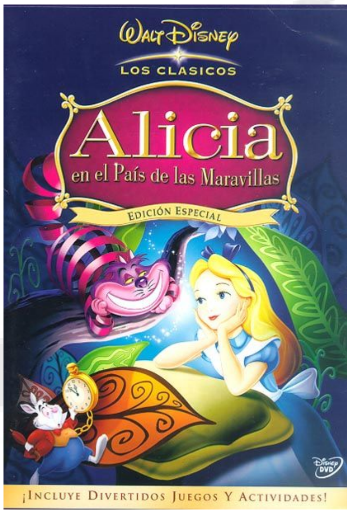
Alicia en el país de las maravillas

Índice de contenido

Alicia en el país de las maravillas



Ficha técnica y artística

Creador: Lewis Carrol
Productor: Walt Disney **Año:** 1951 **Duración**: 0 h 75 min
Dirección: Clyde Geronimi, Wilfred Jackson, Hamilton Luske
Guión: Winston Hibler, Ted Sears, Bill Peet
Intérpretes: Dibujos animados
Título original: Alice in Wonderland
Nacionalidad: Estados Unidos
Fecha de estreno: 28 de julio de 1951, reestrenada en 1974
Reestrenada en España: 17 de abril de 1954
Presupuesto: 3 millones de dólares
Recaudación: Unos 550.000$ en su primer estreno

Argumento

La película comienza con las lecciones de historia que Alicia recibe por parte de su hermana mayor, a las que Alicia no presta ninguna atención. La niña juega con su gata Diana e imagina como sería un mundo de su propia creación, cuando cae dormida. Repentinamente ve un conejo blanco con chaqueta y reloj, lo que en un principio no le resulta extraño, pero finalmente sale en su búsqueda. El conejo entra en una madriguera, Alicia lo sigue y cae en un agujero. Así llega al País de la Maravillas donde se encuentra con una serie de personajes muy extraños: el pájaro dodo, la liebre de marzo y el sombrerero loco, una oruga que fuma en pipa... y se ve involucrada en unos divertidos eventos como una fiesta de "no-cumpleaños" o un partido de *croquet* con la malvada reina de corazones. Finalmente Alicia despierta al lado de su hermana, que le dice que ya es hora de volver a casa.

El autor

Charles Lutwidge Dodgson era el nombre verdadero del autor de las "Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas". Nacido en Daresbury, Inglaterra, a los 18 años, ingresó en la Universidad de Oxford, en la que permaneció durante cerca de 50 años. Fue ordenado diácono de la Iglesia Anglicana y enseñó Matemáticas a tres generaciones de jóvenes estudiantes de Oxford, y lo que es más importante, escribió dos de las más deliciosas narraciones que se han producido en el campo de la literatura.

Durante sus 66 años de vida, su trabajo y ocupación, así como su diversión favorita, fueron las Matemáticas. Sufría insomnio, y pasaba noches enteras despierto, con arduos problemas matemáticos dando vueltas en su cabeza, tratando de descifrarlos. Escribió diversos libros sobre la materia y el más interesante de ellos se titula: *Euclides y sus modernos rivales*.

Sus cuentos vieron la luz con el seudónimo *Lewis Carroll*, quizá por su extraordinaria timidez ante los adultos. Tenía pocos amigos adultos y creó sus amistades entre los niños, especialmente entre las niñas pequeñas; los comprendía perfectamente y era su natural y delicioso compañero. Fácilmente tomaba parte en sus juegos, e inventaba siempre algunos nuevos y les contaba cuentos e historias.

La Alicia real y verdadera, que era la hija de su amigo el diácono Liddell, dijo de él: "Muchos de los cuentos del Sr. Dodgson nos fueron contados en nuestras excursiones por el río, cerca de Oxford. Me parece que el principio de "Alicia" nos fue relatado en una tarde de verano en la que el sol era tan ardiente, que habíamos desembarcado en unas praderas situadas corriente abajo del río y habíamos abandonado el bote para refugiarnos a la sombra de un almiar recientemente formado. Allí, las tres repetimos nuestra vieja solicitud: cuéntenos *una historia*, y así comenzó su relato, siempre delicioso. Algunas veces para mortificarnos o porque realmente estaba cansado, el Sr. Dodgson se detenía repentinamente diciéndonos: *esto es todo, hasta la próxima vez; ¡ah, pero ésta es la próxima vez!*, exclamábamos las tres al mismo tiempo, y después de varias tentativas para persuadirlo, la narración se reanudaba nuevamente".

El productor

Walt Disney (Chicago, 1901 – Los Ángeles, 1966) Productor y dibujante estadounidense.

Consigue su formación artística en el Instituto McKinley, de Chicago, de donde salta a la Academia de Bellas Artes de la misma ciudad. Tras varios intentos infructuosos, se une al también dibujante Ub Iwerks, y a Roy Disney, hermano de Walt, para montar en 1922 una empresa con la que logran comercializar un cortometraje, *Alice's wonderland* (1923), basado en la obra de Lewis Carroll en el que combinan dibujos animados e imágenes de una niña real. A la empresaria Margaret J. Winkler le agrada el cortometraje y financia una serie con el mismo formato, de la que se produjeron más de cuarenta historias.

Walt Disney pensaba llevar a la gran pantalla la historia de Alicia en el País de las Maravillas en lugar de "**Blancanieves y los siete enanitos**". La idea original era mezclar animación con acción real, al igual que en la serie de los años 20, e incluso se hicieron test de pantalla con Mary Pickford como Alicia. Finalmente ésta idea fue desechada cuando se estrenó una versión de Alicia con un elenco de grandes estrellas entre las que estaban Gary Cooper y Cary Grant.

Después del enorme éxito de Blancanieves, Disney registró el título de la obra de Lewis Carroll, pero la ruina económica que supuso la Segunda Guerra Mundial y los relativos fracasos de "**Pinocho**", "**Fantasía**" y "**Bambi**" dejaron el proyecto de Alicia a un lado. En varias ocasiones Disney retomó la idea de mezclar animación e imagen real, e incluso se planteó convertirla en un musical cómico, pero la versión completamente animada acabó imponiéndose, con un intento de utilizar las ilustraciones de la primera edición del libro, de John Tenniel. Crear una película fiel en su totalidad al libro hubiera sido prácticamente imposible, por la literatura mostrada en la historia de Carroll con situaciones tan disparatadas y tantos personajes, así que Disney eligió enfocar su versión hacia su propia fantasía usando la prosa del escritor, con una transformación y reinvención de los personajes principales. La artista Mary Blair se encargó del diseño del País de las Maravillas creando un mundo reconocible pero decididamente irreal y lleno de color. Todas estas decisiones creativas fueron recibidas con gran rechazo entre los incondicionales de la obra de Lewis Carroll, los críticos literarios y de cine británicos acusaron a Disney de "americanizar" una gran obra de la literatura inglesa. La película tuvo una fría acogida en taquilla y fue una gran decepción en su estreno inicial. Curiosamente, y al igual que ocurriera con "**Fantasía**", la llegada de la psicodelia y el movimiento hippie sirvió para que fuera reestrenada en 1974.

Alicia en el país de las maravillas fue nominada a un Óscar a la mejor Banda Sonora (16 canciones basadas en versos y poemas del libro original, un número aún no superado en otras películas, aunque algunas sólo aparecen unos segundos en la película) y al León de Oro en el Festival Internacional de Cine de Venecia.

Justificación de la elección de esta película

Recientemente parece aumentar el interés por series y programas en los que las matemáticas y la ciencia juegan un papel importante. «Alicia en el país de las maravillas» es un relato plagado de juegos lógicos, de razonamientos llevados al absurdo. El hecho de que se trate de una película de dibujos animados puede hacerla más cercana a los alumnos más jóvenes. Las posibilidades que nos ofrece su análisis no sólo se reducen al campo de las matemáticas sino también a la historia político-social de la época.

Nivel curricular

Dependiendo de la profundidad con la que se traten los temas, pueden utilizarse tanto en la E.S.O. como en Bachillerato.

Objetivos didácticos generales

En este capítulo se introducen conceptos que permiten trabajar:

- Lógica
- Escalas
- Resolución de problemas

- Simetría
- Física y Química:
    - Caída libre y rozamiento del aire
    - Mecánica: Equilibrio, dinámica de traslación y rotación
    - Movimiento armónico simple
    - Isomería molecular: enantiómeros

Puntos “calientes” del episodio

OBJETIVOS DIDÁCTICOS CONCRETOS	TIEMPO
Caída libre vs. caída con “paracaídas”	00:05:50 – 00:07:00 00:43:05 – 00:43:15
Espejos	00:06:20 – 00:06:27
Movimiento atravesando el Mundo	00:06:50 – 00:07:00
Cambios de tamaño, leyes de escala	00:08:32 – 00:10:15 00:21:00 – 00:25:00 00:35:40 – 00:36:50 01:08:05 – 01:08:45
Principio de Arquímedes – Flotación	00:10:15 – 00:11:50
Movimiento circular	00:11:25 – 00:12:30 01:09:35 – 01:09:40
Traslación, reflexión, rotación e inversión	00:12:45 – 00:20:10 00:57:00 – 00:57:58
Acertijos, resolución de problemas	00:37:40 – 00:40:00
Probabilidad, Sistema Sexagesimal	00:40:20 – 00:47:53
Laberintos	00:55:12 – 00:55:22 01:09:10 – 01:09:30
Aleatoriedad, azar, probabilidad	01:00:20 – 01:00:35

Temporalización

La temporalización adecuada para esta película sería de cinco sesiones distribuidas de las siguiente manera:

- En la primera clase se daría una introducción a la película y al tema a tratar, con el comienzo de la proyección.
- La 2ª y 3ª sesiones para ver la película y comentarla.
- Una para las primeras impresiones y realización individual de la/s actividad/es.
- Una de actividades propias para después del visionado de la película a realizar con la ayuda de una herramienta como Internet y breve puesta en común (sesión 5).

Dado el carácter literario de la obra, se propone coordinar la actividad con el Departamento de Lengua y Literatura.

Puntos de interés antes del visionado de la película

Es conveniente tener en cuenta que se trata de una película de dibujos animados clásicos. Este hecho puede causar un rechazo inicial por parte de los alumnos de los niveles más altos pero, nos hemos atrevido a incluirla en nuestro trabajo, debido a la inmensa variedad de temas matemáticos y científicos que presenta. También nos hemos sorprendido a nosotros mismos, que hace mucho tiempo que dejamos atrás la edad de la Educación Secundaria, maravillados por el mundo de fantasía de Alicia y hacemos una apuesta porque nuestros alumnos experimenten también esta sensación

Recomendamos encarecidamente que el profesor elija el Objetivo Didáctico que quiere trabajar con los alumnos antes de visionar el film. Para ello aportamos un guión y, de cada tema, proponemos actividades para desarrollar en el aula. Hacemos esta sugerencia tras haber comprobado personalmente que el número de temas tratados en el film puede resultar inabarcable. De hecho, la recomendamos como actividad de apoyo, no sólo en la asignaturas de ciencias como las de Matemáticas, Física y Química o Biología, sino también en asignaturas como Educación Plástica y Visual, Lengua y Literatura Castellana y Filosofía.

Aspectos a comentar tras el visionado de la película

Lewis Carrol, autor de Alicia en el País de las Maravillas, dedicó cuarenta años de su vida a enseñar Matemáticas en Oxford. Este hecho infiere a su obra una peculiaridad que no se escapa a la vista de unos ojos habituados a esta disciplina. Pero, como sabemos, estamos siendo testigos de cómo ha cambiado la impartición de la asignatura de Matemáticas en estos últimos años, hasta el punto de que la teoría y las demostraciones se han reducido a la mínima expresión. La consecuencia es que nuestros alumnos carecen, en su mayoría, de la formación necesaria para apreciar la peculiaridad antes mencionada. Con el fin de cubrir mínimamente esta carencia, nos parece interesante, tras el visionado de la película, hablarles a los alumnos acerca de los siguientes puntos:

¿Qué son las Matemáticas? Nos interesa que nuestros alumnos adquieran una idea global de lo que es “El mundo de las Matemáticas”, su estructura interna, el orden lógico que presenta y su coherencia interna.

¿Cómo se desarrolla una teoría Matemática? Creemos importante que los alumnos observen el paralelismo entre el desarrollo de una idea científica y el desarrollo de cualquier idea que ellos llevan a cabo en su día a día. Nos gustaría, en la medida de lo posible, y con ayuda de Alicia, enseñarles a afrontar sus problemas de un modo lo más lógico, preciso e imparcial posible.

¿Qué es un conjunto bien definido? ¿Usamos bien nuestro lenguaje? Creemos que no está demás recordar a un alumno la importancia del uso correcto, y preciso, del lenguaje. Esto es fundamental no sólo en ciencias sino en todos los campos de la vida.

Por último, creemos que la película es una maravillosa fuente para explicar lo que es la experimentación científica.

Para trabajar todos estos puntos adjuntamos explicaciones teóricas y actividades, que creemos muy interesantes, al final de la sección.

Sugerencias didácticas

Nos parece más eficaz, dada la densidad de contenidos de la película, proyectarla de modo fraccionado. Con el objetivo de facilitar la labor del docente, aportamos al principio del tema, en la sección “Puntos calientes”, un cuadro en el que se recogen los momentos con presencia más clara de contenidos matemáticos.

Una vez escogidos los temas a tratar en el aula, proponemos la realización de las actividades que adjuntamos.

En el caso concreto de actividades relacionadas con lógica, sugerimos una serie de acertijos, que recomendamos trabajar en grupo. También nos parece interesante que se lleve a cabo de este modo la sección relativa a laberintos. Así, los alumnos se divierten poniendo en funcionamiento su ingenio a la vez que, sin apenas darse cuenta, refuerzan el hábito del trabajo en equipo.

Tarea 1. Conoce al autor

La película que hemos visto está basada en el libro del mismo nombre cuyo autor es Lewis Carroll, aunque dicho escritor trabajaba con seudónimo y su verdadero nombre es Charles Dodgson, diácono de la Iglesia de Inglaterra y profesor de matemáticas. Vemos entonces que existen dos personalidades diferentes de una misma persona, el escritor, excéntrico y el profesor de matemáticas.

Vamos a estudiar estas dos personalidades de un mismo personaje:

1. Escribe una lista de todos los trabajos realizados por el autor indicando su procedencia, es decir, si son literatura infantil, o si se corresponden con tratados matemáticos.
2. ¿Quién es Charles Dodgson? Escribe una breve biografía del mismo indicando cada uno de sus aportes en el mundo de las matemáticas.
3. Lewis Carroll escribió numerosos libros sobre lógica, un ejemplo de ellos es el titulado “El juego de la lógica”,
   a) ¿Sabes lo que es la lógica?
   b) ¿En qué asignatura de tu currículo se estudia la lógica?
   c) ¿Qué aplicaciones prácticas consideras que tiene esta disciplina?

Actividad 1: Lógica

Desde el momento en que vemos a un conejo de paje medieval, corriendo a dos patas, hablando y mirando a un reloj, sabemos que se trata de una película “infantil”, que se va a tomar muchas licencias respecto a la realidad y en la que la lógica va a ser distinta a la que estamos acostumbrados.

Cualquier niño en sus juegos fantasea con la realidad y crea mundos propios, donde sus juguetes cobran vida, donde el tiempo transcurre con un ritmo distinto, donde todo es posible con tan solo desearlo o imaginarlo, con sus propias reglas y lógica. Es aquí donde reside el encanto de esta película para adultos e infantes, pues nos vemos desconcertados y a su vez divertidos por sus contrasentidos: los pequeños piden imaginación, no coherencia lógica.

Pero … ¿qué es la lógica?

¿Qué es la lógica?

Propuesta 1.

1. Debate en clase qué es la Lógica, introduciendo conceptos como
   1. Argumentación
   2. Conclusión
   3. Premisa
   4. …
2. ¿Qué esperas de una película “infantil” como Alicia en el País de las Maravillas?
   1. ¿Qué cosas “ilógicas” esperas encontrar (o has encontrado)?
   2. ¿Qué no ves coherente con “nuestro mundo”?
   3. …

Base teórica

El **raciocinio** es aquella operación intelectual por la cual la mente, partiendo de una cosa conocida, llega hasta otra desconocida. La **argumentación** es la expresión oral de todo raciocinio. Todo razonamiento consta de dos partes:

1. Las premisas o antecedente, que son las proposiciones en cuya verdad nos apoyamos para adquirir un nuevo conocimiento.
2. La conclusión o consecuente, que no es sino la proposición en la que se expresa el nuevo conocimiento adquirido (suele ir encabezado por la palabra "luego").

Llamamos **inferencia inmediata** a aquella deducción obvia que, sin discurso, procede de un **aserto**.

La lógica estudia cuándo la forma de los razonamientos es correcta, el orden que en la ciencia introduce nuestro entendimiento. Este es un orden que no tiene nada de arbitrario, sino que se ajusta a leyes muy precisas y rigurosas. Este orden y estas leyes se manifiestan especialmente en los razonamientos o argumentaciones, que tienen en la ciencia el importantísimo papel de proporcionarnos conocimientos mediatos.

La verdad de algunos de nuestros conocimientos es captada inmediatamente, por ejemplo cuando afirmamos que hoy llueve. Por el contrario, tenemos conocimientos cuya verdad no puede captarse inmediatamente por medio de la experiencia, sino que proceden de otros anteriormente admitidos. Por ejemplo, cuando decimos que somos mortales, cosa que afirmamos por saber que todo hombre es mortal y que nosotros somos hombres, no porque hayamos tenido experiencia directa de tan desagradable característica.

El **silogismo** es la expresión principal y típica del raciocinio deductivo. ”Es una argumentación que consta de dos proposiciones –las premisas–, de las cuales se sigue necesariamente una conclusión“.

Razonamiento deductivo

Los problemas que resolveremos ahora eran los preferidos del matemático y lógico inglés Lewis Carroll. De acuerdo a la sentencia inicial (premisa) debes encontrar la frase que se deduce lógicamente de las anteriores. Es importante señalar que no importa si las conclusiones son verdaderas o falsas, se trata únicamente de averiguar qué conclusión se obtiene de las dos premisas dadas.

Premisas: ➢ Todos los leones son feroces. ➢ Algunos leones no beben café. **¿Cuál es la conclusión correcta?** • Algunas criaturas que beben café no son feroces. • Algunas criaturas feroces no beben café.	**Premisas**: ➢ Algunos sueños son terribles. ➢ Ningún borrego es terrible. **¿Cuál es la conclusión correcta?** • Algunos sueños no son borregos. • Algunos borregos no son sueños.
Premisas: ➢ Ningún profesor es ignorante. ➢ Todas las personas ignorantes beben agua con jabón **¿Cuál es la conclusión correcta?** • Ningún profesor bebe agua con jabón. • Algunas personas que beben agua con jabón no son profesores.	**Premisas**: ➢ Un hombre que sea prudente huye de los gorilas. ➢ Ningún fotógrafo es imprudente. **¿Cuál es la conclusión correcta?** • Ningún fotógrafo deja de huir de los gorilas. • Ningún gorila se acerca a un fotógrafo.

Veamos otra serie de ejemplos con proposiciones concretas que son premisas, en las que debemos llegar a la conclusión:

• Algunos judíos son ricos Todos los esquimales son gentiles.	• Los pelmazos son terribles Usted es un pelmazo
• Ningún cuadrúpedo sabe silbar Algunos gatos son cuadrúpedos	• A todos los abstemios les gusta el azúcar Ningún ruiseñor bebe vino.

La ilógica Lógica

Enunciado

Raro será el que alguna vez no haya usado la frase:

"Toda regla tiene su excepción"

Pero, ¿es esta afirmación cierta?

Solución

1. Toda regla tiene su excepción.
2. Pero "*toda regla tiene su excepción*" es una regla.
3. Luego tiene su excepción...
4. Ergo, "no toda regla tiene su excepción"

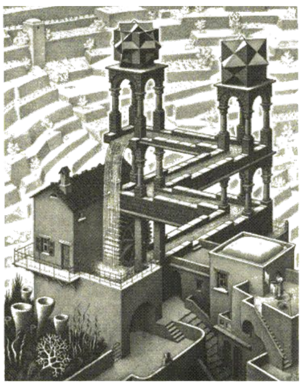
Volviendo a lo nuestro, la afirmación "Toda regla tiene su excepción" es una afirmación que se contradice a sí misma. De la misma forma que el barbero del pueblo afirmaba afeitar a todos los del pueblo que no se afeitaban por sí mismos: ¿Quién le afeitaba a él?

La paradoja del mentiroso

Una parte de la lógica la constituyen las **paradojas**

1. ¿Puedes indicar que es una paradoja?
2. Pon algunos ejemplos de paradojas.

La llamada paradoja del mentiroso tiene múltiples variantes, probablemente la más simplificada es la que propuso Lewis Carrol:



Enunciado

"Yo estoy mintiendo".

Solución

Son afirmaciones donde habita el fenómeno llamado "bucle extraño", es decir, cualquier suposición inicial que se haga conduce a su propia refutación. Muchas de las ilusiones ópticas del arte de M. C. Escher están basadas en este concepto (en la imagen, Waterfall).

¿Quién robó la sal?

Quizás la idea más clara que existe en la sociedad a la hora de hablar sobre la lógica y los razonamientos deductivos la tenemos en las novelas y películas policíacas y de detectives. Las técnicas deductivas de Sherlock Holmes, creadas por la pluma de Sir Athur Conan Doyle, así como muchos otros aspectos del método del genial detective merecerían otro trabajo completo. Nos quedaremos con este acertijo que implica a tres de los personajes de la película.

Enunciado

¡Habían robado la sal!. Se descubrió que el culpable era la Oruga, o Bill el Lagarto o el Gato de Cheshire. Sometieron a juicio a los tres, que hicieron las siguientes declaraciones en el tribunal:



- Oruga: Bill el Lagarto se comió la sal.
- Bill el Lagarto: ¡Es cierto!
- Gato sonriente: ¡Yo nunca me comí la sal!

Se demostró que por lo menos uno de ellos mintió y al menos uno dijo la verdad. ¿Quién se comió la sal?

Lewis Carroll

Solución

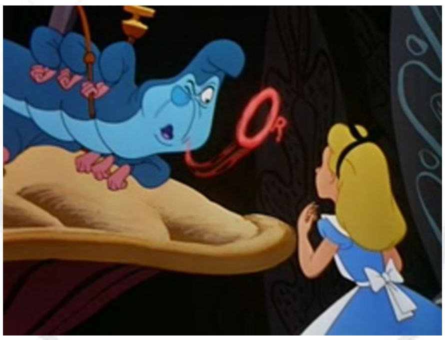
Si por lo menos uno de ellos mintió y al menos uno dijo la verdad, ¿dónde nos lleva esto?

- Si la Oruga dijo la verdad, TODOS están siendo sinceros. 3 DE 3 SON SINCEROS.
- Si la Oruga miente, Bill el Lagarto y ella están mintiendo, y el Gato de Cheshire diciendo la verdad. 2 MENTIROSOS Y 1 HONESTO.
- Si Bill el Lagarto es sincero, TODOS están diciendo la verdad. 3 DE 3 SON SINCEROS.
- Si Bill el Lagarto miente, la Oruga y él están mintiendo y el Gato de Cheshire esta siendo sincero. 2 MENTIROSOS Y 1 HONESTO.
- Si el Gato de Cheshire dice la verdad, la Oruga Y Bill el Lagarto están mintiendo. 2 MENTIROSOS Y 1 HONESTO.
- Si el Gato de Cheshire miente, TODOS están mintiendo. 3 DE 3 MIENTEN.

En base a las confesiones y a la premisa del acertijo, las opciones 1ª, 3ª y 6ª, quedan descartadas y debemos barajar las opciones 2ª, 4ª y 5ª ¿Qué tienen en común todas esas opciones? Que la Oruga y Bill el Lagarto MIENTEN y el Gato Sonriente dice la VERDAD.
Por consiguiente, el culpable es la Oruga o Bill el Lagarto. Lo que nos lleva a que si la Oruga miente, Bill el Lagarto al acusarse a si mismo, está inculpando a la Oruga …
O sea, que la Oruga es la ladrona.

La lógica del País de las maravillas

Estamos ante una película clásica, basada a su vez en un clásico de la literatura Infantil, pero



no nos engañemos al pensar que su discurso es sencillo y orientado a este público. No están orientadas a la infancia las reflexiones sobre los problemas de la identidad de Alicia en la escena en que la Oruga pregunta a Alicia:
– ”¿Quién eres tú? –pregunta la Oruga
La niña responde– "Yo… ya… no lo sé, señor… He cambiado tantas veces, que ya no lo sé”–
– “Tampoco yo lo sé” –dijo la Oruga en tono severo.– “¡Explícate!”–.
– “Es que yo ya no podré explicarme, señor” – dijo Alicia– “porque yo ya no soy yo.”–

Señalar que esta es la parte más incoherente de la película; es totalmente inverosímil porque ella ha sido y siempre será ella.

En **Alicia en el País de las Maravillas** los personajes y sus actitudes están rodeados de lo que a simple vista parece un absurdo total, pero es sólo a simple vista, pues no hay más que hacer un análisis más profundo para observar que en el País de las Maravillas todo tiene su propia lógica y que ningún personaje se contradice, ni contradice a otros. Podemos decir que el País de las Maravillas tiene sus propias reglas y sus propias formas matemáticas.

Análisis de la lógica del País de las Maravillas

En esta actividad proponemos varias escenas de la película, para analizar el orden y la lógica interna del país de las maravillas, marcada por sus propias leyes como podemos observar en algunas escenas:

Escena 1: en la que el pájaro Dodo subido en una roca, donde no es alcanzado por el oleaje, anima a todos aquellos que han salido del mar, a correr alrededor de la roca para secarse mientras son abatidos una y otra vez por las olas: (min 12:28 a 12:55)

Dodo cantando, mientras Alicia sale del mar: "Oye así nunca vas a secarte"
Alicia: "¿Secarme?"
Dodo: "Tendrás que correr con nosotros, regla 10 inciso 4"
Alicia: "Pero, ¿como puedo secarme...?" –reprocha Alicia a la vez que es abatida por una nueva ola -
Dodo: "Eso es así, no tardaras en secarte"
Alicia: "Pero aquí dentro del agua ... ¡Oh!" –nueva ola–
Dodo: "La duda ofende, ¿no ves que yo ya estoy más seco que el jerez?" –exclama desde lo alto de la roca–
Alicia: "Si pero..."
Dodo: "No hay peros que valgan, adelante sin perder el compás"

Escena 2: en el juicio tras leer la acusación (min 1:08:00 a 1:08:30)
Reina de corazones: "Y ahora que... ¿Estás lista para oír la sentencia?"

Alicia: "¿Sentencia? ¿Sentencia?, pero si todavía no me han juzgado".
Reina: "¡La sentencia es primero! –dice la reina enrojecida de ira– El juicio vendrá después."
Alicia: "Pero si yo... Siempre se acostumbra..."
Reina: "¡Aquí nadie sabe nada!"
Alicia: "Más de lo que usted sabe majestad." –haciendo una pomposa reverencia–.
Reina: "Así es querida. ¡Córtenle la...! –es interrumpida por el rey que le recuerda que aun no han declarado los testigos –

Esto demuestra que ella conservaba la noción de orden por una experiencia anterior que obviamente no coincide con el orden lógico del País de las Maravillas.

Cuestiones

1. ¿Dónde están recogidas las normas, a veces absurdas desde nuestro punto de vista, que rigen el país de las Maravillas?
2. Señala el personaje que crees que dicta estas normas y establece el orden del país de las maravillas
    1. El conejo Blanco
    2. El sombrerero
    3. El rey
    4. La reina de corazones
    5. El gato de Cheshire

Análisis de la lógica del País de las Matemáticas

Al igual que en el País de las Maravillas, en el "**País de las Matemáticas**", existe una estructura, un orden lógico y una coherencia interna establecidos por unos principios lógicos y axiomas. La lógica matemática estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican conceptos intuitivos de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones y computación.

Así, los **axiomas** son los principios básicos de toda teoría matemática y se admiten sin demostración. A partir de ellos se derivan **proposiciones** que una vez probadas se denominan **teoremas**. Los "*nuevos*" teoremas se prueban a partir de los "*antiguos*" teoremas mediante procedimientos de **deducción** o **inferencia**, en los que se encadenan consecuencias lógicas.
La axiomática de las matemáticas, y de las ciencias en general, constituye el punto básico de deducción de teoremas derivados y su elección adecuada representa uno de los puntos más delicados en la elaboración de los modelos de cualquier sistema. Un conjunto de axiomas sólo será aceptado de forma matemática si posee coherencia lógica, lo que implica que de un axioma no se pueden deducir dos teoremas que se contradigan.

En esta actividad vamos a analizar con ayuda de algunas escenas de la película uno de estos principios básicos: **Los conjuntos bien definidos**. El concepto de conjunto es intuitivo y se podría definir como una "colección de objetos"; así, se puede hablar de un conjunto de personas, ciudades, gafas, lapiceros o del conjunto de objetos que hay en un momento dado encima de una mesa. Cantor, padre de la teoría de conjuntos, definió conjunto como la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestra mente.
Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. El conjunto de los bolígrafos azules está bien definido, porque a la vista de un bolígrafo se puede saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber distintas personas que opinen si esa persona es alta o no lo es.

Enunciado 1
En la escena 37:00 a 38:22, tras comer un trozo del hongo, Alicia crece de forma descomunal y en su crecimiento arrolla las ramas de un árbol, poniéndose por sombrero el nido en el que una mama pájaro esta incubando su progenie, y la confunde con una serpiente.

Mamá Pájara, gritando: "¡Fuera, Fuera serpiente!. ¡Socorro!"
Alicia. "Yo no soy una serpiente"
Mamá Pájara: "¿Qué? ¿No eres? ¿Entonces qué eres tú?"
Alicia: "Soy una niñita"
Mamá Pájara: "Niñita, chiquita" –la pájara se burla de Alicia–
Alicia: "Sí, lo soy, bueno antes era chiquita..." –responde entristecida–
Mamá Pájara: "¿Y vas a decirme que no comes huevos?"
Alicia: "Sí los como , pero…"
– "¡Ya lo sabía! ¡Ya lo sabía! ¡Serpiente, serpiieeeeeente! –grita la mamá pájara-
Alicia: ¡Ay!, no seas escandalosa"
– "Serpiiieeeeente" –Grita de nuevo la mamá pájara mientras se aleja –

1. ¿Crees que es lógica la conclusión que saca la mamá pájara, sobre la naturaleza de Alicia?
2. Analiza la cuestión desde nuestro punto de vista y el de la mamá pájara.

Enunciado 2
Otro ejemplo de la lógica sobre la pertenencia a un conjunto determinado nos la encontramos en la escena en la que Alicia se encuentra con las flores parlantes. Éstas la intentan encuadrar dentro del conjunto de las flores, pero al no cumplir las características de pertenencia a este conjunto, la clasifican como "una hierba". (min 30:20 – 32:00)

1. ¿Cuáles son las características, que te sugiere la película para pertenecer al conjunto de las Flores?
2. ¿Crees que son las correctas?
3. ¿Crees lógico afirmar que si no eres flor, eres una hierba?
4. Analiza la cuestión desde el punto de vista de nuestra lógica y la de las flores.

Enunciado 3
Otra escena que refleja este dilema es aquella en la que Alicia se encuentra con el Gato de Cheshire y éste afirma que en el País de las Maravillas casi todos están locos (escena entre los minutos 41:13 y 41:42)

1. Alicia está en el país de las Maravillas, ¿la niña también está loca?

Las cosas son lo que son

Uno de los principios básicos de las Matemáticas es definir de manera clara una clase o conjunto de cosas antes de trabajar con ella, para evitar equívocos e inexactitudes.

Veamos un ejemplo un poco exagerado de conjunto mal definido: Imaginar que el dueño de un bar, en un momento en el que no hay clientes le dice al camarero: “Vacía el vidrio del local en el contenedor de reciclaje, mientras yo voy a hacer unas compras”.

Al regresar el dueño se encuentra con que todos los cristales del local, botellas, ventanas... todo lo que estaba hecho de cristal ha desaparecido, no le queda ni un triste vaso para tomarse un poco de agua para pasar el mal trago.

1. ¿Qué crees que ha ocurrido?
2. ¿Ha actuado el camarero correctamente?
3. Explica qué es lo que tendría que haber ordenado el dueño al camarero

En el libro hay un diálogo interesante entre Alicia y Humpty–Dumpty (el huevo sobre el muro que habrás visto en otras adaptaciones de Alicia o en alguna tira de dibujos animados) en la misma línea del ejercicio anterior:

Después de un rato de conversación, Humpty–Dumpty le pregunta a Alicia:

– ...

– En ese caso, cortemos por lo sano y a empezar de nuevo –zanjó la cuestión Humpty Dumpty– y ahora me toca a mí escoger el tema...

– (Habla como si se tratase de un juego –pensó Alicia)

– ...así que he aquí una pregunta para ti: ¿qué edad me dijiste que tenías?

Alicia hizo un pequeño cálculo y contestó: – Siete años y seis meses –.

– ¡Te equivocaste! –exclamó Humpty Dumpty, muy ufano. –¡Nunca me dijiste nada semejante!

– Pensé que lo que usted quería preguntarme era más bien «¿qué edad tienes?» –explicó Alicia.

– Si hubiera querido decir eso, lo habría dicho, ¡ea! –replicó Humpty Dumpty.

Alicia no quiso ponerse a discutir de nuevo, de forma que no respondió nada.

Enunciado 4

El conjunto de los numero racionales o fraccionarios está bien definido.

1. ¿Sabrías explicar con tus palabras qué define al conjunto de los números racionales, de manera que un número no racional no pueda ser incluido dentro del conjunto de los racionales?
2. ¿Podrías explicar por qué el conjunto de las personas altas no es un conjunto bien definido?

Coherencia

En las actividades que siguen a continuación vamos a analizar la coherencia interna de la narración y de los personajes, su manera de razonar

El ritual del té es la culminación del absurdo, la verificación de que se encuentra “en un país de locos”. Ya se lo había advertido el Gato de Cheshire: “Por ahí vive un Sombrerero, y en esa otra dirección, una Liebre. Da igual al que visites... ¡Los dos están igual de locos!”.

1. ¿Por qué crees que afirma que da igual al que visite Alicia?
2. Tras el cambio de tazas, el sombrero loco pregunta a Alicia que si quiere un poco mas de té (escena desde 45:32 a 45:43). Alicia responde irónicamente que, como no ha tomado nada, pues no puede tomar más. A esto responde la liebre de mayo:
   “Si no quieres tomar más, entonces tampoco menos”,
   mientras le sirve una abundante taza de te.
   ¿Te parece lógico el razonamiento de la liebre? ¿Por qué?

3. Con el Sombrerero Loco, que en realidad no está tan loco, cuando nuestra heroína habla, él la Interrumpe y dice cosas que no tienen nada que ver. Pero, aunque incoherentes dentro de la conversación, son cosas mucho más lógicas que las que dice la niña.
   Desde el razonamiento lógico. ¿Quién crees tú que esta más loco, Alicia o el sombrero?
4. En la película no aparece, pero en la obra literaria cuando aparece el reloj estropeado del Sombrerero Loco y Alicia lo mira, comprueba que marca los días pero no las horas (lo más cercano es cuando aparece el Conejo Blanco y el Sombrerero afirma que el reloj lleva dos días de atraso). Alicia replica al sombrerero sobre la incoherencia de un reloj que solo marque los días. La reacción del Sombrerero es de asombro:
   “¿Y por qué iba a hacerlo?
   Desde el punto de vista de nuestra lógica, no tiene sentido un reloj que no marca las horas.
   1. ¿Que utilidad tendría?
   2. Pero, ¿es lógico y útil un reloj de estas características para el sombrerero?
5. De la misma forma, en el libro, cuando el Sombrerero, intenta arreglar su reloj con mantequilla, le pregunta a la niña si es mejor un reloj parado que no funciona en absoluto a otro que se atrasa un minuto cada día.
   En contra de lo que cree Alicia, es mejor el reloj parado ya que marca la hora correcta dos veces al día mientras que el que va un minuto retrasado, ¿cuánto tiempo necesitará para volver a marcar la hora bien?
6. Otra muestra de la asombrosa lógica de los comensales la tenemos cuando la Liebre de Mayo plantea un acertijo:
   “¿Cuántas tartas me puedo comer con la barriga vacía?”
   La protagonista contestó que todas las que quisiera, a lo que la Liebre le dijo:
   “¡No, no!”
   ¿Cual es el razonamiento que hizo la liebre?
7. En la escena de la “carrera del Caucus”, que es una competición en la que todos corren libremente, en distinto sentido y, por si fuera poco, los participantes se paran cuando quieren. El modelo de carrera que tenemos nosotros es una definición para nosotros; por convenio, una carrera consiste en correr hacia una misma dirección, pero,
   1. ¿Es coherente y lógica una carrera como la carrera de Caucus?
   2. ¿Que sería imprescindible?

Experimentación y Método científico

Experimentación

Otro tipo de razonamiento lógico, digno de analizar y que aparece en numerosas escenas, es aquél que esta basado en la experiencia, (no siempre acertada).

En la escena en la que Alicia se encuentra con las flores parlantes, dice que creía que las flores no hablaban. En este caso, la niña basa su razonamiento en una cuestión empírica, pero que las flores no hablen hoy no quiere decir que no lo puedan hacer mañana. En cualquier caso, las habitantes del jardín responden que las flores sí hablan pero que quizás nunca habían tenido nada que decirle.

Lo mismo ocurre en la escena cuando el señor Lirón en su narración dice que unas niñas estaban en un pozo de melaza sacando melaza. Ante la sorpresa de Alicia, el Sombrerero expone que si de un pozo de agua se puede sacar agua, ¿por qué de un pozo de melaza no se iba a poder sacar melaza?

En la escena en la que el verdugo real recibe la orden de decapitar al Gato de Cheshire, al ver que el animal tiene su cuerpo invisible salvo la cabeza, alega a su majestad que no puede cumplir con su trabajo ya que “es tan imposible cortar una cabeza sin cuerpo como decapitar un cuerpo sin cabeza”. Esto sería un contraejemplo al hecho de que todo lo que tiene cabeza se puede decapitar.

1. Narra una situación en que hayas extraído conclusiones precipitadas y erróneas, fiándote de situaciones similares que habías vivido antes. ¿Por qué crees que te equivocaste?

Método científico

Al igual que en la película, los Avances Matemáticos y Científicos se consiguen gracias a trabajos e investigaciones que otros científicos o científicas han realizado en otro momento histórico.

Tras encontrar un hecho experimental novedoso, primero se plantea el problema o conjetura, que hay que probar. Luego se van dando un paso tras otro:

- primero una proposición,
- luego un teorema, que sirve para demostrar otro,
- para finalmente, como si fuera una cadena, hasta llegar, por fin, al objetivo final..

En todo este proceso se trabaja con experiencias y conocimientos previos. Además, pese a la sensación de avance continuo que aparentan las explicaciones de los libros, este proceso a veces dura siglos.

La resolución de estos problemas a veces tiene premio. Los **Siete Problemas del Milenio** elegidos por una institución privada, el Instituto Clay de Matemáticas, que premia con un millón de dólares USA a quien resuelva al menos uno de estos problemas.

1. Busca información en Internet y enuncia al menos dos de los siete problemas del milenio y sobre el año en que el problema fue planteado a la comunidad científica

Actividad 2. Los acertijos de Sam Loyd (Martin Gardner)

¿De cuántas maneras se puede leer "Was it a cat I saw"?

Cuando Alicia vio por primera vez al gato de Cheshire, deseó saber qué especie de animal era, y como en el País de la Maravillas las preguntas se formulan siempre por escrito, escribió su pregunta. Pero como en general, en el País de las Maravillas, las cosas se leen de adelante para atrás o al revés, escribió la pregunta tal como se ve en la ilustración. Esto permite a los lectores empezar y terminar donde se les antoje, tal como lo harían en el País de las Maravillas. El problema es: ¿de cuántas maneras diferentes se puede leer la pregunta de Alicia, "*Was it a cat I saw*"? (¿Era un gato lo que vi?) Empieza por cualquiera de las W, muévete a las letras adyacentes hasta llegar a la C y luego vuelve hacia el borde. Puedes desplazarte hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda.

Respuesta
Muchos buenos matemáticos incurrieron en el error de intentar resolver este problema sobre la base de que hay 24 puntos de partida y el mismo número de finales. Supusieron que el cuadrado de 24, es decir, 576, era el número de posibilidades. Pasaron por alto las rutas laterales que ofrecen 252 maneras de llegar al centro C, y como hay igual número de maneras de regresar a las W, el cuadrado de 252 es la respuesta correcta: hay 63.504 maneras diferentes.

Transformando palabras

El objetivo de este juego es transformar una palabra en otra siguiendo estas reglas:

- En cada paso sólo se puede cambiar una letra.
- Todas las palabras deberán tener significado.
- No se admiten faltas de ortografía.
- No se admiten nombres propios.
- No se puede agregar ni quitar letras.

Transformar la palabra LUNA en la palabra FOCO:

Respuesta
LUNA → LONA se cambió la U por la O
LONA → LOCA se cambió la N por la C
LOCA → FOCA se cambió la L por la F
FOCA → FOCO se cambió la A por la O

Transformar la palabra CALOR en la palabra VOLAR.
Transformar la palabra NIÑO en la palabra CUNA.
Transformar la palabra CASA en la palabra POZO.
Transformar la palabra CURA en la palabra RUSO.

Más mentirosos cazados

El señor Fernández se dio cuenta al llegar a su oficina, que se había dejado entre las páginas del libro que estaba leyendo, un billete de 500 Euros. Preocupado, no fuese a extraviarse, llamó a su casa y dijo a la doncella que le diese el libro que contenía el billete a su chófer, que iría a recogerlo. Cuando el chófer se lo trajo, el billete había desaparecido.

- Al tomar declaración al chófer y a la doncella, esta última dijo que comprobó personalmente que el billete estaba dentro del libro cuando se los dio al chófer, concretamente entre las páginas 99 y 100.
- A su vez el chófer declaró que al darle el libro la doncella miró el reloj y vio que eran las 9:30 horas, dirigiéndose a la oficina del señor Fernández, situada a 500 metros, adonde llegó a las 9:45 horas.

¿Quién miente de los dos?

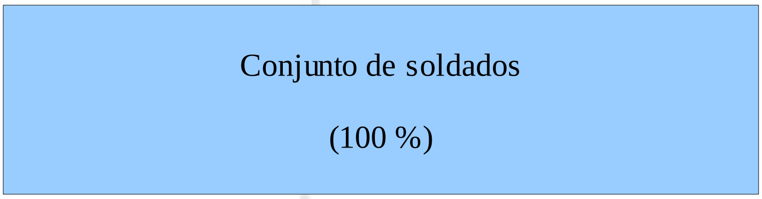
Solución
La doncella. Las páginas 99 y 100 forman una sola hoja.

La batalla

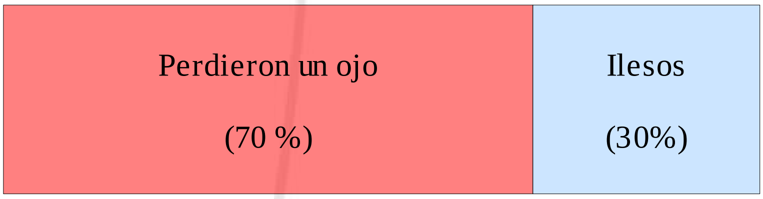
En una extraordinaria batalla, por lo menos el 70% de los combatientes perdió un ojo; el 75% una oreja, por lo menos el 80% perdió una mano y el 85% una pierna. ¿Cuántos, por lo menos perdieron los cuatro órganos?

Solución
La solución que proponemos a este problema implica la construcción de un diagrama. Es, por tanto, meramente visual, como no podía ser de otra forma viniendo de una película de dibujos animados.

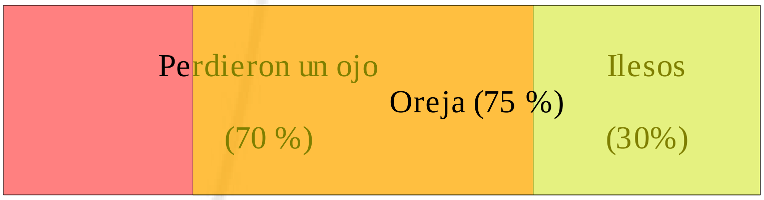
Supongamos que representamos al conjunto completo de soldados mediante un rectángulo:



Sobre él, representamos a los que perdieron un ojo:

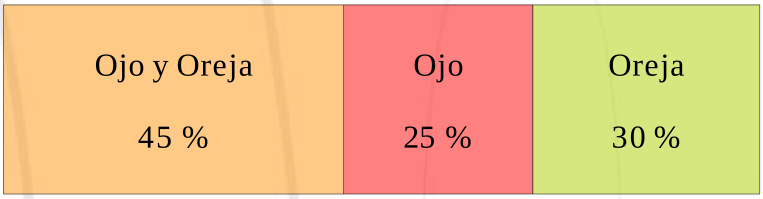


Debemos superponer ahora el rectángulo correspondiente a los que perdieron una oreja, pero nos dicen **como mínimo**, así que debemos buscar que la intersección sea la menor posible. En este caso debemos hacer que no queden “Ilesos” superponiendo el rectángulo a la derecha:

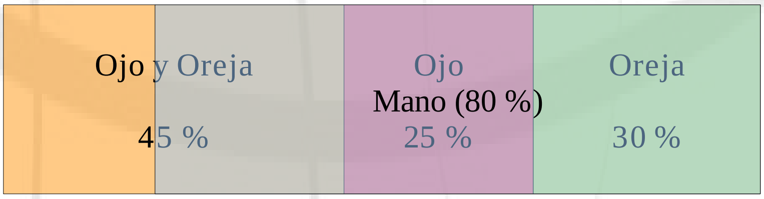


Una cuenta rápida proporciona:

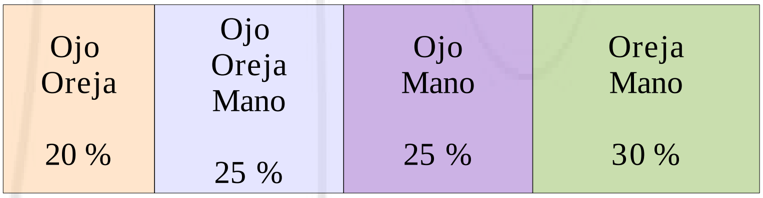
Como vamos a seguir buscando mínimos, redistribuyamos los rectángulos dejando la intersección a la izquierda:



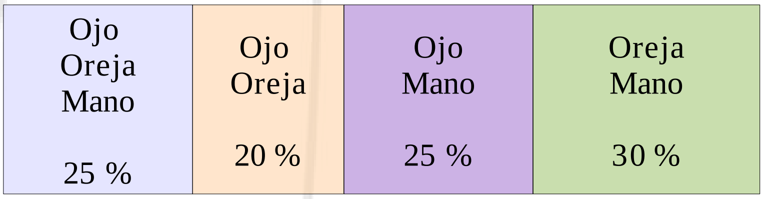
Como nos dicen que hay un 80% de mancos (perdieron una mano) debemos superponer un nuevo rectángulo y, de nuevo, lo haremos a la derecha para minimizar el área común:



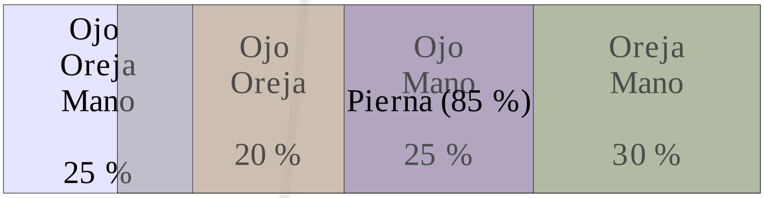
Un segundo cálculo simple proporciona:



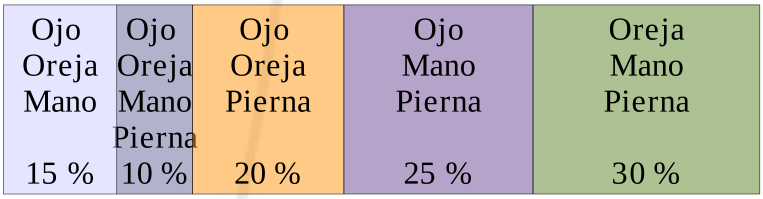
y una reorganización del diagrama nos deja:



Finalmente, el 85% que perdió una pierna nos dará:



es decir:



Por tanto, tras haber reducido al máximo las intersecciones, podemos concluir que, **como mínimo habrá un 10% de soldados que hayan perdido los cuatro miembros**: un ojo, una oreja, una mano y una pierna

¿Qué le pasa a la pesa?

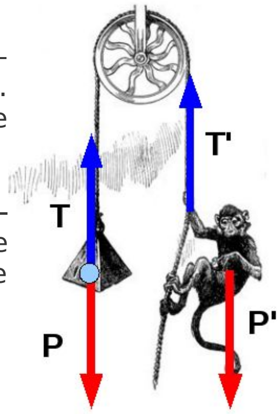
Este extraño problema mecánico, a pesar de su aparente simplicidad, parece haberle causado una inquietud a Lewis Carroll. No se sabe fue él mismo quien lo creó, pero sí se sabe que en un desafortunado momento pidió información acerca de lo siguiente:

> **Si de una soga que pasa por una polea sin fricción alguna se suspende una pesa que equilibra exactamente a un mono colgado del otro extremo, ¿qué le pasa a la pesa si el mono intenta trepar por la soga?**

"Es muy curioso", escribió Carroll, "señalar las diferentes opiniones de diversos matemáticos. Price dice que la pesa sube con velocidad creciente. Clifton (y Harcourt), que sube a la misma velocidad que el mono, en tanto Simpson ¡dice que desciende!". Un distinguido ingeniero opina que "no produciría más efecto que una mosca escalando en la soga".

Solución

La respuesta correcta es que independientemente de cómo trepe el mono –rápido, despacio o a saltos– el mono y la pesa siempre quedan enfrentados. El mono no puede llegar por encima o por debajo de la pesa por más que se suelte de la soga, se deje caer y vuelva a asir la cuerda.



Supongamos que tanto la soga como la polea no tienen peso ni sufren fricción. El diagrama de fuerzas en equilibrio es el que aparece en la figura de la derecha. Como en equilibrio la suma (vectorial) de todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos debe ser nula:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix} Pesa \\ T - P = 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ T' - P' = 0 \end{Bmatrix}$$

Debemos hacer notar que estamos indicando por T' la fuerza **total** que la cuerda ejerce sobre el mono, es decir, la suma de las fuerzas que actúan sobre la mano y los pies del animal. De este modo se simplifica el diagrama de fuerzas para hacerlo comprensible.

De este modo:

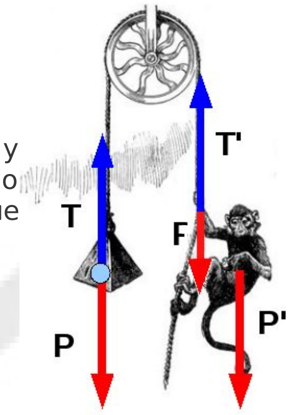
$$\begin{Bmatrix} Pesa \\ P = T \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ P' = T' \end{Bmatrix}$$

y como no hay movimiento, T = T', lo que inmediatamente permite comprobar que P = P', sólo hay equilibrio si la pesa y el mono pesan lo mismo (elemental, ¿no?).

Pero, ¿qué pasa si el mono intenta ascender? En este caso, deberá aplicar una fuerza **hacia abajo** (sí, hacia abajo) sobre la cuerda que le impulse a él hacia arriba. Esa fuerza se acumula al peso y genera una T' distinta. Debemos aplicar ahora la Segunda Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{Bmatrix} Pesa \\ T-P = m \cdot a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mano\ del\ mono \\ T'-F = m' \cdot a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ F-P = m \cdot a' \end{Bmatrix}$$



donde a y a' son las aceleraciones (supuestas distintas) que sufren mono y pesa y m' es la masa de la cuerda en el punto donde el mono la sujeta. Dado que las masas de la pesa y el mono son iguales, y estamos suponiendo que la polea y la cuerda no tiene masa ni rozamiento:

$$m' = 0 \quad , \quad P = P' \quad y \quad T = T' = F$$

luego:

$$\begin{Bmatrix} Pesa \\ F-P = m \cdot a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ F-P = m \cdot a' \end{Bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{Bmatrix} Pesa \\ a = \dfrac{F-P}{m} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ a' = \dfrac{F-P}{m} \end{Bmatrix}$$

es decir, ambos cuerpos **suben con la misma aceleración**.

Lo mismo ocurrirá si:

1. El mono se suelta y se deja caer libremente: Al otro lado de la polea la pesa también caería libremente y desde el reposo.
2. El mono asciende con velocidad constante. El desplazamiento está referido a la cuerda, es decir, debe desplazar **hacia atrás** la cuerda para avanzar él hacia delante. Al hacerlo, tira de la cuerda y hace subir la pesa, que también ascenderá a velocidad constante.

Por lo tanto, si la polea y la cuerda no tienen masa, el mono siempre tendrá a la pesa delante de sus narices.

Solución mejorada

Avancemos un poco más: ¿Qué pasa si consideramos una polea con masa y rozamiento? Ahora debemos incluir los aspectos referidos a la rotación de la Segunda Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad y \quad \sum \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

siendo M el momento (o par) de la fuerza, I el momento de inercia de la polea y α la aceleración angular. Por comodidad imaginemos una polea maciza, aunque el razonamiento no variaría si utilizamos otro modelo de rueda:

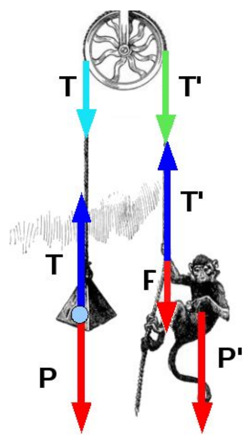
$$I_p = \tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot r^2 \quad y \quad \sum \vec{M} = r \cdot T' - r \cdot T$$

y debemos observar que la aceleración de la polea está relacionada con la de la cuerda (y por ende la de la pesa) como

$$a = \alpha \cdot r$$

De este modo:

$$\overbrace{\begin{Bmatrix} Pesa \\ T-P = m \cdot a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mano\ del\ mono \\ T'-F = m' \cdot a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ F-P = m \cdot a' \end{Bmatrix}}^{\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}} \qquad \overbrace{\begin{Bmatrix} Polea \\ r \cdot T' - r \cdot T = \tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot r^2 \cdot \alpha \end{Bmatrix}}^{\sum \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}}$$



simplificando la ecuación de la polea:

$$r \cdot T' - r \cdot T = \tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot r^2 \cdot \alpha \ \Rightarrow \ r \cdot (T' - T) = \tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot r^2 \cdot \alpha \ \Rightarrow$$
$$T' - T = \tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot r \cdot \alpha \ \Rightarrow \ T' - T = \tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot a$$

De nuevo vamos a despreciar la masa de la cuerda, m':

$$\begin{Bmatrix} Pesa \\ T-P = m \cdot a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mano\ del\ mono \\ T'-F = 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Polea \\ T'-T = \tfrac{1}{2} \cdot m_p a \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Mono \\ F-P = m \cdot a' \end{Bmatrix}$$

y, operando con las tres primeras ecuaciones obtenemos fácilmente:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Pesa y Polea}\\ F-P=\left(m+\frac{1}{2}\cdot m_p\right)\cdot a\end{matrix}\right\} \quad y \quad \left\{\begin{matrix}\text{Mono}\\ F-P=m\cdot a'\end{matrix}\right\}$$

es decir:

$$\left(m+\frac{1}{2}\cdot m_p\right)\cdot a=m\cdot a' \;\Rightarrow\; a'=\left(1+\frac{m_p}{2\cdot m}\right)\cdot a$$

lo que significa que, si tenemos en cuenta la masa de la polea, **el mono sube por la cuerda más rápido de lo que sube la pesa**.

Si la polea no fuera un disco macizo variaría la expresión de su momento de inercia, pero siempre podría expresarse como una fracción del producto de su masa por el cuadrado del radio:

$$I_p=k\cdot m_p\cdot r^2$$

y el resultado final sería de la forma:

$$a'=\left(1+\frac{k\cdot m_p}{m}\right)\cdot a$$

también mayor que la aceleración de la pesa.

Solución cualitativa
A veces no hace falta tanto cálculo para llegar a la respuesta:

1. Si despreciamos el peso y el rozamiento de la polea y el peso de la cuerda nos encontramos con que la fuerza aplicada por el mono para subir afecta únicamente a la pesa. De acuerdo con el principio de acción y reacción, las fuerzas de los pares mono–mano, mano–cuerda y cuerda–pesa son iguales, luego la pesa asciende del mismo modo que el mono.
2. Si no despreciamos la influencia de la polea, el esfuerzo realizado por el mono debe mover **dos** objetos: la pesa y la polea. Por lo tanto, en este caso el mono asciende más rápido que la pesa, ya que no todo el esfuerzo del simio se transmite íntegro hacia el contrapeso, se “pierde” algo en hacer girar la rueda.

¿Y la cuerda?
La influencia de la cuerda es más compleja de introducir ya que, salvo que supongamos que hay un exceso de cuerda suficiente y que siempre hay cuerda tocando el suelo por ambos lados, varía la masa de la misma que se encuentra a cada lado de la polea. Esto obligaría a usar cálculo infinitesimal para obtener unos resultados más precisos, algo que supera con creces el objetivo de esta unidad.

¿Y si la polea no gira, como ocurre en los barcos pesqueros?
En este caso el mono, al intentar subir, *arrastraría* la cuerda sobre la polea y rozaría con ella. Esto hace que la cuerda *pierda* parte del impulso dado por el mono y la retrasa respecto a él, transmitiéndose este retraso a la pesa que, de nuevo, subiría más despacio.

¿Y si tenemos en cuenta que el mono sube *a saltos*?
En principio no debería importar cómo sube el mono; sin embargo nunca está de más plantearse la posible influencia de las oscilaciones que sobre la cuerda produce el movimiento del animal.

¿Cómo lo resolvió Lewis Carroll?
La opinión de Carroll acerca de este problema puede encontrarse en su Diario, volumen 2, página 505, y el problema es discutido en *The Life and Letters of Lewis Carroll*, de S. D. Collingwood, página 317; *A Handbook of the Literature of the Reverend C. L. Dodgson*, [por Sidney Williams y Falconer Madan], página XVII; y *The Lewis Carroll Picture Book*, de S. D. Collingwood, página 267. La última referencia plantea la defensa de un reverendo británico del enfoque que afirma que la pesa permanece estacionaria.

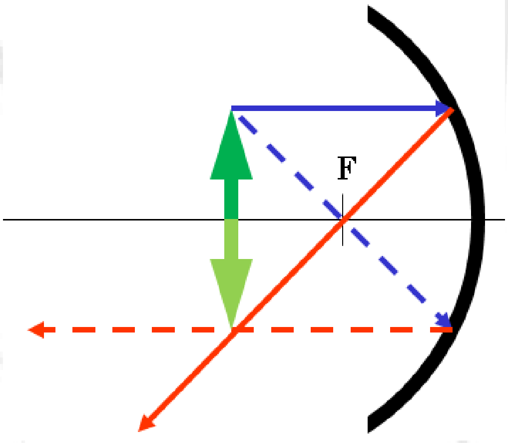
Óptica – Lentes y Espejos

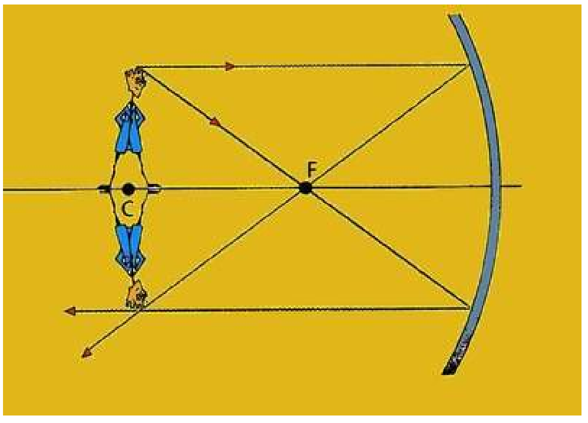
Observa esta escena, cuando Alicia está cayendo por el agujero:

Razona brevemente qué tipo de espejo tiene delante, plano, cóncavo o convexo y, en cada caso, su ubicación respecto al foco.

Respuesta.
Evidentemente, delante de ella **hay un espejo plano**. Sin embargo, físicamente no puede serlo ya que, si lo fuera, se vería “hacia arriba” pero invirtiendo derecha e izquierda.
Para que la imagen salga invertida, sólo puede ser un espejo cóncavo, ya que en un espejo convexo la imagen siempre está derecha y más pequeña que el objeto, independientemente de la posición en que lo situemos.

Podemos precisar la posición: Alicia debe estar más atrás del foco para verse invertida, y como vemos, la imagen debe estar en propio centro de curvatura del espejo para ser del mismo tamaño:





Movimiento armónico simple

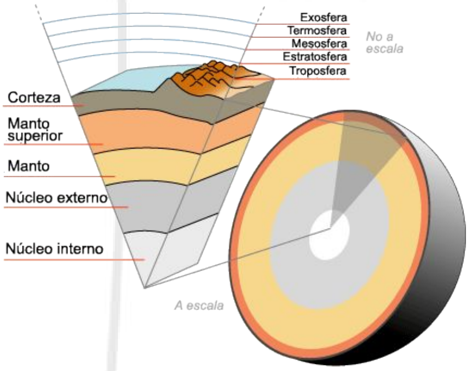
También cuando está cayendo, se oye cómo Alicia se pregunta qué pasaría si atravesara toda la Tierra, y llegara al lugar donde todos caminan invertidos.

Razona qué tipo de movimiento tendría Alicia si el agujero llegara hasta las antípodas del mundo:

1. Despreciando el rozamiento del aire
2. Sin despreciar el rozamiento del aire
3. Si ese agujero existiera realmente, ¿qué le ocurriría a cualquier objeto que cayera por él?
4. ¿Podría existir ese túnel?
5. ¿Realmente caminan invertidos al otro lado de la Tierra?

Respuesta.

1. Si despreciamos el rozamiento del aire, el **movimiento** sería **armónico simple**. Alicia saldría por las antípodas (contando que coincida en una zona con tierra firme y no en medio del océano) y volvería a caer con exactamente la misma energía potencial que al principio. El cálculo matemático completo está aquí:
   http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/gravedad1/gravedad1.htm
   Si pulsamos el enlace hacia "Túnel por el interior de la Tierra"
2. Si NO despreciamos el rozamiento con el aire (o los posibles choques con las paredes), el movimiento estaría amortiguado, y acabaría deteniéndose en el propio centro de nuestro planeta al ir perdiendo energía en cada oscilación.
3. La respuesta se intuye en el apartado anterior. Al ir acercándonos al Centro de la Tierra, la temperatura iría aumentando, hasta llegar a los más de 5000 grados de temperatura a los que se encuentra el núcleo sólido. Obviamente, llegaría allí si resistió la temperatura del manto (lo que conocemos por lava).



4. La respuesta es NO. La presión gravitatoria a que estarían sometidas las paredes haría que estas colapsaran y el túnel se hundiera.
5. Depende del punto de vista, y qué entendamos por "invertidos", pero desde nuestra posición sí están "al revés".

Caída libre

Hemos dejado para el final lo más evidente: ¿Cómo cae Alicia?

1. ¿Es una caída "normal"?
2. ¿Qué tipo de movimiento debería adquirir Alicia en su caída?
3. ¿Puede realmente su vestido servir de paracaídas?

Respuesta.

1. Durante un rato, Alicia parece caer acelerándose, pero pronto se abre el vestido y hace de paracaídas, resultando un movimiento uniforme. Incluso estando sentada en la me-

cedora (como muestra la imagen), mantiene este movimiento, luego no cae de una forma "normal".

2. Su movimiento inicial debería ser uniformemente acelerado con una aceleración igual a g (9,8 m/s^2), pero rápidamente empezaría a ser apreciable el rozamiento con el aire, lo que genera una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$F = -k \cdot v^2$$

De este modo, si tuviera una caída lo suficientemente larga, llegaría a alcanzar lo que se conoce como "velocidad límite", unos 100 km/h

3. No. Un paracaídas tiene los bordes sujetos con cuerdas para que el peso del paracaidista mantenga la forma del mismo. El vestido carece de ellas, e incluso si tuviera esa estructura que conocemos en los vestidos victorianos, la fuerza del aire los arrancaría del mismo modo que podríamos ver en un paraguas (lo siento, Mary Poppins). En la película vemos este segundo caso cuando el Lirón cae y recita su poema durante la merienda con el Sombrerero Loco y la Liebre de Mayo.

Principio de Arquímedes

Tras la caída y pasar por el picaporte, Alicia se encuentra flotando dentro de un frasco en el mar de lágrimas que ella misma creó. Inicialmente el frasco está vació, pero una ola lo llena parcialmente.


Si, como vemos, el frasco se llena hasta una altura que coincide con la línea de flotación, ¿realmente podría flotar en el mar?

Respuesta.
Sí. Lo único que la línea de flotación debería estar por encima del límite alcanzado por el agua

Movimiento circular uniforme

En la película hay dos momentos en que los personajes se ponen a correr alocadamente alrededor del Dodo.


Si Alicia midiera 1,50 m,

a) Estima el radio de giro en cada escena a partir de las capturas anteriores. Aplica para ello lo visto en el apartado sobre escalas.
b) Mide el tiempo que los personajes tardan en dar una vuelta completa:
    c. ¿Qué velocidad angular llevan?
    d. ¿Y lineal?

Respuesta.

1. Este es un buen momento para hablar de errores en la medida, medidas indirectas, etc.
   a) Midiendo a Alicia en la **segunda** imagen, obtenemos … 0.75 cm … (OJO: depende de la imagen final de la impresión), y midiendo en horizontal sobre la segunda imagen el diámetro del círculo, obtenemos … 6 cm … (OJO: también depende), obtenemos un radio de:
   $$r_2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}50 \text{ m mide Alicia en realidad} \times \frac{6 \text{ cm de diámetro en el dibujo}}{0{,}75 \text{ cm mide Alicia en el dibujo}} = 6 \text{ m}$$
   b) Para hallar el diámetro del primer dibujo debemos hallar un individuo que aparezca en ambas imágenes: El cuervo. El Dodo no nos vale porque tiene distintas posturas. Con varios pasos intermedios, obtenemos una estimación de r_1 = 3m
2. De nuevo debemos recordar la posibilidad de errores.
   a) Eligiendo al cuervo en la primera escena, podemos cronometrar que tarda 7 segundos en dar una vuelta, es decir, su período vale T = 7 s. Por tanto:
   $$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{7} \approx 0{,}9 \text{ rad/s}$$
   b) En la segunda es algo más difícil. Al principio de la escena la morsa está prácticamente en la posición que correspondería a los 180°, y tarda unos 4 segundos en recorrer un cuarto de vuelta (90° = π/2 rad). Así:
   $$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow r_2 \approx \frac{\pi/2}{4} = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}4 \text{ rad/s}$$
3. La velocidad lineal es igual a la angular por el radio, así que:
   $$v = \omega \cdot r \Rightarrow \begin{cases} v_1 \approx 0{,}9 \cdot 3 = 2{,}7 \text{ m/s} \\ v_2 \approx 0{,}4 \cdot 6 = 2{,}4 \text{ m/s} \end{cases}$$

Actividad 4. Química orgánica y bioquímica

A través del espejo

La película que acabamos de ver combina los dos libros que escribió Lewis Carroll sobre Alicia: *Alicia en el País de las Maravillas* y *Alicia a través del Espejo*. En este último Alicia se pregunta qué habrá al otro lado de un espejo, si el mundo el otro lado será idéntico al suyo tras las puertas que en él se ven, y para su sorpresa, puede atravesar el espejo fácilmente y llega a un mundo donde, para empezar, encuentra un libro que sólo puede leerse reflejando las páginas en un espejo para, más tarde, verse envuelta en una loca partida de ajedrez. Carroll nos proporciona una lista de los movimientos que en ella se producen, aunque algunos de ellos van en contra de las reglas del juego, como si fuera un niño pequeño el que estuviera jugando.

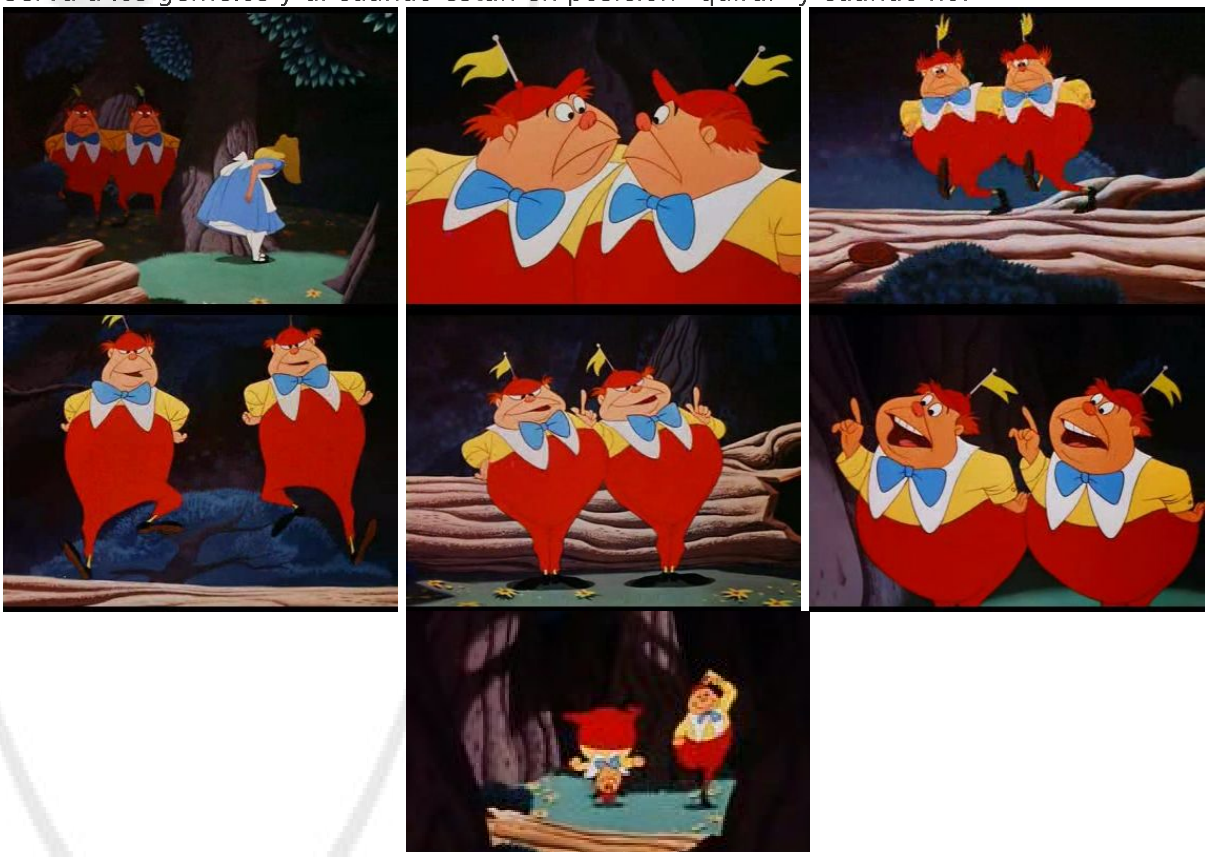
De este libro salieron Patachunta y Patachún (TweedleDee y TweedleDum), la canción de las flores y la idea del no–cumpleaños. Respecto a lo que nos interesa, antes de atravesar el el espejo Alicia está hablando con su gata, Diana, y una de las preguntas que se hace es si la leche que hay al otro lado sería buena para beber.

Enantiómeros

En química se dice que dos estereoisómeros son **enantiómeros** si la imagen especular de uno no puede ser superpuesta con la del otro. Dicho de otra forma: un enantiómero es una imagen especular no superponible de sí mismo. Son moléculas quirales, y tienen las mismas propiedades físicas y químicas, excepto por la interacción con el plano de la luz polarizada o con otras moléculas quirales. La mezcla en cantidades equimolares de cada enantiómero en una solución se denomina mezcla racémica y es ópticamente inactiva.

La palabra *quiral* proviene del griego y significa *mano*. Si miramos el reflejo que proyecta un espejo de una mano vemos que una *mano derecha*, se convierte en una *mano izquierda* y viceversa. Las manos parecen iguales, tienen cinco dedos, una palma y un dorso semejantes, pero si intentamos superponerlas en el espacio, por ejemplo mirando a la vez los dos dorsos, no encajan, son asimétricas, son **quirales**: tienen la misma forma, están compuestas por los mismos tejidos pero no son superponibles.

Actividad
Observa a los gemelos y dí cuando están en posición “quiral” y cuándo no:



El periódico El País publicaba este curioso artículo hace unos años:

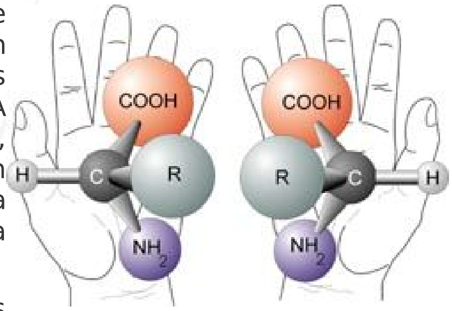
¿Y si los extraterrestres fueran de derechas?

CRISTÓBAL VIEDMA 14/09/2005

Es probable que haya vida en otro planeta y que incluso esa vida esté basada en la misma química del carbono que se generó en la Tierra. Puede también que nuestros hermanos extraterrestres, con un grado de evolución semejante, sean idénticos a nosotros. Pero queda la gran pregunta... ¿Son de izquierdas o son de derechas? ¿Son como nosotros o son nuestra imagen en el espejo?

El problema se entiende fácilmente cuando intentamos meter la mano derecha en el guante de la mano izquierda: la cosa no funciona. Los guantes, con ser idénticos, uno es de derechas y el otro de izquierdas: son quirales, tienen *mano.*

Lo mismo que existen objetos quirales, existen moléculas quirales; las hay de mano derecha y de mano izquierda, pero ojo, químicamente son la misma molécula: tienen los mismos átomos con los mismos enlaces y, por tanto, muestran las mismas propiedades químicas y las mismas constantes físicas. A todos los efectos se comportan exactamente igual..., pero una es la imagen especular de la otra y no son superponibles..., como nuestras manos. De hecho, la síntesis en laboratorio de moléculas quirales genera moléculas de ambas manos en una proporción del 50%.



¿Y qué importa que sean de una mano u otra, como los guantes, si son químicamente iguales? Que pregunten esto a los afectados por la **talidomida** y verán que la respuesta puede ser incluso trágica. Esta sustancia, en sus dos versiones moleculares –izquierda y derecha–, se administró en los años sesenta como medicamento a las embarazadas para combatir las náuseas matinales. La droga funcionaba bien, cumplía su misión. Pero mientras la molécula de una mano ejercía su efecto terapéutico, la molécula de la otra mano deformaba el feto de una forma cruel e irreversible (20.000 bebés afectados). Estamos ante un veneno asociado no a la composición química de una sustancia, sino a la mano o quiralidad de sus moléculas. La diferencia entre izquierda y derecha puede ser mortal.

Y esto es porque nuestra biología es también profundamente quiral. La ribosa y desoxirribosa en el ARN y ADN, respectivamente, son de *mano derecha,* mientras que los aminoácidos que construyen las proteínas son de *mano izquierda.* Es decir, que las moléculas que guardan la información y *mandan* lo que ha de hacerse en el trabajo diario del organismo son de derechas y las moléculas que realizan todo ese trabajo son de izquierdas (un esquema sorprendentemente familiar).

Una vida extraterrestre basada en la misma química del carbono que la vida en la Tierra, pero con la quiralidad invertida, sería incompatible con nosotros. Nuestras uniones serían infecundas y no podríamos compartir los alimentos. **Lewis Carroll,** en boca de Alicia, sugiere: "Quizás la leche del espejo no es buena para beber". Está claro, los poetas siempre se nos adelantan.

¿Qué pasó en el origen de la vida en la Tierra para que sólo una mano de las dos posibles en las moléculas quirales entrara en el juego de la evolución, y por qué precisamente la una y no la otra? ¿Fue una casualidad, algo fruto del azar? Pero... ¿no habíamos quedado en que Dios no juega a los dados? A los dados, probablemente no, pero a las adivinanzas sí, y es un experto. Éste es uno de los enigmas más fascinantes en el origen de la vida desde la época de Pasteur hace ya 150 años. Durante este tiempo, numerosos estudios teóricos y experimentales intentan descifrar por qué la vida se construyó a partir de nuestra singular quiralidad: aminoácidos de izquierda, azúcares de derechas.

En nuestro laboratorio trabajamos con cristales quirales de ambas manos y tenemos la misma pregunta de fondo que para el origen de la vida: ¿existe algún mecanismo que rompa la simetría izquierda-derecha y establezca un escenario con pureza quiral de una sola mano? En una publicación reciente [C. Viedma, *Physical Re-*

view Letters, 94, 065504 (2005)] estudiamos un hecho en sí mismo fascinante: dos poblaciones de cristales quirales de mano izquierda y derecha no pueden coexistir. Una de las poblaciones desaparece en un proceso irreversible *devorada* por la otra de una forma tan aleatoria como inexorable. Nuestro reto en este momento consiste en dilucidar si detrás de este proceso puede existir un determinismo en la población ganadora basado en la violación de la paridad al nivel de las partículas elementales (PVED). También a nosotros nos gusta el juego y quisiéramos responder a la adivinanza. Porque está claro que en cuestión de aminoácidos somos de izquierdas, pero… ¿y si los extraterrestres fueran de derechas?

Cristóbal Viedma
Departamento de Cristalografía y Mineralogía.
Facultad de Ciencias Geológicas. Universidad Complutense.

Actividades

1. ¿Crees que la leche del otro lado sería comestible?
2. ¿Qué crees que podría pasarle a Diana en caso de beberla?
3. El cuerpo humano está formado por 10^{27} moléculas con cien mil diferentes formas y funciones.
    a) Con tanta variedad, ¿por qué nuestro organismo es tan sensible a la quiralidad?
    Respuesta
    Ya dijimos que lo que ocurre con las moléculas quirales es similar a lo que ocurre con las manos: Es como que uno quisiera «dar la mano» cruzando la derecha con la izquierda. El grupo de compuestos más amplio y característico entre los que forman la materia viva, el de las proteínas, está compuesto por moléculas quirales, los aminoácidos. Se cree que es este mecanismo de quiralidad el que les permite a muchas de las moléculas fundamentales reconocerse unas con otras y a los organismos alcanzar un alto grado de especificidad. Los enzimas están preparadas para reconocer una de esas formas quirales, pero en el laboratorio, cuando uno las sintetiza, se producen las dos.
    b) ¿Qué sabes de la talidomida?
    Respuesta
    La talidomida es una molécula no muy distinta a relajantes como el valium (diazepam) o el veronal (barbital), introducidos a principios de los 50. Por esa razón cuando la talidomida fue sintetizada en el pequeño Departamento de I+D de una también pequeña industria alemana (Grunenthal) en 1954, se pensó inmediatamente en su comercialización, como sedante durante los primeros meses de embarazo. Sin embargo, las pruebas realizadas con ella, no tuvieron todo el rigor que debieran o no eran todavía los tiempos de tamaño rigor. El caso es que no se tuvo en cuenta su carácter teratógeno o lo que es lo mismo su capacidad de causar daños a un embrión en crecimiento. El resultado fue la aparición de 10.000 casos de **focomelia**, que se manifiesta en la ausencia o mal desarrollo de las extremidades. Casi todos los casos se dieron en Europa, porque en USA se encontraron con una joven científica, *Frances Kelsey*, trabajando en la FDA (Food and Drug Administration) a la que no convencieron de la fiabilidad de las pruebas realizadas con la talidomida. Comprobados los daños de la misma, Frances lideró la alerta a otras naciones hasta conseguir la desaparición del medicamento en los mercados, con lo que los casos de deformaciones desaparecieron rápidamente.
    Hoy sabemos que la talidomida es una molécula quiral y que de sus dos enantiómeros, uno es el teratógeno y el otro no. De hecho, este segundo acaba de ser aprobada por la misma FDA para su aplicación en casos de SIDA por su capacidad de inhibir la replicación del virus. Pero, desgraciadamente, lo que se vendió como talidomida en los años 50 era una mezcla de ambos.
    c) ¿Y de otros medicamentos quirales?
    Respuesta
    Por ejemplo, el ibuprofeno puede ser de forma D o L, dextro o levo, según los grupos principales de la molécula estén orientados a la derecha o a la izquierda en relación con una molécula modelo. Se vende como mezcla de enantiómeros, aunque sólo uno de ellos es el analgésico. Pero el otro, en el ambiente fisiológico se transforma en el primero, resultando igualmente activo contra el dolor. Lo cual tiene la ventaja de no tenerse que meter en un procesos mas costoso de síntesis selectiva del enantiómero adecuado.
    Sin embargo, otro analgésico, el Naproxen, sólo se puede vender en la forma activa contra el dolor porque la otra puede causar serios problemas hepáticos.

Actividad 5. Simetría

Movimientos en el plano

Observa las siguientes escenas de la película:

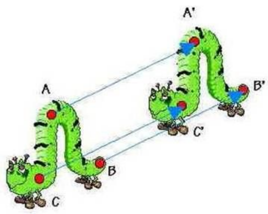


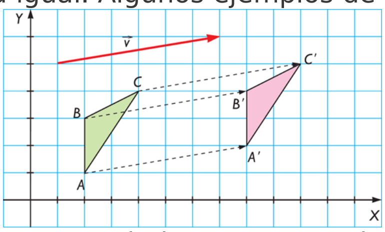

¿Ves algo “especial” en ellas? En todas puede observarse una especie de *repetición* de los dibujos, pero en unos casos vemos que están girados, reflejados en un espejo o, simplemente, desplazados. Todo ello recibe el nombre de **desplazamientos en el plano**, que se definen como:

Transformación geométrica en el plano que nos permite obtener un punto *P´* a partir de otro punto *P*, mediante una regla precisa.

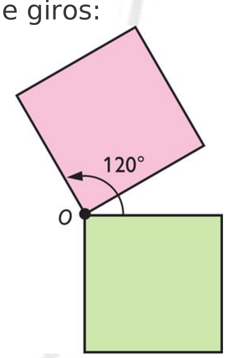
Un movimiento es una transformación geométrica que conserva las distancias y los ángulos, además de conservar la forma y el tamaño. Se dividen en tres grupos:

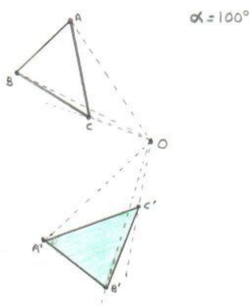
1. **Traslaciones**:
   Una traslación de vector ***v*** es un movimiento que transforma cualquier punto *P* en otro punto *P´* de forma que *PP´* tiene el mismo módulo, dirección y sentido que el vector ***v***.
   Una traslación transforma una figura en otra igual. Algunos ejemplos de traslaciones:



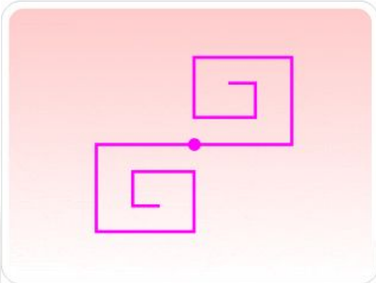


2. **Giros:** Un giro de centro *O* y de ángulo α es un movimiento que asocia a cada punto *P* otro punto *P´* situado a la misma distancia de *O* que el punto *P*, y de forma que *POP´* = α. Algunos ejemplos de giros:



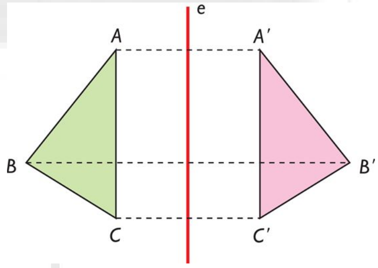


3. **Simetrías:**
   1. Una simetría respecto a un punto *O* (centro de simetría) es un movimiento que asocia a cada punto *P* otro punto *P´*, tales que:
      1. Los puntos *P*, *O*, *P´* están alineados.
      2. El punto *O* es el punto medio del segmento *PP´*.

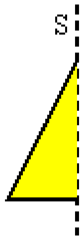


2. Una simetría respecto a una recta *r* es un movimiento que asocia a cada punto *P* otro *P*, tales que:
   1. El segmento *PP´* es perpendicular a *r*.
   2. Las distancias desde *P* y *P´* a *r* son iguales.

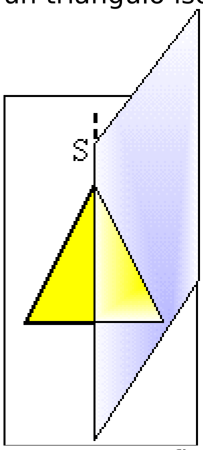
   Por tanto la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP´* y se denomina **eje de simetría**. Hablamos, por tanto, de **simetría axial**.



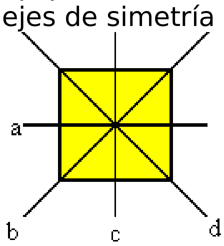
En el plano, este movimiento es equivalente a una **reflexión** sobre un espejo situado perpendicularmente al papel.
Por ejemplo, considera la figura:



e imagina un espejo sobre la línea S, situado perpendicularmente a la página y que mire hacia el dibujo. Obtendremos un triángulo isósceles

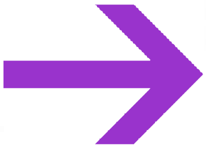
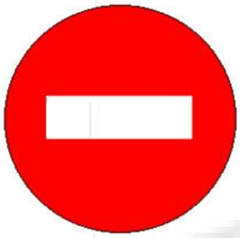


Del mismo modo podemos trabajar con otras figuras; sobre este cuadrado se han señalado 4 rectas. Si colocas el espejo sobre cada una de ellas, y miras, verás de nuevo el cuadrado: a, b, c y d son ejes de simetría del cuadrado.



Actividades

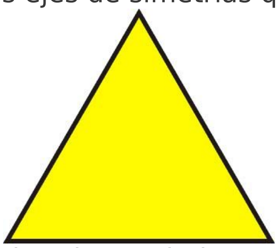
1. Dibuja, a partir de las siguientes figuras, otras figuras en las que se conserve:
   a) El tamaño.
   b) La forma.
   c) El tamaño y la forma.
   d) Ni el tamaño ni la forma.

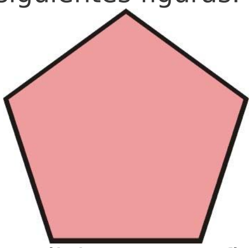
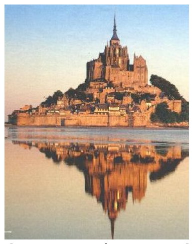




2. Dados el punto *A* (2,1) y el vector ***v*** (5,2). Determina las coordenadas del punto *A´* transformado de A mediante la traslación del vector ***v***.
3. El punto trasladado de *P* (5,-6) por la traslación del vector ***v*** (-1,6) es:
   a) *P´* (4,0)
   b) *P´* (6,-12)
   c) *P´* (6,12)
   d) *P´* (-4,0)
4. Un triángulo de vértices los puntos A (3,0), B (-1,4) y C (2,5). Halla su transformado por un giro de centro el punto (2,-1) y ángulo 180°.
5. Completa la siguiente tabla, referida a distintos giros con centro el origen de coordenadas:

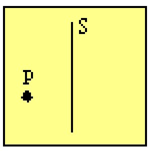
PUNTO	ÁNGULO	PUNTO TRANSFORMADO
A (1,0)	90°	
	90°	*B´*(0,3)
C (1,2)	180°	
	180°	*D´*(3,4)
E (0,3)		*E´*(-3,0)

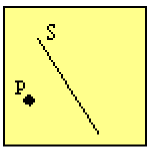
6. Dibuja un cuadrado de vértices A (1,1), B (-1,1), C (-1,-1), D (1,-1), y calcula su simétrico respecto al origen de coordenadas y respecto al punto A(1,1).
7. El simétrico de A(0,2) respecto al origen es:
   a) (0,0)
   b) (0,-1)
   c) (0,-2)
   d) (0,1)
8. Señala los ejes de simetrías que tengan las siguientes figuras:



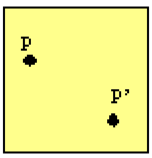



9. ¿De qué tipo de movimiento se trata cuando Alicia se ve reflejada en el espejo: traslación, giro o simetría?
10. Cita otros movimientos vistos a lo largo de la película
11. Dibuja el lugar donde el espejo reflejaría el punto:

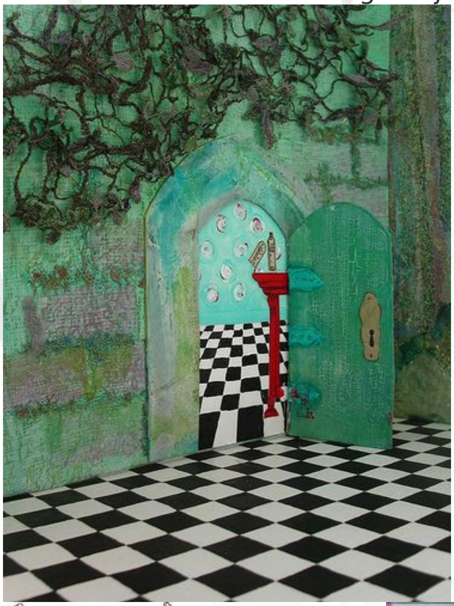


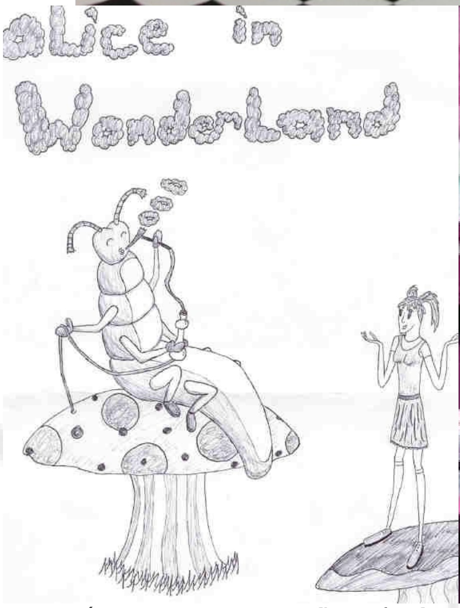


12. Indica donde se colocó el espejo (P’ sería la imagen reflejada de P):



13. ¿Te atreves con Alicia? Busca algún eje de simetría en los dibujos siguientes:



14. ¿A qué crees que se refiere la frase anterior que dice: “En el plano, este movimiento es equivalente a la reflexión sobre un espejo situado perpendicularmente al papel”. ¿Acaso en el espacio (3 dimensiones) es diferente? Piensa algún ejemplo.

Homotecias y semejanzas

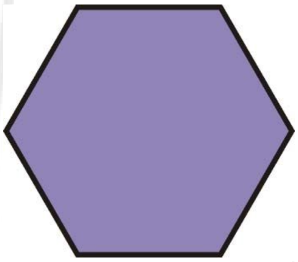
En la película Alicia cambia de tamaño varias veces, bebe un brebaje y con él consigue hacerse más pequeña manteniendo su misma forma pero en una proporción más pequeña. Lo mismo le ocurre cuando come la galleta, mantiene la forma pero se hace más grande, esto se conoce como figuras semejantes, y a la razón de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**.


1. **Escala**:
   Las semejanzas se utilizan para elaborar mapas, planos, maquetas... En ellos reducimos, de manera proporcional, las dimensiones que tienen los objetos, obteniendo una representación igual en forma pero no en tamaño. Se llama e**scala** a la razón de semejanza entre la figura original y su representación:
   Escala = distancia en la realidad / distancia en la representación
2. **Homotecia y Semejanza**
   Una homotecia de centro *O* y razón *k* es la transformación que hace corresponder a cada punto *P* otro *P´* alineado con *O* y *P* de forma que *OP´* = *k OP*. Una homotecia no es un movimiento, conserva los ángulos pero no las distancias.
   Dos polígonos son semejantes si cada ángulo y su transformado son iguales y el cociente de la longitud de cada lado y su transformado es constante. A este número se le llama razón de semejanza. Dos figuras semejantes mantienen la forma pero no su tamaño.

Actividades

1. Dos ciudades A y B están separadas entre sí 50 km. ¿A qué distancia se encuentran en un mapa a escala 1: 800000?
2. Calcula las dimensiones originales de esta imagen sabiendo que se ha elaborado a una escala de 1: 25 cm.

3. La longitud de un coche en la realidad es de 4.2 m.
   a) ¿Cuál será su longitud en una maqueta a escala 1:1200? ¿Y a escala 1:400?
   b) Si tenemos una maqueta del coche anterior que mide 7.5 m. ¿A qué escala está hecha?
4. Tenemos un mapa a escala 1:150000.
   a) Si realizamos una fotocopia al 80%. ¿Cuál será la nueva escala?
   b) Una distancia real de 15 km, ¿qué longitud tendrá en cada el mapas?
5. ¿A qué escala está dibujado un mapa en el que la distancia entre dos poblaciones es 4.5 cm si la distancia real es 54 km?
6. Transforma el siguiente hexágono mediante una homotecia de centro el vértice A y razón 3.



7. Determina si el triángulo de lados 3, 4 y 5cm es semejante a otro de lados 1.5, 2 y 2.5 cm.
8. Dibuja un rectángulo de 8x6 cm y añádele 3 cm en cada lado.
   a) ¿Has obtenido un rectángulo semejante? ¿Por qué?
   b) Calcula la longitud de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 7, 11 y 13 cm si la razón de semejanza es *k* =3.
9. Calcula la razón de semejanza entre dos rectángulos, el primero de base 3 cm y de altura 1.4 cm y el segundo de base 5.1 cm. ¿Qué relación tienen los perímetros?
10. A lo largo de la película, ¿recuerdas alguna transformación semejante?
11. Razona dónde está el error en este viejo chiste: “Van dos exploradores por el desierto guiándose con un mapa, cuando uno le pregunta al otro:
    - ¿Cuánto queda?
    - Unos 4 kilómetros
    - Jolín, la próxima vez trae un plano con una escala más pequeña”

Leyes de escala

Como ya dijimos, cuando Alicia bebe o come cualquier cosa (galleta, seta, ...) en el País de las Maravillas, su tamaño cambia de forma asombrosa, pero sus proporciones se mantienen.

Actividades

1. Observa su vestido:

   Si para fabricarlo a su tamaño "normal" hicieron falta 2 metros cuadrados de tela azul:
   a) ¿Cuántos metros cuadrados harían falta cuando su tamaño es el quíntuple del original?
   b) ¿Y cuando es la quinta parte?
2. Si suponemos que Alicia pesa 35 kg con su tamaño normal:
   a) ¿Cuánto pesaría cuando su tamaño es diez veces el original?
   b) ¿Y cuando es la décima parte?
3. Es un hecho comprobado que la fuerza de resistencia de un hueso es proporcional a su sección (el área que se observa al cortarlo de forma transversal). Esto se ve al estudiar los huesos de animales de distintos tamaños: Una musaraña tiene huesos muy finos en relación a su peso, y un elefante o rinoceronte tienen huesos muy anchos para soportar sus toneladas de peso.
   ¿Qué aspecto debería tener en la realidad una Alicia que aumentara de forma tan drástica su tamaño?
4. Si una Alicia "normal" toma en la comida un filete de medio kilo y 250 g de patatas antes de quedar saciada, ¿cuánto debería comer cuando mide cuatro veces más?

Soluciones

1. Empecemos por un caso más simple: un factor de dos, dupliquemos la imagen del vestido y aumentemos al doble uno de los lados manteniendo las proporciones:

Puede verse fácilmente que hacen falta 4 vestidos como el original para "rellenar" la misma superficie que ocupa el vestido "duplicado", y eso se mantiene (obviamente) en la cantidad de tela necesaria para construir el nuevo vestido:

El motivo es fácil de razonar: Al duplicar un lado y mantener las proporciones, el otro lado de la tela también se duplica y, como estamos calculando una superficie, el área viene dada por:

$$\text{Área} = \text{base x altura} \Rightarrow A = b \cdot a$$

como ambas magnitudes (base y altura, **dos dimensiones**) se duplicaron, el valor del nuevo área es:

$$A' = b' \cdot a' = (2 \cdot b) \cdot (2 \cdot a) = 2 \cdot b \cdot 2 \cdot a = 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow A' = 4 \cdot A$$

Teniendo en cuenta que el problema nos pregunta para una Alicia cinco veces más grande o pequeña, tenemos:

a) Si quintuplica su tamaño, multiplica por $5^2 = 25$ su superficie.
Como A = 2 m^2, A' = 50 m^2.

b) Si lo reduce a un quinto de su altura original, multiplica por $(1/5)^2 = 1/25$ su superficie, es decir, se reduce a una veinticincoava parte.
Como A = 2 m^2, A' = 0,50 m^2.

2. De nuevo, empecemos por duplicar el tamaño para ver mejor el problema. Aplicando el mismo razonamiento del problema anterior, ahora se deberán multiplicar por dos cada una de las **tres dimensiones** de Alicia, alto, largo y ancho; de este modo, sabiendo que la masa es igual a la densidad por el volumen,

$$m = d \cdot V$$

y suponiendo que la densidad no varía (este sería otro punto a analizar, ¿de dónde sale la materia con la se rellena el *nuevo cuerpo* de Alicia?), su peso quedaría multiplicado por 2^3, es decir, por 8. Aplicando esto al problema:

a) Si multiplica por diez su tamaño, multiplica por $10^3 = 1000$ su peso
Como P = 35 kg, P' = 35000 kg ⇒**Alicia pesaría 35 toneladas.**

b) Si se reduce a una décima parte de su altura original, multiplica por $(1/10)^3 = 1/1000$ su volumen, es decir, se reduce a una milésima parte.
Como P = 35 kg, P' = 0,035 kg ⇒**Alicia pesaría 35 gramos.**

3. Para mantener las proporciones, el diámetro de los huesos crecería en la misma proporción que su altura. Si usamos los datos del ejercicio anterior, se multiplicaría por 10, lo que implicaría una superficie 100 veces mayor.
Sin embargo, para soportar las 35 toneladas que calculamos en el problema anterior, sus huesos deberían ensancharse en una cantidad equivalente al factor 1000 que obtuvimos. Esto implicaría que el diámetro debería incrementarse en un factor de aproximadamente 32 ($32^2 = 1024$), lo que nos mostraría una Alicia con piernas y brazos tres veces más anchos de lo normal. Esto nos daría una imagen de Alicia "achaparrada"

4. Este problema no tiene una solución fácil, y existen dos versiones:
a) La cantidad de alimento ingerida depende del volumen
b) La cantidad necesaria depende de la superficie.
Las dos opciones requieren una breve explicación: algunos científicos proponen que las necesidades calóricas dependen de la cantidad de calor que perdemos por nuestra piel,

es decir una superficie (**dimensión dos**); sin embargo, otros opinan que es el metabolismo que mantiene toda la masa del cuerpo el que debe mantenerse activo y, por tanto, el que *manda* es el volumen (**dimensión tres**).
Experimentalmente parece que nos encontramos en un punto intermedio, y que debemos usar un exponente comprendido entre dos y tres para obtener la cantidad de comida de un ser cuyo tamaño ha sido modificado. Esto nos lleva a preguntarnos: **¿existe una dimensión con decimales?**. La respuesta es SÍ y vamos a verla en el apartado siguiente.

Para saber más sobre leyes de escala:
http://www.ti.profes.net/archivo2.asp?id_contenido=38179

Fractales

Respondamos a la pregunta que quedó en al aire en la sección anterior: ¿Es posible una dimensión fraccionaria? Hablamos entonces de **dimensión fractal**.

Un **fractal** es un objeto semi–geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático **Benoît Mandelbrot** en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado.

Dimensión fractal

Vamos a definir la **dimensión fractal**, que es la dimensión por semejanza también llamada de autosemejanza, que sugirió Félix Hausdorff en 1919, readaptada posteriormente por Besicovich (dimensión de Hausdorff–Besicovich o Topológica) y dice lo siguiente:

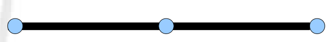
Si al obtener desde un ente H, N entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza r, entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica:

$$N\cdot r^D=1 \;\Rightarrow\; \ln N+D\cdot\ln r=0 \;\Rightarrow\; D=\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Esta definición no es tan extraña como parece, coincide con la explicación dada en la sección anterior a los cambios de tamaño de Alicia y cómo influyen en su superficie y en su peso:

Ejercicio 1:
Calcula la dimensión de Hausdorff–Besicovich en los siguientes casos:
a) Si dividimos un segmento en 2 partes iguales.
b) Si dividimos un cuadrado en 4 cuadrados iguales.
c) Si dividimos un cubo en 8 cubos iguales.

Solución:
a) N = 2, r = ½, es decir, al partir a la mitad todas las dimensiones de un segmento, obtenemos dos fragmentos:

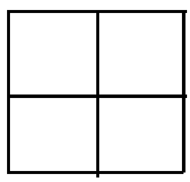


aplicando la fórmula anterior se tiene:

$$D=\frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{Ln\,2}{Ln\,2}=1$$

Por tanto, la dimensión de autosemejanza es D = 1

b) N = 4, r = ½; al partir a la mitad todas las dimensiones de un cuadrado, obtenemos cuatro fragmentos:

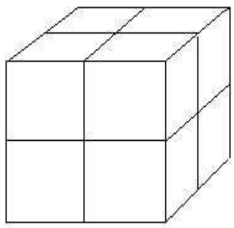


aplicando de nuevo la definición anterior obtenemos:

$$D = \frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{Ln\,4}{Ln\,2} = 2$$

Por tanto la dimensión de autosemejanza es D = 2.

c) N = 8, r = ½; al partir a la mitad todas las dimensiones de un cubo, obtenemos ocho fragmentos (ocho cubitos):



aplicando una vez más la fórmula se obtiene:

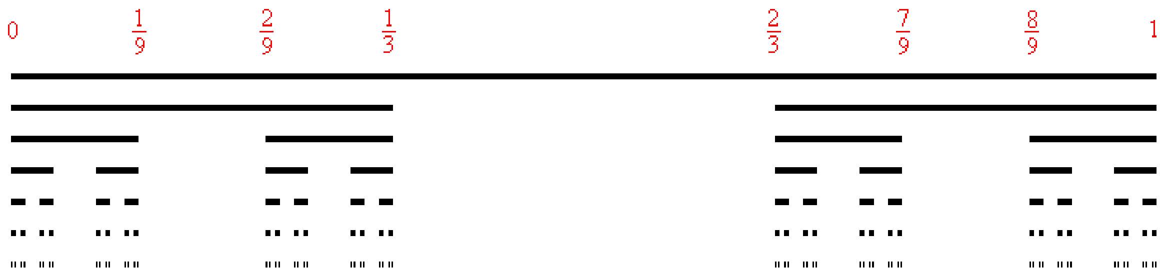
$$D = \frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{Ln\,8}{Ln\,2} = 3$$

Por tanto la dimensión de autosemejanza es D = 3.

Vemos entonces que aplicando a los casos habituales la definición de dimensión, obtenemos los resultados esperados. Ahora vamos a ver una serie de conjuntos con una propiedad muy particular, las figuras que los componen están formadas por infinitas copias de si mismas, a distintas escalas.

El intervalo de Cantor

Es un intervalo de números reales, del cual se obtiene dos intervalos semejantes dividiendo el intervalo inicial en tres partes iguales: se elimina la parte central, con lo que aparecen dos intervalos semejantes al primero, con razón 1/3.



Ejercicio 2:
Calcula la dimensión de Hausdorff–Besicovich del segmento de Cantor.

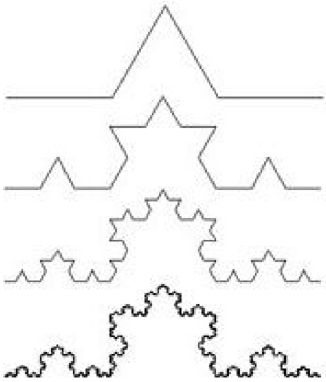
Solución:
Observa como ahora: N = 2 y r = 1/3, hemos dividido en tres partes, pero al eliminar una de ellas obtenemos dos fragmentos. Usando este resultado en la fórmula:

$$D = \frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{Ln2}{Ln\,3} = 0{,}0630905$$

Por tanto la dimensión de autosemejanza es D = 0,0630905

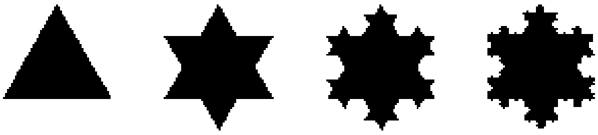
La curva de Koch (copo de nieve)

De nuevo partimos de un segmento y lo dividimos en tres, pero ahora sustituimos el fragmento central por un triángulo equilátero y eliminamos su base:



iterando este proceso indefinidamente. De este modo obtenemos cuatro segmentos que constituyen la curva con razón de semejanza 1/3.

Si en lugar de un segmento tomamos un triángulo como punto de partida y realizamos este proceso sobre sus tres lados obtenemos la siguiente secuencia:

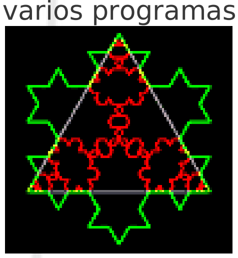


proporcionando lo que se conoce como copo de Koch, por su semejanza con un copo de nieve.

El programa que genera esta curva tan asombrosa (y otros muchos fractales) se encuentra en la siguiente dirección:

http://xlogo.tuxfamily.org/sp/html/ejemplos/fractales/koch.html

traducción hecha por Álvaro Valdés de varios programas de Guy Walker escritos con xLogo.



Ejercicio 3:
Calcula la dimensión de Hausdorff–Besicovich del segmento y del copo de Koch.

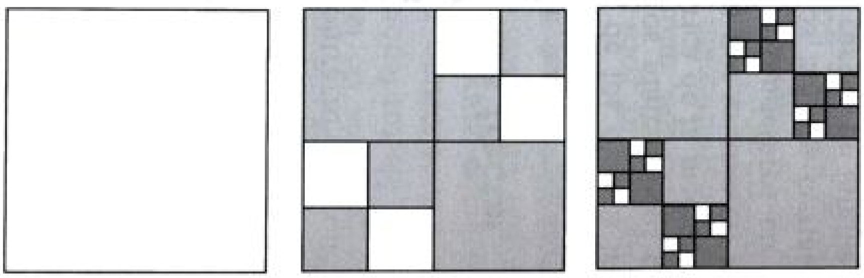
Solución:
Ahora tenemos que N = 4 y r = 1/3; aplicando la fórmula se tiene:

$$D=\frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{Ln\,4}{Ln3}=1,26181$$

Por tanto la dimensión de autosemejanza es D = 1,26181

El conjunto de Besicovich

Es un cuadrado que se divide en cuatro partes iguales de las cuales se eliminan dos dispuestas en diagonal, con lo que resultan dos cuadrados de razón de semejanza ½.



Ejercicio 4:
Calcula la dimensión de Hausdorff–Besicovich del conjunto de Besicovich

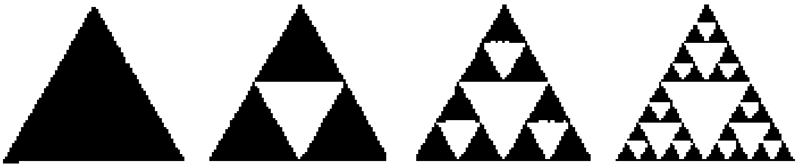
Solución:
En este caso: N = 2 y r = ½ aplicando otra vez la fórmula conseguimos:

$$D=\frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{Ln\,2}{Ln\,2}=1$$

Por tanto la dimensión de autosemejanza es D = 1

El estuche triangular de Sierpinski

Es un triángulo equilátero sobre el que se traza otro triángulo interior uniendo los puntos medios de sus lados. Aparece un triángulo central, que se elimina y otros tres triángulo iguales entre si y semejantes al original con razón ½.



Ejercicio 5:
Calcula la dimensión de Hausdorff–Besicovich del triángulo de Sierpinski.

Solución:
N = 3 y r = ½; aplicando una vez más la fórmula inicial obtenemos:

$$D=\frac{LnN}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{Ln\,3}{Ln2}=1,5849$$

Por tanto la dimensión de autosemejanza es D = 1,5849

Profundizando en la autosemejanza

Llevamos un rato hablando de autosemejanza, pero ¿podemos profundizar en ella? Es fácil descomponer la palabra en dos:

auto – uno mismo ; **semejanza** – ya explicada

Los fractales tienen una propiedad muy interesante: *Cada fragmento del mismo reproduce a la totalidad del conjunto*.

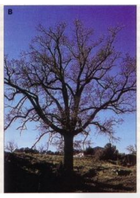
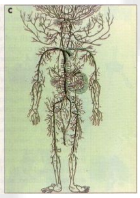
Esto es fácil de comprobar, elije un fractal cualquiera de los que hemos explicado. Por ejemplo, el segmento de Koch:

Fíjate en el fragmento de la derecha en la segunda iteración; ¿Observas que es idéntico al segmento del paso anterior? Fíjate ahora en cualquier sub–segmento del paso tres. También es idéntico al del paso uno.

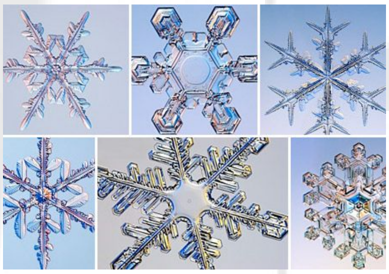
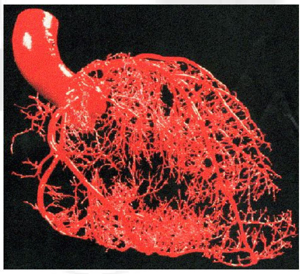
Eso quiere decir que cada tramo del segmento va a generar una curva idéntica a la curva completa.

Fractales en la realidad

Por supuesto la última pregunta que debemos tratar es: ¿y esto sirve para algo? La respuesta más simple nos la dan las siguientes imágenes:

¿Serías capaz de decidir cuál (o cuáles) de las imágenes anteriores son fotografías reales y cuáles imágenes generadas por ordenador?

La naturaleza presenta multitud de sistemas que pueden describirse con fractales: las montañas, los árboles o las formas de islas, entre muchos otros.
Todos estos fenómenos se analizan ahora bajo la óptica fractal, un lenguaje común para científicos y artistas de las más diversas disciplinas, una herramienta para la búsqueda de principios organizadores.

Los fractales son algo curioso: se construyen por principios muy sencillos, pero la forma que adquieren puede ser muy complicada. De hecho, puede ser tan compleja que no pudieron estudiarse en profundidad hasta generarlos en un ordenador.
Los principios sencillos están hoy en día implementados en los paquetes con los cuales se crean animaciones y los podemos ver en acción en el bosque que atraviesa Shrek con Fiona, en la espuma en la boca de la ballena que se tragó a Marlin y Dory, en los pelos de Sully en Monstruos S.A., En El Señor de los Anillos podemos NO–verlos en los paisajes de Rivendell, Moria, Mordor, Minas Tirith, ... los seres generados por ordenador (orcos, trasgos, Olifantes, ...) y muchos lugares y películas más.

La imitación es tan buena, tan real que no lo notamos

Curiosidad

Y para finalizar adjuntamos una serie de **simetrías matemáticas,** para que observemos lo asombroso y maravilloso que es el mundo de las LAS MATEMÁTICAS.

1 x 8 + 1 = 9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1234 x 8 + 4 = 9876
12345 x 8 + 5 = 98765
123456 x 8 + 6 = 987654
1234567 x 8 + 7 = 9876543
12345678 x 8 + 8 = 98765432
123456789 x 8 + 9 = 987654321

1 x 9 + 2 = 11
12 x 9 + 3 = 111
123 x 9 + 4 = 1111
1234 x 9 + 5 = 11111
12345 x 9 + 6 = 111111
123456 x 9 + 7 = 1111111
1234567 x 9 + 8 = 11111111
12345678 x 9 + 9 = 111111111
123456789 x 9 + 10 = 1111111111
9 x 9 + 7 = 88
98 x 9 + 6 = 888
987 x 9 + 5 = 8888
9876 x 9 + 4 = 88888
98765 x 9 + 3 = 888888
987654 x 9 + 2 = 8888888
9876543 x 9 + 1 = 88888888
98765432 x 9 + 0 = 888888888

1 x 1 = 1
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12321
1111 x 1111 = 1234321
11111 x 11111 = 123454321
111111 x 111111 = 12345654321
1111111 x 1111111 = 1234567654321
11111111 x 11111111 = 123456787654321
111111111 x 111111111 = 12345678987654321

Actividad 6. Probabilidad

Calcula la probabilidad de que en tu clase haya al menos dos compañeros/as que cumplan años el mismo día.

Respuesta

Calculemos la probabilidad aproximada de que en una habitación de *n* personas, que al menos dos cumplan años el mismo día, desechando los años bisiestos y las personas gemelas, y asumimos que existen 365 cumpleaños que tienen la misma probabilidad. El truco es calcular primero la probabilidad de que *n* cumpleaños sean *diferentes*. Esta probabilidad viene dada por

$$p = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

porque la segunda persona no puede tener el mismo cumpleaños que el primero (364/365), la tercera personas no puede tener el mismo cumpleaños que las dos primeras (363/365), etc. Usando notación factorial, puede ser escrita como

$$p = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$$ para $n \leq 365$, y 0 para $n > 365$.

De este modo, 1 - p es la probabilidad que al menos dos personas tengan el mismo día de cumpleaños. Para $n = 23$ se obtiene una probabilidad de alrededor de 0,507.

En contraste, la probabilidad que cualquiera en una habitación de *n* personas tengan el mismo día de cumpleaños que uno está dada por:

$$p = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

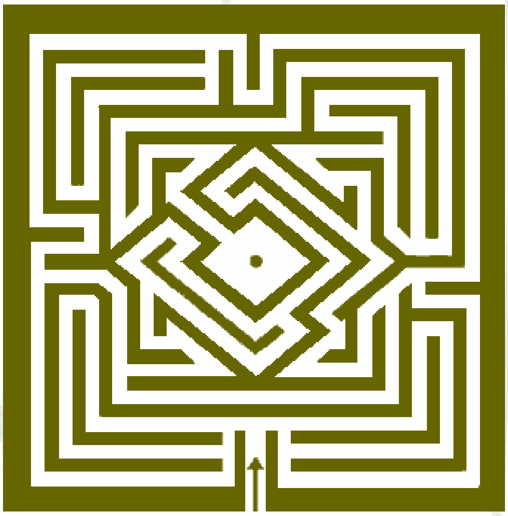
que para $n = 22$ sólo da alrededor de 0,059, y se necesitaría al menos una n de 183 para dar un valor de 0,5.

Actividad 7. Laberintos

Alicia quiere salir del "País de las Maravillas", (escena: 0:54:55 – 0:55:30):

El gato Risón le abre una puerta para ir en busca de la Reina que le ayude a conseguirlo, pero lo que hace es encontrarse con un complicado e intrincado laberinto.
Los laberintos son un ejemplo claro de las matemáticas recreativas. Para empezar vamos a sugerir algún laberinto famoso para que pongamos un poco la mente a trabajar.

LABERINTO 1

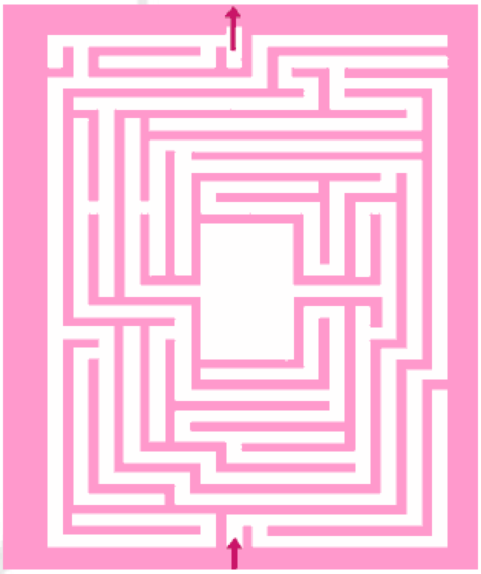


LABERINTO 2

Encuentra un camino desde la entrada hasta el punto que está en el centro del frontón del templo griego.

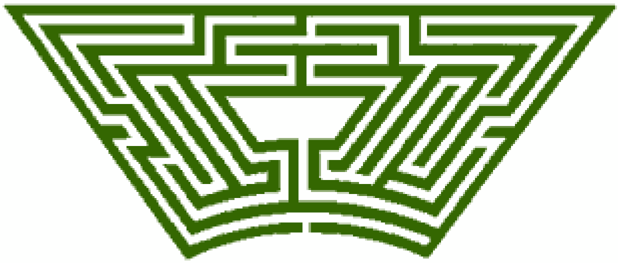
LABERINTO 3

Este laberinto fue diseñado en el siglo XV y era uno de los favoritos de la reina Isabel I de Inglaterra. Tanto era así, que lo mandó hacer con arbustos en el jardín de su palacio.
Encuentra un camino que vaya de la entrada a la salida y que pase por el centro del laberinto.



También destacamos el famoso laberinto para Rosamunda, en Inglaterra. Se dice que fue construido en un parque de Woodstock en el siglo XII por el Rey Enrique II, que buscaba esconder a su amante, Rosamunda la Bella, de su esposa Leonor de Aquitania. Usando la técnica del hilo de Ariadna, Leonor encontró la manera de llegar al centro del laberinto, donde obligó a la infeliz Rosamunda a beber veneno.

Estos laberintos hechos en jardines, elaborados con altos setos y con el propósito único de divertir fueron una moda en Inglaterra hasta el siglo XVIII. En Inglaterra, el más popular de estos laberintos hechos con setos, a través del cuál los turistas confundidos aún serpentean buscando el camino, fue diseñado en 1690 para el palacio de Justicia de Hampton de Guillermo de Orange. El plano del laberinto que existe actualmente es el siguiente:



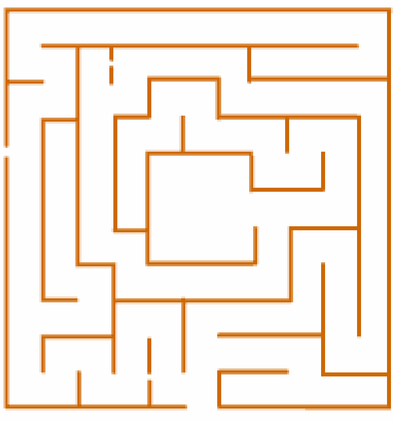
(a) Desde el punto de vista matemático, un laberinto es un problema de topología. Si su plano se dibuja en una lámina de hule, el camino correcto desde la entrada hasta la salida es topológicamente invariante y se mantiene correcto, no importa cuanto se deforme el hule.
El laberinto se puede resolver rápidamente en un papel cuando se sombrean todos los callejones sin salida hasta que sólo queden las rutas directas.

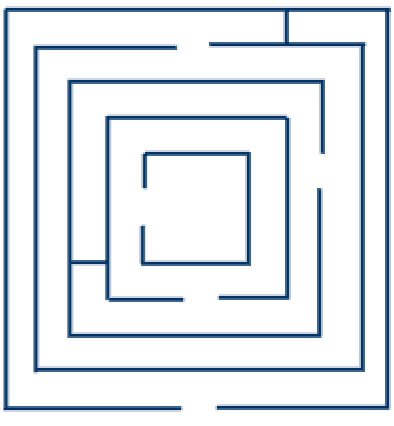
(b) Si el laberinto tiene una entrada, y el objetivo es encontrar el camino a la única salida, siempre puede resolverse el problema colocando la mano contra el muro de la derecha (o el de la izquierda) y manteniéndola ahí conforme se camina. Es seguro que se encontrará la salida, a pesar de que la ruta, con mucha probabilidad, no será la más corta.

Este procedimiento también funciona en el laberinto tradicional, en el que la meta está en el interior, pero partiendo de la consideración de que no hay ruta por la que se pueda caminar alrededor de la meta y regresar a donde se empezó. Si la meta está rodeada por uno o más de estos circuitos cerrados, el método de la mano en la pared con seguridad lo llevará por la ruta más larga y lo sacará del laberinto; nunca podrá llevarlo a la "isla" dentro del circuito.

(c) A los laberintos que no contienen circuitos cerrados, tales como el laberinto que se muestra en el siguiente dibujo, los topólogos los llaman "simplemente conectados".

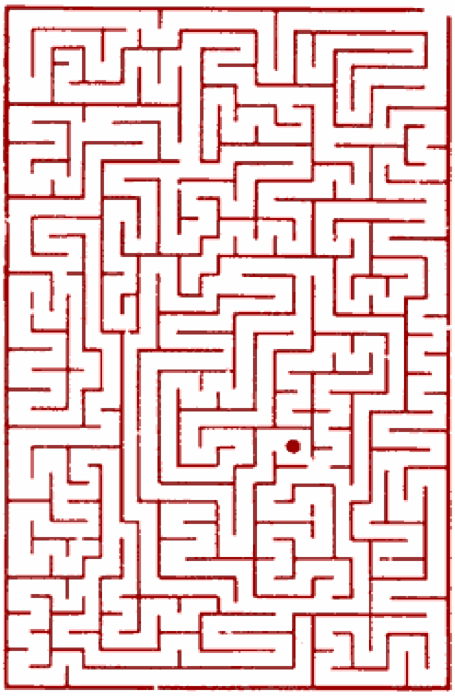
Esto equivale a decir que el laberinto no tiene muros separados (laberinto naranja).





Los laberintos con muros separados sí contienen circuitos cerrados, y se les conoce como laberintos de "conexiones múltiples"; un ejemplo es el laberinto azul de la derecha.

(d) Existe un algoritmo que soluciona los laberintos. Varios autores comentan que su mejor formulación se da en el libro de Edouard Lucas "Recréations mathématiques" (volumen 1, 1882).

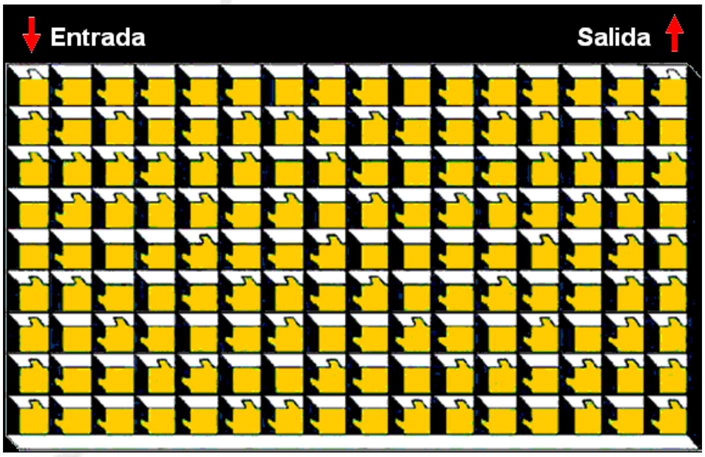


Conforme se camina a través de un laberinto, dibujamos una línea en un costado del camino, digamos a la derecha. Cuando lleguemos a una nueva unión de caminos, tomamos uno de ellos. Si al caminar a lo largo de un sendero, regresamos a una unión que previamente hemos visitado, o llegamos a un callejón sin salida, damos la vuelta y regresamos por donde llegamos. Si al caminar a lo largo de un camino anterior, ya recorrido (un camino marcado sobre la izquierda), llegamos a una unión ya visitada, tomamos un nuevo camino, si uno está disponible; de otra manera tomamos uno de los viejos caminos. Nunca debemos entrar en un camino que esté marcado por ambos lados.

(e) Otros autores consideran el algoritmo de Tremaux, que es otro método para salir de laberintos: al llegar a una bifurcación, elegimos un camino al azar y lo marcamos con una señal. Si volvemos a pasar por esa bifurcación, debemos tomar un camino no marcado (y marcarlo, a su vez). Si resulta que todos los caminos ya están marcados, deberemos volver sobre nuestros pasos. El método garantiza que recorreremos todo el laberinto y, tarde o temprano, encontraremos la salida. Si el laberinto no tiene salida, regresaremos al punto de entrada.

Este método se parece bastante al que trata de aplicar el protagonista de "El nombre de la rosa" cuando se pierde entre las salas de la biblioteca de la abadía: él también habla de hacer marcas sobre los caminos en las bifurcaciones. Sin embargo, el algoritmo de Tremaux fue enunciado en 1832, mientras que la novela de Umberto Eco transcurre en el siglo XIV.

Puedes practicar un poco intentando salir del siguiente laberinto, conocido como el laberinto de Einstein:

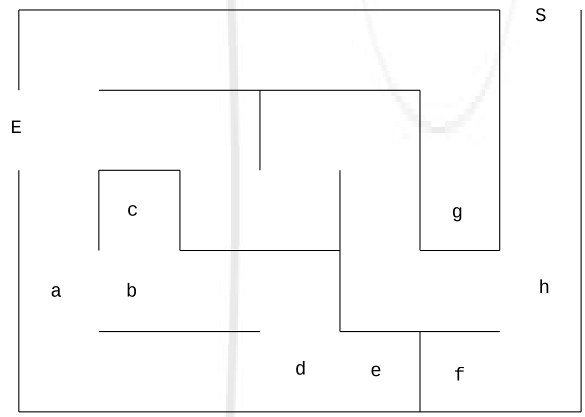


Una vez iniciado el tema con alumnado de ESO, los laberintos, cada vez más denostados en una sociedad con multiplicidad de oferta recreativa, siguen teniendo gran importancia en dos campos dentro de la ciencia: la psicología y el diseño de computadoras.
Los psicólogos han usado laberintos desde hace varias décadas para estudiar el comportamiento de aprendizaje en el hombre y en los animales.
Para los diseñadores de computadoras, los robots que manejan laberintos son parte de un emocionante programa para construir máquinas que, como los animales, también saquen provecho de su experiencia.

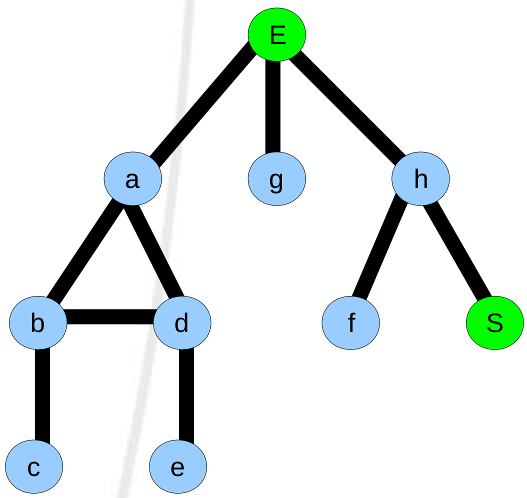
Laberintos y grafos

En la unidad anterior, dedicada a "**El indomable Will Hunting**", hablábamos de los grafos como una herramienta muy útil en la matemática. ¿Pueden ayudarnos los grafos a salir de un laberinto?

Vamos a resolver el laberinto del dibujo utilizando dos algoritmos de búsqueda de la teoría de grafos. En primer se señalan con letras en el laberinto los cruces y los caminos sin salida:



Se dibuja el grafo asociado al laberinto, en el cuál los vértices son las letras indicadas y las aristas indican que hay un camino directo entre ellas.



Los algoritmos de búsqueda sirven para recorrer todos los vértices de un grafo. En nuestro caso nos detendremos cuando alcancemos la salida. Vamos a emplear los dos más sencillos.

1. En la **búsqueda en profundidad** (BEP) a partir de un vértice inicial activo que está en un listado llamado pila se avanza hasta un vecino sin visitar (mientras quede alguno), que se convierte en el nuevo vértice activo y se añade a la pila.
   Cuando el vértice activo no tiene vecinos que no hayan sido visitados se quita de la pila y se retrocede al nodo anterior de la pila que pasa a ser el el nuevo vértice activo.
   Cuando la pila se queda vacía quiere decir que hemos recorrido la componente conexa del vértice inicial.
2. En la **búsqueda en anchura** (BEA) a partir de un vértice inicial activo que está en un listado llamado cola se avanza hasta un vecino sin visitar (mientras quede alguno) que se añade a la cola.

Cuando el vértice activo no tiene vecinos que no hayan sido visitados se quita de la cola y el vértice siguiente de la cola pasa a ser el el nuevo vértice activo.
Cuando la cola se queda vacía quiere decir que hemos recorrido la componente conexa del vértice inicial.

Con el ejemplo quedará mucho más claro:

Búsqueda en profundidad – BEP		
Pila	**Añadir**	**Quitar**
E	a	
E,a	b	
E,a,b	c	
E,a,b,c		c
E,a,b	d	
E,a,b,d		d
E,a,b		b
E,a		a
E	g	
E,g		g
E	h	
E,h	f	
E,h,f		f
E,h	S	

Búsqueda en anchura – BEA		
Cola	**Añadir**	**Quitar**
E	a	
E,a	g	
E,a,g	h	
E,a,g,h		E
a,g,h	b	
a,g,h,b	d	
a,g,h,b,d		a
g,h,b,d		g
h,b,d	S	

Bibliografía

1. La enciclopedia libre: http://es.wikipedia.org
2. La Kalipedia: http://es.kalipedia.com
3. Matemáticas en tu mundo: http://es.geocities.com/mundo_matematicas/
4. xLogo: http://xlogo.tuxfamily.org/sp
5. Diccionario visual de Matemáticas: http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/mathdict.htm
6. Nuevos Acertijos de Sam Lloyd. Martin Gardner: http://www.librosmaravillosos.com/acertijos2samloyd/
7. Los fractales en la naturaleza http://www.interactiva.matem.unam.mx/fractales/html/naturaleza.html http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/matematicas/academicos/emartinez/fracta-les/uno/uno.html
8. Programa Averroes (Junta de Andalucía)
9. Varias imágenes obtenidas de la web que alargarían esta bibliografía innecesariamente
10. Lewis Carroll y la Lógica de las Maravillas José Ramón Ortiz
11. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. V, No. 1 (1998) 61
12. Matemáticas en el país de las maravillas. Lewis carroll. José Mª Sánchez. http://www.epsilones.com/documentos/d-lewis-carroll.pdf
13. El rincón de la ciencia http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Curiosid/rc-83/rc-83.html
14. Física en la ciencia ficción http://fisicacf.blogspot.com/2007/04/viaje-armnico-simple-al-centro-de-la.html