CONEXIONES MATEMÁTICAS UTILIZADAS POR PROFESORES MEXICANOS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR AL RESOLVER TAREAS SOBRE LA PENDIENTE

Gerardo Salgado-Beltrán y Javier García-García

Esta investigación tuvo por objetivo identificar las conexiones matemáticas que establecen un grupo de profesores mexicanos de Nivel Medio Superior al resolver tareas que involucran el concepto de pendiente. Una conexión matemática se entiende como una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con los de otras disciplinas o de la vida real. Para la colecta de datos se utilizó una entrevista basada en tareas y el análisis temático para analizarlos. Los resultados indicaron que los profesores establecieron seis tipos de conexiones matemáticas: representaciones diferentes, procedimental, significado, característica, parte-todo e implicación.

Términos clave: Conexiones Matemáticas; Educación Matemática; Pendiente; Profesores mexicanos

Mathematical Connections used by Mexican High School Teachers when Solving Tasks about the Slope

The aim of this research was to identify the mathematical connections made by a group of Mexican high school teachers when solving tasks that involve the concept of slope. A mathematical connection is understood as a true relationship between two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations, and meanings among them, with those of other disciplines or of real life. A task-based interview was used to collect data, and thematic analysis were used to analyze the data. The results indicated that teachers made six types of mathematical connections: different representations, procedural, meaning, feature, part-whole and implication.

Keywords: Mathematics Connections; Mathematics Education; Mexican Teachers; Slope

Salgado-Beltrán, G. y García-García, J. (2024). Conexiones Matemáticas utilizadas por profesores mexicanos de nivel medio superior al resolver tareas sobre la pendiente. *PNA, 18*(3), 255-283. https://doi.org/10.30827/pna.v18i3.27691

Conexões matemáticas usadas por professores mexicanos de Nível Médio Superior na resolução de tarefas sobre à inclinação

O objetivo desta pesquisa foi identificar as conexões matemáticas estabelecidas por um grupo de professores mexicanos de Nível Médio Superior na resolução de tarefas envolvendo o conceito de inclinação. Uma conexão matemática é entendida como uma verdadeira relação entre duas ou mais ideias, conceitos, definições, teoremas, procedimentos, representações e significados entre si, com as de outras disciplinas ou vida real. Para a coleta de dados, utilizou-se entrevista baseada em tarefas e análise temática para analisá-los. Os resultados indicaram que os professores estabeleceram seis tipos de conexões matemáticas: diferentes representações, processuais, significado, característica, parte-tudo e implicação.

Palavras-chave: Conexões matemáticas; Educação Matemática; Inclinação; Professores mexicanos

La matemática es una ciencia en la cual los objetos, relaciones y operaciones que la integran, están relacionados naturalmente; lo cual, conlleva a una variedad de conexiones matemáticas entre los conceptos inherentes a ella (Businskas, 2008). Esta cualidad, convierte a la matemática en una disciplina secuencial, ya que cada tema es la base para la construcción de otro (Bingölbali y Coşkun, 2016; García-García y Dolores-Flores, 2018). Por estas razones, las conexiones matemáticas resultan fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicha disciplina, debido a que son la base para desarrollar la comprensión de los conceptos (Barmby et al., 2009; Mhlolo, 2012). Sin embargo, su producción no es una tarea fácil, ya que requiere de un dominio profundo de los saberes y de un pensamiento heurístico y creativo hacia la disciplina (Bingölbali y Coşkun, 2016).

En la última década, el estudio de las conexiones matemáticas ha cobrado relevancia en la investigación en educación matemática. En ese contexto, algunos trabajos han propuesto a partir de datos empíricos diversas tipologías de conexiones matemáticas (Businskas, 2008; Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Rodríguez-Nieto et al., 2021; García-García, 2024), otros han documentado las conexiones entre la matemática y fenómenos del mundo real (Karakoç y Alacacı, 2015; Özgen, 2013). También, se ha estudiado la comprensión matemática en estudiantes desde las conexiones matemáticas que realizan (Mhlolo et al., 2012; Rodríguez-Nieto et al., 2021; Campo-Meneses y García-García, 2021). En dichas investigaciones, se ha remarcado la necesidad de seguir estudiando las conexiones matemáticas en diferentes poblaciones y contextos para los diversos conceptos matemáticos.

Derivado de lo anterior, la presente investigación ha asumido como objeto de estudio a las conexiones matemáticas que emergen al trabajar con el concepto pendiente. Debido a que este concepto matemático es protagonista en el currículum de matemáticas de México y otros países donde es objeto de enseñanza y aprendizaje desde la escuela secundaria hasta el superior (Dolores-Flores et al., 2020; Moore-Russo et al., 2011). También, se constituye como un prerrequisito fundamental para desarrollar un pensamiento matemático avanzado, debido al vínculo que tiene con otros conceptos matemáticos y fenómenos de la vida real (Carlson et al., 2010; Confrey y Smith, 1995; Stump, 2001a). Por tanto, su comprensión no es fácil, ya que va más allá de solo considerarlo como un cálculo algebraico vinculado a la inclinación de una recta (Moore-Russo et al., 2011).

En los últimos años, la investigación en torno a la pendiente se ha centrado en documentar los errores y dificultades de los estudiantes de diferentes niveles educativos al trabajar con dicho concepto (Zaslavsky et al., 2002; Teuscher y Reys, 2012; Cho y Nagle, 2017). También, se ha explorado en el conocimiento de profesores y estudiantes las múltiples conceptualizaciones que realizan sobre la pendiente cuando resuelven tareas que la involucran (Stump, 1999, 2001b; Moore-Russo et al., 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Nagle et al., 2013; Casey y Nagle, 2016; Nagle et al., 2017; Rivera et al., 2019). Otros, se han centrado en la exploración de los significados que los profesores y estudiantes atribuyen a dicho concepto (Byerley y Thompson, 2017; Thompson, 1994). Sin embargo, aún existen necesidades por satisfacer.

De acuerdo con lo anterior, se ha podido apreciar que el estudio de la pendiente ha sido muy nutrido en los últimos años. Sin embargo, es escasa la investigación centrada en las conexiones matemáticas sobre este concepto. Principalmente en los profesores mexicanos de matemáticas, quienes tienen una injerencia directa en el aprendizaje de sus estudiantes (Byerley y Thompson, 2017; Dolores-Flores et al., 2019; Salgado, 2020; Salgado y Dolores, 2021). Por lo tanto, la presente investigación planteó como objetivo identificar las conexiones matemáticas que establecen un grupo de profesores mexicanos de Nivel Medio Superior (en adelante NMS) al resolver tareas que involucran el concepto de pendiente.

Marco conceptual

El fundamento del estudio se enmarca desde posicionamientos teóricos sobre las conexiones matemáticas y sus tipologías.

Conexiones matemáticas

La literatura en educación matemática cuenta con diversas posturas respecto a lo que son las conexiones matemáticas. Una de las primeras ideas fue la de Brown (1993) quien las definió como una relación o asociación causal o lógica. Para Coxford (1995) son ideas o procesos amplios que pueden usarse para vincular diferentes temas en matemáticas. Mientras que para Godino et al. (2003) los procesos matemáticos implican establecer relaciones entre distintos objetos matemáticos y redes de enlace que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos; dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones.

Por su parte, Businskas (2008) asumió que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B. Basado en esta postura, así como la de otros autores, García-García y Dolores-Flores (2018) consideran a las conexiones matemáticas como una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con los de otras disciplinas o de la vida real. Para efectos de esta investigación, se entiende el constructo conexión matemática en el mismo sentido que García-García y Dolores-Flores (2018).

Tipologías de conexiones matemáticas

Las conexiones matemáticas se pueden clasificar en dos grandes grupos: intramatemáticas que implican una relación entre conceptos, procedimientos, teoremas, significados y representaciones matemáticas entre sí (García-García y Dolores-Flores, 2018) y; extramatemáticas que implican una relación entre un modelo matemático con un problema no matemático (Dolores y García-García, 2017). Para efectos de esta investigación, consideramos sólo a las conexiones intramatemáticas.

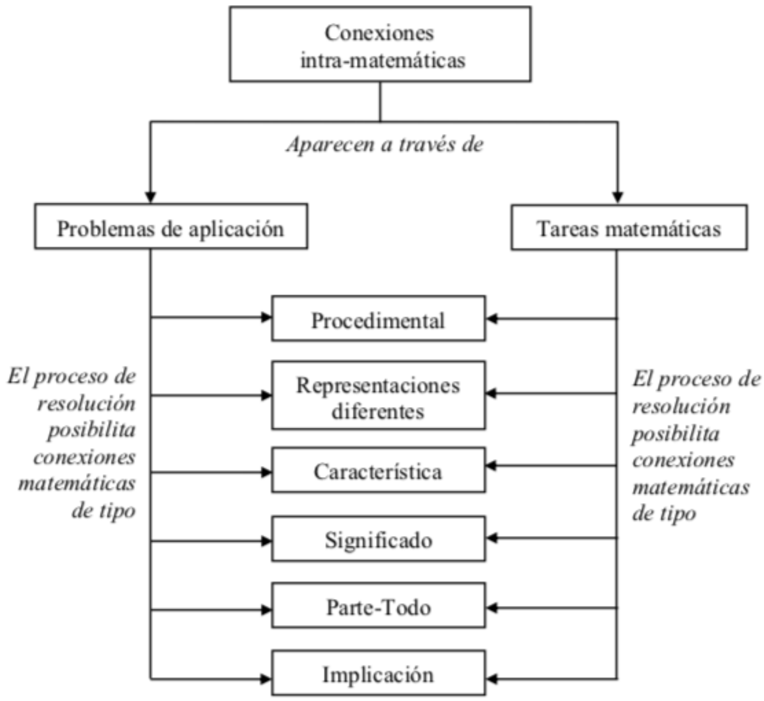


Figura 1. Tipología de conexiones matemáticas (adaptado de García, 2018)

De acuerdo con García-García y Dolores-Flores (2018) y Businskas (2008) las conexiones matemáticas son un proceso mediante el cual una persona establece una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real, es decir, que las conexiones matemáticas podrían emerger dentro de la matemática misma o entre entidades matemáticas, pero también involucrar conceptos de otras disciplinas (Figura 1).

Por esta razón, el marco de referencia que consideramos en esta investigación para estudiar a las conexiones matemáticas se retoma principalmente de Businskas (2008) y García-García y Dolores-Flores (2018, 2021a, 2021b).

- *Procedimental:* se manifiesta cuando los profesores utilizan reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática e incluyen explicaciones para lograr un resultado. Por ejemplo, cuando un profesor utiliza la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para encontrar la pendiente de una recta a partir de dos puntos que pertenecen a la misma y explica su forma de proceder.
- *Representaciones diferentes:* se manifiesta de dos formas: a) representaciones alternativas, cuando los profesores utilizan dos o más representaciones para interpretar un concepto matemático dentro de dos registros diferentes (algebraico- gráfico, verbal-algebraico, etc.); b) representaciones equivalentes, cuando los profesores representan el mismo concepto matemático de dos maneras diferentes dentro del mismo registro. Por ejemplo, cuando un profesor asume que la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es equivalente a $m = tan\,\theta$ tomadas de un mismo triángulo rectángulo construido a partir de dos puntos de la recta.
- *Característica:* esta conexión ocurre cuando los profesores identifican en los conceptos matemáticos atributos o cualidades que los hacen diferentes o semejantes a otros. A través de esta conexión matemática podemos diferenciar simbologías matemáticas, la forma en que pueden ser representados o pueden ayudar a identificar cierto orden que favorece algunos cálculos. Asimismo, se manifiesta cuando se describen las propiedades de los conceptos. Por ejemplo, cuando un profesor identifica la pendiente como una constante lineal en una recta, da cuenta de una de las cualidades que posee la pendiente en una recta, ser la misma sin importar la pareja de puntos que se tome para su cálculo.
- *Significado:* sucede cuando los profesores atribuyen un sentido propio a un concepto matemático, es decir, lo que significa para ellos. Puede incluir la definición que ellos han construido para estos conceptos, es diferente de la conexión matemática característica porque no se describen propiedades ni cualidades. Por ejemplo, cuando el profesor define a la pendiente como la medida de la inclinación de la recta, probablemente influenciado por su experiencia con el concepto, sin embargo, representa lo que significa para él, dado que busca explicar su postura.
- *Parte-todo:* se manifiesta cuando los profesores identifican relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos, ya sea de generalización (entre

casos generales y particulares) o de inclusión (cuando un concepto matemático está contenido en otro). Por ejemplo, cuando el profesor identifica la pendiente como un caso particular de la razón de cambio, evidenciando que el todo es la razón de cambio y la pendiente una parte de ella.

- *Implicación:* ocurre cuando de una premisa A se llega a una premisa B de forma lógica. Tiene la forma de "*si...*, *entonces...*". Por ejemplo, si el profesor señala que al calcular la pendiente de una recta utilizando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ esta se indetermina entonces es paralela al eje y.

METODOLOGÍA

La investigación es cualitativa y empleó un estudio de caso. Este tipo de investigación permite centrarse en la búsqueda de significados y la comprensión de conceptos matemáticos en el saber de los individuos donde el producto final es descriptivo (Merriam y Tisdell, 2016). Además, implica un proceso de búsqueda que se caracteriza por el análisis detallado, comprehensivo y sistemático del fenómeno de estudio (Rodríguez et al., 1999). En particular, nos enfocamos en comprender el problema mediante lo siete casos involucrados en esta investigación porque favorece la explicación teórica que sustenta el problema (Stake, 1995).

Contexto de la investigación y participantes

La investigación se desarrolló en las instalaciones de la Facultad de Matemáticas de una Universidad Autónoma al sur de México en diciembre de 2022. Los participantes fueron siete profesores de matemáticas de NMS (5 hombres y 2 mujeres), los cuales contaban con una experiencia de 10 años en servicio como mínimo impartiendo los cursos de Geometría Analítica y Cálculo Diferencial. Al momento de esta investigación, se encontraban impartiendo en una etapa final el curso de Geometría Analítica y habían culminado el trabajo con la pendiente (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2013). Asimismo, los profesores participantes colaboraron voluntariamente y con buena disposición. En adelante, se denota a los profesores por P1, P2, P3, P4, P5, P6 y P7.

Colecta de datos

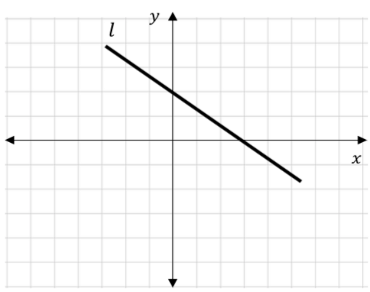
Para el logro del objetivo planteado en esta investigación se diseñó y aplicó una entrevista basada en tareas (en adelante, EBT). De acuerdo con Goldin (2000), la EBT involucra un entrevistador (el que plantea y pregunta) y un sujeto (el que resuelve), que interactúan en torno a una o más tareas (preguntas, problemas o actividades). El sujeto habla durante o inmediatamente después de resolver una tarea para evidenciar su conocimiento y razonamiento en el proceso de resolución y, el investigador al analizar el comportamiento o las interacciones verbales y no verbales puede hacer inferencias sobre el conocimiento, el aprendizaje y las formas de interpretación (Koichu y Harel, 2007). Se eligió este método por que permitió centrar la atención en los procesos de los profesores al resolver las tareas matemáticas en lugar de solo tener en cuenta respuestas correctas e incorrectas de los resultados. En este sentido, se profundizó en las producciones escritas y orales (argumentos) de los profesores que realizaron durante la resolución de las tareas propuestas.

El protocolo para el entrevistador contempló preguntas auxiliares básicas para todas las tareas —por ejemplo, ¿por qué lo hiciste así?, ¿conoces otra vía de solución?, ¿a qué te refieres con este término?, ¿por qué utilizaste esa fórmula?— y otras específicas, que permitieron conocer a detalle su razonamiento y conocimiento sobre la pendiente, debido a que fueron planteadas cuando el participante expresaba una idea confusa o cuando carecía de argumentos su forma de proceder o para activar diferentes vías de solución que éste pudiera conocer.

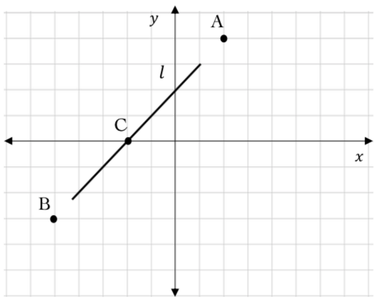
Inicialmente se propusieron diez tareas retomadas de Byerley y Thompson (2017), Hoffman (2015), Salgado y Dolores (2021) y Salgado (2020), libros de texto de Geometría Analítica y Cálculo Diferencial del NMS (Salazar, 2010; Mazón, 1997) que fueron adaptadas con base en el objetivo del estudio. Las tareas fueron validadas por expertos y a través de una prueba piloto. La validación por expertos se dejó a cargo de dos catedráticos e investigadores con experiencia investigativa sobre la pendiente y las conexiones matemáticas. Los criterios de la validación del contenido de las tareas fueron: claridad en la redacción, nivel de dificultad de la tareas y preguntas adecuadas al objetivo.

Para ganar confiabilidad en redacción, asequibilidad y correspondencia con los objetivos del estudio, se hizo una aplicación piloto del instrumento a dos profesores de matemáticas de bachillerato en servicio. Esta fue videograbada para su posterior análisis y tuvo una duración de 60 a 90 minutos. El pilotaje fue importante para rediseñar las tareas que integran el protocolo final empleado para este estudio. Después de la validación, el instrumento final se conformó de seis tareas.

- Tarea 1. Explique, ¿para usted qué es la pendiente?
- Tarea 2. Explique, ¿qué propiedades tiene la pendiente?
- Tarea 3. Encuentre la pendiente de la recta l.



- Tarea 4. Explique, ¿qué debe ocurrir para que al prolongar la recta l pase por los puntos A y B?



- Tarea 5. Grafique una curva f que satisfaga la condición $f'(2) = 0$.
- Tarea 6. Explique si los puntos $A(-2,6), B(4,6), C(4,3)$ y $D(-2,3)$ se corresponden con los vértices de un rectángulo.

Análisis de datos

Para el tratamiento de los datos se empleó el análisis temático (Braun y Clarke, 2012), el cual permite identificar patrones de significados (temas) a partir de un conjunto de datos provenientes de las respuestas de los profesores a las tareas planteadas en el protocolo de la EBT. Se eligió este método porque es útil para realizar un análisis basado en teoría (como en esta investigación) y para un grupo pequeño de datos. Así pues, este método permite examinar e identificar patrones en datos cualitativos y, se compone de seis fases, las cuales se describen a continuación.

Fase 1. Familiarización con los datos. Se transcribió cada entrevista y se digitalizaron las producciones escritas. Posteriormente se hizo una lectura global de las respuestas para tener ideas iniciales sobre las conexiones matemáticas que realizaron los profesores y para familiarizarse con el lenguaje utilizado por los participantes.

Fase 2. Generar códigos iniciales. Se identificaron en las respuestas de los profesores, relaciones entre dos o más conceptos, definiciones, teoremas y significados entre sí; lo cual permitió generar códigos iniciales relacionados con las conexiones matemáticas asociadas a la pendiente. Por ejemplo, el caso del P7 al resolver la tarea 5 indicó que la pendiente de una curva es una cantidad no necesariamente constante como en las rectas, lo cual permitió generar el código: “la pendiente de una curva puede cambiar de un punto a otro”. Este proceso, se realizó con las producciones de los siete profesores.

Fase 3. Buscar temas y subtemas. Se asignaron y ordenaron códigos relacionados entre sí y se establecieron familias de códigos (subtemas). Lo cual, permitió agrupar aquellos con el mismo patrón de respuesta. Los subtemas construidos fueron asociados a un tipo de conexión matemática (Temas). Cada subtema es un tipo de conexión matemática específica de la pendiente (construido a partir de los datos) y cada tema es un tipo de conexión matemática (de acuerdo con el marco conceptual).

Fase 4. Revisión de los temas. Se realizaron dos niveles de revisión (Braun y Clarke, 2006). En el primer nivel, se revisaron los datos codificados, se observaron todos los códigos generados para cada tema y se cuidó que estos formaran un patrón coherente. En el segundo nivel, se realizó un proceso similar involucrando todos los datos. Además, para cada nivel se realizó una revisión entre pares (investigadores del estudio) para incrementar la calidad y validez del análisis de los datos. Lo anterior, permitió perfeccionar el proceso de identificación de las conexiones matemáticas.

Fase 5. Definición y nombre de los temas. Se definió y nombró cada tipo de conexión matemática identificada en los datos durante las sesiones de trabajo.

Fase 6. Elaboración del informe. Se elaboró incluyendo los subtemas definidos y agrupados en temas que contienen las conexiones matemáticas identificadas sobre la pendiente. Para los propósitos de la investigación, se presentan los resultados por tipología de conexiones matemáticas identificadas.

RESULTADOS

El análisis de las producciones escritas y verbales de los siete casos permitieron construir 27 subtemas asociados al concepto de pendiente, los cuales corresponden a las conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual. Estas emergieron cuando los profesores resolvieron las tareas propuestas.

Conexiones matemáticas de tipo procedimental

Esta conexión matemática se identificó en los siete casos (Tabla 1).

Tabla 1
Conexiones matemáticas de tipo procedimental

Subtemas	Frecuencia
Procedimental	
Una recta l que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con $x_2 \neq x_1$, su pendiente se calcula con la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.	7
La pendiente se calcula como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde Δy y Δx son las diferencias asociadas a los catetos de un triángulo rectángulo con dos de sus vértices situados en la recta.	6
Se sustituye el valor de la pendiente m y las coordenadas de un punto $A(x_1, y_1)$ en $(y - y_1) = m(x - x_1)$ para obtener la ecuación de una recta.	1
A partir del dibujo de la recta se calcula su pendiente a través de desplazamientos.	1

Al responder la tarea 1, es decir, al explicar qué es la pendiente, guiados por su noción de concepto de procedimiento algebraico implicado en el cálculo de la pendiente cuando se conocen dos puntos por dónde pasa una recta, los profesores realizaron su explicación basándose en la fórmula de la pendiente (ver extracto del diálogo con P4 para la tarea 1).

P4:	Bueno, para mí la pendiente es un concepto geométrico atribuido a la recta.
Investigador:	¿Puede explicar el porqué de su postura?
P4:	Sí, claro. Mire, habitualmente es un concepto trabajado en geometría analítica cuando se aborda la recta. Entonces, si una recta pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,1)$, su pendiente se obtiene con $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-2}{3-1}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$.
Investigador:	¿Existe alguna condición para el uso de dicha fórmula?
P4:	Sí, claro. No puede utilizarse si el denominador se hace cero, es decir si $x_2=x_1$.
Investigador:	¿A qué se refiere?
P4:	Yo sé que una recta que pasa por los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ su pendiente se calcula con la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, si el denominador es cero el cociente no existe.

También, dicha idea emergió en las tareas 2, 3 y 4; al referirse a las propiedades que tiene la pendiente, los siete casos señalaron que la fórmula (cociente de diferencias) es aplicable siempre y cuando la recta no sea vertical de lo contrario se indeterminaría. Aunado a lo anterior, al determinar el valor numérico de la pendiente de una recta l trazada en un plano, la totalidad de los casos de estudio se enfocaron en identificar dos puntos por donde pasa la recta, para luego sustituir sus componentes en la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y así determinar su valor numérico (ver Figura 2).

En relación con la idea anterior, al explicar cuál es la condición que posibilita que una recta dada en el plano al prolongarse pase por otros puntos, los profesores utilizaron reiteradamente la fórmula para calcular la pendiente de la recta utilizando parejas de puntos en el plano y concluyendo que la colinealidad proviene del valor constante de la pendiente. Lo anterior, posibilitó construir el subtema "una recta l que pasa por los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ con $x_2\neq x_1$, su pendiente se calcula con la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$".

Asimismo, en el proceso de resolución de las tareas 3 y 4, surgieron otros procedimientos en el razonamiento de los profesores. En ese sentido, al determinar la pendiente de una recta l a partir de su gráfica, seis casos señalaron que es posible obtener su valor utilizando la fórmula $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, argumentando que, al conocer dos puntos por donde pasa la recta, siempre es posible construir un triángulo rectángulo por debajo o encima de la misma y, por consiguiente, la medida de los catetos se vincula con Δy y Δx .

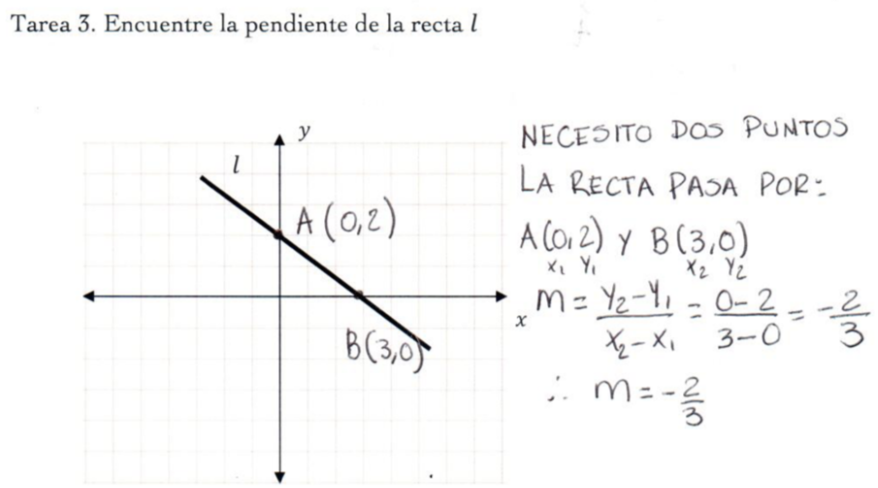


Figura 2. Procedimientos realizados por P3 para resolver la tarea 3

Lo anterior posibilitó construir el subtema "la pendiente se calcula como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde Δy y Δx son las diferencias asociadas a los catetos de un triángulo rectángulo con dos de sus vértices situados en la recta". Otro procedimiento identificado en el caso del P1 para la tarea 4, consistió en la obtención de la ecuación de la recta l utilizando el modelo $(y - y_1) = m(x - x_1)$, debido a que previamente había determinado el valor de su pendiente y, por consiguiente, era suficiente para él, identificar las coordenadas de un punto de la recta y sustituir ambos datos en la ecuación para obtenerla (ver Figura 3). Esto permitió construir el subtema "se sustituye el valor de la pendiente m y las coordenadas de un punto $A(x_1, y_1)$ en $(y - y_1) = m(x - x_1)$ para obtener la ecuación de una recta".

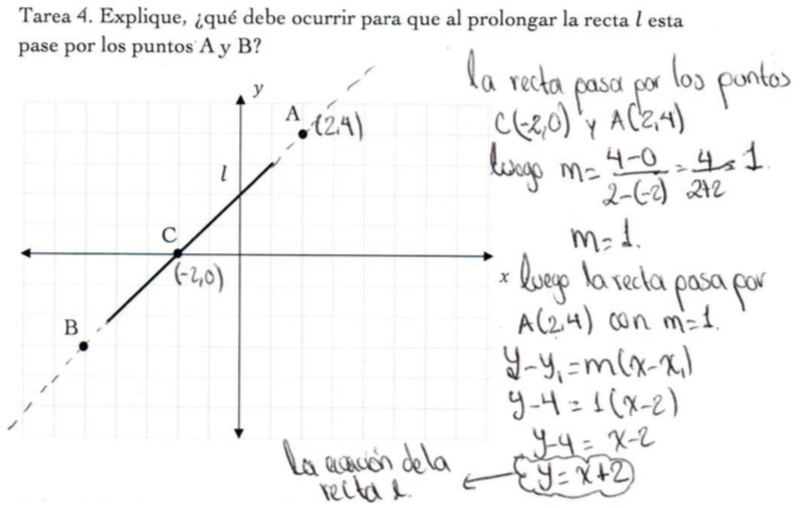


Figura 3. Procedimientos realizados por P1 para resolver la tarea 4

Otro hallazgo identificado en el caso del P4 para la tarea 3 fue que, al obtener la pendiente de la recta *l* a partir de su gráfica, utilizó desplazamientos horizontal y vertical a partir de un punto para cuantificar los cambios y obtener su cociente (ver Figura 4), lo cual permitió construir el subtema "a partir del dibujo de la recta se calcula su pendiente a través de desplazamientos".

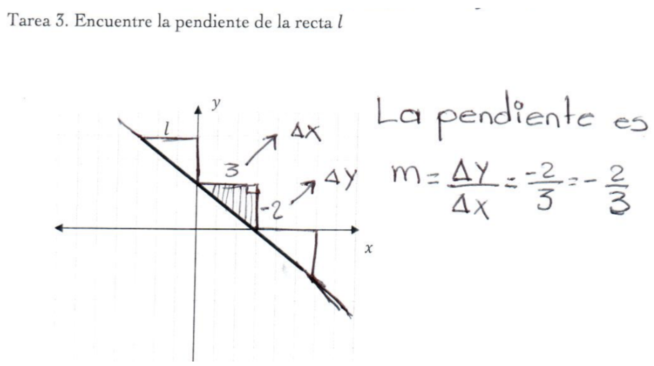


Figura 4. Procedimientos realizados por P4 para resolver la tarea 3

Finalmente, es importante destacar que la conexión matemática de tipo procedimental se identificó en todos los casos. En general, utilizaron diferentes métodos algebraicos o gráficos para resolver las tareas propuestas e incluyeron explicaciones para lograr su resultado.

Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes

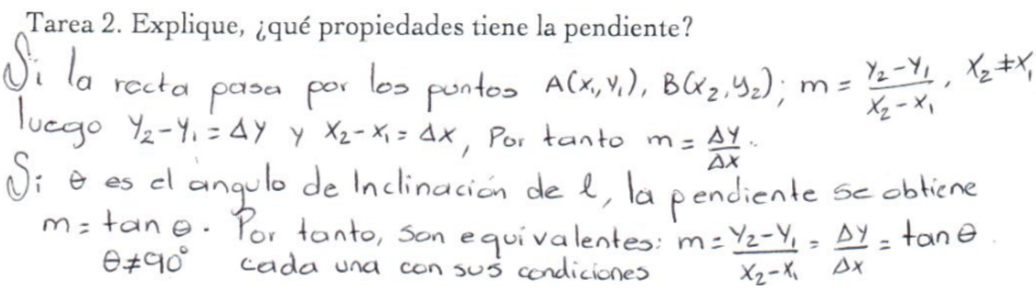
Esta conexión matemática se identificó en distintos momentos. A este respecto, seis casos al responder la tarea 2 utilizaron diferentes representaciones para interpretar la equivalencia entre los modelos implicados en su cálculo (Tabla 2).

Tabla 2

Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes

Subtemas	Frecuencia
Representaciones diferentes	
Las expresiones de la igualdad $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tan\,\theta$ son equivalentes e indican la pendiente de la recta.	6
La pendiente es un concepto asociado a situaciones físicas y funcionales del mundo real.	6
La fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es equivalente a $m = tan\,\theta$ tomadas de un mismo triángulo rectángulo construido a partir de dos puntos de la recta.	3
A partir de la gráfica de una recta se determina $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ construyendo un triángulo rectángulo bajo ella.	1
La inclinación de una recta gráficamente permite conocer el signo de su pendiente.	1
La pendiente se representa a través de una razón geométrica conformada por un desplazamiento horizontal y otro vertical en la gráfica de una recta.	1
La pendiente de las rectas tangentes a una curva representa gráficamente la derivada de esta.	1
La pendiente gráficamente se asocia con la tangente del ángulo de inclinación de una recta.	1

Ellos indicaron que la pendiente se puede obtener a partir de un cociente de diferencias cuando se conocen dos puntos por donde pasa la recta, lo cual es equivalente a un cociente de cambios y, cuando se conoce el ángulo de inclinación de la recta, la pendiente se obtiene a partir de la tangente del ángulo siempre que este no sea un ángulo recto (Figura 5), lo anterior permitió construir el subtema "las expresiones de la igualdad $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tan\,\theta$ son equivalentes e indican la pendiente de la recta".


Tarea 2. Explique, ¿qué propiedades tiene la pendiente?

Si la recta pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$; $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$ luego $y_2 - y_1 = \Delta y$ y $x_2 - x_1 = \Delta x$, Por tanto $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si θ es el angulo de Inclinación de ℓ, la pendiente se obtiene $m = \tan\theta$. Por tanto, son equivalentes: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$

$\theta \neq 90°$ cada una con sus condiciones

Figura 5. Equivalencia de modelos planteado por P2 en la tarea 2

Por otra parte, seis casos de estudio utilizaron diferentes contextos cotidianos para representar e interpretar la pendiente, entre los cuales se destacan: la construcción de rampas para personas con discapacidad, diseño de escaleras, diseño de casas con techo de doble caída y construcción de calles, entre otros. También, interpretaron a la pendiente como un concepto variacional que permite estudiar fenómenos relacionados con la razón de cambio, como: distancia en función del tiempo y velocidad en función del tiempo, entre otros (ver Figura 6). Lo anterior, posibilitó construir el subtema "la pendiente es un concepto asociado a situaciones físicas y funcionales del mundo real".

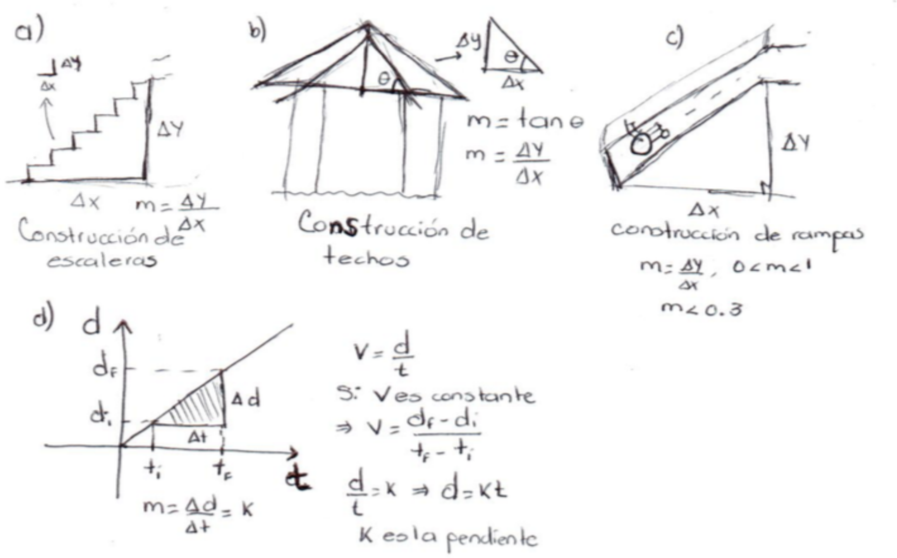


Figura 6. Representaciones de la pendiente atribuida a fenómenos del mundo real hechas por P2

También, se encontraron ideas de equivalencia en las explicaciones de tres casos de estudio en torno al cálculo de la pendiente cuando se conocen: dos puntos por donde pasa la recta y su ángulo de inclinación; esto a través del triángulo rectángulo construido bajo la recta. Esta representación se corresponde con el subtema "la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es equivalente a $m = tan\,\theta$ tomadas de un mismo triángulo rectángulo construido a partir de dos puntos de la recta".

En esta misma dirección, en el caso del P3 su respuesta para la tarea 4 evidenció otro método para calcular la pendiente. Con argumentos geométricos y cuantificando los cambios que integran el cociente diferencial, el profesor construyó un triángulo rectángulo haciendo coincidir dos vértices con dos puntos de la recta, para posteriormente determinar la medida de los catetos y establecer el valor de las diferencias. Dicho procedimiento se corresponde con el subtema "a partir de la gráfica de una recta se determina $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ construyendo un triángulo rectángulo bajo ella".

Por otro lado, el subtema "la inclinación de una recta gráficamente permite conocer el signo de su pendiente" se construyó a partir de las producciones del P7 para la tarea 4. En el proceso de resolución, indicó que el crecimiento de la gráfica da la pauta para inferir el signo positivo de su pendiente, en cambio una recta decreciente conlleva a un signo negativo, mientras que en una recta constante la pendiente es cero. Posteriormente, calculó la pendiente de la recta dada utilizando la tangente del ángulo de inclinación y, encontrando el valor de uno para la misma; dicho procedimiento permitió construir el subtema "la pendiente gráficamente se asocia con la tangente del ángulo de inclinación de una recta" (ver extracto del diálogo con P7 para la tarea 4).

P7: Yo lo atribuyo a la pendiente. Por lo que veo esta tiene un ángulo de inclinación de 45º.

Investigador: ¿Por qué hace esa aseveración?

P7: Bueno, la recta corta a los ejes en los puntos $(-4,0)$ y $(0,4)$, por lo cual concluyo que es paralela a la identidad $y = x$, la cual tiene un ángulo de inclinación de 45º. Por lo cual, al calcular la pendiente de la recta dada, esta será $m = tan\, 45° = 1$, la pendiente es 1.

Investigador: ¿Qué significa eso profesor?

P7: Mire, de entrada yo me percaté que la gráfica de la recta es creciente, por dicha razón tenía la idea de que su valor debe ser positivo. Si hubiese sido decreciente el signo sería negativo, ya que una constante tiene pendiente 0.

Por otra parte, en el caso del P6 al resolver la tarea 4 utilizó un método geométrico. Partiendo de un punto de la recta y realizando un desplazamiento horizontal y otro vertical para llegar a un segundo punto. Señaló que la pendiente se puede representar a través de esta razón (Figura 7).

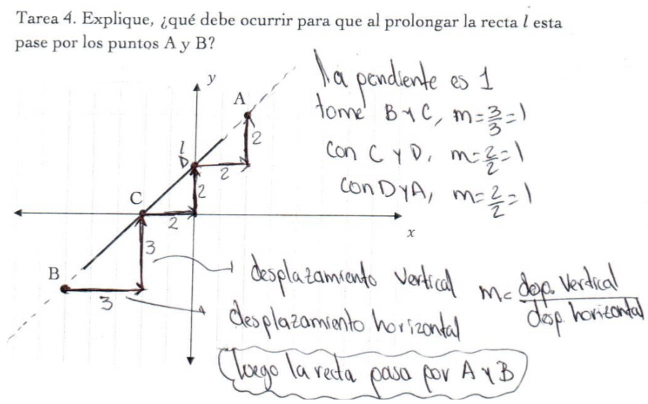


Figura 7. La pendiente como razón geométrica por el P6

Esta representación permitió construir el subtema "la pendiente se representa a través de una razón geométrica conformada por un desplazamiento horizontal y otro vertical en la gráfica de una recta".

La pendiente es un concepto geométrico con implicaciones en el Cálculo Diferencial. Esto quedó expuesto en la respuesta del P1 para la tarea 5, dónde al graficar una curva f de acuerdo con la condición $f'(2) = 0$, interpretó que la pendiente de la recta tangente a la curva f en $x = 2$, debe ser 0. Lo cual, le conlleva a trazar una gráfica continua en torno a $x = 2$ con un mínimo local en $A(2, k)$, siendo k un real cualquiera. En este sentido, el P1 señaló que dicha condición involucra la posibilidad de infinitas curvas, evidenciando así ideas conceptuales en torno a la derivada (Figura 8). Lo anterior, posibilitó la construcción del subtema "la pendiente de las rectas tangentes a una curva gráficamente representa la derivada de esta".

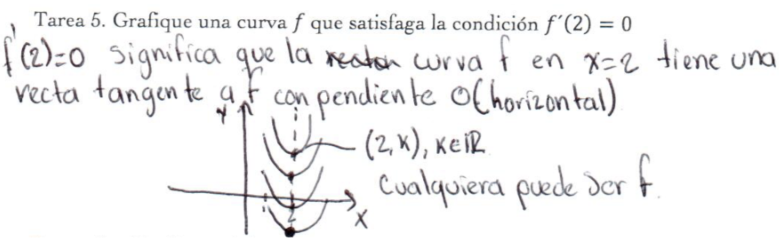


Figura 8. La pendiente vinculada a la derivada por el P1

Conexiones matemáticas de tipo característica

Los siete casos de estudio realizaron esta tipología de conexiones al reconocer propiedades de la pendiente cuando resolvieron las tareas 1, 2, 4 y 5 (Tabla 3).

Tabla 3

Conexiones matemáticas de tipo característica

Subtemas	Frecuencia
Característica	
La pendiente es una constante lineal en una recta.	7
La pendiente se denota con *m*.	7
La pendiente es el coeficiente paramétrico en las ecuaciones de la recta: $y = mx + b$ y $y - y_1 = m(x - x_1)$.	5
La pendiente de una curva puede cambiar de un punto a otro.	3
La pendiente de una recta cumple la propiedad multiplicativa: $\Delta y = m \cdot \Delta x$.	3

Por ejemplo, P2 en la tarea 2 explicó que, en la gráfica de la recta dada, al calcular su pendiente a partir de dos puntos cualesquiera el valor siempre es constante debido a que se trata de una cualidad de la pendiente en las rectas (ver Figura 9). Este argumento permitió construir el subtema "la pendiente es una constante lineal en una recta". Así mismo, al referirse a la simbología que permite identificar a la pendiente de otros conceptos, los profesores señalaron que en la literatura matemática se utiliza la letra m, lo cual dio la pauta para construir el subtema "la pendiente se denota con m".

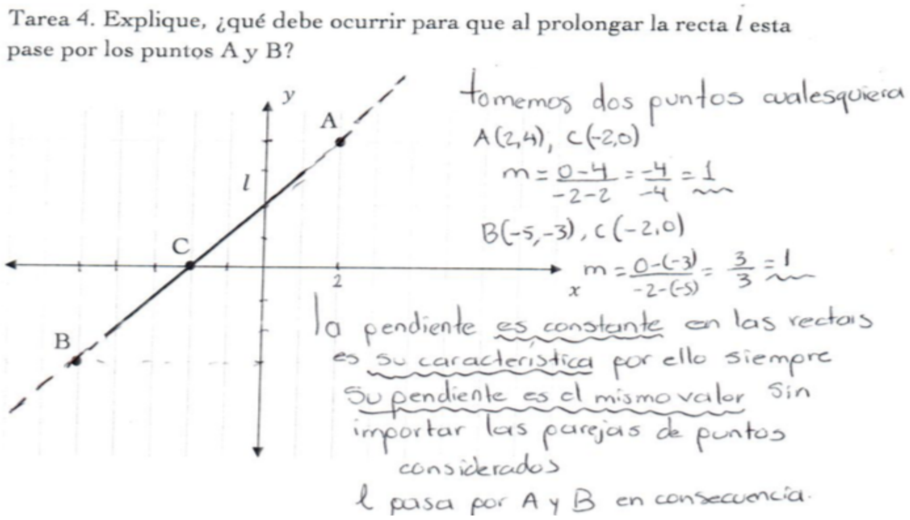


Figura 9. La pendiente como constante lineal en la producción escrita de P2

Otra cualidad de la pendiente identificada en los argumentos de cinco casos se refiere a la identificación de ésta en diferentes modelos de la ecuación de la recta (p. ej., pendiente-ordenada al origen y punto-pendiente), la cual permitió construir el subtema "la pendiente es el coeficiente paramétrico en las ecuaciones de la recta: $y = mx + b$ y $y - y_1 = m(x - x_1)$".

Por otro lado, los profesores P1, P3 y P5 evidenciaron en sus respuestas para las tareas 2 y 4, argumentos vinculados a la propiedad multiplicativa de la pendiente de una recta, la cual indica que el cambio en y es igual a la pendiente por el cambio en x, señalando que esto se corresponde con uno de los rasgos esenciales de la pendiente de una recta (ver extracto del diálogo con P3 en la tarea 2). Dicha cualidad permitió construir el subtema "la pendiente de una recta cumple la propiedad multiplicativa: $\Delta y = m \cdot \Delta x$".

P3: La pendiente de una recta se calcula como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (escribe esta expresión), luego una característica importante es que $\Delta y = m \cdot \Delta x$ (señala la propiedad que escribe en su cuestionario), es decir, el cambio en y es la pendiente por el cambio en x.

Investigador: ¿Por qué lo considera importante?

P3: Porque de no cumplirse no sería una recta, por lo tanto, es esencial.

Investigador: Explique más sobre dicha propiedad.

P3: Bueno, todo está relacionado. Tomé dos puntos de la recta y calculé su pendiente, luego asigné un valor cualquiera al incremento en equis

(Δx) y al multiplicarlo por la pendiente, se obtiene el incremento en y (Δy), estos valores lo mandarán a otra pareja de puntos de la recta.

Por último, en los casos del P3, P5 y P7 para la tarea 5 se identificó en sus producciones otra propiedad de la pendiente vinculada al Cálculo Diferencial, en la cual se reconoce que la pendiente de una curva es una cantidad no necesariamente constante como en las rectas. Debido a que, la pendiente de una curva es una cantidad variable (siempre que no sea constante en algún subconjunto de su dominio). Dicha cualidad permitió construir el subtema "la pendiente de una curva puede cambiar de un punto a otro".

Conexiones matemáticas de tipo significado

Este tipo de conexiones emergió cuando se planteó la tarea; explique, ¿para usted qué es la pendiente? Los siete casos indicaron que para ellos se trata de un número real, el cual, representa el valor numérico de la pendiente, obtenido de diferentes maneras; también la significaron como la tangente del ángulo de inclinación cuando es conocida la amplitud de giro de la recta (Tabla 4). Dichas cualidades se corresponden con los subtemas "la pendiente es un número real" y "la pendiente de una recta que forma un ángulo de inclinación θ respecto al eje x es $m = tan\,\theta$".

Tabla 4

Conexiones matemáticas de tipo significado

Subtemas	Frecuencia
Significado	
La pendiente de una recta que forma un ángulo de inclinación θ respecto al eje x es $m = tan\,\theta$.	7
La pendiente es un número real.	7
La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.	5
La pendiente es el coeficiente angular de una recta.	3
La pendiente es la medida de la inclinación de la recta.	1

Aunado a lo anterior, los casos P1, P2 y P5 señalaron que para ellos la pendiente es el coeficiente angular de la recta, mientras que P3 la significó como la medida de la inclinación de la recta (ver extracto del diálogo con P3 en la tarea 1). Estas ideas permitieron construir los subtemas "la pendiente es el coeficiente angular de una recta" y "la pendiente es la medida de la inclinación de la recta".

Investigador: Explique, ¿para usted qué es la pendiente?

P3: […] Bueno, la pendiente es un número real, también se sabe que, a partir del ángulo de inclinación de la recta la pendiente es $m = tan\,\theta$ (escribe esta expresión).

Investigador:	Explique más sobre dichas ideas.
P3:	La pendiente se puede explicar desde diferentes perspectivas. Mire, la pendiente es la medida de la inclinación de una recta, pero ¡ojo! no es el ángulo de inclinación, eso debe quedar claro. También, se define como el coeficiente angular de una recta. Todas estas ideas se refieren al concepto de la pendiente.

Otro significado encontrado en las respuestas de los casos P1, P2, P4, P5 y P7 es el atribuido a la derivada de una función. Al referirse a la pendiente, indicaron que este concepto geométrico también se puede significar desde un enfoque variacional, señalando que en Cálculo es la derivada de una función para una equis de su dominio, lo cual permite conocer la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. Este significado permitió construir el subtema "la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto".

Conexiones matemáticas de tipo parte-todo

Estas conexiones matemáticas se identificaron en las respuestas de los casos P1, P3 y P7 para la tarea 1, quienes establecieron relaciones lógicas de generalización o inclusión involucrando la pendiente y la razón de cambio (Tabla 5).

Por ejemplo, en el caso del P1 al explicar qué es la pendiente indicó que es un caso particular de la razón de cambio. Mientras que en el caso del P3 indicó que el concepto de pendiente es incluido por la razón de cambio, ya que este último se refiere a la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio y cuando estas coinciden, emerge la idea de pendiente. Por su parte, en el caso del P7 señaló que la pendiente es parte del concepto de razón de cambio, de ahí que este profesor considera que es posible vincular ideas geométricas y variacionales al concepto de la pendiente (ver extracto del diálogo con P7 en la tarea 1). Las respuestas descritas de los profesores permitieron construir el subtema "la pendiente es un caso particular de la razón de cambio" donde la parte es la pendiente y la razón de cambio es el todo (concepto más general).

P7:	Es un concepto complejo de enseñar. […] Bueno, existe un vínculo directo entre la pendiente y la razón de cambio.
Investigador:	Explique más sobre el vínculo que señala.
P7:	[…] La pendiente es parte del concepto de la razón de cambio, eso sí se cumple y de ahí el por qué se atribuyen nociones geométricas y variacionales al concepto. Mire, la razón de cambio se obtiene a través de un cociente de diferencias, por ejemplo, esta es una razón de cambio $v = (d_f - d_i)/(t_f - t_i)$ (escribe la expresión). Si lo miramos, el modelo es similar al de la pendiente, solo hay que asumir que las cantidades involucradas tengan la misma unidad de medida y de ahí caemos en la pendiente de la recta. Por tal razón, veo que la pendiente forma parte de la razón de cambio.

Tabla 5
Conexiones matemáticas de tipo parte-todo e implicación

Subtemas	Frecuencia
Parte-todo	
La pendiente es un caso particular de la razón de cambio.	3
Implicación	
La pendiente es una propiedad determinante en la que: si dos rectas l_1 y l_2 están situadas en un mismo plano con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, se cumple que: Si $l_1 \parallel l_2$ entonces $m_1 = m_2$ Si $l_1 \perp l_2$ entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$	7
El signo de la pendiente de una recta es una condición necesaria para saber su comportamiento gráfico en el plano.	4
El signo de la pendiente lo determina la medida del ángulo de inclinación de la recta, en donde: Si $0° < \alpha < 90°$ entonces $m > 0$ Si $90° < \alpha < 180°$ entonces $m < 0$ Si $\alpha = 0°$ entonces $m = 0$	2
Si al calcular la pendiente de una recta utilizando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ esta se indetermina entonces es paralela al eje y.	1

Conexiones matemáticas de implicación

Este tipo de conexiones se identificó en las producciones de todos los casos al responder la tarea 6. En la cual, procedieron a ubicar los puntos en el plano y posteriormente a unirlos con segmentos de rectas (ver Tabla 5). Luego, señalaron que un rectángulo es un cuadrilátero que pertenece a la familia de los paralelogramos, por lo cual sus lados opuestos deben ser paralelos e iguales. Con dicha información y considerando la pendiente como una propiedad determinante, indicaron que, si dos rectas situadas en un mismo plano son paralelas, entonces sus pendientes debían ser iguales; mientras que la perpendicularidad implicaba que el producto de las pendientes debe ser igual a menos uno. Posteriormente, procedieron a calcular las pendientes y la distancia de los lados del cuadrilátero, para decidir si se cumplían las propiedades de un paralelogramo. Las respuestas descritas de los profesores permitieron construir el subtema "la pendiente es una propiedad determinante en la que: si dos rectas l_1 y l_2 están situadas en un mismo plano con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, se cumple que: si $l_1 \parallel l_2$ entonces $m_1 = m_2$; si $l_1 \perp l_2$ entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$".

En la misma tarea, el caso del P3 identificó que, al calcular la pendiente de dos lados del cuadrilátero con la fórmula algebraica le llevaba a una indeterminación, entonces señaló que los lados debían ser paralelos al eje y (ver Figura 10). Esta respuesta permitió construir el subtema “si al calcular la pendiente de una recta utilizando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ esta se indetermina, entonces es paralela al eje y”.

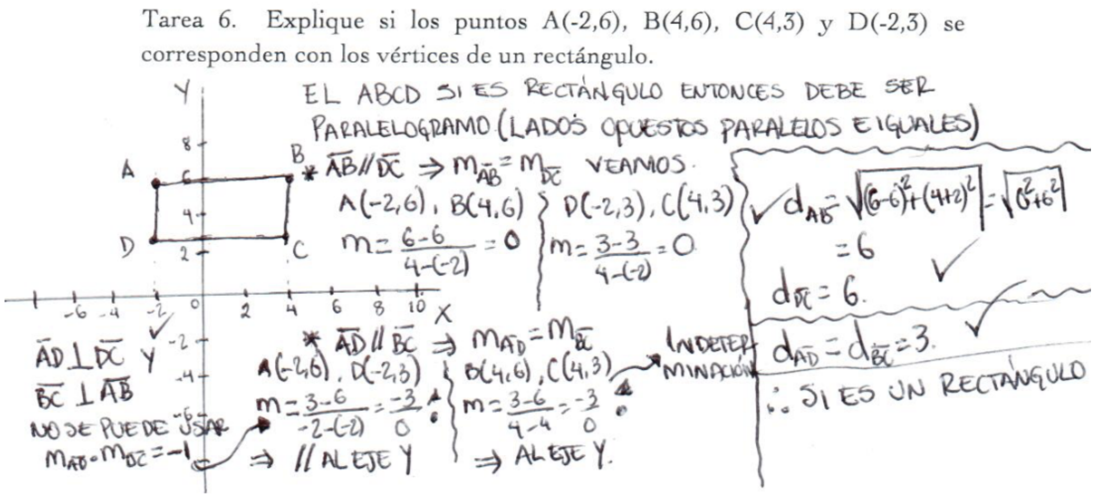


Figura 10. Conexiones de implicación en las respuestas del P3 para la tarea 6

Aunado a lo anterior, P6 y P7 al explicar las propiedades de la pendiente, indicaron que, la medida del ángulo de inclinación de una recta es una condición necesaria para determinar el signo de su pendiente. Debido a que, si una recta tiene un ángulo de inclinación agudo, entonces su pendiente es positiva; si es obtuso, entonces es negativa y; si el ángulo mide cero grados, entonces su pendiente es cero. Esta respuesta permitió construir el subtema “el signo de la pendiente lo determina la medida del ángulo de inclinación de la recta, en donde: si $0° < \alpha < 90°$ entonces $m > 0$; si $90° < \alpha < 180°$ entonces $m < 0$ y; si $\alpha = 0°$ entonces $m = 0$. En la misma tarea, los casos del P1, P2, P4 y P5 indicaron que el signo de la pendiente de una recta es una condición necesaria para determinar cómo será su gráfica en el plano, ya que una pendiente negativa implica que la recta gráficamente es decreciente; si es positiva la gráfica de la recta será creciente y; si la pendiente es cero, entonces la gráfica de la recta será paralela al eje x. Estas cualidades se corresponden con el subtema “el signo de la pendiente de una recta es una condición necesaria para saber su comportamiento gráfico en el plano”.

Discusión y conclusiones

Los resultados permitieron identificar las conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual (Tabla 6) y que son consistentes con lo que reporta la literatura en estudiantes y profesores (Businskas, 2008; Dolores Flores, 2018, 2021a, 2021b; García-García y García-García, 2024; Mhlolo, 2012; Rodríguez-Nieto et al., 2021). Las conexiones matemáticas que emergieron en los siete casos fueron: procedimental, característica, significado e implicación.

Tabla 6
Conexiones matemáticas identificadas en los siete casos de estudio

Tipología de conexiones matemáticas	Casos						
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Procedimental	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Representaciones diferentes	✓	✓	✓	✓		✓	✓
Característica	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Significado	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Parte-todo	✓		✓				✓
Implicación	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Nota. ✓= se reconoce

La Tabla 6 indica que seis de los casos de estudio realizaron conexiones de tipo representaciones diferentes. Esto porque al explicar qué es la pendiente, emplearon situaciones físicas (por ejemplo: escaleras, calles, rampas, techos de casas, etc.) y, con menor énfasis las funcionales (por ejemplo: distancia vs tiempo, volumen vs tiempo, etc.). Este hallazgo es consistente con lo encontrado por Byerley y Thompson (2017) en profesores de matemáticas de secundaria. Sin embargo, es opuesto a lo reportado por Salgado et al. (2020) quienes encontraron en profesores de NMS mexicanos escaso énfasis entre la pendiente y las situaciones del mundo real. Por otra parte, se encontró en las respuestas de un solo caso, la pendiente representada a través de una razón geométrica vista como un desplazamiento horizontal y otro vertical en la gráfica de una recta. Según Deníz y Kabael (2017), esta es una noción intuitiva fundamental que posibilita la conexión con otras ideas vinculadas a la pendiente. Sin embargo, debido al escaso uso de esta conexión en los profesores se puede inferir que la mayoría no la ha interiorizado; esto compromete el trabajo que puedan desarrollar con sus estudiantes.

Lo anterior es preocupante, ya que según los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014), los profesores de matemáticas deben abordar el concepto de pendiente con ideas intra-matemáticas y extra-matemáticas para que el estudiante pueda incorporar diversas representaciones del concepto para desarrollar la comprensión. Sin embargo, los resultados parecen indicar que los profesores lo saben hacer, pero no lo utilizan en sus clases. Esto podría explicar por qué los estudiantes de NMS en México desarrollan aprendizajes con predominio en nociones procedimentales de la pendiente (Rivera et al., 2019; Dolores-Flores et al., 2019; Salgado et al., 2020).

En relación con la conexión matemática de significado, los siete casos le atribuyen distintos sentidos como parte de su formación profesional, pero también como resultado de su práctica. En general, estos significados tienen que ver con la definición analítica de pendiente que también es promovido en los libros de texto como reportan Dolores e Ibañez (2020). Por tanto, se puede inferir que los materiales de instrucción tienen influencia en el conocimiento del profesor.

La conexión característica se evidenció en todos los casos de estudio (Tabla 3). Sin embargo, solo tres refirieron desde una perspectiva del Cálculo Diferencial la idea de que la pendiente en una curva no necesariamente es constante, dicho hallazgo es opuesto a lo reportado por Dolores-Flores et al. (2019) quienes encontraron escasas ideas variacionales de la pendiente en estudiantes del preuniversitario.

Por otro lado, tres casos de estudio evidenciaron la conexión matemática parte-todo. Al respecto, los profesores explicaron a través de ejemplos que la pendiente es un caso particular de la razón de cambio. Este resultado se produjo en una minoría, lo cual indica que, en la mayoría de los profesores existe una desconexión entre las ideas geométricas y variacionales de la pendiente, tal como lo advierten Walter y Gerson (2007) y Dolores et al. (2019). Esto indica la necesidad de que los diferentes programas de formación y actualización de profesores de matemáticas en México ofrezcan oportunidades para examinar dicho concepto enfatizando en sus conexiones matemáticas, ya que esto favorecerá su comprensión (García, 2018) y, en consecuencia, impactará positivamente en su práctica (Copur-Gencturk, 2015).

Finalmente, destacamos que para futuras investigaciones es importante estudiar las conexiones matemáticas que promueven los profesores en el aula al abordar el concepto de pendiente, ya que esto puede dar elementos para estudiar las oportunidades que ofrecen a los estudiantes para alcanzar la comprensión. En este sentido, también sería interesante estudiar la comprensión de la pendiente a través de las conexiones matemáticas que realizan profesores y estudiantes.

REFERENCIAS

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 217-241. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1

Bingölbali, E. y Coşkun, M. (2016). A proposed conceptual framework for enhancing the use of making connections skill in mathematics teaching. *Education and Science*, *41*(183), 233-249. https://doi.org/10.15390/EB.2016.4764

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-101. http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V. y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf y K. J. Sher (Eds.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology*, Vol 2: Research Designs: Quantitative, Qualitative, Neuropsychological, and Biological (pp. 57-71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Brown, L. (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles*. Clarendon Press.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral, Simon Fraser University, Canadá]. https://www.collectionscanada.gc.ca/obj/thesescanada/vol2/002/NR58735.PDF?is_thesis=1&oclc_number=755208445

Byerley, C., y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168-193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Campo-Meneses, K. G. y García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA*, *16*(1), 25-56. https://doi.org/10.30827/pna.v16i1.15817

Carlson, M., Oehrtman, M. y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 113-145.

Casey, S. y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 163-177.

Cho, P. y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 135-150.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86.

Copur-Gencturk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(3), 280-330. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.3.0280

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House y A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). National Council of Teachers of Mathematics.

Deníz, O. y Kabael, T. (2017). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H.U. Journal of Education)*, *32*(1) 123-142.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I. y García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369-389. https://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1507050

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, *120*(2), 104-115. https://doi.org/10.1111/ssm.12389

Dolores, C. e Ibañez, G. (2020). Conceptualizaciones de la Pendiente en Libros de Texto de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *34*(67), 825-846. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a22

Dolores, C. y García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 158-180. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*, 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario*. [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Guerrero, México]. https://www.researchgate.net/profile/Javier_Garcia-Garcia4

Garcia-Garcia, J. (2024). Mathematical Understanding Based on the Mathematical Connections Made by Mexican High School Students Regarding Linear Equations and Functions. *The Mathematics Enthusiast*, *21*(3), 673-718. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1646

García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(6), 912-936. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1729429

García-García, J. y Dolores-Flores, D. (2021a). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 1-22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.

Hoffman, W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews*. [Tesis Doctoral, Universidad de Carolina del Norte, EE.UU.]. https://repository.charlotte.edu/islandora/object/etd%3A1784

Karakoç, G. y Alacacı, C. (2015). Real World Connections in High School Mathematics Curriculum and Teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *6*(1), 31-46.

Koichu, B. y Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(3), 349-365. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9054-0

Mazón, J. (1997). *Cálculo Diferencial*. Mc Graw Hill.

Merriam, S. B. y Tisdell, E. J. (2016) *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4a ed.). Jossey-Bass.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176-191. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

Mhlolo, M. K., Venkat, H. y Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras*, *33*(1), 1-9. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y

Mudaly, V., y Moore-Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education Programme. *Pythagoras*, *32*(1), 27-33.

Nagle, C., Casey, S., y Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, *117*(1-2), 13-26. https://doi.org/10.1111/ssm.12203

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., y Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1491-1515. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Nacional Council of Teachers of Mathematics.

Özgen, K. (2013). Self-Efficacy Beliefs in Mathematical Literacy and Connections Between Mathematics and Real World: The Case of High School Students. *Journal of International Education Research*, *9*(4), 305-316. https://doi.org/10.19030/jier.v9i4.8082

Rivera, M. I., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1027-1046. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. y García-García, J. (2021). Exploring University Mexican Students Quality of Intra-Mathematical Connections When Solving Tasks About Derivate Concept. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(9), em2006. https://doi.org/10.29333/ejmste/11160

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Aljibe.

Salazar, V. (2010). *Matemáticas 3*. Nueva Imagen.

Salgado, G. (2020). *Conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores del bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes* [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Guerrero, México]. http://ri.uagro.mx/bitstream/handle/uagro/3834/TD_5142653_20.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Salgado, G., Rivera, M. I., y Dolores, C. (2020). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15*(57), 41-56.

Salgado, G., y Dolores, C. (2021). Imagen del concepto de pendiente evocado por profesores del bachillerato. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *109*, 89-109.

SEP (2013). *Matemáticas III*. Secretaría de Educación Media Superior. http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion- academica/programas-de-estudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124-144.

Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207-227.

Stump, S. (2001b). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207-227.

Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School, Science, and Mathematics*, *112*(6), 359-376.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 229-274. https://doi.org/10.1007/bf01273664

Walter, J. G. y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 203-233. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9048-y

Zaslavsky, O., Sela, H. y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 119-140.

Gerardo Salgado-Beltrán
Universidad Autónoma de Guerrero, México
14251@uagro.mx

Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero, México
jagarcia@uagro.mx

Recibido: marzo, 2023. Aceptado: agosto, 2023
doi: 10.30827/pna.v18i3.27691

ISSN: 1887-3987

Mathematical Connections used by Mexican High School Teachers when solving tasks about the Slope

Gerardo Salgado-Beltrán and Javier García-García

In this paper, the mathematical connections made by a group of Mexican High School teachers are shown when solving tasks about the slope concept. A mathematical connection is assumed as a true relationship between two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations, and meanings among themselves, with those of other disciplines or of real life. A task-based interview under the principles of Goldin (2000) was designed for collecting data. The choice of this method is due to the fact that it combines two resources: the interview and a questionnaire. This made it possible to know in detail the knowledge about the slope that teachers have and the mathematical connections they make. Thematic analysis was used to treat the data (Braun and Clarke, 2006, 2012), which allowed the identification of patterns of meanings (themes) of the data obtained from the answers to the tasks set out in the interview protocol. The results indicated that the teachers made six types of mathematical connections about the slope: different representations, procedural, meaning, feature, part-whole and implication. Likewise, it was found that most teachers are more likely to make mathematical connections linked to the geometric ideas of the slope concept, which revealed the weak understanding they have of the variational ideas linked to this concept.