AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | (2024) 25, 57-80 | aiem.es

seiem.es

Conexiones extra-matemáticas que establecen futuros maestros de Educación Primaria al diseñar tareas escolares geométricas

Extra-mathematical Connections Made by Prospective Elementary School Teachers when Designing Geometric Homework Assignments

Juan Pablo Vargas Herrera @ [1], Yuly Vanegas @ [2], Joaquín Giménez @ [1]

[1] Universitat de Barcelona (España)
[2] Universitat de Lleida (España)

Resumen ∞ Se describen las conexiones extra-matemáticas que emergen al enfrentar a un grupo de 250 futuros docentes de Educación Primaria a dos tareas profesionales que abordan diversas nociones geométricas. En el análisis se considera la teoría de conexiones extra-matemáticas y la herramienta del Enfoque Ontosemiótico (configuraciones epistémicas) para evidenciar la emergencia de conexiones metafóricas e interdisciplinares genéricas; las primeras referidas a la constitución de una metáfora como herramienta para acceder de una idea extra-matemática a un objeto intra-matemático; mientras que la segunda, refiere al uso de elementos pertenecientes a una disciplina particular y por tanto extra-matemáticos, para comprender un objeto intra-matemático. Los resultados y conclusiones giran en torno a la evidencia presentada sobre la emergencia de dichas conexiones. Se contribuye a la reflexión sobre la teoría de las conexiones extra-matemáticas y se da cuenta del potencial del diseño de tareas escolares en los procesos de formación de maestros de Educación Primaria.

Palabras clave ∞ Conexiones Extra-matemáticas; Formación docente; Geometría; Primaria; Enfoque Ontosemiótico

Abstract ∞ We describe the extra-mathematical connections that emerge when a group of 250 prospective elementary school teachers are confronted with two professional tasks that deal with different geometric notions. The analysis considers the theory of extra-mathematical connections and the tool of the Ontosemiotic Approach (epistemic configurations) to evidence the emergence of generic metaphorical and interdisciplinary connections; the former referred to the constitution of a metaphor as a tool to access from an extra-mathematical idea to an intra-mathematical object; while the latter refers to the use of elements belonging to a particular discipline and therefore extra-mathematical, to understand an intra-mathematical object. The results and conclusions revolve around the evidence presented on the emergence of such connections. It contributes to the reflection on the theory of extra-mathematical connections, and it shows the potential of the design of school tasks in the training processes of Primary Education teachers.

Keywords ∞ Extra-mathematical connections; Teacher training; Geometry; Primary school; Ontosemiotic approach

Vargas Herrera, J. P., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2024). Conexiones extra-matemáticas que establecen futuros maestros de Educación Primaria al diseñar tareas escolares geométricas. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 25*, 57-80. https://doi.org/10.35763/aiem25.6441

1. INTRODUCCIÓN

Establecer conexiones matemáticas es una manera en la que las personas intentan organizar ideas matemáticas en sistemas coherentes. Actualmente, no existe un consenso en la Educación Matemática sobre lo que significa una "Conexión Matemática" (García-García, 2019); sin embargo, existen diferentes propuestas que pueden ilustrar su significado. Coxford (1995) conceptualizó las conexiones como ideas/procesos amplios que pueden utilizarse para vincular temas en matemáticas e identificó tres categorías de conexiones matemáticas: *temas unificadores*, *procesos* y *conectores matemáticos*. Posteriormente, Businskas (2008) plantea que las conexiones matemáticas pueden ser consideradas como *una característica de las matemáticas*, como *una construcción del alumno* o como *el proceso de hacer asociaciones*.

Por su parte, Kenedi et al. (2019) indican que una conexión puede entenderse como una parte de una red de información que interrelaciona las matemáticas con otras ciencias y que se vuelven útiles en la medida en que sirven para comprender y establecer relaciones entre ideas y procedimientos matemáticos. Adicionalmente, una conexión matemática puede entenderse como "un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real" (García-García y Dolores-Flores, 2018, p. 22). Estudiar conexiones se hace relevante, pues establecerlas es una herramienta potente para el aprendizaje de las matemáticas, en tanto posibilitan vincular lo matemático y lo cotidiano. La capacidad de establecer buenas conexiones permite ver las matemáticas como un campo integrado (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Los planteamientos curriculares, centrados en la perspectiva de las competencias, han evidenciado la necesidad de incorporar conexiones que permitan el estudio de diferentes objetos, tanto dentro (intra-matemáticas) como fuera de las matemáticas (extra-matemáticas) y esta inclusión en los currículos actuales pone de manifiesto el desarrollo teórico en torno al objeto: "Conexiones Matemáticas".

Diferentes autores han estudiado el tipo de conexiones que establecen los estudiantes al enfrentarse a diversas tareas matemáticas (Businskas, 2008; Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2018; Kenedi et al., 2019; Rodríguez-Nieto et al., 2021). En el caso de la formación de profesores, la investigación sobre conexiones y sus clasificaciones está centrada en su mayoría en profesores de matemáticas de Educación Secundaria en formación o en servicio (García-García y Dolores-Flores, 2018) y no así en el marco de la formación inicial de profesores de Educación Primaria. Algunos estudios referidos a los tipos de conexiones abordan las intra-matemáticas en el nivel de la Educación Secundaria, y pocos estudios se dedican al análisis de las conexiones extra-matemáticas en la Educación Primaria (Vanegas y Giménez, 2018). Por tanto, se hace relevante desarrollar estudios que aborden las conexiones en el contexto de formación de profesores de Educación Primaria y de esta manera reconocer aspectos que son fundamentales para fomentar la identificación y establecimiento de conexiones en la enseñanza de las matemáticas desde los niveles iniciales.

El presente artículo busca, por una parte, describir el tipo de conexiones extra-matemáticas que logran establecer futuros docentes de Educación Primaria al diseñar tareas escolares geométricas. Por otra parte, se muestra la emergencia de dichas conexiones haciendo uso de algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico. Para ello, se realiza un análisis en el que se describen las configuraciones epistémicas de las tareas escolares propuestas por los futuros maestros (FM), identificando las prácticas matemáticas, los objetos primarios movilizados y las funciones semióticas. Además, se establecen los tipos de conexión logrados.

2. Referentes Teóricos

En las siguientes subsecciones se sintetizan las dos teorías consideradas en esta investigación.

2.1. Las conexiones matemáticas

Los estándares del currículo del NCTM (2000) refieren a dos posibles tipos de conexiones. Por una parte, se hace una identificación de la conexión de modelado entre problemas que surgen del mundo real u otras disciplinas diferentes a las matemáticas. Por otra parte, se refiere a las conexiones entre representaciones equivalentes y los procesos involucrados. En general, es posible indicar que una de las primeras razones para la existencia de las conexiones sería la idea de conectar las matemáticas con el mundo real (Businskas, 2008).

Actualmente, no existe una definición general de lo que es una conexión matemática, así como tampoco una categorización definitiva (García-García, 2019). Coxford (1995) propone que una conexión es una serie de ideas/procesos muy amplios que pueden utilizarse para vincular diferentes temas de las matemáticas; Businskas (2008) reconoce que las conexiones matemáticas han sido estudiadas históricamente como características de las propias matemáticas; en este sentido, se sabe que existen relaciones particulares entre conceptos matemáticos y la tarea de los profesores de matemáticas es asegurarse de que esas conexiones lleguen a los estudiantes; según el NCTM (2000) el aprendizaje es más profundo y duradero si los alumnos pueden conectar ideas matemáticas. Desde esta perspectiva, diferentes autores han estudiado el tipo de conexiones que generan los alumnos al enfrentarse a diversas tareas matemáticas, apoyados de diversos marcos teóricos, entre ellos: Eli et al. (2011); García-García y Dolores-Flores (2020); Rodríguez-Nieto et al. (2021); Wittmann (2021), entre otros.

Diversas investigaciones han realizado descripciones y categorizaciones de las conexiones matemáticas (Alsina, 2014; Businskas, 2008; Eli et al., 2011; Evitts, 2004), estos trabajos refieren a las relaciones que se pueden establecer entre diferentes elementos dentro de las matemáticas; sin embargo, hay una serie de trabajos que proponen agrupaciones diferentes, en las que los elementos que se relacionan y su origen permiten la creación de nuevas categorías.

Esta diferenciación entre los elementos dentro y fuera de las matemáticas, y las relaciones que se pueden establecer entre ellos, permite definir lo que se conoce como conexiones extra-matemáticas y conexiones intra-matemáticas. De Gamboa y Figueiras (2014) indican que aquellas conexiones que se producen entre elementos propios de las matemáticas se definen como conexiones intra-matemáticas, mientras que las conexiones que establecen relaciones entre elementos de un contexto extramatemático (actividades del cotidiano, la cultura, los oficios, etc.) con algún objeto matemático se definirán como conexiones extra-matemáticas.

Rodríguez-Nieto et al. (2020) desarrollan una investigación en la que presentan una reflexión teórica sobre las conexiones matemáticas. En este caso, abordan las categorías propuestas sobre conexiones extra-matemáticas e intra-matemáticas, y proponen la inclusión de un nuevo tipo de conexión que denominan las conexiones metafóricas.

En esta investigación, una conexión se entiende desde Kenedi et al. (2019), quienes señalan que una conexión corresponde a una parte de una red de información que interrelaciona las matemáticas con otras ciencias y se vuelven útiles en la medida en que sirven para comprender y establecer relaciones entre ideas, conceptos y procedimientos matemáticos.

Respecto a las conexiones extra-matemáticas, se considera la propuesta de Vanegas y Giménez (2018), quienes, siguiendo la clasificación de conexiones de Businskas (2008) y elementos del Enfoque Ontosemiótico, plantean las siguientes categorías:

- Conexión Modelizadora: refiere a las relaciones establecidas entre un contexto extra-matemático y una idea matemática. Requiere de un modelo matemático para existir.

- Conexión Mediadora: establece la relación entre un concepto extra-matemático y una idea matemática mediante el uso de un elemento mediador, que permita interpretar un determinado significado de la idea matemática, esto mejora la representatividad de dicho significado.

- Conexión Interdisciplinar Genérica: referida a las relaciones establecidas entre elementos de una disciplina, que funciona como contexto extra-matemático y varias representaciones de un objeto matemático que son usualmente expresadas de manera genérica o poco profundizada. Con estas relaciones es posible mostrar algunas características o propiedades de un conocimiento matemático o problemas asociados.

- Conexión semiótica: refiere al establecimiento de relaciones explícitas entre diferentes representaciones de una misma noción matemática con ayuda de diferentes representaciones de un elemento perteneciente a un contexto extra-matemático, de tal forma que emergen propiedades de dicha idea matemática.

- Conexión metafórica: referida a aquellas conexiones en que un elemento extra-matemático es usado como una metáfora que permite reconocer elementos particulares o generales implícitos de alguna noción matemática.

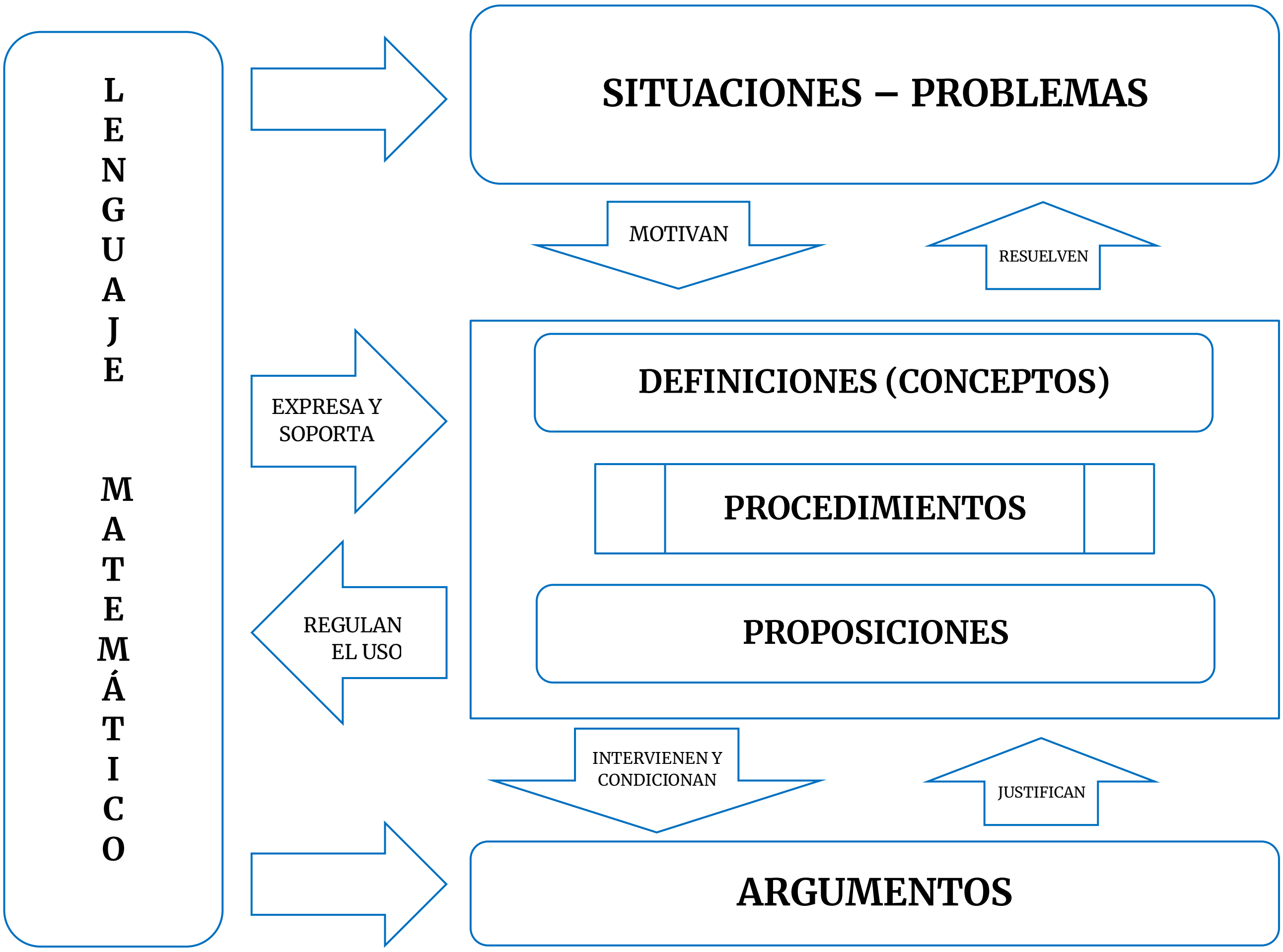
- Materialización: refiere a las relaciones en que un contexto extra-matemático se presenta para materializar una definición matemática que es subsecuentemente abstraída.

2.2. Herramientas del Enfoque Ontosemiótico: las configuraciones epistémicas

Desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) se considera que una *práctica matemática* es toda secuencia de acciones realizadas, sujetas a normas matemáticas, entendida también como cualquier actuación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar su solución, validarla, generalizarla y utilizarla en otros contextos (Godino y Batanero, 1994).

Siempre que se lleva a cabo una práctica matemática para resolver un problema, una serie de elementos emergen, así, es posible detectar el uso de lenguajes como una parte ostensiva de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos que determinan las acciones ejecutadas durante dicha práctica matemática. Estos elementos, llamados objetos primarios, se organizan mediante configuraciones (Figura 1).

Figura 1. Configuración de objetos primarios



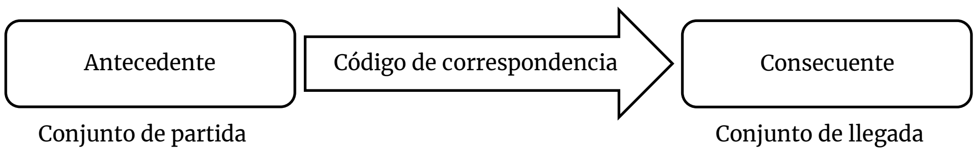
Estas configuraciones permiten el análisis de la práctica matemática y brindan evidencia de la existencia, o no, de diferentes tipos de conocimientos en quien realiza la tarea o actividad matemática, adquiriendo un carácter de configuración epistémica cuando se habla de la red de objetos institucionales (y por ende correctos) que se movilizan o cognitivas, cuando refiere a las redes de objetos personales (que pueden ser o no del todo correctos).

Los elementos que se describen dentro de la configuración de objetos primarios se entienden como se presenta a continuación:

- Elementos lingüísticos: refiere a los términos, expresiones, notaciones, etc. en sus diferentes tipos de representación, bien sea de manera escrita, oral, gestual, etc.
- Situaciones-problemas: son aquellas tareas que se propone realizar, pueden ser aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, investigaciones, etc.
- Conceptos: son los elementos que se introducen a través de definiciones o descripciones, por ejemplo, la idea de simetría, derivada, función, número, etc.
- Proposiciones: son enunciados acerca de los conceptos, se identifican particularmente porque tienen un valor de verdad.
- Procedimientos: refiere a los algoritmos, operaciones, etc. que se realizan dentro de la solución de la situación.
- Argumentos: corresponde a aquellos enunciados que permiten validar o explicar las proposiciones y los procedimientos.

Estos objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas pueden considerarse como parte de una red que los relaciona y permite, por una parte, describir la actividad matemática y, por la otra, construir el significado de los objetos matemáticos; la estructura mediante la cual se proponen dichas relaciones se define como Función Semiótica. Según Godino et al. (2007), la noción Función Semiótica (FS), es la estructura metafórica que genera la correspondencia entre conjuntos que incluye tres elementos: un plano de expresión (objeto inicial), un plano de contenido (objeto final) y un criterio o regla de correspondencia, tal y como se ilustra en la Figura 2.

Figura 2. Esquema de una Función Semiótica



De acuerdo con Godino et al. (2007), las redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos (a través de las FS) forman las configuraciones, que pueden ser de tipo epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Estas configuraciones permiten realizar un análisis detallado de la actividad matemática, pues están en relación con el sistema de prácticas que se activa al intentar solucionar un problema. Su utilidad, en el caso de este artículo, es la evidencia que brinda de las relaciones establecidas entre los diferentes objetos primarios al realizar alguna práctica matemática.

3. Metodología

La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter exploratorio (Hernández et al., 2010) y sigue la metodología de estudio de casos (Yin, 2014). El caso es el de las prácticas del grupo humano que configura una clase de Didáctica de la Geometría, perteneciente al grado de Educación Primaria de una universidad española. Se busca estudiar, identificar y describir las conexiones que los participantes logran establecer cuando se involucran en el diseño de tareas escolares para la enseñanza de la geometría.

3.1. Contexto y participantes

Participaron 250 FM del grado de Educación Primaria de una universidad española. Se diseñaron e implementaron dos tareas profesionales en dos cursos consecutivos. Se trata de tareas profesionales orientadas a que los participantes evidencien el valor y la necesidad del establecimiento de conexiones para fomentar una actividad geométrica rica y se apropien de los conocimientos necesarios para el establecimiento de dichas conexiones. En el curso 2020-21 se implementaron en modalidad online, y en el curso 2021-22 en modalidad presencial. La asignatura en la que se realizaron las implementaciones es la única de Didáctica de la Geometría que tienen los participantes en su programa de formación. Sus conocimientos previos provienen de su formación escolar previa. Para el desarrollo de las TP se dispuso de una clase de 180 minutos. Los datos obtenidos corresponden a los protocolos escritos de cada uno de los grupos de trabajo. Las tareas profesionales se desarrollaron en grupos de 5-6 personas, acompañado de una clase sincrónica antes de implementarlas y posterior a ellas para su retroalimentación.

3.2. Materiales e instrumentos

La primera tarea profesional (TP 1) consiste en la presentación de una serie de imágenes y vídeos (Tabla 1) de elementos/situaciones reales, a partir de las cuales los FM deben diseñar una tarea escolar geométrica.

La segunda tarea profesional (TP 2) busca que los FM se posicionen ante afirmaciones realizadas por otros FM sobre la idea de semejanza. Se presentan tres afirmaciones incorrectas (ver Tabla 2) sobre geométrica de semejanza; se debate en torno a la igualdad como problema del lenguaje matemático y finalmente se solicita el planteamiento de tareas geométricas para abordar esta noción en la Educación Primaria.

Tabla 1. Imágenes utilizadas en la TP 1

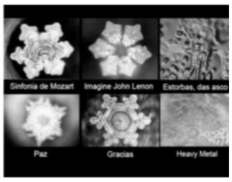
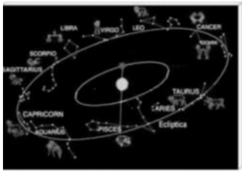
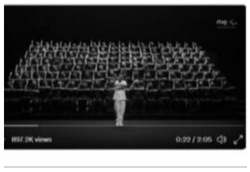
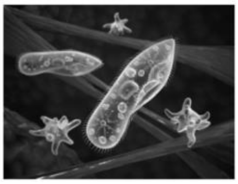
La calzada del gigante	Cristales de agua	Constelaciones	Telaraña	Imágenes humanas
				
Edificio W (Barcelona)	Protozoos	Secuoya	Tabla de arcilla Babilónica	Mochilas Arahuacas
				

Tabla 2. Afirmaciones sobre semejanza en TP2

Futuro maestro A	Futuro maestro B	Futuro maestro C
"Un ejemplo de semejanza puede ser la obertura de una mandarina o una naranja, ya que pueden parecer dos partes iguales, pero no lo son"	"Las partes del cuerpo humano (manos, piernas, ojos, etc.)	"Se pueden observar los zapatos y ves que no son iguales sobre todo si no son nuevos"

3.3. Análisis

El análisis de los datos se realizó en cuatro fases, siguiendo una estructura similar a la planteada por Rodríguez-Nieto et al. (2021). La primera fase consistió en la organización de las respuestas de los FM. Mediante el análisis de sus entregas fue posible extraer información sobre las prácticas matemáticas que realizaron los FM en sus respuestas a las tareas profesionales. La segunda fase consistió en la descripción de prácticas matemáticas (Font et al., 2013). Para ello, se seleccionan secuencias de acciones reguladas por reglas establecidas a nivel institucional y que permiten solucionar algún problema. En el caso de este artículo, se entiende que las reglas establecidas a nivel institucional coinciden con la teoría geométrica presente en cada una de las tareas profesionales.

La tercera fase consistió en la construcción de las configuraciones epistémicas de las tareas TP1 y TP2, las cuales reflejan los objetos primarios que se esperaba emergieran y que describen en profundidad las tareas profesionales propuestas. De acuerdo con Godino et al. (2018) puede entenderse dicha configuración como una "radiografía" de la propuesta para la enseñanza que se está llevando a cabo. Finalmente, en la cuarta fase se establecieron las funciones semióticas que se evidenciaban entre los objetos primarios de la configuración, lo que permitió conformar grupos de funciones semióticas que describen las conexiones extra-matemáticas.

3.3.1. Configuraciones epistémicas de las tareas profesionales

En la Tabla 3 y la Tabla 4 se presentan las prácticas matemáticas asociadas a cada una de las tareas profesionales. En el proceso de instrucción son los FM quienes realizan estas prácticas. La profesora realiza intervenciones puntuales para aclarar dudas, generar reflexiones y discutir con cada uno de los grupos de trabajo.

Tabla 3. Prácticas matemáticas TP 1

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS
PM01: Leer los enunciados y ver las imágenes entregadas.
PM02: Diseñar una tarea/problema geométrico basado en una imagen dada para enseñar geometría.
PM03: Leer el currículo de Educación Primaria de Cataluña, área de matemáticas, apartado de “Espacio y Forma”.
PM04: Seleccionar un contenido en relación con cada una de las tareas propuestas.
PM05: Seleccionar una imagen y contenido específico de geometría para la construcción de un problema para la enseñanza de la geometría.
PM06: Diseñar una actividad escolar geométrica para Educación Primaria.

Tabla 4. Prácticas matemáticas TP 2

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS
PM01: Leer los ejemplos de semejanza presentados.
PM02: Verificar si el ejemplo es correcto o incorrecto.
PM03: Definir qué se entiende por semejanza en cada caso.
PM04: Reflexionar en torno a las posibles creencias sobre el objeto semejanza de figuras.
PM05: Diferenciar desde el lenguaje natural los términos: “semejante” y “parecido”.
PM06: Proponer situaciones para introducir la semejanza de polígonos.

De estas prácticas emergen objetos matemáticos primarios, los cuales se articulan formando las configuraciones epistémicas para cada una de las tareas profesionales.

La Tabla 5 presenta la configuración epistémica correspondiente a la TP 1.

Tabla 5. Configuración epistémica TP 1

LENGUAJE		
Verbal L01: Figura geométrica L02: Telaraña L03: Polígono L04: Teselado L05: Mochila L06: Universo L07: Constelación L08: Calcula L09: Construye L10: Congruente L11: Edificio L12: Dimensiones L13: Origen L14: Secuoya L15: Estima	L16: Maqueta L17: Medida L18: Tamaño L19: Imagen L20: Contenido L21: Criterio L22: Competencia L23: Evaluación L24: Conocimiento L25: Geometría L26: Movimiento L27: Conjetura L28: Estructura L29: Investiga L30: Uso	**Gráfico**  

SITUACIONES/TAREAS	DEFINICIONES
	Previas
T01: Diseñar una tarea geométrica haciendo uso de una imagen propuesta T02: Seleccionar un contenido geométrico del currículo oficial de Cataluña en relación con las tareas T03: Construir una actividad para la enseñanza de la geometría, basada en una imagen de la vida real	D01: Regularidad D02: Polígono D03: Patrón D04: Tejido D05: Teselados D06: Lados D07: Vértices D08: Solapar
	Emergentes
	D09: Teselado

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES
PC01: Construir en 2D la estructura de una mochila en 3D PC02: Replicar el patrón de la mochila que se ve en la imagen. PC03: Caracterizar el patrón que se presenta en la mochila PC04: Seleccionar las figuras geométricas con las que se realizará el patrón de diseño	PP01: La mochila tiene una estructura cilíndrica sin tapa. PP02: La descomposición en 2D de la mochila corresponde a un rectángulo. PP03: Los patrones presentes en las mochilas corresponden a recubrimientos del plano.

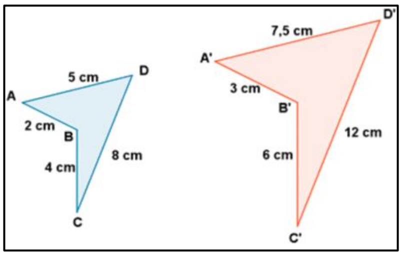
PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES
PC05: Recubrir la estructura de la mochila con el patrón seleccionado PC06: Verificar que no quedan espacios en blanco en el cubrimiento realizado PC07: verificar que no se solapa ninguna de las figuras utilizadas PC08: Justificar por qué el patrón es adecuado para la construcción indicada	PP04: Hay figuras geométricas que permiten la construcción de los patrones de las mochilas. PP05: Los recubrimientos de la mochila son teselados.

ARGUMENTOS
A01: Si un plano se cubre mediante polígonos, de manera que no queden espacios en blanco y que no solapen las figuras, se dice que hay un teselado
A02: Los únicos polígonos regulares que cubren el plano son los triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos
A03: En general, se puede teselar el plano mediante cuadriláteros, triángulos, hexágonos y algunas combinaciones de estos polígonos.

En la Tabla 6, se presenta la configuración epistémica correspondiente a la TP 2

Tabla 6. Configuración epistémica tarea 2

LENGUAJE

Verbal	Gráfico
L01: Forma L02: Triángulo L03: Polígono L04: Ángulo L05: Semejanza L06: Proporcional L07: Lados L08: Parecido L09: Igual L10: Congruente	

Algebraico

$$Dados\ \Delta ABC\ y\ \Delta DEF\ si\ \angle ABC \cong \angle DEF, \angle BCA \cong \angle EFD, \angle CAB \cong \angle FDE\ y\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\ entonces\ \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

SITUACIONES/TAREAS	DEFINICIONES
T01: Evaluar la validez de un ejemplo sobre semejanza de figuras geométricas T02: Determinar los elementos presentes en la definición de semejanza T03: Justificar la existencia de uno u otro elemento dentro de la definición de semejanza T04: Proponer diferencias entre “semejante” y “parecido” T05: Brindar ejemplos de semejanza que permitan la enseñanza en Educación Primaria	**Previas** D01: Proporcionalidad D02: Congruencia D03: Razones D04: Polígonos **Emergentes** D05: Semejanza D06: Criterios de semejanza

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES
PC01: Determinar si hay una forma en la que se pueda aplicar la semejanza	PP01: No hay una forma a la que se pueda asociar la semejanza
PC02: Verificar que ambas figuras son polígonos con la misma forma	PP02: No hay polígonos asociados
PC03: Calcular la medida de los ángulos del polígono	PP03: Hay un movimiento rígido en el plano que modifica la forma
PC04: Calcular la medida de los lados del polígono	PP04: Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida
PC05: Verificar si los lados son proporcionales	PP05: Dos lados son proporcionales si el resultado de su cociente es el mismo
PC06: Verificar que los ángulos sean todos congruentes	PP06: Los polígonos son semejantes

ARGUMENTOS
A01: Las formas o cuerpos curvos y en situaciones reales no siempre pueden ser representados como figuras geométricas para su estudio.
A02: Hay formas en el espacio que no se corresponden con ningún polígono conocido
A03: Dos polígonos son semejantes si tienen la misma forma, todos sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados son todos proporcionales entre sí

Las Tablas 3 a la 6 refieren a las prácticas matemáticas y configuraciones epistémicas en referencia a los objetos esperados. El análisis de estos mismos elementos en cada una de las propuestas de solución a TP1 y TP2, propuestas por los FM, refieren a las configuraciones cognitivas de tipo personal, en las que es posible que coincidan o no los objetos con los descritos en las versiones iniciales.

4. Resultados

Los resultados se organizan en dos partes, en la primera, se presenta una comparación entre el conocimiento esperado y el logrado, mostrando, a manera de ejemplo, una de las configuraciones cognitivas obtenidas en TP2 y su análisis. En la segunda parte se presentan las conexiones extra-matemáticas evidenciadas.

4.1. Configuración cognitiva TP2 (G12_2021)

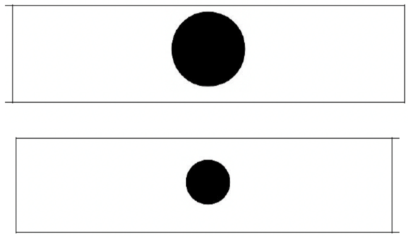
La Tabla 7 describe los elementos presentes en la propuesta de solución del grupo 12 del curso académico 2021-2022, esta configuración incluye elementos tanto de tipo personal (que pueden ser incorrectos), así como elementos institucionales (coincidentes con aquellos presentes en la configuración experta presentada en la Tabla 6).

Mediante el análisis de las configuraciones provenientes de las propuestas de solución de los FM a TP1 y TP2 se logró, por una parte, evidenciar el grado de compatibilidad entre el conocimiento esperado y el conocimiento logrado o detectado; posterior a lo cual, se lograron establecer relaciones entre las prácticas matemáticas que ellos realizaron y los objetos que relacionaron mediante la movilización de sus conocimientos.

Estas configuraciones, así como el análisis y detección de las funciones semióticas que relacionan los objetos primarios definidos, sirvieron para describir dos tipos de conexiones matemáticas (Interdisciplinar Genérica y Metafórica) que lograron los FM, analizar su emergencia y describirlas para posteriores usos.

Tabla 7. Configuración epistémica TP2 (G12_2021)

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS
PM01: Leer los ejemplos de semejanza presentados.
PM02: Indicar si el ejemplo es correcto o incorrecto.
PM03: Explicar con sus propias palabras lo que se entiende por semejanza en cada caso.
PM04: Reflexionar en torno a las posibles creencias sobre el objeto semejanza de figuras.
PM05: Proponer ejemplos que relacionen o diferencien los términos: "semejante" y "parecido".
PM06: Explicar por qué semejante y parecido se usan de la misma manera.
PM06: Proponer situaciones para introducir la semejanza de polígonos.

LENGUAJE	
Verbal	**Gráfico**
L01: Forma L02: Círculo L03: Polígono L04: Tamaño L05: Semejanza L06: Parecido L07: Igual L08: Congruente	

SITUACIONES/TAREAS	DEFINICIONES
T01: Evaluar la validez de un ejemplo sobre semejanza de figuras geométricas	**Previas**
T02: Justificar la semejanza o no de diferentes objetos	D01: Igualdad D02: Polígonos
T03: Proponer diferencias entre "semejante" y "parecido"	**Emergentes**
T05: Brindar ejemplos de semejanza que permitan la enseñanza en Educación Primaria	

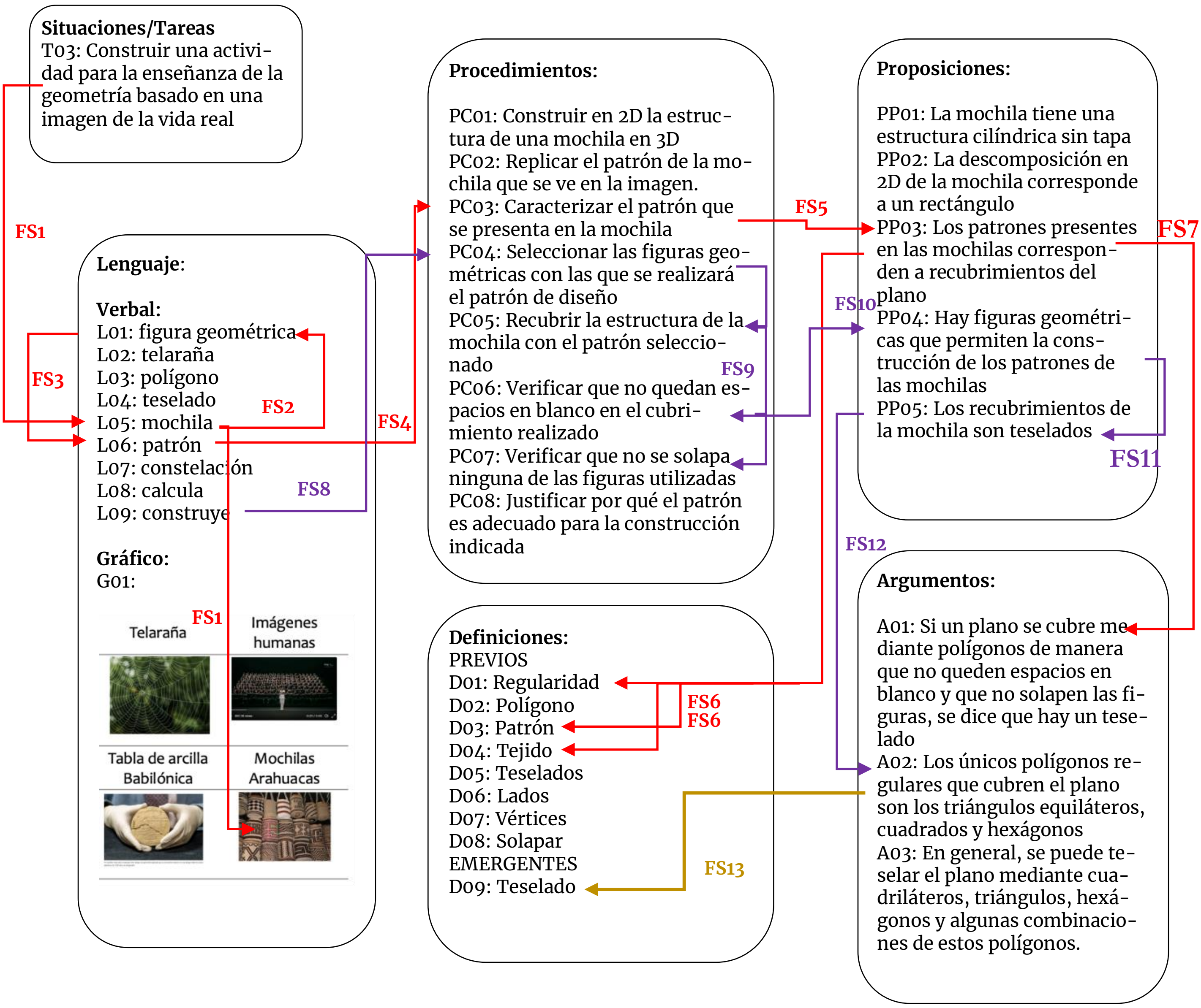
PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES
PC01: Determinar si hay una forma en la que se pueda aplicar la semejanza	PP01: Hay características que se conservan en objetos como la forma, el tamaño, el sabor y el color
PC02: Expresar la semejanza entre dos objetos mediante palabras	PP02: Las figuras geométricas que tienen la misma forma, pero tamaño distinto, son semejantes
PC03: Considerar la forma y tamaño como implicación de semejanza	PP03: Semejante no es lo mismo que parecido en matemáticas, pero en la vida real sí.
	PP04: Dos círculos de diferente tamaño son semejantes, pero no congruentes ni iguales.

ARGUMENTOS
A01: Dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma sin importar los tamaños entre ellos

4.2. Conexión Interdisciplinar Genérica

Para abordar esta conexión se seleccionó una propuesta del grupo 7 del curso académico 2020-2021 (G7__2020) en el desarrollo de la TP1. En este caso, el G7__2020 utilizando la imagen de una mochila Arhuaca intentó abordar la idea de teselados mediante la construcción de mochilas. La Figura 4 presenta las relaciones que se pudieron establecer entre los objetos primarios que definen las funciones semióticas para esta conexión.

Figura 4. FS establecidas entre objetos primarios en TP1 en la propuesta de G7_2020



La Tabla 8 presenta el análisis detallado de la actividad matemática presente en la configuración anterior, que evidencia las relaciones entre los objetos que se describen a continuación.

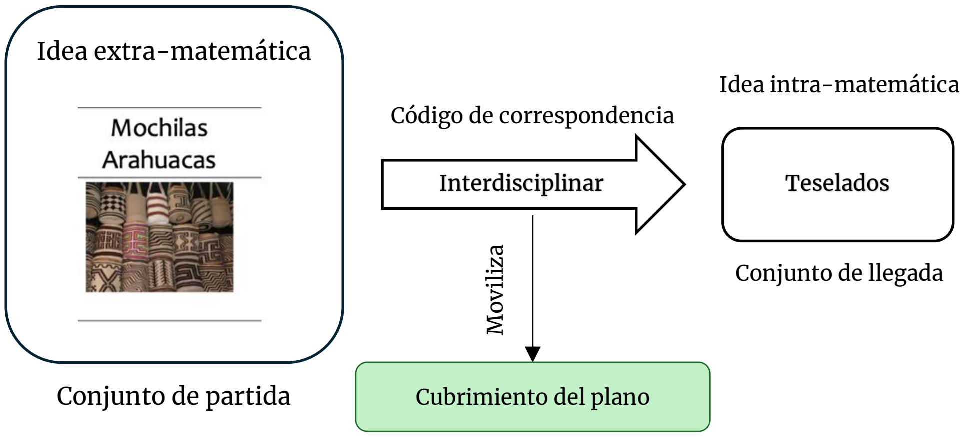
Tabla 8. Análisis detallado de la actividad matemática (conexión Interdisciplinar genérica)

PM	Procesos	Objetos	Funciones Semióticas	Conexión
PM05: Seleccionar una imagen y contenido específico de geometría para la construcción de una actividad para la enseñanza de la geometría. PM06: Diseñar una actividad geométrica completa para Educación Primaria.	Problematización Algoritmización Enunciación Argumentación Generalización	**T03:** Construir una actividad para la enseñanza de la geometría basada en una imagen de la vida real **L05:** Mochila **L01:** Figura geométrica **L06:** Patrón **PC03:** Caracterizar el patrón que se presenta en la mochila **PP03:** Los patrones presentes en las mochilas corresponden a recubrimientos del plano **A01:** Si un plano se cubre mediante polígonos de manera que no queden espacios en blanco y que no solapen las figuras, se dice que hay un teselado	SF1 SF2 SF3 SF4 SF5 SF6 SF7	**INTERDISCIPLINAR GENÉRICA**

Este tipo de conexión aborda la idea que dentro de las demás disciplinas (externas a las matemáticas) se pueden reconocer prácticas que movilizan objetos primarios y desencadenan la conexión con las ideas matemáticas. En la Tabla 8, es posible ver cómo la construcción de una mochila Arhuaca (que proviene de la disciplina del diseño y tejido) permite el análisis de elementos matemáticos. Al identificar la práctica extra-matemática es posible caracterizar los conocimientos asociados, los cuales se vinculan con matemáticos. Un ejemplo de ello es que a nivel geométrico podemos observar el uso de figuras como cuadriláteros, triángulos o hexágonos y los recubrimientos. Se permite la conexión con la idea de teselado y el argumento de que únicamente mediante estas figuras es posible cubrir por completo el plano sin solaparlas y sin dejar espacios en blanco (condiciones necesarias para la construcción de un teselado, que además en el diseño textil tienen un significado estético).

El resumen de este tipo de conexión se presenta mediante el esquema que posee la Función Semiótica asociada y que es presentado en la Figura 5.

Figura 5. Esquema de la Función Semiótica asociada a la conexión Interdisciplinar genérica

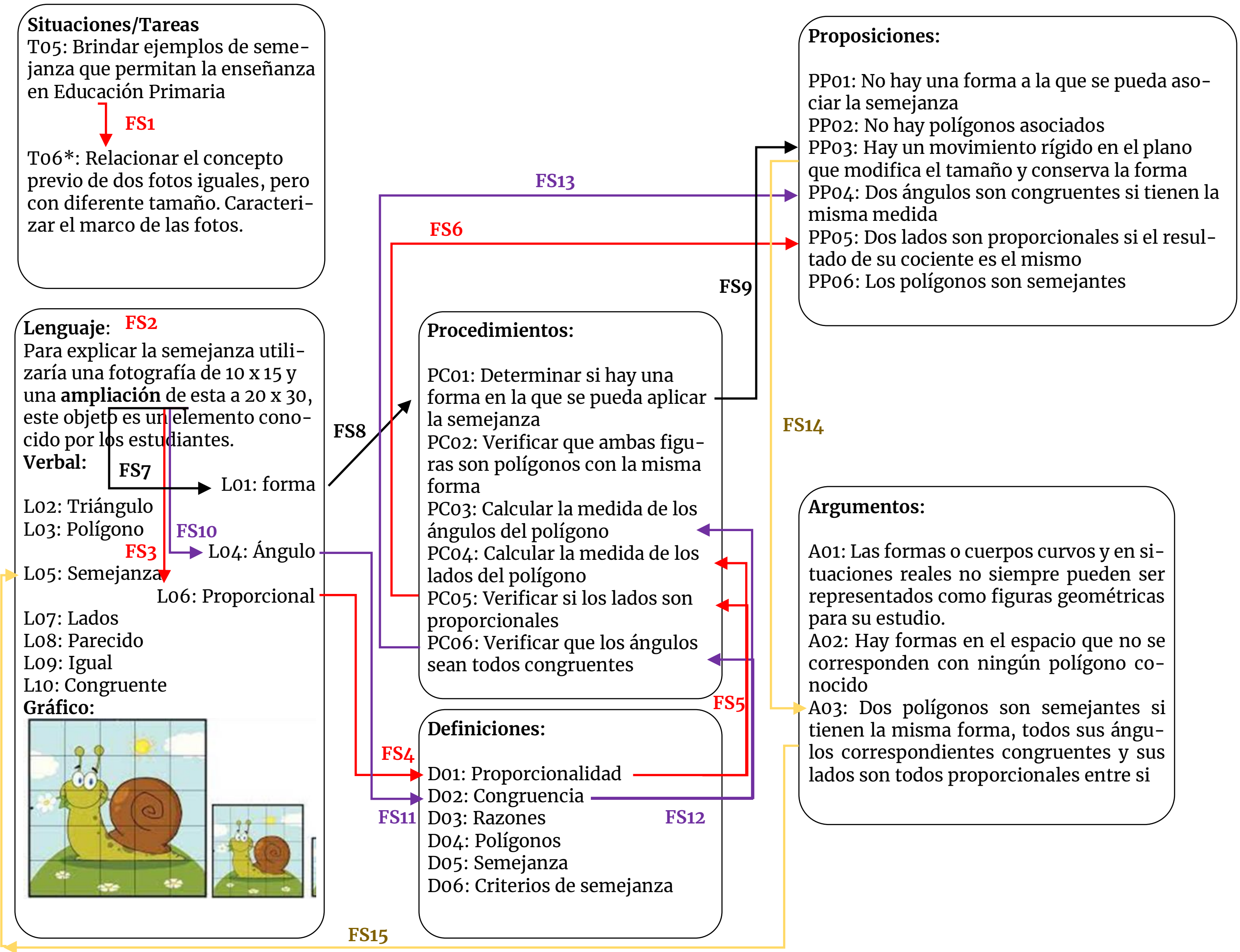


4.3. Conexión Metafórica

A continuación, en la Figura 6 se presentan las relaciones establecidas y las funciones semióticas logradas en la propuesta de solución a la TP2 por el grupo 17 del año 2020 (G17_2020). En este caso, al solicitar a los FM que propusieran un ejemplo para ilustrar la idea de semejanza, G17_2020 proponen la siguiente actividad.

> Supongamos que tienes una fotografía de tamaño 10 x 15 y quieres realizar una ampliación de esta de 20 x 30, de modo que se vean mejor las personas que están en ella y la puedas utilizar como poster en tu habitación. Caracteriza la fotografía y el marco de la foto original y de la ampliación ¿qué elementos puedes reconocer? Grupo 17, año 2020.

Figura 6. Funciones semióticas establecidas entre objetos primarios en TP2 en la propuesta de G15_2021



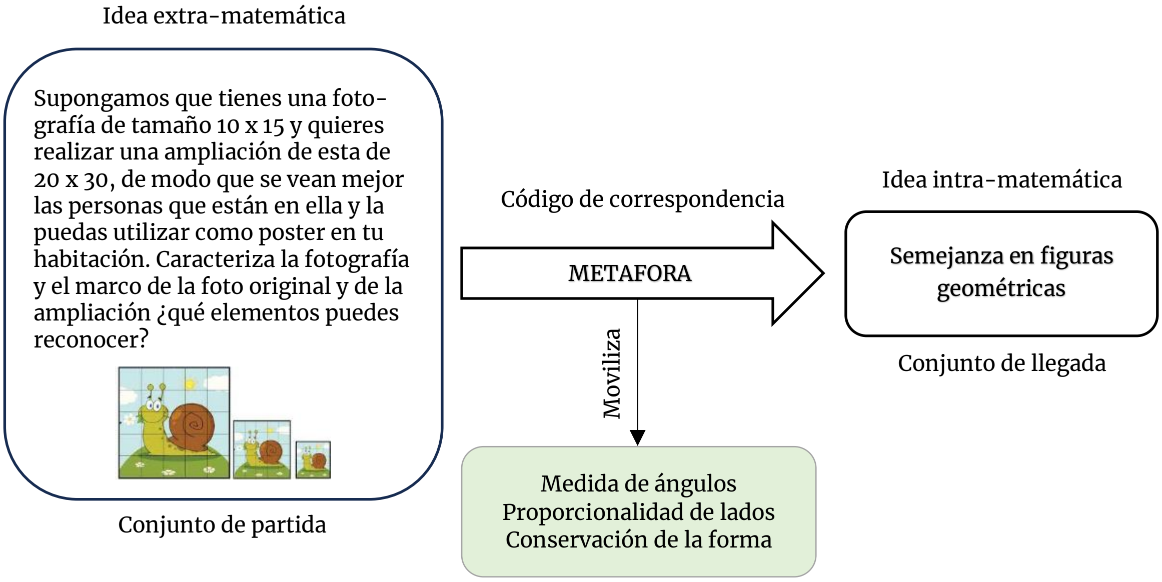
Las relaciones establecidas entre los objetos primarios dan cuenta de la conexión que se pretende evidenciar. Para clarificar el proceso mediante el cual se hace presente la conexión extramatemática de tipo metafórico, se presenta la Tabla 9 que organiza la información.

Tabla 9. Análisis detallado de la actividad matemática (conexión metafórica)

PM	Procesos	Objetos	FS	Conexión
PM06: Diseñar un ejemplo de semejanza que permita la enseñanza en Educación Primaria	Problematización – Resolución de problemas	**T06*:** Relacionar el concepto previo de dos fotos iguales, pero con diferente tamaño. Caracterizar el marco de las fotos. **L06:** Proporcional **C01:** Proporcionalidad **PC04:** Calcular la medida de los lados del polígono **PC05:** Verificar si los lados son proporcionales **PP05:** Dos lados son proporcionales si el resultado de su cociente es el mismo **A03:** Dos polígonos son semejantes si tienen la misma forma, todos sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados son todos proporcionales entre si **L05:** semejanza	SF1 SF2 SF3 SF4 SF5 SF6 SF14 SF15	METAFÓRICA
	Problematización – Resolución de problemas	L01 PC01 PP03 A03 L05	SF7 SF8 SF9 SF14 SF15	
	Problematización – Resolución de problemas	L04 C02 PC03 PC06 PP04 A03 L05	SF10 SF11 SF12 SF13 SF14 SF15	

El ejemplo propuesto evidencia la correspondencia entre dos conjuntos. El de partida pertenece al mundo real, en el cual los FM utilizan la metáfora de la fotografía. Al solicitarle a los niños de Educación Primaria que imaginen una fotografía en tamaño original, utilizan un elemento cotidiano que condiciona la tarea matemática a la existencia de una forma que no varía. Posteriormente, la tarea matemática que se mantiene en el cotidiano (ampliar la fotografía) requiere un procedimiento que incluye el código de correspondencia para acceder al conjunto de llegada. El conjunto de llegada es la idea geométrica de semejanza. El proceso para acceder al conjunto de llegada, con los elementos que se tienen en el conjunto de partida, se da por la conexión metafórica, mediante la cual se puede acceder a la idea de semejanza con la figura retórica de la fotografía, sus invariantes (implícitos en la metáfora), la actividad de ampliación y el conjunto de objetos movilizados. La Figura 7 sintetiza la estructura funcional de la conexión.

Figura 7. Esquema de la Función Semiótica asociada a la conexión metafórica



5. Discusión y reflexiones finales

Los resultados obtenidos permiten la reflexión sobre nuevos elementos dentro de la Didáctica de las Matemáticas. El presente artículo abordó las preguntas: ¿Qué tipo de conexiones extra-matemáticas logran establecer futuros profesores de Educación Primaria al diseñar tareas geométricas?, y ¿cómo evidenciar la emergencia de dichas conexiones haciendo uso de las herramientas del Enfoque Onto-semiótico? Inicialmente, es posible enunciar que se lograron evidenciar dos tipos de conexiones extra-matemáticas desde el trabajo propuesto a los FM, lo cual aporta al análisis y caracterización de una población que hasta el momento no se había abordado de manera profunda. Por otra parte, se logró, mediante el uso de las configuraciones epistémicas y las funciones semióticas, dar razones sobre la existencia de las conexiones detectadas.

Según García-García (2019) la investigación en Educación Matemática tiene la potestad de validar las conexiones matemáticas que actualmente se conocen, así como también de proponer nuevas categorías que aún no se han identificado. La presente investigación aporta a la teoría sobre las conexiones matemáticas evidencias de la existencia de dos tipos de conexiones extra-matemáticas nuevas, cada una con sus procesos asociados y desde el entendimiento de la conexión como una colección de funciones semióticas que relacionan objetos primarios movilizados, al realizar un tipo de práctica matemática. Así, las conexiones que se describen en esta investigación y que se espera seguir profundizando son la Conexión Metafórica y la Conexión Interdisciplinar Genérica.

La conexión metafórica había sido discutida como una conexión de tipo intra-matemático en Rodríguez-Nieto et al., (2021); sin embargo, se había sugerido desde el análisis al trabajo de Lakoff y Núñez (2000) que, dado que el conjunto de partida de este tipo de conexiones no siempre está dentro de las matemáticas, podría encontrarse un tipo de conexión metafórica perteneciente a las conexiones extra-matemáticas. En estos trabajos se definía como conexión de tipo *grounding*. La presente investigación aporta evidencias de cómo es posible establecer una relación entre objetos de un conjunto extra-matemático, con elementos dentro de las matemáticas como la semejanza; estableciendo de esta manera una conexión de tipo metafórica y a su vez extra-matemática, dado su conjunto de partida. La importancia de este tipo de metáforas viene dada del reconocimiento de aquellos elementos que vienen implícitos en la metáfora y que conducen a quien trabaja con ella por un camino de relaciones entre objetos e invariantes que, a fin de cuentas, permiten el acceso a las ideas matemáticas.

La conexión interdisciplinar genérica aborda la idea de relacionar elementos de otras disciplinas con elementos e ideas matemáticas, así, mediante el trabajo interdisciplinar, se logra la consolidación de objetos matemáticos que, a su vez, pueden aportar a la solución de problemas en la disciplina de la que provienen. Una dificultad a la hora de trabajar con este tipo de conexión viene dada por los conocimientos que se requieren para su emergencia. Coincidimos con Rebello et al. (2017), quienes afirman que, para que haya emergencia de conocimiento en una tarea de tipo interdisciplinar, es necesario que el estudiante tenga un esquema robusto en el contexto inicial. En este sentido, el logro de conexiones interdisciplinares potentes dependerá de los conocimientos, que pueda o no, tener la persona que establece la conexión sobre la otra disciplina, si bien no es un requisito para el establecimiento de la conexión, en tanto puede ser una conexión de bajo nivel o, incluso, de tipo personal, si es cierto que en la medida en que mayores sean los conocimientos de base, mayor potencia tendrá la conexión establecida.

El trabajo interdisciplinar demanda un robusto conocimiento de una disciplina de origen, que para esta investigación viene dada por la geometría; por otro lado, se requiere también del conocimiento de la disciplina con la cual se intenta relacionar. Las relaciones que se puedan establecer no siempre son directas; adicionalmente al trasladar las ideas de una disciplina abstracta como las matemáticas a una disciplina basada en lo tangible, las coincidencias y posibilidades de su tratamiento se hacen cada vez más difíciles de lograr, debido a las restricciones del mismo fenómeno.

Proponer a los FM que diseñen tareas escolares para la enseñanza de la geometría en Educación Primaria se constituye en una actividad formativa potente para generar oportunidades de aprendizaje. Este tipo de tareas profesionales permiten evaluar conocimientos y competencias previas de los FM y apoyar su desarrollo profesional. Siguiendo la perspectiva presentada por Godino et al. (2018), la elaboración de propuestas formativas en la formación inicial contribuye al crecimiento profesional de los FM y eleva sustancialmente la calidad de su desempeño en el ámbito educativo. Las soluciones de los FM a las tareas profesionales implementadas son evidencias de la influencia que tiene el diseño de tareas escolares en el proceso de formación, pues relaciona los objetos matemáticos, los conceptos, los procesos, los conocimientos y las competencias necesarias para una correcta acción formativa. En este sentido, coincidimos con Chamoso y Cáceres, (2019), da Ponte, (2004) y Sullivan et al., (2010) en tanto las tareas que propusimos determinaron en gran medida oportunidades de aprendizaje para los FM.

Agradecimientos

Este estudio fue desarrollado en el marco de los proyectos: 72200072 financiado por ANID/PFCHA Chile; PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa" y PID2019-104964GB-I00MICINN

Referencias

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números, 86*, 5-28.

Businskas, A. M. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. [Tesis doctoral no publicada]. Simon Fraser University, Canadá.

Chamoso, J., & Cáceres, M. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18*, 59-69.

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). National Council of Teachers of Mathematics.

da Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Graó.

de Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). SEIEM.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective Middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematical Education Research Journal, 23*(3), 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Evitts, T. (2004). Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula. [Unpublished doctoral dissertation]. Pennsylvania State University College of Education. EE.UU.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

García-García, J. G. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 100*, 129-133.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2020). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(6), 912-936. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J., Giacomone, B., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM- Avances de Investigación En Educación Matemática, 13*, 63-83. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación* (5ª ed.). McGraw-Hill.

Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M., & Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. *Journal on Mathematics Education, 10*(1), 69-80. https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5416.69-80

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000) *Where Mathematics comes from. How the embodied mind brings Mathematics into being*. Basic Books.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

Rebello, N., Cui, L., Bennett, A., Zollman, D., & Ozimek, D. (2017). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. In D. Jonassen (Ed.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems* (1st edition, pp. 223-246). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., & Font, V. (2020). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(6), 1231-1256. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., Font, V., & Morales, A. (2021). Una visión desde la red de teorías TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop, 3*, 1-32. https://doi.org/10.33532/revemop.e202115

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142. https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163

Vanegas, Y., & Giménez, J. (2018). Conexões extramatemáticas na formação inicial de docentes. *Estudos Avançados, 32*(94), 153-169. https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0012

Wittmann, E. C. (2021). *Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science*. Springer.

Yin, R. (2014) *Case Study Research: design and methods*. Sage Publications.

∞

Juan Pablo Vargas Herrera

Universitat de Barcelona (España)
Jvargahe9@alumnes.ub.edu | https://orcid.org/0000-0001-5127-4931

Yuly Vanegas

Universitat de Lleida (España)
yuly.vanegas@udl.cat | https://orcid.org/0000-0002-8365-1460

Joaquín Giménez

Universitat de Barcelona (España)
quimgimenez@ub.edu | https://orcid.org/0000-0003-4609-1596

Recibido: 15 de diciembre de 2023
Aceptado: 4 de marzo de 2024

Extra-mathematical Connections Made by Prospective Elementary School Teachers when Designing Geometric Homework Assignments

Juan Pablo Vargas Herrera @ [1], Yuly Vanegas @ [2],
Joaquín Giménez @ [1]

[1] Universitat de Barcelona (España)
[2] Universitat de Lleida (España)

A mathematical connection is understood as a relationship between two objects that may or may not belong to mathematics. Connections are considered a powerful tool for learning mathematics since they link the mathematical and the everyday. Even so, their study has focused mainly on intra-mathematical connections and in contexts other than primary education teacher training. This article describes the extra-mathematical connections that emerge when a group of 250 prospective primary school teachers are confronted with two professional tasks that deal with different geometric notions. The analysis considers the theory of extra-mathematical connections, indicating the achievement or emergence of generic metaphorical and interdisciplinary connections. Subsequently, using tools of the Ontosemiotic Approach, the emergence of such connections is supported from the analysis of epistemic configurations. The conclusions revolve around the evidence presented on the emergence of metaphorical and generic interdisciplinary connections, the former referring to the constitution of a metaphor as a tool to access from an extra-mathematical idea to an intra-mathematical object; while the latter refers to the use of elements belonging to a particular discipline and therefore extra-mathematical, to understand an intra-mathematical object. It contributes to the reflection on the theory of extra-mathematical connections, and it shows the potential of the design of school tasks in the training processes of Primary Education teachers.