https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5806
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Mirada profesional del futuro profesor en torno al signo igual

Professional Noticing of the Equal Sign in Prospective Teachers

Sebastián Parodi, Cristina Ochoviet
Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
parodiseb@gmail.com, cristinaochoviet@gmail.com

Javier Lezama
Profesor invitado, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, México
jlezamaipn@gmail.com

RESUMEN • En este trabajo se examina la habilidad docente conocida como *mirada profesional* en situaciones relativas al signo igual. Los participantes cursan el último año de la carrera de profesor de matemática en un instituto de formación docente de Uruguay. Se adopta como perspectiva teórica una conceptualización de la mirada profesional y una categorización de las concepciones de los estudiantes respecto a este signo. Se implementa una secuencia de actividades durante una sesión de trabajo dirigida a todos los participantes, en la que se propone el análisis de respuestas de estudiantes a tareas sobre el signo igual. Los resultados explican la manera en la que los futuros profesores son capaces de mirar profesionalmente en torno a este tópico. Se infieren implicaciones didácticas que pueden contribuir al desarrollo de esta habilidad, esencial en el quehacer profesional del docente.

PALABRAS CLAVE: Mirada profesional; Signo igual; Sesión de trabajo; Formación docente.

ABSTRACT • Professional noticing about students' mathematical thinking in situations that involve the equal sign is examined. The participants are studying the last year of a mathematics teaching program at a teacher training institute in Uruguay. A theoretical perspective is adopted as a conceptualization of professional noticing and categorising students' conceptions regarding the equal sign. A sequence of activities is implemented during a work session aimed at all participants, in which the analysis of students' responses to tasks involving the equal sign is proposed. The results explain the way in which prospective teachers can notice this matter. Educational implications that can contribute to developing this essential skill of the teacher's professional work are thus inferred.

KEYWORDS: Professional noticing; Equal sign; Workshop; Teacher training.

Recepción: octubre 2022 • Aceptación: enero 2023 • Publicación: marzo 2024

Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2024). Mirada profesional del futuro profesor en torno al signo igual. *Enseñanza de las Ciencias*, *42*(1), 43-63.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5806

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática requiere tomar decisiones en torno a la práctica docente para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. La mirada profesional, también conocida como *mirar con sentido* o *professional noticing*, es una habilidad que puede resultar útil para esta tarea, pues consiste en percibir e interpretar aspectos significativos de una determinada situación en clase para tomar decisiones de enseñanza fundamentadas en esa interpretación (van Es y Sherin, 2002). Requiere utilizar el conocimiento matemático para la enseñanza con el objetivo de analizar las interacciones de aula, razonar sobre prácticas docentes y decidir justificadamente el tipo de enseñanza que se va a impartir. Una conceptualización de esta habilidad, focalizada en el pensamiento matemático (Jacobs et al., 2010), permite indagar la manera en la que se interpreta la comprensión matemática de los estudiantes y el modo en que se utiliza esa interpretación para tomar decisiones durante la instrucción.

Las investigaciones que exploran la mirada profesional desde esta perspectiva suelen enfocarse en un contexto matemático específico: por ejemplo, la aritmética (Jacobs et al., 2010), la generalización de patrones (Zapatera, 2019), los números racionales (Bartell et al., 2013), la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo (Fernández et al., 2012) o la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2015). Este estudio se centra en el dominio matemático del signo igual debido a la importancia que tiene su comprensión en la introducción al álgebra (Knuth et al., 2008), lo que se suma a la escasez de trabajos previos que han explorado la mirada profesional en este contexto (Kiliç y Masal, 2019; van den Kieboom et al., 2017).

REVISIÓN DE ANTECEDENTES Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Los estudiantes de enseñanza secundaria (de aquí en adelante, *estudiantes*) tienden a interpretar el signo igual como indicador del resultado de una operación, en lugar de interpretarlo como indicador de una relación de equivalencia (Kieran, 1981; Burgell y Ochoviet, 2015; Parodi et al., 2017), esencial para el estudio del álgebra (Knuth et al., 2008). Pese a la necesidad de atender las interpretaciones del signo igual en la enseñanza, los docentes suelen desconocer esta problemática y evidencian dificultades para anticipar objetivos, prever estrategias de resolución o gestionar tareas sobre este signo matemático (Prediger, 2010; Stephens, 2006).

La investigación creciente en mirada profesional muestra que es posible diseñar e implementar módulos de enseñanza para explorar o promover el desarrollo de esta habilidad (Llinares et al., 2019). Suele proponerse el análisis de representaciones de la práctica (Buchbinder y Kuntze, 2018) con base en *lentes teóricas* presentadas al inicio para centrar la atención de los participantes en aspectos matemáticos relevantes (Fernández y Choy, 2020). Decidir es la destreza más difícil de desarrollar, porque ser conscientes de la comprensión de los estudiantes no garantiza una toma de decisiones efectivas para la enseñanza (Lee y Choy, 2017).

Solo dos trabajos exploran la mirada profesional en torno al signo igual (Kiliç y Masal, 2019; van den Kieboom et al., 2017). Por un lado, van den Kieboom et al. (2017) implementan un módulo de formación con futuros maestros para indagar las destrezas de percibir y de explorar las estrategias de los estudiantes; en este estudio, cada participante mantiene dos entrevistas clínicas con estudiantes que resuelven tareas sobre el signo igual. Al cabo de la primera entrevista, los participantes recibieron formación teórica acerca de las concepciones de los estudiantes (Matthews et al., 2012), pero no se observó una variación estadísticamente significativa al comparar los hallazgos obtenidos en cada entrevista. Kiliç y Masal (2019), por otro lado, trabajan con futuros profesores, quienes también mantienen una entrevista clínica con estudiantes que resuelven esas tareas; no obstante, la exploración de la mirada profesional ocurre en la entrevista de cada participante con uno de los investigadores a partir del visionado conjunto de la entrevista clínica en cuestión. En este estudio, no consta si se proporcionó información teórica sobre el signo igual durante la experiencia. Los participantes presentan dificultades para distinguir distintas comprensiones del signo igual en las estrategias de los estudiantes, y consideran innecesario intervenir para apoyar la comprensión respecto de este signo.

Ambos trabajos informan sobre las dificultades para mirar profesionalmente la problemática del signo igual, pero no exploran una propuesta de enseñanza que ayude a desarrollar esta mirada profesional. Si bien el abordaje de lentes teóricas suele ser de utilidad para ello, la formación teórica de los participantes en van den Kieboom et al. (2017) no provocó mayores progresos en la percepción y exploración de las estrategias empleadas por los estudiantes. Con base en estos hallazgos, indagamos otro acercamiento a la mirada profesional en torno al signo igual.

El estudio aquí presente examina la mirada profesional en torno al signo igual de un grupo de futuros profesores de Uruguay (FP) durante una sesión de trabajo en la que se aborda una secuencia de actividades que propone analizar, sin el apoyo de lentes teóricas, las respuestas de estudiantes a tareas sobre este signo. Se plantean tres preguntas de investigación respecto de la participación de los FP en la sesión de trabajo: *i*) ¿qué y cómo son capaces de percibir e interpretar?, *ii*) ¿qué y cómo son capaces de decidir?, *iii*) ¿existen cambios en sus maneras de percibir, interpretar y decidir? Los resultados proporcionan un marco explicativo sobre la forma en la que los FP son capaces de mirar profesionalmente en torno al signo igual.

MARCO CONCEPTUAL

Se conjuga una conceptualización de la mirada profesional (Jacobs et al., 2010) con una categorización de las concepciones del signo igual (Matthews et al., 2012).

Jacobs et al. (2010) señalan que mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es una habilidad que implica tres destrezas del profesor: percibir las estrategias de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir cómo responder a partir de dicha comprensión. *Percibir* consiste en identificar los elementos matemáticos relevantes en las estrategias de los estudiantes, que puedan proporcionar una vía de acceso a su pensamiento matemático. *Interpretar* implica razonar y reflexionar sobre las estrategias empleadas por el alumnado, vinculando evidencias concretas con elementos matemáticos relevantes y los resultados de investigación relativos al pensamiento matemático de los estudiantes. *Decidir* requiere razonar para tomar decisiones docentes que favorezcan el progreso de los aprendizajes, de forma accesible pero desafiante, según la comprensión de los alumnos y los hallazgos de investigación relativos al aprendizaje.

Matthews et al. (2012) identifican cuatro niveles de conocimiento del signo igual según el tipo de igualdades numéricas que aborda cada uno: operacional rígido, operacional flexible, relacional básico y relacional comparativo. El nivel *operacional rígido* se refiere a aquellas sentencias con operaciones solo al lado izquierdo del signo igual: $5 + 2 = \underline{7}$. *Operacional flexible* introduce las sentencias compatibles en una visión operacional, pero con operaciones solamente en el lado derecho o sin operaciones: $\underline{7} = 5 + 2$ y $5 = \underline{5}$. El nivel *relacional básico* supone abordar las sentencias con operaciones a ambos lados del signo igual mediante cálculos; por ejemplo, en $52 + 25 = \underline{50} + 27$ restar 27 a la suma de 52 y 25. *Relacional comparativo* implica el mismo tipo de sentencias, pero requiere la comparación de expresiones sin cálculos por ejemplo, $28 + 32 = \underline{27} + 33$, reconocer que el número faltante es una unidad mayor que 32, ya que 27 es una unidad menor que 28.

Esta conjunción de perspectivas conforma un constructo teórico que permite explorar las destrezas docentes de percibir, interpretar y decidir en torno al signo igual.

Percibir el signo igual

Aquí se tienen en cuenta tres elementos matemáticos relevantes del signo igual, que emergen de la transición entre dos niveles de conocimiento de este signo (Matthews et al., 2012).

Simetría de la igualdad (E1)

Esta se refiere a la idea del igual como signo que puede leerse en ambos sentidos. Se apoya en la propiedad simétrica de la igualdad. Permite abordar igualdades numéricas con operaciones solamente del lado derecho del signo igual, así como resolver ecuaciones dadas y comparar sus soluciones para decidir si estas son equivalentes. Permite transitar de una concepción operacional rígida a una concepción operacional flexible (Matthews et al., 2012).

Igualdad de cantidades (E2)

Alude a la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales. Está ligado a la propiedad reflexiva de la igualdad, y posibilita abordar igualdades numéricas con operaciones a ambos lados de este signo realizando operaciones, así como verificar si un número dado es la solución de una ecuación. Permite transitar de una concepción operacional flexible a una concepción relacional básica (Matthews et al., 2012).

Conservación de la igualdad (E3)

Se trata de la idea del igual como signo que conserva la igualdad. Guarda relación con las definiciones y propiedades de las operaciones en R (por ejemplo, la propiedad cancelativa de la suma). Hace posible el planteamiento de igualdades numéricas con operaciones a ambos lados del signo igual, comparando expresiones y sin realizar cálculos, así como identificar las transformaciones que generan dos ecuaciones con la misma solución. Permite transitar de una concepción relacional básica a una concepción relacional comparativa (Matthews et al., 2012).

Interpretar el signo igual

Aquí se consideran cuatro momentos de comprensión del signo igual, que se apoyan respectivamente en los cuatro niveles de conocimiento de Matthews et al. (2012).

Operacional rígido (M1)

Se caracteriza por una lectura unidireccional del signo igual, de izquierda a derecha, en la que este signo se interpreta como el indicador del resultado de una operación o una respuesta, una señal de hacer algo o un separador entre las etapas intermedias de un cálculo. Esta interpretación, ligada a una asociación entre las palabras *resultado* y *solución*, conduce a pensar que la solución de una ecuación es el segundo miembro de la ecuación.

Operacional flexible (M2)

Se caracteriza por una lectura unidireccional y operacional del signo igual, pero incorpora la posibilidad de que esta sea de derecha a izquierda y, por tanto, posibilita un entendimiento instrumental del concepto de solución de una ecuación, como número que se obtiene al despejar la variable y al resolver una ecuación.

Relacional básico (M3)

Se caracteriza por una lectura bidireccional del signo igual, en la que este se interpreta como el indicador de una relación de equivalencia; es decir, favorece la conceptualización del concepto de solución de una ecuación como número que verifica una ecuación.

Relacional comparativo (M4)

Se caracteriza por una lectura bidireccional y relacional del signo igual, pero se apoya en el uso de las operaciones y sus propiedades para abordar sentencias numéricas o problemas de ecuaciones equivalentes sin realizar cálculos.

Decidir en torno al signo igual

Se toman como referencia las siguientes prácticas de enseñanza relativas al signo igual, con base en investigaciones que han realizado un aporte sustantivo al aprendizaje de este signo, tanto en un contexto aritmético de igualdades numéricas como en uno algebraico de tareas sobre ecuaciones equivalentes.

Contexto aritmético

Plantear tareas con sentencias numéricas para analizar o completar igualdades numéricas, en contextos no estándar de operaciones del lado derecho y de operaciones a ambos lados (Burgell y Ochoviet, 2015); plantear operaciones y solicitar que las respuestas estén dadas por otras operaciones que representen el mismo valor (Darr, 2003); plantear expresiones del tipo $\lozenge = \Delta + 2$ y preguntar qué relación debe existir entre los números representados por símbolos para que la sentencia sea verdadera (Darr, 2003).

Contexto algebraico

Plantear tareas enfocadas a similitudes y diferencias (Parodi et al., 2017); proponer la construcción de ecuaciones algebraicas a partir de igualdades numéricas con operaciones a ambos lados (Kieran, 1981); utilizar el método de prueba y error al incursionar en la resolución de ecuaciones (Kieran, 1981); utilizar *es lo mismo que* en lugar de *da* para aludir al resultado de una operación (Knuth et al., 2008).

MÉTODO

Se propone un estudio de casos con nueve FP que cursan el cuarto y último año de la carrera de profesor de matemática en un instituto de formación docente de Uruguay.

Contexto y participantes

Los participantes tienen aprobados dos cursos anuales de Didáctica de la Matemática - Práctica Docente. Al participar en esta investigación, cursan el tercero de estos cursos, por lo que tienen un grupo de enseñanza secundaria a su cargo en el que cumplen el rol completo de profesor. En su práctica de aula son supervisados por un profesor de didáctica que también es responsable de los aspectos teóricos del curso Didáctica de la Matemática - Práctica Docente.

Se diseña una secuencia de actividades dirigida a todos los participantes, que se implementa en una sesión de tres horas y es facilitada por un integrante del equipo de investigación. Los FP no contaban con formación teórica previa sobre mirada profesional o sobre niveles de conocimiento del signo igual.

Se propone intencionalmente no proporcionar de manera explícita lentes teóricas con las que «mirar»; sin embargo, estas lentes se tienen en cuenta en el diseño de la secuencia para que la propia implementación promueva su uso.

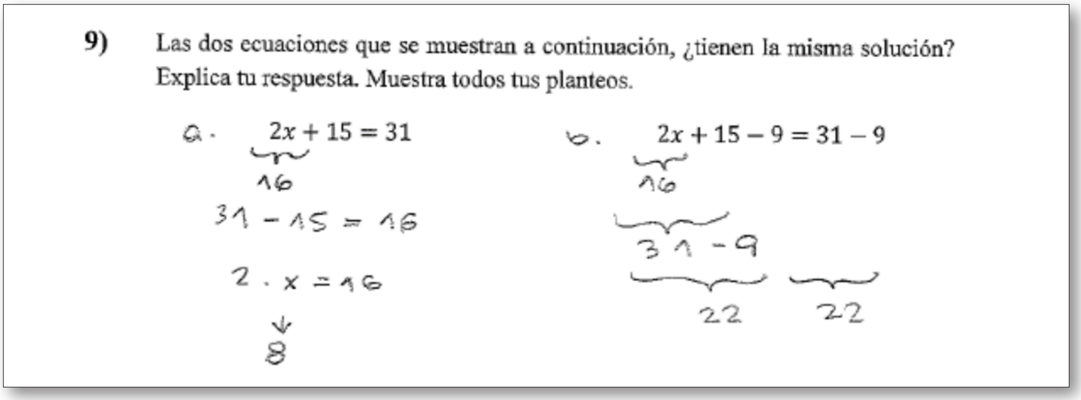
Instrumentos

Se diseña una secuencia de siete actividades, que se implementa bajo una dinámica de taller para analizar el caso de Rosa, una estudiante que resuelve distintas tareas sobre el signo igual. La secuencia se apoya en producciones y fragmentos de entrevistas de Parodi (2016). Las actividades presentan respuestas en un contexto aritmético y algebraico que implican distintos significados del signo igual y, a continuación, se formulan preguntas que demandan percibir, interpretar y decidir sobre este signo.

Los FP se organizan en tres equipos de tres integrantes (A: FP1, FP2 y FP3; B: FP4, FP5 y FP6; C: FP7, FP8 y FP9). Cada equipo recibe y aborda la primera actividad; más tarde, se realiza una discusión en gran grupo sobre esta tarea. La dinámica se repite para el resto de las actividades. Los datos de la investigación provienen de la audiograbación de la puesta en común de cada actividad.

La tarea 1 (A1) gira en torno a dos ecuaciones equivalentes, y en ella se indaga si estas tienen la misma solución. La palabra *evaluar*, en la consigna de esta actividad, no se refiere a la tarea de asignar una calificación, sino a la de interpretar la estrategia de resolución de la estudiante. La actividad requiere percibir E2 e interpretar M3 porque el caso planteado supone la verificación de una ecuación y la comprensión del concepto de solución, pero también percibir E1 e interpretar M1, pues la ausencia de respuesta puede deberse a la confusión entre *solución* y *resultado* y a la interpretación del signo igual como indicador del resultado de una operación. La elaboración del *feedback* (1b) permitirá obtener evidencia de la destreza de decidir.

(A1) Se presenta el trabajo de Rosa (12 años, 2.º año de secundaria) en la pregunta 9:


9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

a. $\underbrace{2x + 15}_{16} = 31$

31 − 15 = 16

2 . x = 16

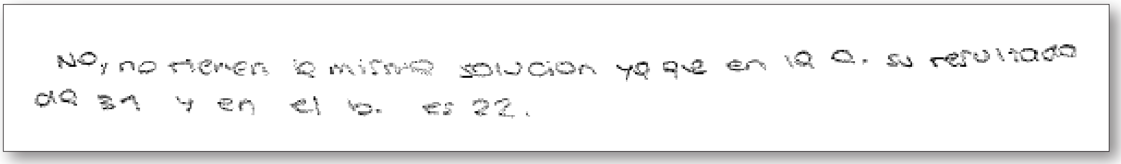
8

b. $\underbrace{\underbrace{2x + 15}_{16} - 9}_{22} = \underbrace{31 - 9}_{22}$

a) Evalúe el trabajo de Rosa. ¿Qué razonamiento utilizó, a partir de lo que plantea?
b) ¿Qué le respondería a Rosa?
c) ¿Cuál será la respuesta de Rosa a esta pregunta? ¿Por qué?

La actividad 2 (A2) muestra la respuesta de Rosa a la pregunta de la tarea anterior, quien asume que las ecuaciones dadas no tienen la misma solución. La respuesta a esta tarea se presenta en dos actividades separadas para observar la forma en la que es interpretada entre quienes respondieron afirmativamente en A1. Se requiere percibir E1 e interpretar M1 porque la alumna considera el signo igual como indicador del resultado de una operación, así como tomar decisiones antes de proporcionar el *feedback*.

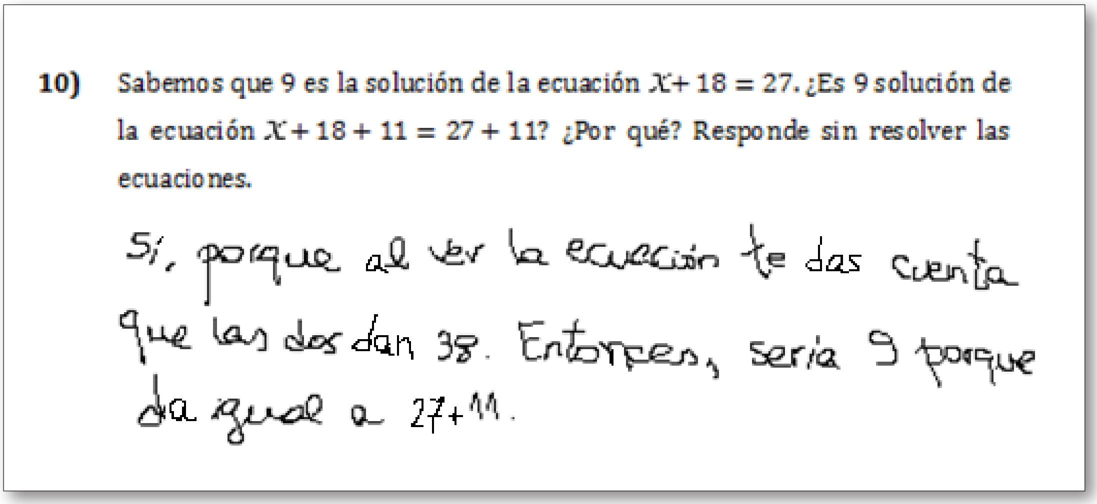
(A2) Rosa respondió de la siguiente manera:


No, no tienen la misma solución ya que en la a. su resultado da 37 y en el b. es 22.

a) ¿A qué cree que se debe esta respuesta?
b) ¿Realizaría ahora el mismo comentario que propuso en la actividad anterior? ¿Por qué?

La actividad 3 (A3) muestra una tarea que indaga si 9 es solución de $x + 18 + 11 = 27 + 11$, donde Rosa realiza una verificación implícita y responde con acierto. Requiere percibir E1 o E2 al describir la estrategia de la alumna, así como interpretar M1 o M3 al inferir la comprensión de la alumna respecto del concepto de solución de una ecuación: como resultado o como valor de la variable que verifica la ecuación.

(A3) Se presenta el trabajo de Rosa en otra pregunta:


10) Sabemos que 9 es la solución de la ecuación $X + 18 = 27$. ¿Es 9 solución de la ecuación $X + 18 + 11 = 27 + 11$? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.

Sí, porque al ver la ecuación te das cuenta que las dos dan 38. Entonces, sería 9 porque da igual a 27+11.

a) ¿Qué conocimientos considera que utiliza Rosa para responder esta pregunta?
b) ¿Cómo explica que Rosa haya respondido la pregunta 10 de la manera en que se muestra arriba y haya dado la siguiente respuesta a la pregunta 9?


No, no tienen la misma solución ya que en la a. su resultado da 37 y en el b. es 22.

La actividad 4 (A4) plantea un extracto de entrevista en la que Rosa completa la sentencia 14 × 3 = __– 3. Requiere percibir E1 e interpretar M1, puesto que la alumna considera el signo igual como indicador del resultado de una operación. También reflexionar sobre las decisiones de enseñanza que adoptan los docentes en este contexto (4b y 4c).

(A4) Se mantuvo una entrevista con Rosa en la que se le propuso la siguiente cuestión:

¿Cuál es el número que falta en el espacio vacío? ¿Hay más de una opción?
14 × 3 = _____ – 3
Rosa escribió lo que está subrayado: 14 × 3 = 42 – 3 = 39.
Entrevistador: Tú completaste con 42, agregaste un signo igual y el 39.
Rosa: Sí, o sea, 14 por 3, 42, menos 3, sería 39.
E: ¿Cómo es eso?
R: Claro, si tú haces 14 por 3, te da 42… O sea, 4 por 3, 12; 1 por 3, 3, 30; 30 más 12, 42. Es fácil.
E: Mm…
R: Entonces, acá iría 39.
E: ¿Por qué?
R: Porque hice el resultado de esto, menos 3, que sería 42 menos 3, 39.
E: O sea que...
R: Puse el resultado porque no sabía si era 42 menos 3 o si había que poner el resultado con la cuenta hecha.
E: ¿Qué cuenta?
R: Esta cuenta (se refiere a «_____ – 3»)

a) ¿Por qué Rosa completa el espacio vacío con el número 42?
b) ¿Qué prácticas de aula podrían estar incidiendo en la respuesta de Rosa?
c) ¿Qué cambios en las prácticas de aula permitirían a Rosa entender mejor la tarea?

La actividad 5 (A5) muestra un segundo extracto de entrevista en el que Rosa avanza en la comprensión del signo igual. Requiere percibir E2 e interpretar M3 en el caso de la sentencia 17 + 4 = 13 +__ porque implica la igualdad de cantidades y una comprensión relacional del signo igual. También se necesita percibir E3 e interpretar M4 en el caso de 4 + 9 = 9 + 4. La percepción de E1 y la interpretación de M1 se requiere en el caso de 14 × 3 =__– 3, donde inicialmente se realiza una lectura unidireccional y se considera el signo igual como indicador del resultado de una operación.

(A5) Se plantea otro fragmento de la entrevista con la estudiante:

Entrevistador: Si se escribe 4 + 9 = 9 + 4, ¿es verdadero o falso?
Rosa: O sea, lo único que cambia es el orden de los números.
E: ¿Entonces?
R: Es verdadero… Claro, 4 más 9 te da 13 y 9 más 4 también. Te da lo mismo.
E: Entonces, ¿cómo completarías el espacio vacío, acá: 6 + 5 = 5 +__?
R: Con un 6… Porque 6 más 5 es lo mismo que 5 más 6.
E: ¿Y en este caso: 17 + 4 = 13 +__?
R: Mmm, acá es distinto, porque no se repite el 4… ¡Ah, me tiene que dar el mismo número resultante!
E: ¿A ver?
R: Claro… (Calcula 17 + 4). Me da 21, entonces… 8, acá tendría que poner 8. Porque 13 más 8 te da 21 y 17 más 4 también.
[…]
E: Volvamos al primer caso: 14 × 3 =__– 3. Habías completado con 42 y 39.

R: Sí, pero ahora que pienso…, no estoy segura si va 42.
E: ¿Por qué?
R: Porque creo que tiene que dar lo mismo de cada lado.
E: ¿A ver? Supongamos que acá va un 42.
R: Creo que no, porque también hay un – 3, entonces, 14 × 3 no queda igual que 42 – 3.
E: ¿Entonces?
R: Tendría que pensar en un número que al restarle 3 me dé 42, o sea, 45.

a) ¿Qué avances logró Rosa respecto de la comprensión del signo igual? ¿Por qué?
b) ¿Qué conocimientos sobre el signo igual le parece que son valiosos en el trabajo matemático de un estudiante?

La actividad 6 (A6) plantea un tercer extracto de entrevista, en el que Rosa se vuelve a enfrentar al caso de A1-A2 y concluye que las dos ecuaciones tienen la misma solución. Requiere, al igual que A5, la percepción de E1, E2 y E3; así como la interpretación de M1, M3 y M4.

(A6) A Rosa se le vuelve a presentar su respuesta a la pregunta 9 del cuestionario:

Rosa: Al resultado final, que es 31, le resté 15. Después, averigüé cuánto tiene que valer x para que al multiplicar por 2 me dé 16. Pensé: 2 por 8 es 16, entonces, 2 por x es 16.
Entrevistador: Mm...
R: Después, 16 más 15 es 31, entonces, x es 8. Y en el *b*… no sé…
E: Debajo del $2x$ escribes un 16.
R: Sí, porque 16 + 15 me tiene que dar 31, como en la *a*, pero acá hay un – 9... Ah…, ya sé, 31 – 9 tiene que ser 22, entonces, es lo mismo, está bien…
E: ¿A ver?
R: Claro, 2 por x es 16, más 15 es 31, menos 9 es 22. Después, el resultado me está diciendo que es 31 menos 9, que también es 22. Entonces, en los dos casos es 22.
E: ¿Qué puedes afirmar, entonces, sobre la solución de estas ecuaciones?
R: Solución…
E: Por ejemplo, ¿cuál es la solución de la primera ecuación?
R: Solución… que x es 8…
E: ¿Y la solución de la segunda ecuación?
R: Ah, claro, es la misma, porque hice 2 por 8 más 15 las dos veces, que me tiene que dar 31, solo que en un caso le resté 9 y en el otro no.

a) ¿A qué se debe este cambio en la respuesta de Rosa?
b) ¿Por qué había respondido que las ecuaciones dadas no tienen la misma solución?
c) ¿Qué conocimientos requiere la comprensión del concepto de solución de una ecuación?

La actividad 7 (A7) muestra un último extracto de entrevista en el que Rosa escribe $10 - x = 5$ ante la solicitud de escribir una ecuación con solución 5. Requiere percibir E1 e interpretar M1, porque el segundo miembro de la ecuación coincide con la solución dada, lo que deja entrever una lectura unidireccional, una interpretación operacional del signo igual y una asociación entre solución y resultado. También requiere percibir E2 e interpretar M3, pues la ecuación tiene la solución dada, lo que implica una igualdad de cantidades, una interpretación relacional del signo igual y la noción de solución como valor de la variable que verifica la ecuación. Se espera que se interprete que coexisten dos ideas matemáticamente inconsistentes en la alumna respecto del concepto de solución de una ecuación.

(A7) Aquí se desarrolla la parte final de la entrevista:
Entrevistador: Escribí una ecuación que tenga por solución el número 5.
Rosa: Mmm… (piensa y luego escribe: $10 - x = 5$).
E: ¿Por qué te parece que esa ecuación tiene solución 5?
R: Porque x es 5, entonces, al restarle 5 al 10, nos queda como solución 5.
E: ¿Cómo se te ocurrió esta ecuación?
R: Puse $10 - x$, que x tenía que ser la solución, y como resultado, lo que te está pidiendo es que sea 5. Entonces, hice 10 – 5, 5... Ah, claro, marqué solución como resultado…
E: ¿Cómo es eso?
R: Claro, en este caso, tendría que ser esta la solución (señala la x) y este el resultado (señala el 5 del segundo miembro).
E: La ecuación que escribiste, ¿tiene solución 5 o no?
R: No sé…, creo que no… No, pará… Sí, para mí sí… No estoy segura.
E: ¿Por qué te parece que 5 es solución?
R: Porque si resto 5 a 10, le estoy restando 5 y el resultado es 5. No sé…

a) ¿Qué otros elementos deben tenerse en cuenta al abordar situaciones relativas al signo igual?
b) Varios autores se refieren a la importancia de la comprensión del signo igual para el estudio del álgebra (por ejemplo, Kieran, 1981; Knuth et al., 2008). Una comprensión operacional implica interpretar el signo igual como indicador de un resultado, mientras que una comprensión relacional implica interpretar este signo como la señal de una relación de equivalencia. ¿Qué interpretaciones relativas al signo igual sería necesario que Rosa incorporara para incursionar en el estudio del álgebra? ¿Por qué?

Análisis de datos

Se definen indicadores de percepción, interpretación y decisión en torno al signo igual. Un indicador de percepción es describir las estrategias de resolución con base en los elementos matemáticos relevantes del signo igual involucrados. Por ejemplo, si un estudiante responde que «$5 + 9 = 14 : 2 = 7$ es verdadero porque $5 + 9 = 14$ y $14 : 2 = 7$», este comentario es la evidencia de que percibe E1: «el estudiante compara el resultado de cada operación con el número que aparece a continuación de cada signo igual, siempre de izquierda a derecha». Un indicador de interpretación es explicitar los momentos de comprensión del signo igual (o de conceptos relacionados) involucrados en una estrategia de resolución. Ante el caso anterior, este comentario es la prueba de la interpretación de M1: «el estudiante interpreta que el signo igual se utiliza solamente para indicar el resultado de una operación». Un indicador de decisión es prever una intervención a partir de los elementos matemáticos del signo igual utilizados en una estrategia para favorecer el tránsito entre momentos de comprensión. En el caso dado, este comentario es la evidencia de la decisión que se apoya en E1 para favorecer M2: «propondría invertir de lugar las expresiones con respecto al signo igual al plantear una operación y su resultado».

RESULTADOS

Se organiza la sección de acuerdo con las preguntas de investigación. Los aportes de cada FP se consideran representativos del equipo al que pertenece, a menos que estos se realicen a título personal (por ejemplo, «a mí me parece») o que se evidencie una oposición de ideas dentro del equipo correspondiente.

¿Qué y cómo son capaces de percibir e interpretar los FP?

Lo primero que perciben los FP son aspectos relativos a la escritura matemática: si una verificación está bien o mal planteada, si falta algún símbolo matemático, si la respuesta al problema es o no es explicitada, si alguna explicación dada por Rosa les resulta insuficiente. Luego tienden a percibir conceptos matemáticamente relevantes que conocen por haber aprobado varios cursos de matemáticas superiores. Esto obstaculiza la interpretación del razonamiento de Rosa, porque priorizan lo que debería haber hecho o aplicado según sus perspectivas, en lugar de valorar lo que realmente realizó. Al avanzar la secuencia, la mirada de los FP comienza a posicionarse en los significados del signo igual.

Por ejemplo, FP1 y FP2, en el siguiente diálogo sobre A1, advierten cierta falta de claridad en la respuesta de Rosa (líneas 1, 3) por la ausencia de un signo igual en la verificación (líneas 5, 6). La preocupación radica en un aspecto que no aporta información relevante sobre la comprensión de la tarea. El énfasis en la escritura les impide centrarse en que Rosa haya obtenido una igualdad numérica. Perciben un aspecto de la estrategia que no se relaciona con elementos matemáticos relevantes del signo igual. Esto les impide formular preguntas acerca del entendimiento de la estudiante de los conceptos involucrados. FP1 y FP2 reconocen la falta de respuesta de Rosa (línea 3), pero asumen que respondería afirmativamente (línea 6). Interpretan que la ausencia de respuesta se debe a un aspecto superficial, la claridad u organización de los planteamientos, en lugar de concebir una posible dificultad con respecto al concepto de solución de una ecuación.

[1] FP1: Para nosotros, no está muy bien hecho el planteo, obviamente.
[2] Investigador [I]: ¿Por qué?
[3] FP1: Por el igual, por ejemplo, donde la x… no sé... Emm... «Explica tu respuesta», o sea, el planteo, por ejemplo, las cuentas las hizo, pero ¿las ecuaciones tienen la misma solución? No está clara la respuesta.
[4] FP2: No explicó, en realidad […] Le faltan algunas igualdades en la segunda ecuación.
[5] FP1: «22, una llave, 22». Falta el igual, la verificación no es la ideal.
[6] FP2: Se entiende que tiene la idea, que llega a cosas iguales, por eso suponemos que va a responder que sí, pero el igual no lo escribe.

FP1 y FP2, en el siguiente fragmento, señalan que A1 permite introducir o aplicar el concepto de ecuaciones equivalentes (líneas 7, 9). Exigen implícitamente la aplicación de una estrategia de resolución que es matemáticamente conveniente, pero inusual en la producción de los estudiantes (Knuth et al., 2008). FP2 sugiere otra estrategia de resolución (línea 12) que consiste en obtener la ecuación $2x + 15 = 31$ luego de sumar 9 a ambos miembros de la ecuación $2x + 15 - 9 = 31 - 9$, que implica obtener y comparar dos ecuaciones con los mismos términos para concluir que tienen la misma solución. Se observa un apego de los FP a las posibles estrategias formales de resolución, motivado por el conocimiento que tienen sobre la equivalencia de ecuaciones; esto les impide atender específicamente la estrategia que emplea la estudiante.

[7] FP1: Tampoco sabemos si ya se introdujo ecuaciones equivalentes, pero me imagino que la idea de la actividad no era hacer todo este planteo…
[8] I: ¿Cuál te parece que era la idea?
[9] FP1: Claro, si vieron ecuaciones equivalentes, decir: «esta y esta son equivalentes, tienen la misma solución» y listo.
[10] I: ¿Por qué?
[11] FP1: Porque son iguales y hay un –9 de cada lado.
[12] FP2: Si hubiera sumado 9 a ambos miembros, hubiera llegado a la misma ecuación.
[13] FP1: Claro, sin tener que hacer todo este planteo.

En la puesta en común de A4, FP3 señala que la estudiante «ve que 14 × 3 le tiene que dar 42». Advierte que se completan los espacios vacíos con el resultado de la operación planteada a la izquierda de cada signo igual. Si bien no se declara que Rosa muestra una interpretación del signo igual como indicador de un resultado, se menciona la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales para aludir a la comprensión relacional que requería la tarea: «no es que de los dos lados tiene que dar el mismo número». También se destaca un tipo de planteo frecuente en un contexto de operaciones combinadas, donde el signo igual se utiliza para separar las etapas intermedias de los cálculos realizados: «sería como una operación combinada, es decir, 14 × 3 me tiene que dar 42 y a eso le tengo que restar 3». FP3 percibe E1 e interpreta M1, que están involucrados en la resolución de Rosa; además, percibe E2 e interpreta M3, que se requieren para la resolución óptima de la tarea.

Otro ejemplo en la puesta en común de A6 (fragmento siguiente) muestra que FP4 atribuye el cambio de respuesta de Rosa a una mayor comprensión del signo igual (línea 14) y profundiza en el análisis (línea 16). Percibe E1 e interpreta M1 porque se refiere a la comprensión del signo igual como indicador del resultado de una operación, y señala que esta comprensión condujo a la suposición de que las ecuaciones dadas no tenían la misma solución. Percibe E2 e interpreta M3 puesto que entiende que se pasó a interpretar el signo igual como el indicador de una relación de equivalencia y que esta interpretación permitió resolver con acierto la tarea. Percibe E3 e interpreta M4 al destacar que Rosa identifica una transformación que permite obtener ecuaciones equivalentes (línea 18). FP8 atribuye el cambio de respuesta de Rosa a una mejor comprensión del concepto de solución de una ecuación (línea 17). Percibe E2 e interpreta M3 porque alude al entendimiento del concepto de solución de una ecuación que emerge de la estrategia y reconoce implícitamente que este entendimiento se apoya en la comprensión relacional del signo igual.

[14] FP4: Rosa le dio otro sentido al signo igual.
[15] I: ¿Cómo es eso?
[16] FP4: Antes lo tenía como resultado de la cuenta y por eso concluyó que eran distintas, pero luego, cuando vio que el sentido era llegar a una igualdad de los dos lados, comprendió.
[17] FP8: Creo que pudo entender que la *x* y la barrita en blanco son lo mismo y que, justamente, la solución es encontrar el número que falta para que se verifique la igualdad.
[18] FP4: Se da cuenta que le resta 9.

La percepción de los aspectos matemáticos de las respuestas de Rosa no siempre antecede a la interpretación de la comprensión de la alumna, sino que, en ocasiones, esta interpretación actúa como puente para la percepción de los elementos matemáticos relevantes correspondientes. En A4, por ejemplo, no se percibe primero la no simetría de la igualdad (E1) para luego interpretarse que se está comprendiendo el signo igual de manera operacional (M1), sino que se realiza esta interpretación aludiendo simultáneamente a esa propiedad. Esto significa que interpretar no siempre es consecuencia de percibir, sino que también pueden contribuir a este último proceso los conocimientos matemáticos en juego.

¿Qué y cómo son capaces de decidir los FP?

Se identifican dos grandes estrategias en las decisiones de los FP durante la sesión de trabajo. La primera se refiere a la toma de decisiones que no están fundamentadas en elementos matemáticamente relevantes. Esto conduce a sugerir tareas que evitan el error (por ejemplo, considerar variables en ambos miembros de una ecuación para impedir la interpretación operacional del signo igual) o a formular preguntas que podrían favorecer una visión operacional del signo (por ejemplo, promover la asociación entre resultado, solución y segundo miembro de una ecuación utilizando la formulación «cuánto da»). La segunda estrategia consiste en tomar decisiones basadas en una sólida percepción e interpretación. Estas resultaron más potentes para promover el aprendizaje de los distintos significados del signo igual. No obstante, los indicios de percepción e interpretación no aseguran la toma de una decisión apropiada para el aprendizaje de este signo. Decidir es una destreza de mayor dificultad con respecto a percibir e interpretar.

En la puesta en común de A2, por ejemplo, FP1 propone modificar el segundo miembro de $2x + 15 - 9 = 31 - 9$: «propusimos poner $-x$ de este lado, en lugar de –9, para que la ecuación no quede igual a un número». Si bien la literatura muestra que incluso en el contexto de ecuaciones con la variable en ambos miembros los estudiantes pueden evidenciar una comprensión operacional del signo igual (Parodi et al., 2017), FP1 realiza una propuesta con el fin de obstaculizar esa posibilidad. Se intenta evitar el error de la estudiante, en lugar de tomar una decisión que a Rosa le permita identificar y superar la dificultad relativa al signo igual. La decisión adoptada no favorece la comprensión de este último. FP1 prevé la formulación de preguntas que fortalecen la idea de solución como resultado: «¿ahora cómo se resuelve?, ¿cuánto da ahora?, ¿cuánto dan las dos?». Este discurso puede explicar la asociación que suelen establecer los estudiantes entre resultado, solución y segundo miembro de una ecuación. Los FP no parecen considerar la forma en la que sus discursos pueden ayudar a la comprensión operacional del signo.

En la puesta en común de A4 (fragmento siguiente), FP3 reconoce que los profesores tienden a proponer tareas de cálculo en las que el signo igual se utiliza solamente como un operador o como propuesta de actividad (línea 20). Sugiere un abordaje de sentencias numéricas para completar, aunque no presenta ningún ejemplo. También destaca que los profesores tienden a plantear ecuaciones algebraicas en un contexto estándar de operaciones-igual-respuesta (línea 22). Por ello propone invertir la posición de los miembros con respecto al igual, para así promover otros significados de este signo.

[19] I: ¿Qué tipo de prácticas podrían estar incidiendo en esta respuesta?
[20] FP3: En primero, siempre se trata de resolver una operación y no de buscar el número que falta para que se cumpla una igualdad.
[21] I: ¿Qué más?
[22] FP3: También poner la incógnita del otro lado de la igualdad, porque siempre se pone la cuenta a la izquierda y el resultado a la derecha.
[23] I: ¿Por ejemplo?
[24] FP3: En lugar de plantear 15 por 3 igual a algo, plantear el espacio antes de 15 por 3.

Al avanzar la puesta en común de A4, como se muestra a continuación, la discusión se instala en las prácticas de aula que podrían enriquecer la comprensión del signo igual. FP5 vuelve sobre la tendencia a utilizar el signo igual como un operador en contexto aritmético (línea 25). Percibe E1 e interpreta M1 porque focaliza en la lectura unidireccional y en la comprensión operacional en un contexto de operaciones para calcular. Retoma la propuesta de invertir las expresiones con respecto al signo igual (línea 25), donde recupera E1 para favorecer M2. FP8 señala inconvenientes de utilizar el signo igual solo como propuesta de actividad (línea 29), aporta razones matemáticas para desplazar ese uso del signo y plantea una estrategia para favorecer la comprensión relacional (línea 27): suprimir el igual al plantear un cálculo.

[25] FP5: Siempre se plantea una operación combinada en la que el igual está como «resultado de» y no como símbolo de igual. No siempre debería ser de izquierda a derecha.
[26] I: ¿Por acá, FP8?
[27] FP8: La solución que encontramos es poner cuadraditos y aplicar la propiedad simétrica de la igualdad o directamente quitar el signo igual.

[28] I: ¿Cómo es eso?
[29] FP8: Poner «calcula 2 por 7» y sacarle el signo igual porque, en realidad, poner «2 por 7 igual…» ¿igual qué? Perdí la relación de equivalencia y ahí ya estamos en un error matemático. Si no, ¿cuándo van a entender que el signo igual relaciona dos cosas?… nunca.

Los tres equipos discuten durante la puesta en común de A7 (fragmento siguiente). FP1 y FP2 reflexionan respecto a la necesidad de variar las actividades de enseñanza para generar aprendizajes y a la utilidad de explorar el pensamiento matemático de los estudiantes (líneas 32, 34). FP5 alude al tiempo que requiere la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos (línea 31). Estas reflexiones de carácter general, que no se refieren específicamente al signo igual, muestran que los indicios de la llamada mirada profesional no afloran linealmente durante la sesión de trabajo. En particular, las propuestas realizadas por los FP en cuanto que evidencias de su destreza para decidir están relacionadas con el contexto aritmético y algebraico en el que apareció el signo igual; es decir, la mirada profesional está sujeta al tipo de producción analizada y al campo temático en el que se inscribe.

[30] I: ¿Qué otra reflexión deja el trabajo de hoy?
[31] FP5: Que lleva tiempo y trabajo generar un nuevo concepto en una persona.
[32] FP1: Que se tienen que plantear diferentes actividades para lograr eso, se tiene que cambiar de estrategias.
[33] I: ¿Y respecto de las producciones de los estudiantes?
[34] FP2: Que, si es necesario, tenemos que llamarlos a otra instancia y preguntarles qué es lo que quisieron escribir, porque a veces nos quedamos con una idea y sacamos conclusiones que no refieren a lo que ellos pensaron.
[35] FP7: Sí, bucear más en qué pensó el estudiante.

Cambios en la manera de percibir, interpretar y decidir

Para explorar si existen cambios, se realiza un análisis global de todas las evidencias, ejemplificadas en 5.1 y 5.2, a partir del cual se establecen tres grados de evidencia de la mirada profesional.

En la destreza de percibir, el grado bajo implica la consideración de aspectos de la situación no relacionados con elementos matemáticos relevantes del signo igual: «Rosa escribe una flecha para indicar que x vale 8» (en A1). El grado medio se refiere a percibir algunos de los elementos matemáticos relevantes que involucra la situación: «Rosa, al verificar, realiza operaciones y obtiene el mismo número a cada lado del signo igual» (se percibe solo E2 en A1). El grado alto alude a percibir todos los elementos matemáticos relevantes implicados: «Rosa verifica, pero no sé si puede leer el igual en los dos sentidos» (se percibe E1 y E2 en A1).

En la destreza de interpretar, el grado bajo implica que se infiere la comprensión matemática que revela la situación, sin aludir al signo igual: «Rosa se olvidó de responder» (en A1). El grado medio se refiere a la interpretación de algunos momentos de comprensión del signo igual involucrados: «Rosa comprende el concepto de solución porque deja entrever que 8 es solución de cada ecuación» (se interpreta solo M3 en A1). El grado alto alude a la interpretación de todos los momentos de comprensión implicados: «Rosa comprende el concepto de solución, o bien está asociando solución con resultado, por eso no responde» (se interpreta M1 y M3 en A1).

En la destreza de decidir, el grado bajo implica tomar una decisión que no aporta a la comprensión del signo igual o reflexionar sin realizar una propuesta concreta: «le propondría que vuelva a leer la consigna». El grado medio alude al hecho de tomar decisiones sobre un solo elemento matemático relevante del signo igual de la situación para favorecer un solo momento de comprensión: «le propondría igualdades con operaciones del lado derecho» (se considera E1 para favorecer M2 en A1). El grado alto alude a la toma de decisiones en torno a dos o más elementos matemáticos relevantes del signo igual en la situación dada para favorecer dos o más momentos de comprensión de este signo: «le propondría igualdades con operaciones del lado derecho y con operaciones a ambos lados del signo igual» (se consideran E1 y E2 para favorecer M2 y M3 en A1).

A partir de esta categorización, se realizan tres esquemas para ilustrar las intervenciones más representativas de cada equipo (figuras 1, 2 y 3), según la destreza, el grado de evidencia (rojo: bajo; amarillo: medio; verde: alto) y la actividad en la que tiene lugar cada una de estas. Se colocan etiquetas con enunciados breves que permiten sintetizar lo que cada equipo percibe, interpreta o decide en cada punto del recorrido. Los esquemas revelan cambios en los tres equipos al percibir, interpretar y decidir en torno al signo igual, los cuales se visualizan gráficamente al comparar el color de los puntos representados sobre una misma línea horizontal.

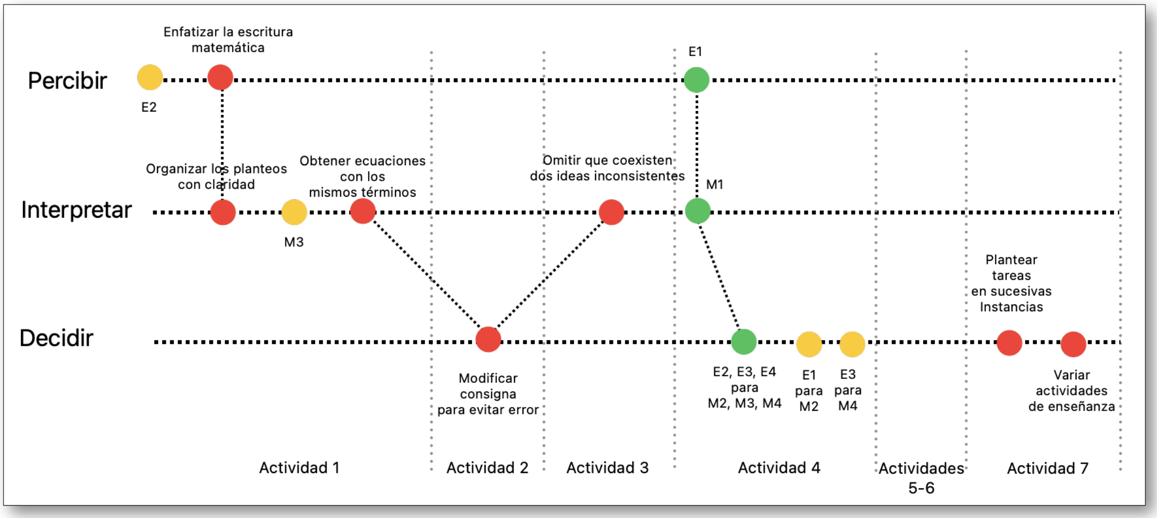


Fig. 1. Mirada profesional del equipo A.

El equipo A, en A1, percibe aspectos de la escritura matemática que no aportan información sobre la comprensión del signo igual. Considera que la ausencia de respuesta de la alumna se debe a una falta de claridad en los planteamientos. Cuestiona la falta de reconocimiento directo de la equivalencia de las ecuaciones dadas, una estrategia de resolución válida pero poco común en estudiantes de secundaria. En A2 propone modificar la tarea para evitar la asociación entre solución y segundo miembro de la ecuación (error), en lugar de tomar una decisión para abordar ese fallo. En A3 interpreta que la estudiante continúa asociando resultado, segundo miembro y solución de una ecuación, omitiendo la coexistencia de dos ideas contradictorias. En A4 interpreta que se está comprendiendo el signo igual como el indicador del resultado de una operación, percibe implícitamente la lectura unidireccional del signo igual y la asocia al planteamiento exclusivo de operaciones para calcular o ecuaciones del tipo $ax + b = c$ para resolver. Toma decisiones que ayudan a la comprensión del signo igual: abordar sentencias numéricas, trabajar con ecuaciones del tipo $c = ax + b$ y utilizar el modelo de la balanza en el estudio de las ecuaciones. En A5 y A6 no se observan evidencias de percepción, interpretación o decisión. En A7 el equipo realiza reflexiones genéricas que no atañen a la enseñanza y el aprendizaje del signo igual: por ejemplo, plantear tareas que demanden más de una instancia de trabajo.

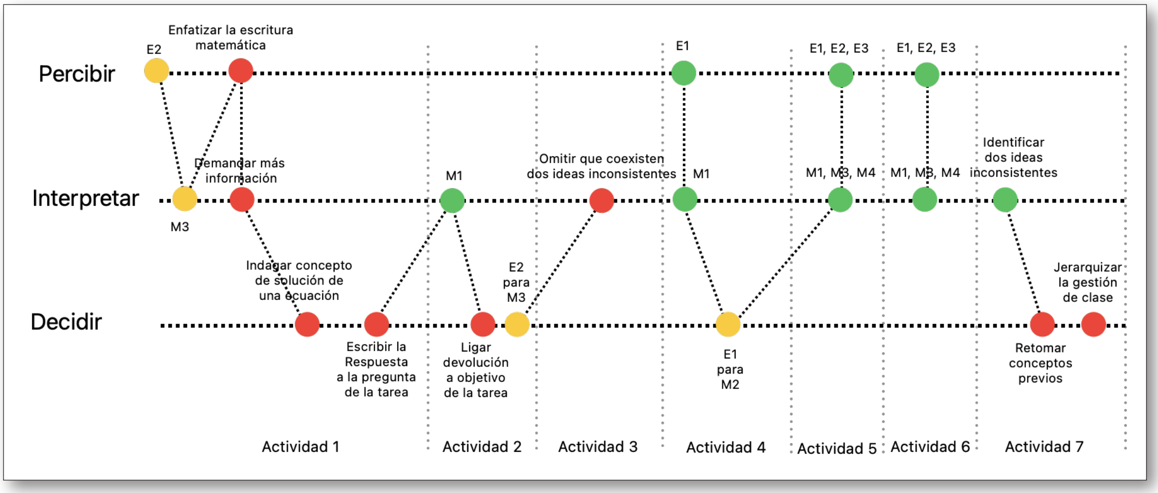


Fig. 2. Mirada profesional del equipo B.

El equipo B, en A1, describe la estrategia de la alumna manifestando preocupación por la forma en que se expresan matemáticamente las ideas, y, aunque problematiza el entendimiento que se infiere del concepto de solución de una ecuación, concluye que es necesario contar con más información. Propone que la alumna indique la solución de cada ecuación y que responda la pregunta de la tarea, sin el propósito explícito de enriquecer la interpretación del signo igual. En A2 alude a la asociación entre resultado de una operación y solución de una ecuación. Sugiere que la alumna está entendiendo la resolución de ecuaciones como la realización de cálculos. Se sugiere sustituir la variable de cada ecuación por la solución de la alumna y condicionar la devolución proporcionada a los objetivos de la tarea; lo que constituye una reflexión genérica, que no aporta nada a la interpretación del signo matemático. En A3 se omite la coexistencia de dos ideas inconsistentes porque se interpreta que la estudiante comete un error de redacción en A1 y A2. En A4 destaca la lectura unidireccional del signo igual, la interpretación de este como indicador del resultado de una operación y la decisión de cambiar expresiones de lugar con respecto al signo igual en cálculos. En A5 y A6 el equipo B muestra una completa evidencia de percepción e interpretación de elementos matemáticos y momentos de comprensión del signo. Alude a la propiedad conmutativa para abordar sentencias numéricas sin realizar cálculos en A5, así como a la habilidad para reconocer directamente la equivalencia de las ecuaciones en A6. En A7 interpreta que conviven dos ideas contradictorias del concepto de solución de una ecuación en la mente de la estudiante. Las reflexiones finales no atienden a la enseñanza y el aprendizaje del signo igual: por ejemplo, se habla de retomar los conceptos previos para avanzar en la enseñanza de cada temática.

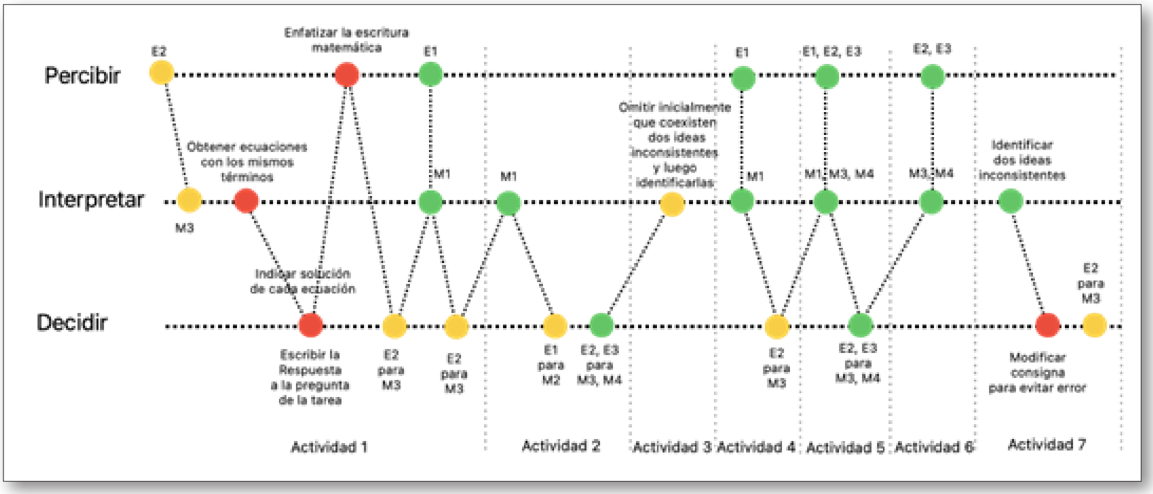


Fig. 3. Mirada profesional del equipo C.

El equipo C, en A1, percibe la escritura matemática de la estudiante, pero también plantea indagar qué significado tiene para la alumna la expresión «22, 22», lo que puede ayudar a la interpretación del signo igual. Anticipa una lectura unidireccional del signo y la asociación entre solución y segundo miembro de una ecuación. Propone una tarea para abordar el concepto de solución de una ecuación. En A2 se refiere a la interpretación del signo igual como indicador del resultado de una operación y toma decisiones para favorecer el aprendizaje de este signo: por ejemplo, planteando una ecuación y su solución para indagar si otra ecuación dada tiene la misma solución. En A3 evidencia una dificultad para reconocer la coexistencia de dos ideas inconsistentes en la alumna, que se diluye al avanzar la puesta en común. En A4 destaca la tendencia de los profesores a limitar el uso del signo igual como propuesta de tarea y sugiere suprimir este signo al plantear operaciones para calcular. En A5 y A6 percibe, interpreta y plantea una nueva intervención para la enseñanza de este signo: abordar sentencias numéricas ligadas al conocimiento de la propiedad conmutativa. En A7 reconoce el pensamiento inconsistente de la estudiante y toma dos nuevas decisiones de enseñanza: jerarquizar la verificación de ecuaciones y proponer ecuaciones con soluciones que no coincidan con el segundo miembro. Esto último es otro ejemplo del fenómeno ya identificado consistente en modificar la consigna de una tarea para evitar que se repita un error, en lugar de tomar una decisión para abordar la dificultad.

En los tres equipos destacan los indicios de mirada profesional que afloran desde A4 en adelante, que contrastan con las dificultades de los FP respecto de esta habilidad hasta la puesta en común de A3.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se propuso examinar la mirada profesional en torno al signo igual de un grupo de FP, en una sesión de trabajo en la que se planteó una secuencia de actividades para analizar respuestas de una estudiante a tareas sobre este signo. Se plantearon tres preguntas de investigación: *i*) ¿qué y cómo son capaces de percibir e interpretar los FP?, *ii*) ¿qué y cómo son capaces de decidir?, *iii*) ¿existen cambios en sus maneras de percibir, interpretar y decidir?

Respecto de la primera pregunta, al percibir, los FP tienden a centrar la atención en la escritura matemática que, si bien es un aspecto que desarrollar durante la escolarización, no debería constituir el principal objetivo de aprendizaje en la iniciación al álgebra. Al interpretar, aluden con frecuencia a la organización de los planteamientos para dar sentido a los errores de la alumna. Los indicios de percepción no siempre anteceden a los de interpretación, porque si bien el conocimiento matemático facilita la interpretación de la comprensión de los estudiantes, el progreso en la destreza de interpretar también enriquece el conocimiento matemático del futuro profesor. Esto es consistente con van den Kieboom et al. (2017), quienes reportan que los futuros maestros no focalizan en la interpretación del signo igual al explorar estrategias de estudiantes que resuelven tareas sobre este signo.

Respecto de la segunda pregunta, los FP deciden proponer intervenciones para evitar errores de la alumna, en lugar de implementar acciones para abordarlos. Se amplían, pues, los resultados de Kiliç y Masal (2019), quienes informan que los FP consideran innecesario intervenir para favorecer la comprensión del signo igual en entrevistas uno a uno a partir de tareas sobre este signo. Las decisiones que favorecen la comprensión del signo igual son precedidas por evidencias de percepción e interpretación, aunque la percepción e interpretación no asegura una toma de decisiones pertinente. Decidir es la destreza más difícil de desarrollar, en concordancia con estudios previos (Fernández y Choy, 2020; Lee y Choy, 2017).

Respecto de la tercera pregunta, en la sesión de trabajo se revelan cambios en los modos de percibir, interpretar y decidir. Basta contrastar la puesta en común de las primeras tres actividades, donde afloran las dificultades informadas, con la puesta en común de las cuatro actividades restantes, donde aumenta el grado de evidencias de cada destreza. Particularmente en A6, los FP analizan con acierto una respuesta de la alumna que ya habían examinado con dificultad en A1 y en A2. Este estudio explora, entonces, una aproximación a la mirada profesional en el que las distintas concepciones del signo igual no se proporcionan de antemano, sino que emergen en el transcurso de una secuencia diseñada a partir de estas. La emergencia de estas conceptualizaciones teóricas durante la sesión de trabajo orienta el análisis del pensamiento matemático de los estudiantes y permite visibilizar la problemática del signo igual (Prediger, 2010; Stephens, 2006). Este hallazgo entra en diálogo con investigaciones previas que discuten el rol de las lentes teóricas para apoyar la mirada profesional del profesor en formación (Fernández y Choy, 2020; Nickerson et al., 2017; entre otros), pues la secuencia implementada, en ausencia de dichas lentes teóricas previas, resultó eficaz para que estas afloraran y surgieran indicios de mirada profesional en torno al signo igual.

Se complementa y se avanza en la caracterización de las dificultades relativas a esta habilidad y se proporcionan pruebas sobre el potencial de una secuencia para explicitar la problemática del signo igual y ayudar a los FP a mirar profesionalmente en torno a este signo. Una limitación de este abordaje se refiere al sesgo que pudieron ocasionar las interacciones grupales, al realizarse las inferencias respecto de las destrezas de esta habilidad. Se requiere, por tanto, más investigación al respecto para indagar el modo en el que la secuencia implementada, como parte de un módulo de enseñanza, puede aportar a la caracterización y al desarrollo de la mirada profesional en torno al signo igual; esto es, sobre cómo puede enseñarse a mirar profesionalmente.

REFERENCIAS

Bartell, T., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 57-79. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9205-4

Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 77-98. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1561

Darr, C. (2003). The meaning of «equals». *New Zealand Council for Education Research*, *2*, 4-7. https://doi.org/10.18296/set.0686

Fernández, C. y Choy, B. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing: learning, teaching, psychological, and social perspectives. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 337-364). Brill.
https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 747-759.
https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.
https://doi.org/10.1007/bf00311062

Kiliç, S. y Masal, E. (2019). Secondary school students' attitudes towards the concept of equality and preservice teachers' professional noticing. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, *6*(3), 49-60.
https://doi.org/10.17220/ijpes.2019.03.006

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N. y Stephens, A. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 514-519.
https://doi.org/10.5951/mtms.13.9.0514

Lee, M. y Choy, B. (2017). Mathematical teacher noticing: the key to learning from lesson study. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 121-140). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_8

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À. y Groenwald, C. (2019). «Mirar profesionalmente» las situa- ciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Ediciones Universidad Salamanca.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 316-350.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0316

Nickerson, S., Lamb, L. y LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 381-398). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_22

Parodi, S. (2016). *Significados del signo igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo grado de enseñanza secundaria* [Tesis de maestría no publicada]. IPN.

Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2017). La comprensión del signo igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(3), 51-67.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2302

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 73-93.
https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 1305-1329.
https://doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(3), 249-278.
https://doi.org/10.1007/s10857-006-9000-1

Van den Kieboom, L., Magiera, M. y Moyer, J. (2017). Learning to notice student thinking about the equal sign: K-8 preservice teachers' experiences in a teacher preparation program. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 141-159). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_9

Van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-596.

Zapatera, A. (2019). Descriptores del desarrollo de la mirada profesional en el contexto de la generalización de patrones. *Bolema*, *33*(65), 1464-1486.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a23

Professional Noticing of the Equal Sign in Prospective Teachers

Sebastián Parodi, Cristina Ochoviet
Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
parodiseb@gmail.com, cristinaochoviet@gmail.com

Javier Lezama
Profesor invitado, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, México
jlezamaipn@gmail.com

Professional noticing of students' mathematical thinking in situations that involve the equal sign is examined in this study. The participants –all of them prospective teachers– are studying the last year of a mathematics teaching program at a teacher training institute in Uruguay. Three research questions were posed: *i*) what and how the prospective teachers are able to perceive and interpret, *ii*) what and how they are able to decide, and *iii*) whether there changes in their ways of perceiving, interpreting and deciding. A conceptualization of professional noticing and a categorization of students' conceptions regarding the equal sign is adopted as a theoretical perspective. A sequence of activities is implemented during a work session aimed at all participants, in which the analysis of students' responses to tasks involving different interpretations of the equal sign is proposed. For data collection, the session was audio recorded. During the session, an academically productive talk in the classroom was promoted. This investigation's results explain how the skills required by a prospective teacher's professional noticing interact and develop. Two practices were fundamental for the development of these important skills in prospective teachers: the analysis of tasks presented within the arithmetic context of numerical sequences to complete or assess, where the equal sign is interpreted as an indicator of the result of an operation, and the analysis of tasks presented within the algebraic context of first-degree equations, in which the root of the equation and the right side of the equation coincide. With regards to the first question, when perceiving, the participants tend to focus their attention on mathematical writing, which, although it is an aspect to be developed during secondary education, should not constitute the main learning objective when first approaching algebra. Regarding interpreting, prospective teachers frequently refer to the organization of the statements to make sense of the student's errors. Perception does not always precede interpretation, because although mathematical knowledge facilitates the interpretation of students' understanding, progress in the skill of interpretation also enriches the mathematical knowledge of the prospective teacher. Regarding the second question, the prospective teachers decide to propose tasks to avoid the student's errors, instead of implementing actions to address them. Decisions that favor the understanding of the equal sign are preceded by evidence of perception and interpretation, although perception and interpretation do not ensure relevant decision making. Deciding is the most difficult skill to develop, in line with previous studies. As for the third question, changes in the ways of perceiving, interpreting, and deciding are revealed in the work session. This study explores, therefore, an approach to professional noticing in which the different conceptions of the equal sign are not provided in advance but emerge over the course of a sequence designed upon them. The emergence of these theoretical conceptualizations during the work session guides the analysis of the students' mathematical thinking and makes the problem around the understanding of the equal sign visible. This finding enters into dialogue with previous research discussing the role of theoretical lenses to support the development of professional noticing in prospective teachers, since the sequence implemented, in the absence of previous theoretical lenses, was effective for the emerging of those lenses and to favor the development of professional noticing of the equal sign.