

Conexiones matemáticas asociadas a la ecuación lineal que establecen estudiantes de bachillerato

Mathematical Connections Associated with the Linear Equation Made by High School Students

Gabriel Barragán Mosso @ , Karen Gisel Campo-Meneses @ ,
Javier García-García @ 

Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Resumen ∞ El presente estudio tuvo por objetivo identificar las conexiones matemáticas que establecieron cuatro estudiantes mexicanos de primer semestre de bachillerato cuando resolvieron tareas que involucraban a la ecuación lineal. Esta investigación es cualitativa, específicamente, es un estudio de casos que emplea como marco conceptual a las conexiones matemáticas. Para recolectar los datos se aplicaron cinco tareas mediadas por el software GeoGebra y se videograbaron los momentos en los que se socializaron algunas de las respuestas de los estudiantes. Estos datos se analizaron empleando el análisis temático. Los resultados mostraron que los estudiantes establecieron la conexión extra-matemática de modelado y las conexiones intra-matemáticas de tipo característica, significado, representaciones diferentes y procedimental, siendo las dos últimas las más frecuentes. Finalmente, se afirma que el uso del modelo de equilibrio, en tareas mediadas por GeoGebra y que promueven conexiones matemáticas, contribuye a que los estudiantes analicen la relación de igualdad al trabajar con ecuaciones lineales.

Palabras clave ∞ Conexiones matemáticas; Ecuaciones lineales; Análisis temático; Álgebra; Experiencia de aprendizaje

Abstract ∞ This study aimed to identify the mathematical connections made by four Mexican students in the first semester of high school when they solved tasks that involved linear equations. This research is qualitative, specifically, it is a case study that uses mathematical connections as a conceptual framework. To collect the data, five tasks mediated by the GeoGebra software were applied and the moments in which some of the students' responses were socialized were videorecorded. These data were analyzed using thematic analysis. The results showed that the students made the extra-mathematical connection of modeling and the intra-mathematical connections of feature, meaning, different representations, and procedural, with the last two being the most frequent. Finally, it is stated that the use of the balance model, in tasks mediated by GeoGebra and that promote mathematical connections, contributes to students analyzing the relationship of equality when working with linear equations.

Keywords ∞ Mathematical connections; Linear equations; Thematic analysis; Algebra; Learning experience

Barragán Mosso, G., Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2024). Conexiones matemáticas asociadas a la ecuación lineal que establecen estudiantes de bachillerato. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 25, 9-31. <https://doi.org/10.35763/aiem25.4616>

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación lineal es uno de los conceptos que juega un papel central en el desarrollo de otros conceptos matemáticos (Mengistie, 2020). Su estudio es fundamental, ya que su aplicación permite resolver problemas matemáticos (cálculo de perímetro, área y volumen de figuras geométricas, etc.) y situaciones planteadas por otras ciencias dando paso al lenguaje algebraico a partir del lenguaje verbal, lo que facilita la interpretación, comprensión y solución de diversos problemas (Navia, 2017).

A pesar de esto, en la literatura de Educación Matemática se reporta que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de este concepto (Chavarría, 2014; Esquinas, 2009; Muñoz y Ríos, 2008). Muñoz y Ríos (2008) afirmaron que el paso de la aritmética al álgebra produce, en la mayoría de los estudiantes, dificultades de aprendizaje, las cuales se agudizan en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales, ya que se requiere un mayor análisis y no solo el uso de un proceso mecánico. De manera similar, Esquinas (2009) señaló que el aprendizaje de las ecuaciones lineales a menudo genera conflictos en los estudiantes al tener que enfrentarse a un lenguaje nuevo y reglas que tienden a confundir, entre las cuales se identifican: el mal uso de la notación simbólica o la introducción de nociones algebraicas, lo cual está relacionado con la falta de comprensión y sentido de los conceptos enseñados; y la falta de comprensión de la relación de igualdad, ya que provoca que las reglas de resolución carezcan de sentido propio y deban ser memorizadas sin comprensión alguna.

Teniendo en cuenta las dificultades reportadas, en la literatura existen algunas investigaciones que han realizado propuestas para trabajar este concepto sustentadas en el método de equilibrio o la balanza (Andonegui, 2007; Mengistie, 2020). De manera general, estas investigaciones reportan que se evidenció una mejora significativa en el aprendizaje de la ecuación lineal por parte de los estudiantes al abordar este concepto mediante el modelo de equilibrio. Este modelo también ha sido trabajado en entornos virtuales (Kaplan y Alon, 2013; Otten et al., 2019; Suh y Moyer, 2007) y se ha reportado que es efectivo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, no se han encontrado investigaciones que trabajen este modelo utilizando el software GeoGebra, lo cual se hace en la presente investigación.

De acuerdo con Otten et al. (2019), es necesario diseñar propuestas que, además de tener en cuenta el modelo de equilibrio, fomenten el establecimiento de relaciones entre los diferentes objetos que intervienen en el momento de abordar las ecuaciones lineales, con el fin de promover el aprendizaje de los estudiantes. Desde nuestra postura, esto implica establecer conexiones matemáticas, pues el establecimiento de estas favorece la integración del conocimiento y la interdisciplinariedad y, además, contribuye a la resolución de problemas de aplicación y problemas no matemáticos (García-García, 2019). De manera similar, Garbín (2005) señaló que hacer conexiones matemáticas permite identificar y establecer relaciones entre los problemas y reconocer sus contextos, lo que ayuda a dar respuestas coherentes a los problemas.

En ese sentido, el establecimiento de conexiones matemáticas contribuye al desarrollo de la comprensión matemática del sujeto (Campo-Meneses y García-García, 2021; Eli et al., 2013; Rodríguez-Nieto et al., 2021) y favorece a que las Matemáticas sean vistas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas, como suelen ser percibidas por los estudiantes (Evitts, 2004; Jaijan y Loipha, 2012). Por su parte, el NCTM (2000) señaló que el establecimiento de conexiones matemáticas es importante para que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos, relacionen significados, representaciones, usen fórmulas adecuadamente para hacer procedimientos y vinculen las matemáticas con situaciones de la vida real.

Por lo tanto, el objetivo de esta investigación es identificar las conexiones matemáticas que establecen cuatro estudiantes mexicanos de primer semestre de bachillerato cuando resuelven tareas que involucran a la ecuación lineal. Se eligieron estos estudiantes porque en primer grado de bachillerato se aborda todo el campo matemático de álgebra y algo fundamental dentro de este campo es aprender a resolver ecuaciones lineales. Para identificar dichas conexiones, se implementaron cinco tareas matemáticas sobre la ecuación lineal, las cuales fueron diseñadas a la luz del marco conceptual y estuvieron mediadas por el software GeoGebra.

Consideramos que es importante y pertinente esta investigación por las razones siguientes: (1) son escasas las investigaciones enfocadas al estudio de las conexiones matemáticas asociadas a la ecuación lineal, teniendo en cuenta la importancia de este concepto y las dificultades que los estudiantes presentan en su resolución; (2) las conexiones matemáticas son un tema vigente en la investigación en Educación Matemática y se han vuelto una meta común de diferentes currículos escolares de Matemáticas de diversos países; y (3) las tareas propuestas podrían ser replicadas o rediseñadas por profesores en servicio a fin de promover, en grupos específicos y con contextos diferentes, el aprendizaje de la ecuación lineal mediante el establecimiento de conexiones matemáticas.

2. MARCO CONCEPTUAL

En este apartado se describe cómo se asumen las conexiones matemáticas, se define la ecuación lineal y se describe el modelo de equilibrio.

2.1. Conexiones matemáticas

Las conexiones matemáticas se asumen, de acuerdo con García-García y Dolores-Flores (2018), como una relación verdadera entre dos o más conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos o representaciones entre sí, con la vida real o con otras disciplinas. De acuerdo con estos autores, existen dos grandes grupos de conexiones matemáticas: las intra-matemáticas, que surgen entre ideas matemáticas, y las extra-matemáticas, que emergen en situaciones fuera de la matemática (ya sean de la vida real o de otras disciplinas), las cuales exigen el uso de la matemática para su resolución. Las conexiones matemáticas establecidas por un

estudiante se pueden identificar en los argumentos escritos y verbales que este utiliza cuando resuelve tareas concretas.

Dada la naturaleza del concepto matemático con el que se trabaja en la investigación, en las tareas propuestas solo se promueven las siguientes tipologías de conexiones matemáticas:

- **Representaciones diferentes:** es la relación de un concepto matemático y sus diferentes representaciones. Se denominan *alternas* a las representaciones de un mismo concepto matemático en registros distintos, tales como: algebraico-gráfico, verbal-algebraico, etc. Por ejemplo, la gráfica de una recta específica es una representación alterna de $2x + y + 4 = 0$ (representación gráfica-algebraica). Son *equivalentes* si las representaciones del concepto matemático están dentro del mismo registro, por ejemplo, $x + 2x + 3x = 60$ y $3x - 28 = -3x + 32$ son representaciones equivalentes en el registro algebraico.
- **Característica:** es la relación que se establece entre un concepto matemático y la característica o propiedad que lo distingue o lo asemeja a otro. Por ejemplo, las incógnitas tienen como máximo exponente al 1 en una ecuación lineal.
- **Significado:** se refiere a la relación entre el concepto y la definición que el estudiante ha construido para este o a la relación entre el concepto y sus contextos de uso. Por ejemplo, cuando el estudiante da un significado de la ecuación lineal como una igualdad con sus incógnitas elevadas a la primera potencia.
- **Procedimental:** es la relación establecida por un estudiante entre una situación A y el procedimiento B para resolver A, o bien entre diferentes reglas, algoritmos, fórmulas, etc., empleadas dentro un registro semiótico para llegar a un resultado. Por ejemplo, usar el cálculo mental para encontrar el valor de la incógnita en una ecuación lineal.
- **Modelado:** se refiere a la relación que se establece entre las matemáticas con la vida real o con otras disciplinas. Explícitamente, esta conexión se puede ver como la relación establecida entre un concepto matemático y un problema en contexto real (bien sea que ocurra o pueda ocurrir en la vida real) o un problema de aplicación en alguna disciplina distinta a las matemáticas, en el que el estudiante, a partir del problema, logra construir un modelo matemático para darle solución. Una vez el estudiante construya determinado modelo, hace uso de diversos conocimientos (matemáticos o no) y ejecuta diversas acciones (algebraicas, gráficas, etc.) para llegar a una respuesta coherente a la situación planteada (Campo-Meneses y García-García, 2023; Dolores y García-García, 2017; Evitts, 2004).

Cabe señalar que hay otras tipologías de conexiones matemáticas reconocidas en la literatura, tal como reversibilidad y parte-todo. Sin embargo, estas no se abordan en esta investigación, ya que no se promueven en las tareas diseñadas sobre la ecuación lineal. La conexión de reversibilidad, porque esta se evidencia solo cuando se trabajan dos conceptos que son matemáticamente inversos, el cual no es

el caso y, la conexión de parte-todo porque, aunque sí se puede promover en tareas sobre la ecuación lineal una relación de tipo lógica (A contiene a B o B es contenido en A), en las tareas que se propusieron no se abordaron tareas que llevaran a los estudiantes a establecer esta conexión matemática.

2.2. Ecuación lineal

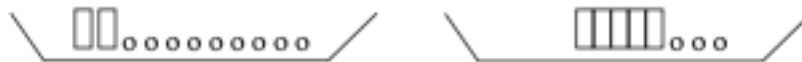
Las ecuaciones lineales son un concepto matemático fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática que permiten desarrollar la habilidad en los estudiantes de resolver problemas cotidianos con mayor rapidez. De acuerdo con Lehmann (2004), una ecuación lineal con una incógnita x es una expresión que se puede escribir de la forma $ax + b = 0$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Soto (2021) argumentó que una ecuación lineal es una ecuación en la cual la incógnita tiene exponente uno. Por ejemplo, la ecuación: $7x + 1 = 50$, es lineal, pues la incógnita que aparece (x) tiene como máximo exponente al 1. Pero también una ecuación lineal puede involucrar varias incógnitas todas con exponente 1 y sin que estas se multipliquen entre sí. Por ejemplo, $2x + 3y + 5z = 1$.

En la presente investigación se define una ecuación lineal como una igualdad entre expresiones algebraicas de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son constantes y x representa la incógnita con exponente igual a 1. Cabe mencionar que para ser una ecuación lineal todas las incógnitas involucradas, de ser el caso, tendrán como máximo exponente 1, de no ser así ya no se considera una ecuación lineal (Lehmann, 2004; Soto, 2021).

2.2.1. El modelo de equilibrio

El modelo de equilibrio o técnica de la balanza, de acuerdo con Andonegui (2007), se aplica de la siguiente manera: si tenemos la ecuación $2x + 9 = 5x + 3$, en la que los términos numéricos y los coeficientes de la incógnita son todos positivos, lo podemos representar como una balanza en equilibrio en la que un objeto puede simbolizar un miembro de la ecuación y, para representar los términos utilizamos, por ejemplo, un rectángulo para cada x y un círculo para cada unidad numérica, tal como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Modelo de equilibrio



Fuente: Andonegui (2007, p. 19)

Ahora bien, despejar la incógnita significa ir extrayendo de cada lado (miembro de la ecuación), en cada paso, la misma cantidad de cualquiera de los dos objetos utilizados. Esta condición es necesaria para que se mantenga el equilibrio de la balanza. Podemos seguir extrayendo la misma cantidad de cada miembro hasta que

el equilibrio final nos permita obtener solo una incógnita en toda la representación, es decir, obtener el resultado de la ecuación.

Este modelo de equilibrio es un método de enseñanza apropiado para resolver problemas de ecuaciones lineales en la literatura en Educación Matemática (Meningstie, 2020), pues motiva a los estudiantes a relacionar conceptos matemáticos con datos de observación y exploración y puede usarse para salvar la brecha en la comprensión de conceptos abstractos en álgebra (Vlassis, 2002; Warren y Cooper, 2005). Además, promueve la visión de una ecuación como un objeto, facilita la comprensión de las eliminaciones en operaciones algebraicas y aumenta la fluidez de representación (Atteh et al., 2017).

3. METODOLOGÍA

Esta es una investigación cualitativa, particularmente es un estudio de casos, donde participaron cuatro estudiantes de primer semestre de bachillerato que se encontraban cursando la asignatura de Álgebra en una preparatoria tecnológica de la ciudad de Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. La edad de los estudiantes oscilaba entre 17 y 18 años. Estos participaron por voluntad propia y en el momento de la aplicación aún no trabajaban el tema de ecuaciones lineales. En adelante nos referimos a ellos como E1, E2, E3 y E4.

3.1. Instrumento de recogida de datos

Para la colecta de los datos, se recopiló evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en las *lecciones* de GeoGebra. Estas lecciones estuvieron conformadas por cinco tareas (Tabla 1). Se eligió trabajar con las *lecciones* de GeoGebra porque esta opción permite ir observando, en la pantalla del autor de la lección, el trabajo de los estudiantes en tiempo real. Además, en el momento de la implementación se estaba haciendo la transición de clases virtuales a presenciales debido a la situación de contingencia por COVID-19 en la que se encontraba el país.

Otra técnica utilizada para la colecta de datos fue la videograbación de todos los momentos donde los estudiantes socializaban sus respuestas. Esta socialización se llevó a cabo entre uno de los profesores-investigadores y los estudiantes, y fue promovida por el profesor-investigador que estaba a cargo de la clase. La intención de esta fue que los estudiantes ofrecieran argumentos sobre lo que hicieron en el software, pues es a través de estos que se identifica si realmente los estudiantes establecen o no una conexión matemática.

























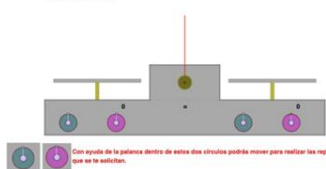
Para el diseño de las tareas se revisaron libros de texto y artículos sobre el concepto de ecuación lineal y se utilizó y rediseñó un applet de GeoGebra que contenía una balanza manipulable. Este applet nos permitió trabajar con el modelo de equilibrio en las tareas 2 (con la manipulación de la balanza), 3 y 4 (con la manipulación de tarjetas).

Las tareas se plantearon considerando el grado de dificultad. Se comenzó a trabajar con la idea de ecuación implícitamente como una igualdad mediante la

solución de retos, para posteriormente trabajar con esta relación de igualdad y, finalmente, en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

Por otra parte, las tareas diseñadas se hicieron sobre la base del marco conceptual, es decir, en cada una de ellas se esperaban ciertas conexiones matemáticas. Estas fueron validadas por expertos que han trabajado en la línea de conexiones matemáticas.

Tabla 1. Tareas propuestas a los estudiantes

Tarea 1	Tarea 2
<p>1. Resuelve los retos que se presentan a continuación y posteriormente contesta las preguntas con relación al procedimiento que usaste para llegar a la solución.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  + 11 =  <input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/> </div> <div style="text-align: center;">  - 8 =  <input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/> </div> <div style="text-align: center;">  + 2 =  <input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/> </div> <div style="text-align: center;">  - 10 = 5 </div> </div> <p>1.1 Explica de manera detallada qué realizaste para encontrar los resultados.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  +  +  +  = 36 </div> <div style="text-align: center;">  +  +  =  </div> <div style="text-align: center;">  +  +  = 24 </div> <div style="text-align: center;">  +  +  = 20 </div> <div style="text-align: center;">  +  ×  = ? </div> </div> <p>1.2 Explica cómo encontraste los valores faltantes. 1.3 Después de haber realizado los ejercicios anteriores, ¿Qué puedes concluir con relación a estos? 1.4 ¿Qué entiendes por ecuación lineal?</p>	<div style="text-align: center;"> $2x - 3 = x - 2$  <p style="font-size: small; color: red;">Con ayuda de la palanca dentro de estos dos círculos podrás mover para realizar las representaciones que se te solicitan.</p> </div> <p>2. Analiza el applet y contesta las preguntas propuestas. Instrucciones iniciales. Representa la expresión dada en el applet por medio de la manipulación de las palancas dentro de los círculos. Realiza lo que se te pide después de haber hecho la representación. Recuerda que tienes que mantener la representación para seguir con las siguientes tareas.</p> <p>2.1 Mueve la palanca del círculo verde y agrega una X en la parte izquierda de la balanza, ¿Qué ocurrió? 2.2 Conserva lo hecho anteriormente y mueve nuevamente la palanca del círculo verde y agrega una X en la parte derecha de la balanza, ¿Qué ocurrió? 2.3 Representa la expresión original $2x - 3 = x - 2$ en la balanza. Ahora agrega o quita x o números como desees ¿Qué puedes concluir? 2.4 ¿En qué momento la balanza está equilibrada? ¿por qué? Puedes colocar un ejemplo como ayuda a tu explicación. 2.5 Representa nuevamente la expresión original $2x - 3 = x - 2$ en la balanza.</p> <p>* Mueve las palancas de los círculos verde de cada lado de la balanza hacia la izquierda y disminuye una X a cada lado. Con la finalidad de que solo haya un X en toda la expresión. * Nota que la balanza va de uno en uno. Ahora mueve las palancas de los círculos rosa hacia la derecha y aumenta tres unidades. * Responde la siguiente pregunta.</p> <p>2.6 ¿Qué valores finales quedaron en cada lado de la balanza? 2.7 Escribe la nueva expresión que encontraste y responde: ¿Qué representa el valor obtenido que se encuentra en el lado derecho de la balanza? 2.8 Después de haber obtenido la expresión anterior y dado el resultado, consideras que, ¿Se puede quitar o agregar más x o números? ¿Por qué? 2.9 Observa el siguiente video y posteriormente responde lo que se te pide. 2.10 Después de haber realizado las tareas anteriores y observar el video, ¿Encuentras una relación con la actividad de la balanza y la definición de ecuación lineal? ¿Por qué? 2.11 La igualdad $2x-3 = x-2$ ¿Es una ecuación lineal? ¿Por qué?</p>

Tarea 3

3. Lee el siguiente enunciado y contesta las preguntas según tus conocimientos.

Luis invitó al cine a su novia y durante la función compraron 2 refrescos para ambos y una bolsa de palomitas de \$22. Si Luis gastó \$48 en total, ¿Cuánto costó cada refresco?

3.1 Representa esta situación empleando las fichas dadas:

3.2 Clasifica y coloca en los recuadros dados cada ficha de acuerdo con tus conocimientos. Toma en cuenta los nombres asignados.

Fichas	Nombre
	Términos o constantes
	Incógnitas
	Signos matemáticos

3.3 ¿La expresión representa una ecuación lineal? ¿por qué?

3.4 Encuentra el costo del refresco por medio de la manipulación de las fichas y explica cómo lo hiciste.

3.5 Escribe en la casilla el valor del refresco que encontraste.

3.6 Explica detalladamente cómo hiciste lo anterior.

Tarea 4

4. Lee la siguiente situación, plantea la ecuación correspondiente y responde lo que se te pide.

Ana, Fabiola y Carmen preparan pastelitos para la fiesta de egresados. Ana preparó cierta cantidad de pastelitos, Fabiola preparó el doble que Ana y Carmen el triple que Ana. Si en total se obtuvieron 60 pastelitos, ¿Cuántos pastelitos preparó cada una?

- 4.1 Usando las fichas escriba la ecuación que represente la situación.
- 4.2 Resuelve la ecuación resultante y encuentra el total de pastelitos que prepara cada una con ayuda de las fichas.
- 4.3 Explica cómo llegaste al resultado.
- 4.4 ¿Cuántos pastelitos preparó cada una?
- 4.5 Si Carmen no preparó pastelitos ¿cuál sería la ecuación que represente esto?
- 4.6 De acuerdo con la ecuación anterior, ¿Cuántos pastelitos preparará Ana y Fabiola?
- 4.7 Explica detalladamente qué realizaste para responder el inciso anterior.
- 4.8 ¿Cuál es la relación entre la ecuación encontrada en la primera tarea de esta actividad y la siguiente ecuación? $3x - 28 = -3x + 32$

Tarea 5

5. De las siguientes ecuaciones presentadas elige una y crea un problema en donde la emplees.

$5x+15=35$	$6x-4=2$	$x+7=32$	$8x=x+2$	$2x+5=-7$
$x+6=15$	$3x+6=9$	$x+8=12-x$	$5x-20=5$	$3x+4=10$
$x+4=9$	$2x-5=11$	$5x-18=27$	$3x-4=26$	$3x+5=11$

5.1 Llena la siguiente tabla con los datos solicitados después de haber escogido la ecuación que trabajarás.

Ecuación	Nombre del estudiante	Situación	Valor de la solución

5.2 Después de haber realizado las diferentes actividades responde lo siguiente:

Explica con tus propias palabras qué entiendes por ecuación lineal y menciona cuáles son sus principales características.

En la tarea 1 se esperaba que, a través de la resolución de los retos planteados, los estudiantes establecieran las conexiones de tipo procedimental, característica, representaciones diferentes y significado. En la tarea 2, se empieza a trabajar con el modelo de equilibrio, el cual les serviría posteriormente para resolver ecuaciones lineales, esperando que emergieran las mismas tipologías que en la tarea 1. Para el caso de las tareas 3 y 4, en donde los estudiantes debían transitar del lenguaje verbal al algebraico y emplear las tarjetas para representar y resolver las tareas propuestas, se esperaba que ellos establecieran las mismas tipologías de las tareas anteriores, pero añadiendo la de modelado. Finalmente, en la tarea 5 mediante la formulación y resolución de una situación en contexto a partir de una ecuación dada, se esperaba que emergieran las conexiones de tipo procedimental, característica, representaciones diferentes y significado.

3.2. Análisis de los datos

Para analizar los datos se utilizó el análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2012) el cual nos permitió identificar las conexiones matemáticas evidenciadas por los casos de estudio. Además, se utilizó el método de triangulación de datos entre investigadores que, de acuerdo con Aguilar y Barroso (2015), permite que haya una mayor validez, credibilidad y rigor en los resultados, ya que permite contrastar la información recabada con las diferentes perspectivas que puedan tener los investigadores, eliminando así el sesgo de un único investigador.

El análisis temático permite identificar y analizar patrones en datos cualitativos (Braun y Clarke, 2012). Para llevar a cabo este análisis se siguieron cinco fases, las cuales se describen y se ejemplifican, tomando como referencia lo realizado por E4.

3.2.1. Fase 1. Familiarización con los datos

Se revisaron detalladamente las producciones verbales y escritas de los casos de estudio para familiarizarse con el lenguaje que ellos emplearon y así comprender la forma en que estaban razonando. Para ello, se transcribieron las respuestas del trabajo hecho por los casos de estudio en el software GeoGebra de manera online y episodios de las videograbaciones donde ellos argumentaban o explicaban sus soluciones.

Tabla 2. Ejemplo de codificación de los datos: códigos iniciales y búsqueda de subtemas

Extracto	Código	Subtema
<p>Explica de manera detallada qué realizaste para encontrar los resultados.</p> <p>E4: Busqué un número que menos 10 sea 5 (valor de la estrella), después resté 15 menos 8 lo cual me dio 7 (valor del círculo), ya después sumé esos 7 más 2 lo cual me dio 9 (valor del triángulo).</p>	<p>C1: Busqué un número que menos 10 sea 5 (valor de la estrella), después resté 15 menos 8, lo cual me dio 7 (valor del círculo), ya después sumé esos 7 más 2, lo cual me dio 9 (valor del triángulo).</p>	<p>Sb1: Relación entre la situación propuesta y el cálculo mental para encontrar los valores solicitados.</p>
<p>Explica detalladamente cómo hiciste lo anterior.</p> <p>E4: Primero a 48 le resté 22, el resultado (26) lo dividí en 2 (número de los refrescos), lo cual me dio 13 (costo de los refrescos).</p>	<p>C2: Primero a 48 le resté 22, el resultado (26), lo dividí en 2 (número de los refrescos), lo cual me dio 13 (costo de los refrescos).</p>	<p>Sb2: La expresión $2x - 3 = x - 2$ es una ecuación lineal.</p>
<p>La igualdad $2x - 3 = x - 2$ ¿Es una ecuación lineal? ¿Por qué?</p> <p>E4: Si, porque involucra incógnitas elevadas a la primera potencia.</p>	<p>C3: $2x - 3 = x - 2$, es una ecuación lineal. C4: Una ecuación lineal tiene incógnitas elevadas a la primera potencia.</p>	<p>Sb3: Una ecuación lineal tiene incógnitas elevadas a la primera potencia y un valor desconocido.</p>

3.2.2. Fase 2. Generación de códigos iniciales y búsqueda de subtemas

La codificación fue teórica considerando el marco conceptual. En este sentido, con base en la lectura detallada de las transcripciones, se buscaron frases o palabras que hicieran referencia a algún tipo de conexión matemática realizada por los casos de estudio. Esta codificación se fue refinando conforme avanzó el proceso (Tabla 2, columnas extracto y código).

3.2.3. Fase 3. Búsqueda de subtemas

Se revisaron los códigos creados en la fase anterior para identificar áreas de similitud, se agruparon aquellos que tenían algún rasgo en común para formar familias de códigos y se describió la característica particular de cada uno. Estos los denominamos subtemas (Tabla 2, última columna).

3.2.4. Fase 4. Revisión de subtemas

Se realizó una revisión de los subtemas con la finalidad de que hubiese una relación entre los datos codificados y todo el conjunto de datos. Para ello, se hizo una lectura detallada de los subtemas establecidos a fin de identificar si estos guardaban coherencia con los objetivos planteados. Además, en esta fase se trabajó la triangulación entre investigadores, con experiencia en el marco conceptual, para discutir en torno a los subtemas creados, su coherencia y, de ser necesario, su modificación (ver Tabla 3).

Tabla 3. Ejemplos de subtemas modificados

Subtema	Modificación
Sb1: Relación entre la situación propuesta y el cálculo mental para encontrar los valores solicitados.	Sb1: Un procedimiento para resolver las situaciones es el cálculo mental para encontrar el valor de x .
Sb3: Una ecuación lineal tiene incógnitas elevadas a la primera potencia y un valor desconocido.	Sb3: Una ecuación lineal es una igualdad que tiene incógnitas elevadas a la primera potencia.

3.2.5. Fase 5. Definición y denominación de temas

Se definieron los temas de acuerdo con el objetivo de investigación (ver Tabla 4) y, dado que la codificación fue teórica, los temas corresponden a las tipologías de conexiones matemáticas. En esta fase, se discutió con los investigadores las conexiones matemáticas identificadas. Cuando no había consenso se revisaban y analizaban los resultados de fases anteriores hasta llegar a un acuerdo.

Tabla 4. Ejemplo de asociación de subtemas con los temas

Subtema	Tema (Tipologías)	Explicación
Sb1: Un procedimiento para resolver las situaciones es el cálculo mental para encontrar el valor de x .	C. Procedimental.	Relación entre las situaciones planteadas y el procedimiento mental para encontrar el valor de x .
Sb2: $2x - 3 = x - 2$ es una ecuación lineal.	C. Representaciones diferentes.	Relación entre una representación simbólica y una representación pictórica.
Sb3: Una ecuación lineal es una igualdad que tiene incógnitas elevadas a la primera potencia.	C. Significado.	Relación entre la ecuación lineal y el significado que le da el estudiante en tanto lo que es para él.

4. RESULTADOS

Una vez terminado el análisis de las producciones de los cuatro casos de estudio al resolver las cinco tareas propuestas, se identificaron diversas conexiones matemáticas que se resumen en la Tabla 5.

Tabla 5. Conexiones matemáticas esperadas y evidenciadas en cada tarea

Tareas	Conexiones matemáticas esperadas	Conexiones matemáticas identificadas			
		E1	E2	E3	E4
1	Procedimental		*	*	
	Característica	*			
	Representaciones diferentes	*	*	*	
	Significado				
2	Procedimental				
	Característica	*		*	
	Representaciones diferentes	*	*	*	
	Significado		*		
3	Procedimental	*	*	*	*
	Característica				
	Representaciones diferentes	*	*	*	*
	Significado		*		*
	Modelado	*	*	*	*
4	Procedimental	*	*	*	*
	Característica				
	Representaciones diferentes	*	*	*	*
	Significado		*		
	Modelado	*	*	*	*
5	Procedimental				
	Característica	*			
	Representaciones diferentes			*	
	Significado		*		*

4.1. Conexión matemática procedimental

Esta conexión matemática fue establecida en las tareas 1, 3 y 4 (Tabla 6) en donde los casos de estudio usaron el cálculo mental como único procedimiento en los procesos de asociación de un valor con una figura, clasificación de elementos de una ecuación lineal, así como en la formulación y solución de ecuaciones lineales.

Tabla 6. Subtema relacionado con la conexión matemática procedimental

Subtema	E1	E2	E3	E4
Un procedimiento para resolver las situaciones es el cálculo mental para encontrar el valor de x .	*	*	*	*

Por ejemplo, en la tarea 1, E2 describió cómo resolvió uno de los retos planteados (ver extracto de E2 y Figura 2).

Investigador: Explica de manera detallada qué realizaste para encontrar los resultados.

E2: Busqué un número que menos 10 sea 5 (valor de la estrella), después resté 15 menos 8, lo cual me dio 7 (valor del círculo), ya después sumé esos 7 más 2, lo cual me dio 9 (valor del triángulo).

Figura 2. Conexión procedimental hecha por E2

Resuelve el siguiente reto encontrando los resultados de las operaciones, colócalos en las casillas correspondientes y responde la pregunta con relación al procedimiento que usaste para llegar a la solución.

The image shows a math puzzle interface with four rows of equations. On the right, there is a 'Resultados' (Results) section with three input boxes containing the numbers 15, 7, and 9, each with a label: 'Valor de la estrella', 'Valor del círculo', and 'Valor triángulo' respectively.

- Row 1: A red square followed by $+ 11 =$, a blue star, and a box containing 15 labeled 'Valor de la estrella'.
- Row 2: A blue star followed by $- 8 =$, a green circle, and a box containing 7 labeled 'Valor del círculo'.
- Row 3: A green circle followed by $+ 2 =$, a yellow triangle, and a box containing 9 labeled 'Valor triángulo'.
- Row 4: A blue star followed by $- 10 = 5$.

Explica de manera detallada qué realizaste para encontrar los resultados.
 primero busque un numero que menos 10 sea 5, despues reste 15 menos 8 lo cual me dio 7 (valor del círculo) ya después sume esos 7 más 2 lo cual me dio 9 (valor del triángulo).

Para el caso de la tarea 3 y 4, E2 planteó de manera consistente las ecuaciones que representaban las tareas y después encontró el valor de x . Así, en las tareas 3.6

y 4.3 detalló cómo encontró los valores de x utilizando el cálculo mental (ver extracto de E2).

Investigador: Explica detalladamente cómo hiciste lo anterior [tarea 3.6].

E2: PRIMERO a 48 le resté 22, el resultado (26) lo dividí en 2 (número de los refrescos), lo que me dio 13 (costo de los refrescos) [...].

Investigador: Explica cómo llegaste al resultado anterior [tarea 4.3].

E2: Busqué un número que sumado con su doble y su triple diera 60.

4.2. Conexión matemática característica

Esta conexión matemática se evidenció en las producciones de E1 y E3 quienes indicaron las características del concepto matemático (Tabla 7).

Tabla 7. Subtemas relacionados con la conexión matemática característica

Subtemas	E1	E2	E3	E4
Una ecuación lineal es una igualdad entre expresiones algebraicas que tiene un valor desconocido.	*			
Una ecuación lineal tiene incógnitas elevadas a la primera potencia.			*	

E1, por ejemplo, evidenció la conexión característica al resolver las tareas 1, 2 y 5. Específicamente, en la tarea 1, indicó que una ecuación lineal es una igualdad entre expresiones. En la tarea 2, describió que la ecuación lineal está equilibrada y, finalmente, en la tarea 5 mencionó que es una igualdad y se tiene que encontrar un valor desconocido, como se muestra en el siguiente extracto:

Investigador: ¿Qué entiendes por ecuación lineal?

E1: Entiendo que es una operación de igualdad entre expresiones [...].

Investigador: La igualdad $2x - 3 = x - 2$ ¿Es una ecuación lineal? ¿Por qué?

E1: Sí, porque es una ecuación equilibrada [...].

Investigador: Explica con tus propias palabras qué entiendes por ecuación lineal [...].

E1: Lo que entiendo es que son ecuaciones que se tienen que igualar o encontrar su respectivo valor.

Por su parte, E3 indicó como característica de la ecuación lineal un valor desconocido, pero lo llamó incógnita. Además, evidenció una característica fundamental del concepto, es decir, que estas incógnitas están elevadas a la primera potencia (ver Figura 3).

Figura 3. Característica de la ecuación lineal de acuerdo con E3

La igualdad $2x-3 = x-2$ ¿Es una ecuación lineal? ¿Por qué?
si porque estan elevados a la primera valencia

4.3. Conexión matemática representaciones diferentes

De acuerdo con el marco de referencia, hay dos tipos de representaciones diferentes (alternas y equivalentes). En las tareas se espera el uso de ambas, sin embargo, solo se evidenciaron las alternas (verbal-algebraico, pictórico-numérico y algebraico-verbal). Esta tipología emergió en las cinco tareas propuestas. La Tabla 8 presenta los subtemas que componen a esta conexión matemática. Asimismo, se puede observar que algunos subtemas son similares, sin embargo, la razón del porqué separarlos está relacionada con la tarea en la cual fueron evidenciados.

Tabla 8. Subtemas relacionados con la conexión matemática, representaciones diferentes

Subtemas	E1	E2	E3	E4
Los números 15, 7 y 9 se asocian a una representación pictórica.	*	*	*	
La expresión $2x + 22 = 48$ se asocia a una situación específica.	*	*	*	*
Las expresiones $x + 2x + 3x = 60$ o $x + 2x = 30$ se asocian a situaciones específicas.	*	*	*	*
La expresión $2x + 22 = 48$ es una ecuación lineal.		*		*
La expresión $2x - 3 = x - 2$ es una ecuación lineal.		*	*	*
La situación: María fue a comprar a la tienda una caja de chocolate y un litro de leche que le costó \$7 pesos si en total fueron 32 ¿cuánto costó la caja de chocolate? se asocia con la ecuación $x + 7 = 32$.			*	

Por ejemplo, el subtema *las expresiones $x + 2x + 3x = 60$ o $x + 2x = 30$ se asocian a situaciones específicas* fue evidenciado por E4 cuando formuló las expresiones asociadas a las situaciones propuestas (situación de los pastelitos) empleando los registros verbal y algebraico (ver Figura 4).

Por otra parte, el subtema *la situación planteada se asocia con la ecuación $x + 7 = 32$* , fue evidenciado en las producciones de E3 en la tarea 5. Para esta tarea, se esperaba que los casos de estudio, a partir de ecuaciones dadas, formularan y resolvieran una situación problema, para lo cual solo E3 lo realizó, como se muestra a continuación (ver extracto y Figura 5).

Investigador: De las siguientes ecuaciones elige una y crea un problema en donde la emplees.

E3: La ecuación elegida es: $x + 7 = 32$. El problema dice: María fue a comprar a la tienda una caja de chocolate y un litro de leche que le costó \$7 pesos [más], si en total fueron 32 ¿cuánto costó la caja de chocolate? Y el resultado es que la caja de chocolate costó \$25 pesos.

Figura 4. Representaciones diferentes (verbal-algebraico) hecha por E4 en la tarea 4

Ana, Fabiola y Carmen preparan pastelitos para la fiesta de egresados. Ana preparó cierta cantidad de pastelitos, Fabiola preparó el doble que Ana y Carmen el triple que Ana. Si en total se prepararon 60 pastelitos, ¿Cuántos pastelitos preparó cada una?

Usando las fichas escriba la ecuación que represente la situación.

Coloca aquí la ecuación resultante.

Escribe la ecuación y posteriormente presiona enter para validar tu respuesta ✓

Tarea Si Carmen no preparó pastelitos.
¿Cuál sería la ecuación que represente esto?

Figura 5. Representaciones diferentes (algebraico-verbal) evidenciado por E6

María fue a comprar a la tienda una caja de chocolate y un litro de leche que le costó \$7 pesos si en total fueron 32 ¿cuánto costó la caja de chocolate?	la caja de chocolate costó \$25 pesos
--	---------------------------------------

4.4. Conexión matemática significado

Esta conexión fue evidenciada por E2 en las tareas 2, 3, 4 y 5, y por E4 en las tareas 2 y 5 (Tabla 9). En ese sentido, E4, por ejemplo, indicó lo que entendía por ecuación lineal considerando la idea de incógnita y su exponente (ver extracto de E4).

Tabla 9. Subtemas relacionados con la conexión matemática de significado

Subtemas	E1	E2	E3	E4
Una ecuación lineal es una igualdad que tiene incógnitas elevadas a la primera potencia.		*		*

Investigador: ¿Qué entiendes por ecuación lineal? Menciona cuáles son sus principales características.

E4: Una ecuación lineal según lo que entiendo es que contiene números y lleva incógnitas ya sea la x o y .

E4: Además, no tienen exponentes como al cuadrado o al cubo, eso es una ecuación lineal.

La conexión de significado no fue evidenciada por E1 ni por E3, porque en sus producciones se pudo notar que solo establecieron una relación entre el concepto de ecuación lineal y las características relacionadas con su exponente y un valor desconocido que lo distingue de otro concepto, pero no se evidenció el sentido que le dan a la ecuación lineal, es decir la definición y cómo son conscientes de su uso en diferentes contextos.

4.5. Conexión matemática de modelado

Esta conexión extra-matemática se identificó en los cuatro casos de estudio al desarrollar las tareas 3 y 4. Esta se diferencia de la conexión de representaciones diferentes porque el estudiante parte de un problema que ocurra o pueda ocurrir en un contexto real, y posteriormente plantea un modelo para darle solución, como sucedió en este caso. Una vez construido el modelo, el estudiante hizo uso de sus conocimientos (matemáticos o no) para encontrar el valor de x . Aquí los registros se vuelven acciones para dar solución al modelo (Tabla 10).

Tabla 10. Subtemas relacionados con la conexión matemática de modelado

Subtemas	E1	E2	E3	E4
El modelo matemático $2x + 2x = 48$ asociado al problema: Luis invitó al cine a su novia y durante la función compraron 2 refrescos para ambos y una bolsa de palomitas de \$30. Si Luis gastó \$48 en total, ¿Cuánto costó cada refresco? Permite encontrar el costo de los refrescos (valor de x).	*	*	*	*
El modelo matemático $x + 2x + 3x = 60$ asociado al problema: Ana, Fabiola y Carmen preparan pastelitos para la fiesta de egresados. Ana preparó cierta cantidad de pastelitos, Fabiola preparó el doble que Ana y Carmen el triple que Ana. Si en total se obtuvieron 60 pastelitos, ¿Cuántos pastelitos preparó cada una? Permite encontrar la cantidad de pastelitos (valor de x).	*	*	*	*
El modelo matemático $x + 2x = 30$ asociado al problema: Si Carmen no preparó pastelitos ¿Cuál sería la ecuación que represente esto? Permite encontrar la cantidad de pastelitos (valor de x).	*			

Un ejemplo es el caso de E2, quien evidenció esta conexión al solucionar las tareas 3 y 4. Sus producciones muestran que logró plantear la ecuación lineal (ver Figura 6) y posteriormente, mediante el cálculo mental, encontró el valor de x (ver Figura 7).

Figura 6. Ecuación lineal relacionada con la conexión de modelado por E2

Luis invitó al cine a su novia y durante la función compraron 2 refrescos y una bolsa de palomitas de \$22. Si Luis gastó \$48 en total, ¿Cuánto costó cada refresco?

Representa esta situación empleando las fichas dadas y luego escríbela en la casilla y valida.



Coloca la expresión aquí usando las fichas:



Coloca la expresión y luego presiona enter para validar tu respuesta:

Nota: si aparece una palomita es porque tu respuesta es correcta



Figura 7. Evidencia del costo de cada refresco (valor de x) por E2

Encuentra el costo del refresco por medio de la manipulación de las fichas.

Para ello ten en cuenta lo realizado en la actividad uno: dejar la x sola a un lado manteniendo el equilibrio.



Coloca el costo del refresco y luego presiona enter para validar tu respuesta:

Nota: si aparece una palomita es porque tu respuesta es correcta



Después de encontrar el costo de cada uno de los refrescos, en la siguiente pregunta se le solicitaba a E2 que detallara cómo había encontrado ese valor (ver extracto de E2).

Investigador: Explica detalladamente cómo hiciste lo anterior.

E2: Primero, a 48 le resté 22, el resultado (26) lo dividí en 2 (número de los refrescos), lo cual me dio 13 (costo de los refrescos).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue identificar qué conexiones matemáticas establecían cuatro estudiantes mexicanos de primer semestre de bachillerato al resolver tareas que involucran a la ecuación lineal. En las producciones de los casos de estudio se identificaron cuatro conexiones intra-matemáticas: procedimental, característica, representaciones diferentes, significado y una conexión extra-matemática: modelado. Este resultado es consistente con lo reportado por Businskas (2008) y Dolores y García-García (2017). Además, estas conexiones matemáticas han sido reportadas en la práctica de los estudiantes de bachillerato al resolver tareas específicas (Campo-Meneses y García-García, 2020, 2021; García-García y Dolores-Flores, 2018, 2021) e incluso en las producciones de profesores (Businskas, 2008; Eli et al., 2013; Evitts, 2004; Rodríguez-Nieto et al., 2022).

Los resultados muestran que las conexiones más frecuentes fueron las de representaciones diferentes y procedimental. Este resultado es consistente con lo reportado por Dolores y García-García (2017). Mientras que la conexión de menor frecuencia fue la de significado. Fueron en las tareas 3 y 4 donde se evidenciaron la mayoría de las conexiones matemáticas hechas por los cuatro casos de estudio. Sin embargo, algunas conexiones esperadas en las tareas no fueron establecidas, por ejemplo, la conexión característica no fue establecida en las tareas 3 y 4.

Para el caso de la conexión procedimental, esta fue evidenciada en tres de las cinco tareas en donde el principal procedimiento fue el cálculo mental hecho por los estudiantes. Por su parte, la conexión característica se evidenció en las producciones de dos estudiantes (E1 y E3) en las tareas 1, 2 y 5. Sin embargo, E2 y E4 no evidenciaron dicha conexión, porque en su lugar establecieron la conexión de significado. Esto último es importante porque el significado ayuda a darle sentido al concepto matemático, interpreta la funcionalidad de este, delimita su uso, pero también permite definirlo e interpretarlo según el contexto (García-García, 2019).

En cuanto a la conexión de representaciones diferentes que fue evidenciada por los cuatro casos de estudio, se encontró que estos trabajaron conectando el registro verbal y el algebraico, es decir, a partir de la situación problema, plantearon la ecuación que representaba dicha situación. Esto se debe principalmente porque en las tareas propuestas solo se promovían estos registros, no obstante, en un estudio posterior será importante abordar otros registros de representación.

En el caso de la conexión de modelado fue evidenciada por los cuatro casos de estudio que trabajaron de manera similar al formular el modelo matemático (ecuación lineal) asociado a las situaciones del costo de refrescos y la cantidad de paste-litos (contexto real). Este resultado es consistente con lo reportado por Dolores y García-García (2017), aunque con el concepto de integral definida en estudiantes universitarios.

Por otro lado, los resultados evidenciaron que los casos de estudio tienen ciertas dificultades al trabajar con tareas que involucran a la ecuación lineal. Chavarría (2014) reportó que una de las causas es la deficiencia en la lectura e incluso la distracción por parte de los estudiantes. En esta investigación, esto se evidenció al

momento de socializar algunas de las respuestas de los casos de estudio, ya que estos no leían bien las instrucciones planteadas, lo que, a su vez, les dificultaba resolver las tareas. Por ejemplo, en la tarea 2, que estaba relacionada con la manipulación de una balanza, ellos no comprendían la relación de igualdad por no leer correctamente la información proporcionada para tal fin.

Además, Chavarría (2014) añade que una de las causas más reiteradas, por las cuales los estudiantes no logran plantear un problema, es la deficiencia por trasladar el lenguaje común al algebraico o viceversa. Esto es consistente con lo que sucedió en la tarea 5 con tres de los cuatro estudiantes que, a partir de una ecuación dada, no lograron expresar una situación problema relacionada con la ecuación lineal, asimismo, a pesar de haber planteado la ecuación en las tareas 3 y 4, los cuatro estudiantes tuvieron dificultad para hacer la transición del lenguaje verbal al algebraico.

Otra de las dificultades identificadas, fue el uso incorrecto de las operaciones básicas y la jerarquía de operaciones, esto se pudo observar en los retos planteados en la tarea 1, ya que los estudiantes no tomaron en cuenta la jerarquía de operaciones y esto a su vez causó que no respondieran de manera consistente lo que se les solicitaba. Esta dificultad coincide con lo reportado por Segura (2004), quien afirmó que los estudiantes presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones.

Dichas dificultades sugieren que es necesario la implementación de estrategias de enseñanza que permitan minimizarlas. Por esta razón, consideramos que una vía es la implementación de propuestas de enseñanza desde el enfoque de las conexiones matemáticas con la finalidad de que los estudiantes establezcan relaciones entre los problemas y las estrategias usadas como procedimientos; puedan enunciar las características de cierto concepto matemático y el sentido que le dan; y establezcan relaciones entre los diferentes registros de representación y sean capaces de modelar una situación de su propio contexto para darle solución.

Ahora bien, en esta investigación el uso de GeoGebra permitió aplicar las tareas propuestas teniendo en cuenta la contingencia sanitaria, además de que permitió observar en tiempo real las producciones hechas por los estudiantes que se guardaron de manera automática, lo que a su vez permitió la transcripción a un documento Word para realizar el análisis de dichas producciones.

De igual manera, se realizó el rediseño de una balanza que tenía como finalidad trabajar con la idea del modelo de equilibrio, ya que, de acuerdo con Mengistie (2020), este modelo motiva a los estudiantes a relacionar conceptos matemáticos con datos de observación y exploración y puede usarse para salvar las brechas en la comprensión de conceptos abstractos en álgebra (Vlassis, 2002; Warren y Cooper, 2005). Los resultados de esta investigación son consistentes con lo reportando anteriormente por dichos investigadores, es decir, que el modelo de equilibrio mediado por GeoGebra permite llegar a la relación de igualdad para que, al momento de operar, el estudiante comprenda que lo que realice se debe hacer en ambos miembros de la ecuación.

Finalmente, se considera que esta investigación tiene un aporte práctico, en tanto que los resultados reportados podrían ser útiles para plantear un rediseño de tareas que promueva el establecimiento de conexiones matemáticas y que contribuyan en el aprendizaje del concepto de ecuación lineal. Asimismo, los resultados invitan a seguir investigando en esta línea de conexiones matemáticas para contribuir con la agenda de investigación del enfoque de conexiones matemáticas que va aumentando el interés por parte de investigadores en diferentes países.

REFERENCIAS

- Aguilar, S., & Barroso, O. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. *Pixel-bit. Revista de medios y educación*, 47, 73-88. <https://doi.org/10.12795/pixelbit.2015.i47.05>
- Andonegui, M. (2007). *Introducción al álgebra. Serie desarrollo del pensamiento matemático*, 2007/19. UNESCO. <http://scioteca.caf.com/handle/123456789/529>
- Atteh, E., Andam, E., & Amoako, J. (2017). The Impact of using balance model in teaching linear equation. *International Journal Article*, 11(3), 1-12. <https://doi.org/10.9734/ACRI/2017/35310>
- Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper (Ed.), *Handbook of Research Methods in Psychology* (pp. 57-71). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/13620-004>
- Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Tesis de doctorado no publicada. Simon Fraser University.
- Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática*, 32(3), 209-240. <https://doi.org/10.24844/em3203.08>
- Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA*, 16(1), 25-56. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i1.15817>
- Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2023). Conexiones matemáticas identificadas en la clase sobre funciones exponencial y logarítmica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37(76), 849-871. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a22>
- Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, 28(2), 15-44.
- Dolores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en nivel superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 158-180. <http://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08>
- Eli, J., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connection and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, 113(3), 120-134. <https://doi.org/10.1111/ssm.12009>
- Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid.

- Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula*. Tesis de doctorado no publicada. Pennsylvania State University College of Education.
- Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 169-193. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf>
- García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *NÚMEROS*, 100, 129-133.
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227-252. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 1-22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making mathematical connections with transformations using open approach. *HRD Journal*, 3(1), 91-100. <https://so01.tci-thaijo.org/index.php/HRDJ/article/view/11305>
- Kaplan, R., & Alon, S. (2013). Using technology to teach equivalence. *Teaching Children Mathematics*, 19(6), 382-389. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.6.0382>
- Lehmann, C. (2004). *Álgebra*. Limusa.
- Mengistie, S. (2020). Enhancing Students' Understanding of Linear Equation with One Variable Through Teaching. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, 3(2), 69-80. <https://doi.org/10.33122/ijtmer.v3i2.148>
- Muñoz, M., & Ríos, C. (octubre de 2008). Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra. *IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Valledupar, Colombia.
- Navia, L. (2017). Representaciones semióticas del concepto de ecuación lineal con una variable a partir de la implementación de un juego didáctico. *Revista Amazonia Investiga*, 6(11), 38-52.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 6(30), 1-21. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2>
- Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., & Font, V. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1231-1256, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254>
- Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., Font, V., & Morales-Carballo, A. (2021). Una visión desde la red de teorías TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop*, 3, 1-32. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202115>
- Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(1), 49-78.

- Soto, E. (2021). *Glosario ilustrado de matemáticas escolares*. Aprende Matemáticas.
- Suh, J. & Moyer, P. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155-173.
- Vlassis, J. (2002). Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341-359.
<https://www.jstor.org/stable/3483036>
- Warren, E., & Cooper, T. (2005). Young Children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, 17(1), 58-72.

∞

Gabriel Barragán Mosso

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
gmosso31@gmail.com | <https://orcid.org/0009-0009-2967-3800>

Karen Gisel Campo-Meneses

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
karencampo@uagro.mx | <https://orcid.org/0000-0001-7483-3134>


Javier García-García

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
jagarcia@uagro.mx | <http://orcid.org/0000-0003-4487-5303>

Recibido: 20 de junio de 2022

Aceptado: 22 de diciembre de 2023

Mathematical Connections Associated with the Linear Equation Made by High School Students

Gabriel Barragán Mosso @ , Karen Gisel Campo-Meneses @ ,
Javier García-García @ 

Universidad Autónoma de Guerrero (México)

This research is immersed in the line of mathematical connections, a current topic on the agenda of Mathematics Education. In particular, this article aimed to identify the mathematical connections made by four Mexican students in the first semester of high school when working with tasks that involve the concept of linear equation. This research is qualitative, particularly a case study, which allowed an in-depth analysis of their productions (verbal and written), as well as documenting the findings that concretely support the establishment of each mathematical connection in the case studies.

To identify mathematical connections, the conceptual framework of mathematical connections proposed by García-García and Dolores-Flores (2018) was adopted, since this framework is focused on working with students, in line with the focus of this research. To collect the data, five tasks mediated by the GeoGebra software were applied and fragments were videotaped in which the students socialized some of their answers, which allowed the identification of the different mathematical connections reported.

To analyze the oral productions and arguments of the case studies, the thematic analysis method was used, and the findings were debated using the data triangulation method, which allowed a broader perspective, greater validity, credibility, and rigor in the analysis of the results.

In general, the results showed that the case studies made different intra-mathematical connections: feature, meaning, different representations, and procedural, as well as an extra-mathematical connection: modeling, when solving the proposed tasks. Mathematical connections of different representations and procedural types were the most frequent. In addition, the results showed that the use of GeoGebra as a means for the development of the tasks was positive since it was free and allowed a joint connection between the students and the visualization of their answers in real time.

Finally, the research is considered to have a practical contribution. This is because we consider that the reported results could be useful to teachers to propose a redesign of the tasks proposed in this research to promote the use and making of mathematical connections for a specific group in a given context. This would be an important contribution to the line of mathematical connections that demands interventions in the classroom to promote comprehension based on the establishment of mathematical connections.