punto de partida al final del recorrido,
a) ¿Bastaría con un único puente más?
b) ¿Dónde se situaría?
c) ¿Cuál sería un posible recorrido?

Actividad 3
Si en lugar de construir, se derribase uno, dejándolos en seis,
a) ¿Sería posible la cuestión que le plantearon a Euler?
b) ¿Cómo?

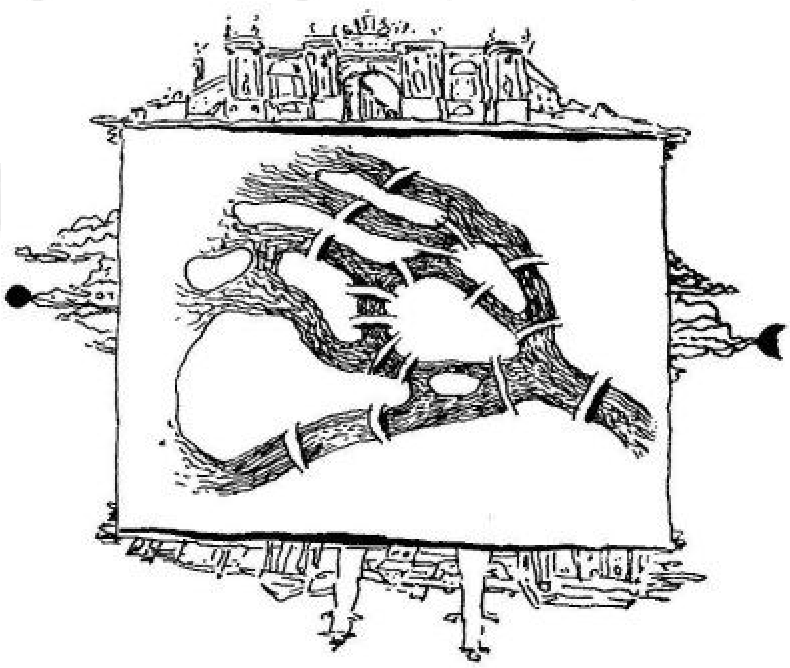
Actividad 4
Analiza el problema de dibujar el sobre abierto con un sólo trazo con las herramientas que acabas de ver.

Actividad 5
Trata de unir los 9 puntos de la imagen con solo 4 líneas rectas y sin levantar el lápiz del papel,

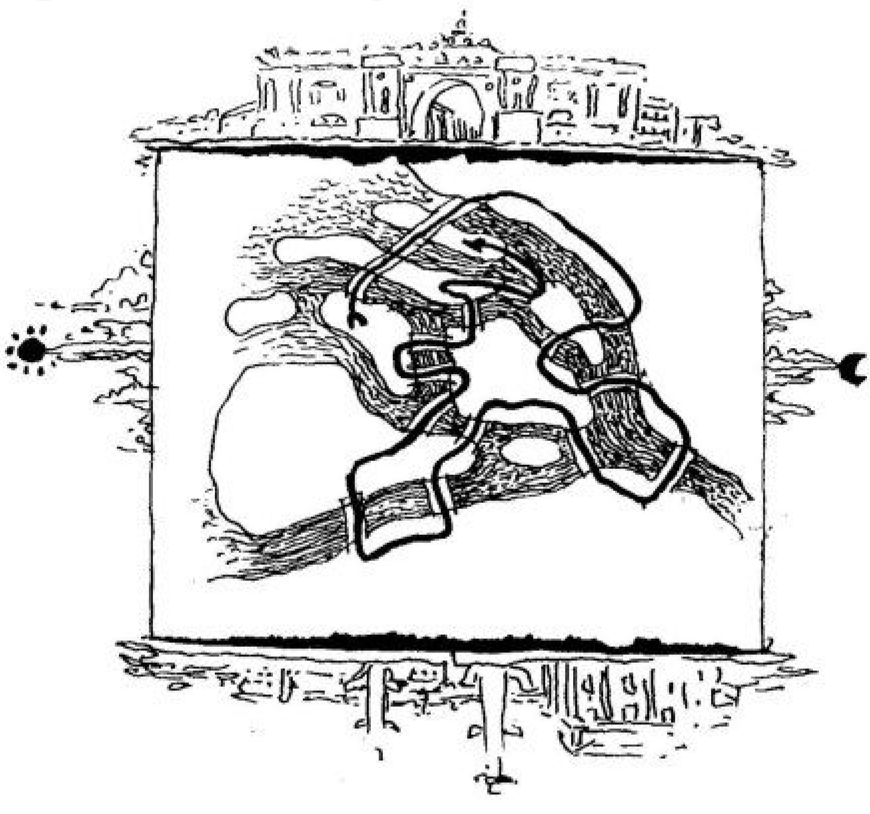
EL INTERNADO (SERIE - A3TV, 2007)

es decir, donde acaba una tiene que empezar la otra. No puedes pasar 2 veces por el mismo punto pero las líneas pueden cruzarse.

Actividad 6. Los puentes de Leningrado
El problema consiste en pasar por los 17 puentes que unen entre sí las partes del territorio, que representa la figura, sin recorrer ninguno de ellos dos veces. A diferencia del problema de los puentes de Königsberg, el recorrido que se plantea esta vez **es realizable** y ya tenemos los conocimientos teóricos necesarios para poder resolver este problema sin necesidad de ayuda.



Solución:



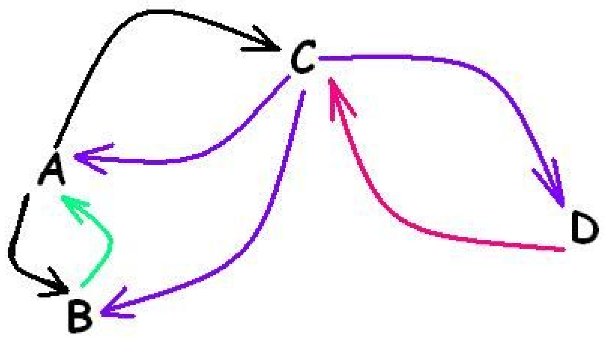
Actividad 4. Grafos en forma de matriz

Los problemas de grafos podemos representarlos gráficamente, por tablas o por matrices. La representación mediante gráficos y tablas sería una primera aproximación al problema en la ESO, que se complementaría en 2º de bachillerato con las matrices y su resolución.

Actividad 1

Tenemos cuatro pueblos con móviles de distintas compañías telefónicas, Yoigo (A), Vodafone (B), Movistar (C) y Orange (D). Vemos que por la situación de los repetidores las posibles conexiones son entre A y B, A y C, C y D, C y A, C y B, D y C, B y A.

Resolución:
Representamos en un gráfico los datos proporcionados por el ejercicio:



Como vemos nuestro problema consta de 4 elementos que llamamos nodos o vértices y las relaciones entre ellos que podemos denominar aristas o lados.

Resolución en la ESO
Vamos a intentar asignar valores a estas relaciones mediante una tabla. En los grafos asignamos un uno a los puntos que se pueden relacionar directamente y con cero aquellos que no se pueden comunicar directamente:

		hasta			
		A	B	C	D
desde	A	0	1	1	0
	B	1	0	0	0
	C	1	1	0	1
	D	0	0	1	0

Resolución en Bachillerato
La matriz correspondiente a esta tabla es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matriz asociada al grafo.}$$

Si hallamos la matriz M^2 nos queda:

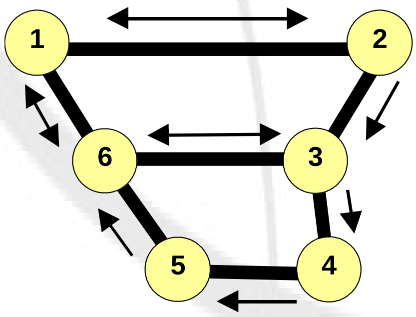
$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida nos indica la forma en que pueden establecer comunicación los distintos pueblos entre sí.

- En el caso del término $a_{11} = 2$ vemos que el pueblo A puede comunicarse de dos formas diferentes a través de otro equipo $A \Rightarrow B \Rightarrow A$ y $A \Rightarrow C \Rightarrow A$
- En el caso del término $a_{12} = 1$ vemos que el pueblo A puede comunicarse con el pueblo B de una sola forma a través de otro pueblo $A \Rightarrow C \Rightarrow B$
- En el caso del término $a_{13} = 0$ vemos que el pueblo A no puede comunicarse con C a través de otro equipo

Actividad 2

En el siguiente plano aparecen las direcciones de tráfico que unen 6 plazas típicas de la ciudad de Matematicalandia.



VÉRTICES

1. Plaza de la Geometría
2. Plaza de los Números.
3. Plaza de los Algoritmos
4. Plaza del Álgebra.
5. Plaza de la Aritmética
6. Plaza de la Operación

LADOS:

1–2 : Ronda A; 2–3 : Calle B; 3–4 : Calle C; 3–6 : Ronda D
1–6 : Ronda F; 4–5 : Calle E; 5–6 : Calle G

Convierte este grafo a su forma de matriz informativa.

Resolución:

Es posible pasar del grafo a la matriz de la forma siguiente:

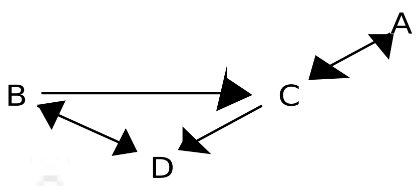
La matriz tiene tantas filas como columnas, coincidiendo su número con el de vértices. Cuando dos vértices están conectados en un sentido, en la intersección de la fila cuyo número coincide con el vértice de partida, y la columna cuyo número coincide con el vértice de llegada figurará un 1; si no existe tal conexión, figurará un 0. Así, en nuestro caso, la matriz asociada será:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

NOTA: Si en todas las filas y las columnas hay un 1 indica que el tráfico es posible en ese entramado de calles.

Actividad 3

Se consideran 4 pueblos A, B, C y D unidos por carreteras según el grafo siguiente. Se pide:

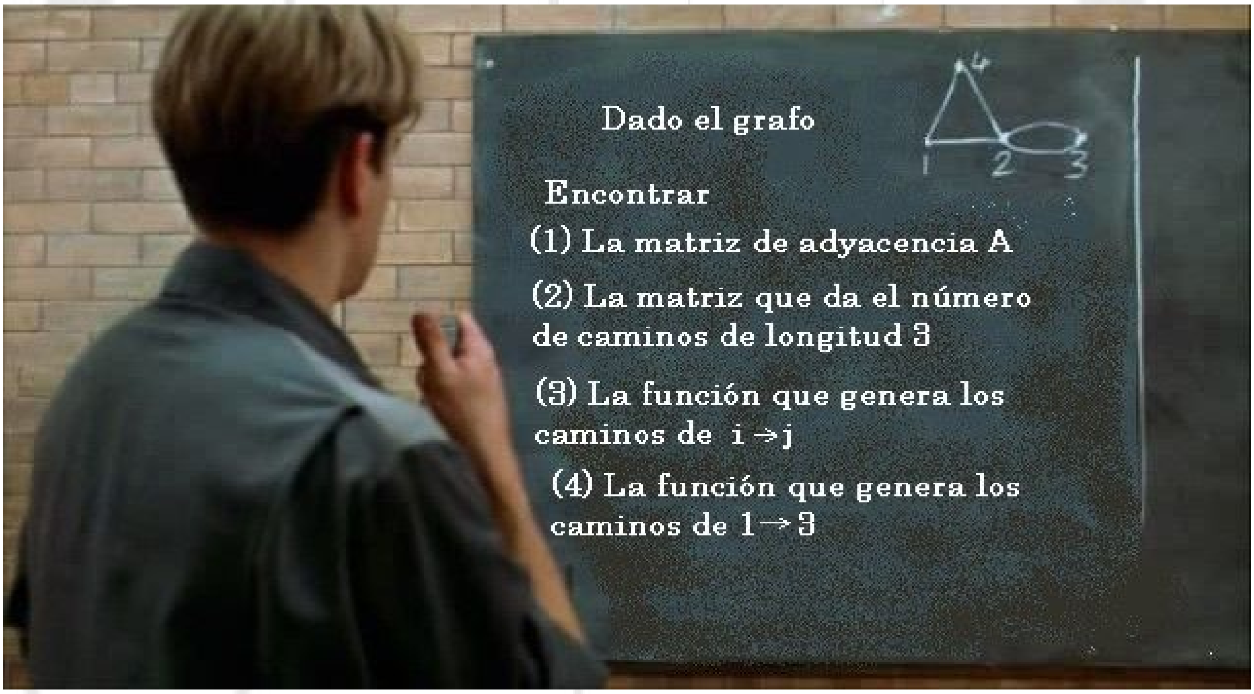


1. Construye la matriz T que indica el número de formas distintas de ir directamente de un pueblo a otro
2. Analiza el significado de T^2
3. Analiza el significado de $T^2 \cdot T^2$
4. Analiza el significado de $T \cdot T^2$
5. Analiza el significado de T^3

Actividad 5. Escenas de la película

Actividad de apoyo (1): Grafos y matrices

Una vez que ya tenemos una base acerca de la Teoría de grafos, podemos sugerir este primer problema que plantea Lambeau en la pizarra, aunque se nos muestra tan fugazmente que no podemos hacerlo si no es deteniendo la imagen, y permitiéndonos una pequeña traducción:



La realización completa de esta actividad resulta un tanto complicada para los alumnos de Bachillerato pero podemos utilizarla para, a partir de los conceptos que ya conocen de matrices y determinantes, explicarles qué es un grafo y cómo se construye.

Una vez que dominen estos conceptos, podrán pasar de un grafo a una matriz y viceversa, pudiendo resolver el primer apartado del problema y, mediante el producto de matrices, el segundo.

La resolución de los cuatro apartados puede verse en la siguiente imagen:

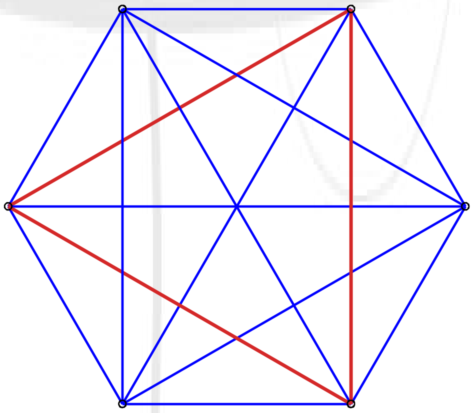
Ejercicio.

a) Comprobar que en toda reunión de seis personas siempre habrá tres que se conozcan, o bien tres que no se conozcan entre sí.
b) Probar también que esto no ocurre siempre en grupos de cinco personas
c) ¿Cuántas personas tiene que haber en un grupo para asegurar que siempre haya cuatro que se conozcan, o bien cuatro desconocidos?

Resolución:

Apartado a)

Para resolver este ejercicio vamos a apoyarnos en la teoría elemental de grafos, de hecho este problema es un caso particular del denominado Problema de Ramsey. En las figuras, cada persona del grupo es un punto, y las aristas representan la relación de conocimiento o desconocimiento mutuo entre ellas, rojo indica que sí se conocen y azul lo contrario.

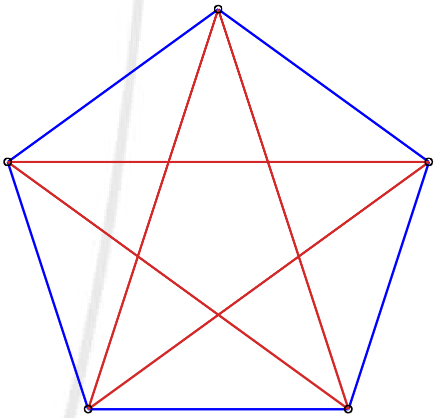


Obtenemos un grafo completo de seis vértices K_6 cuyas aristas han sido coloreadas de rojo o de azul. La representación del problema con un grafo bicolor permite reescribir el ejercicio en el lenguaje de los grafos:

> *Si en un grafo completo K_6 coloreamos sus aristas con dos colores, siempre encontraremos un triángulo rojo o un triángulo azul (subgrafo K_3 monocolor).*

Apartado b)

Sin embargo, en un grupo de cinco personas no ocurre lo anterior, como podemos comprobar en la figura de la derecha, en el cual no aparecen triángulos monocolor.



El Teorema de Ramsey nos asegura que si hay un número suficientemente grande de personas en un grupo siempre podremos encontrar *m* personas que se conozcan entre sí o por el contrario un conjunto de *m* desconocidos.

Apartado c)

La respuesta al apartado c) surge de forma natural.

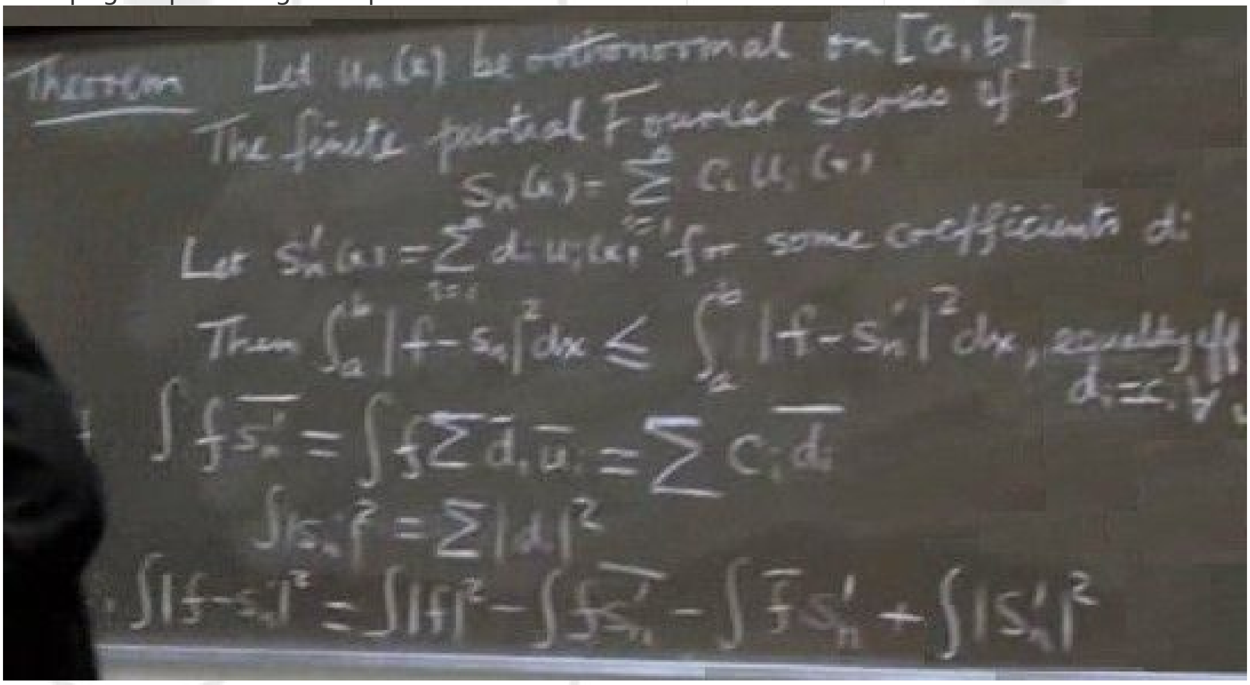
Actividad de apoyo (3): Teorema de Parseval

Detenemos la escena en la que el prestigioso profesor Lambeu (Stellan Skarsgard) finaliza en la pizarra uno de los resultados básicos del Análisis de Fourier y se concluye con el Teorema de Parseval.

Es curioso que les comenta a los alumnos:

- Muchos ya lo habréis estudiado en el instituto, pero conviene darle un repaso.

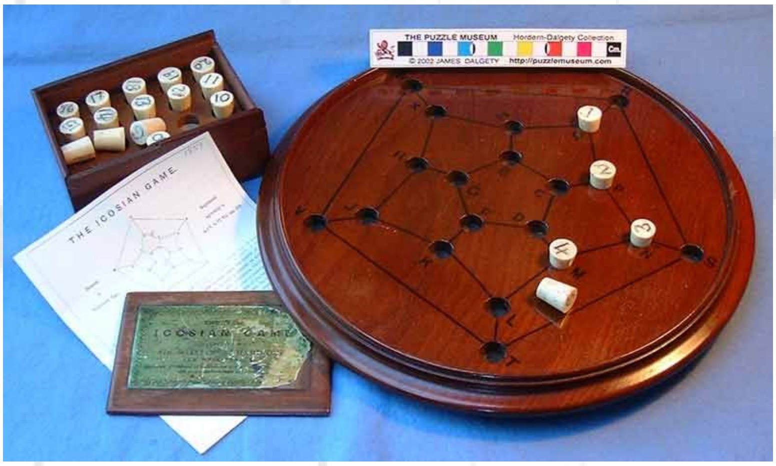
Como en España nos queda un poco grande … pues no entra en nuestro currículo, dejamos esta página por si alguien quiere analizarlo.



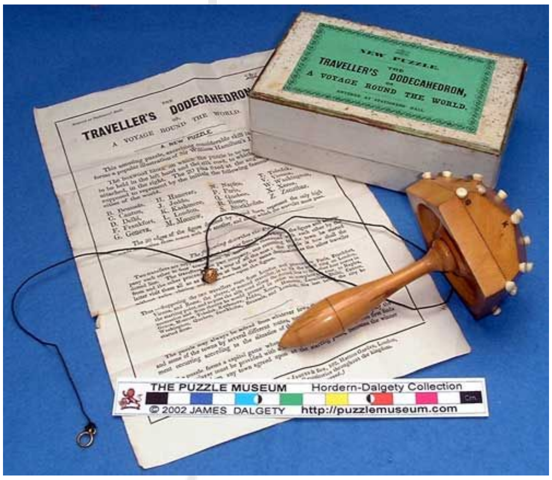
http://www.maplesoft.com/applications/app_center_view.aspx?AID=77

Actividad 6. Grafos Hamiltonianos

W. R. Hamilton (1805–1865) inventó (y patentó) un juego, *The Icosian Game*, en el que se trataba de hacer un recorrido por 20 ciudades del mundo, que estaban unidas por 30 aristas, sin pasar por ninguna más de una vez y sin necesidad de contener todas las aristas.



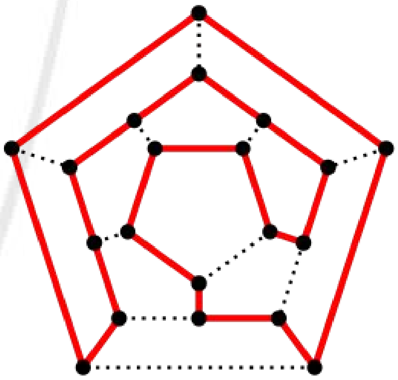
Más tarde creó una versión tridimensional del mismo, sin cambios en su fundamento matemático: El dodecaedro del viajero (*The traveller's Dodecahedron*):



Teniendo en cuenta que se denomina grafo hamiltoniano cuando existe un camino cerrado que contiene todos los vértices una sola vez y no tiene porque contener todas las aristas y todo aquel grafo que posea una única trayectoria que pase a través de cada vértice se denomina grafo semihamiltoniano.

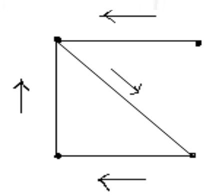
Ejercicio 1:
¿Podrías demostrar que el problema que plantea Hamilton puede realizarse?

Solución:
Se trataba de construir un camino hamiltoniano en el grafo del dodecaedro y una solución es la siguiente:



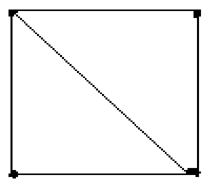
Ejercicio 2:
Pon un ejemplo de un grafo semieuleriano y semihamiltoniano.

Solución:



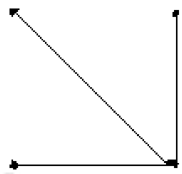
Ejercicio 3:
Pon un ejemplo de un grafo semieuleriano y hamiltoniano.

Solución:



Ejercicio 4:
Pon un ejemplo de un grafo no euleriano y no hamiltoniano.

Solución:



SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS: Los Puentes de KÖNIGSBERG

ACTIVIDAD 1
En la actualidad en Kaliningrado se han construido dos puentes más que permiten recorrer todos los puentes una sola vez y acabar en el punto de partida. ¿Puedes indicar dónde se han construido y dar un posible camino euleriano que los recorra?

Para ser un grafo euleriano los 4 vértices deben tener orden par, cada puente comunica 2 vértices, con 2 puentes comunicaríamos los 4 vértices, y estos que en un principio tenían orden impar pasan a tener orden par.
Se construye un puente que comunica A con B y otro que comunica C con D.
El posible camino euleriano seria: AD – DC – CA – AC – CD – DB – BC – CB – BA

ACTIVIDAD 2
Si no hiciera falta volver al punto de partida al final del recorrido, ¿bastaría con un único puente más? ¿Dónde se situaría? ¿Cuál sería un posible recorrido?

Si no hay que volver al punto de partida, estamos hablando de un grafo semieuleriano, es decir, en el que solo hay dos vértices que tengan orden impar y el resto orden par. Como aquí tenemos 4 vértices impares, basta con comunicar dos vértices mediante un puente y así estos vértices pasarían a tener orden par y los otros dos quedarían con orden impar.
El puente comunicaría A con B.
El posible camino semieuleriano seria: DA – AC – CA – AB – BD – DC – CB – BC

ACTIVIDAD 3
Si en lugar de construir, se derribase uno, dejándolos en seis, ¿sería posible la cuestión que le plantearon a Euler? ¿Cómo?

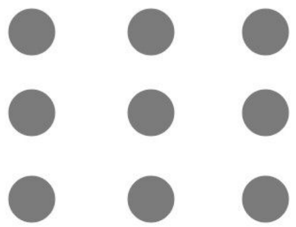
Estamos en un caso muy parecido al anterior pero en lugar de añadir, como era antes, hay que quitar. Como tenemos 4 vértices impares, basta con eliminar un puente que comunicaba dos vértices para que estos pasen a tener orden par y nos quedaríamos con los otros dos vértices que tendrían orden impar, es decir seria un grafo semieuleriano. Por tanto no sería posible la cuestión que plantearon a Euler pues preguntaban si el grafo era euleriano, es decir, cruzar cada puente una sola vez y volver al punto de partida.

ACTIVIDAD 4
¿Sabrías realizar la figura siguiente sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio?

Vemos que en esta actividad se trata de un camino semieuleriano, es decir, no tiene que empezar y acabar por el mismo sitio. Como hemos visto, éstos SÍ tienen solución.

ACTIVIDAD 5
Trata de unir los 9 puntos de la imagen con solo 4 líneas rectas y sin levantar el lápiz del papel, es decir, donde acaba una tiene que empezar la otra. No puedes pasar 2 veces por el mismo punto pero las líneas pueden cruzarse.

Vamos a considerar los 9 puntos de la siguiente manera:



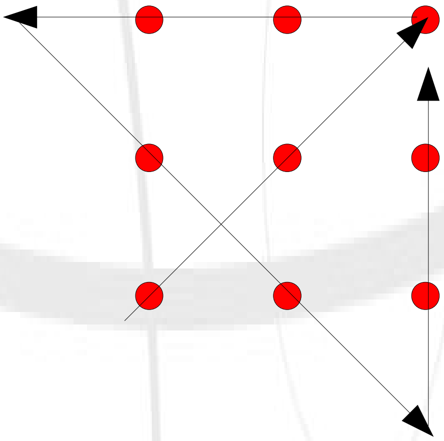
A	**1**	**2**	**3**
	4	**5**	**6**
	7	**8**	**9**
			B

Los vamos a nombrar del 1 al 9 como indica la figura y además luego se verá para que sirven las letras A y B. Los pasos a seguir son:

- Trazamos una línea diagonal (Línea 1) desde el punto 7 hasta punto 3, pasando por el punto 5.
- Trazamos otra línea (Línea 2) desde el punto 3 a la letra A, pasando por los puntos 2 y 1.

- Trazamos una línea (Línea 3) desde el punto A hasta el punto B, pasando por los puntos 4 y 8.
- Trazamos la última línea (Línea 4) desde el punto B hasta el punto 3, pasando por los puntos 9 y 6.

Gráficamente:



Gazapos de la película

1. El problema que resuelve Will no es de Análisis de Fourier sino de…
   - ☐ Teoría de grafos.
   - ☐ Matrices.
   - ☐ Análisis matemático.
   - ☐ Aritmética
2. Cuando avisan al profesor Lambeau, dicen que “alguien ha demostrado el teorema”. ¿Es cierto?
   - ☐ Sí, Will demostró un teorema
   - ☐ No, Will simplemente hizo un ejercicio
   - ☐ No, Will resolvió un problema
   - ☐ No, Will desarrolló una nueva teoría
3. Einstein no era suizo sino de…
   - ☐ Liechtenstein.
   - ☐ Austria.
   - ☐ Alemania.
   - ☐ Estados Unidos.
4. Aprendamos algo de cómo *se hace cine*: Observa la siguiente secuencia de imágenes que ocurren en torno al minuto 4:

   ¿A qué puede deberse este gazapo?
5. ¿Algún otro gazapo encontrado?

Otras películas de temática similar

- Vitus: un niño extraordinario (Fredi M. Murer, 2006)
- Raising genius (Linda Voorhees y Bess Wiley, 2004)
- La sonrisa de Mona Lisa (Mike Newell, 2003)
- El club de los emperadores (Michael Hoffman, 2002)
- Al rojo vivo (Harold Becker, 1998)
- Cube (Vincenzo Natali, 1997)
- Matilda (Danny de Vito, 1996)
- Antonia (Marleen Gorris, 1995)
- En busca de Bobby Fischer (Steven Zallian, 1993)
- Mr. Jones (Mike Figgis, 1993)
- El pequeño Tate (Jodie Foster, 1991)
- El club de los poetas muertos (Peter Weir, 1989)
- Rain Man (Barry Levinson, 1988)
- Escuela de genios (Martha Coolidge, 1985)
- DARYL (Simon Wincer, 1985)

Bibliografía

1. La enciclopedia libre: http://es.wikipedia.org
2. El Museo del Puzzle: http://puzzlemuseum.com/
3. **Unión**, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº 10, Junio de 2007
4. Lenguaje Matemático. Una experiencia de los estudios de Economía en la UCLM.: http://www.uclm.es/ab/fcee/D_trabajos/2-2002-5.pdf
5. **Festival Mágico–Matemático**. Martin Gardner, Alianza Editorial, 2ª reimpresión, 1994
6. **Talleres divulgativos, Matemáticas en acción**. Matemática Discreta, Francisco Santos. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria:
http://www.matesco.unican.es/talleres_matematicas/talleres matematicas en accion2005.html