



TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE ENSEÑANZA BÁSICA EN CHILE

Romi Torres* 

Universidad Católica del Maule, Chile
ratorres@ucm.cl

Mario Sánchez 

Universidad Católica del Maule, Chile
msanchezb@ucm.cl

RESUMEN: Para el trabajo de este artículo, se analizó el objeto matemático ángulo y su progresión en los textos escolares de educación primaria del sistema educacional chileno, que son entregados de forma gratuita a los colegios que reciben recursos del estado. Las actividades, ejercicios resueltos y situaciones propuestas fueron clasificadas en diversas categorías de acuerdo con su definición, significado y dificultades asociadas. Los resultados evidencian una marcada tendencia a mostrar al ángulo como un par de rayos con un punto en común con un sentido estático, lo que trae diversas dificultades, entre las que destacan principalmente aquellas que excluyen algunas medidas de ángulo como 0° , 180° , 360° , ángulos negativos y aquellos que tienen una medida mayor que 360° . Se concluye que una de las formas para evitar estas dificultades es trabajar este objeto con un significado dinámico, en sistemas con un rayo inicial y otro final que gira hasta formar el ángulo deseado, sin excluir los ya mencionados y evitando así generar dificultades en la interiorización de este concepto por parte de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE: Geometría, educación básica, docente de escuela primaria, enseñanza de las matemáticas, enseñanza pública.

TREATMENT OF THE CONCEPT OF ANGLE IN ELEMENTARY SCHOOL TEXTBOOKS IN CHILE

ABSTRACT: For the work of this article, the mathematical object angle and its progression in primary school textbooks of the Chilean educational system, which are delivered free of charge to schools that receive state resources, were analyzed. The activities, solved exercises and proposed situations were classified into various categories according to their definition, meaning and associated difficulties. The results show a marked tendency to show the angle as a pair of rays with a common point in a static sense, which brings various difficulties, among which those that exclude some angle measurements such as 0° , 180° , stand out mainly. 360° , negative angles and those that have a measure greater than 360° . It is concluded that one of the ways to avoid these difficulties is to work this object with a dynamic meaning, in systems with an initial beam and a final beam that rotates to form the desired angle, without excluding those already mentioned and thus avoiding generating difficulties in internalization. of this concept by the students.

KEYWORDS: Geometry, basic education, Primary school teacher, Mathematics education, Public education.

Recibido: 29/07/2021

Aceptado: 9/12/2022

1. INTRODUCCIÓN

El desempeño de los estudiantes de enseñanza básica en la asignatura de matemática en Chile se encuentra bajo el nivel esperado, mediciones internacionales como la prueba *Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias* (TIMSS), muestra como los resultados están muy por debajo de la media de los países que participan en esta evaluación. (Arias, 2020)

Mediciones nacionales como el SIMCE evidencian que los resultados en esta asignatura se han mantenidos estables, sin mostrar mejoras significativas por más de una década (SIMCE, 2019).

Geometría es uno de los cinco ejes de esta asignatura, y a la cual corresponden el 17% en promedio de los Objetivos de aprendizaje de enseñanza básica de matemática, es aquí en donde se espera que los estudiantes aprendan a describir con un lenguaje más preciso las características y propiedades de las figuras de su entorno. (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2018).

El problema específicamente en la enseñanza de la geometría se arrastra desde los años setenta en donde se dejó de lado su enseñanza tanto para estudiantes como para el profesorado, lo que ha conllevado a que se pierdan capacidades como la

visualización, representación, exploración, modelización, argumentación y la demostración; que son claves en los procesos geométricos. (Aravena y Caamaño, 2013).

Estudios previos, muestran que a la geometría no se le otorga la importancia que se les da a otros ejes de esta asignatura, a pesar de su gran contribución al desarrollo del pensamiento matemático, se enseñan conceptos estáticos y para memorizar, lo que no propicia la comprensión real de éstos. (Díaz y Kú, 2017; Itzcovich, 2005).

Uno de los objetos matemáticos que es muy común encontrar en la vida cotidiana y de los cuales se tiende a entregar definiciones, y caracterizaciones ambiguas en geometría, es el ángulo, (Rotaeché y Montiel, 2008; Díaz y Kú, 2017). La importancia de una definición clara y precisa radica en que es ésta, la que entrega el significado al objeto y permite describir sus propiedades. (Hurtado, 2017). A veces el ángulo, incluso se trabaja de forma aislada y sin ningún contexto, lo que no permite que el alumno comprenda este objeto y sus propiedades. (Díaz y Kú, 2017).

Itzcovich (2007) plantea que el trabajo matemático realizado con los estudiantes es comprendido por ellos, a partir de las experiencias durante su escolaridad en las instituciones educativas.

En Chile a partir de la década de los noventa, se fortalece la enseñanza de la geometría en la formación inicial y se reforma lo que debe enseñarse de este eje, en los distintos niveles. (Aravena y Caamaño, 2013). Sin embargo, los resultados TIMSS permiten concluir que éste sigue siendo un tema para mejorar en la política pública, especialmente en los primeros años de escolaridad. (Arias, 2020)

En el currículum nacional vigente en Chile, el ángulo aparece a partir del 3er nivel de educación primaria. (Ministerio de Educación, 2018). Estudios previos aportan evidencia sobre la confusión presente en los estudiantes respecto de este objeto, sin embargo, no existe información de cómo se presenta esta temática en los textos escolares chilenos, recurso comúnmente utilizado tanto por docentes para la planificación de las clases, como por los estudiantes (Torres y Moreno, 2008), y de suma importancia, ya que cumple un rol mediador entre lo planteado por el currículum y la clase propiamente tal. (Pino y Blanco, 2008)

En este artículo se busca analizar la progresión que tiene el concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile, identificando cómo se presenta el concepto de ángulo, en todos los niveles de enseñanza básica. Se considera importante realizar esta revisión de la literatura, para conocer la definición, el sentido y las dificultades asociadas al concepto de ángulo entregado en este medio, y determinar si esto podría contribuir a agudizar las dificultades presentadas.

2. EL CONCEPTO DE ÁNGULO

En matemática, el significado de un concepto está determinado por su definición formal, Matos (1990) hace una recopilación mostrando los distintos aspectos que se consideran y las variadas definiciones del concepto de ángulo a través de la historia, desde los egipcios en el año 2.400 ac haciendo alusión a temas astronómicos, y posteriormente considerando el ángulo como una cualidad, o como la inclinación entre rectas, el área encerrada entre ellas, y también como concepto implícito en las funciones trigonométricas, entre otras.

Husserl (2000) plantea que los objetos geométricos son modelos matemáticos de los objetos de los cuales surge su idea, y las denomina idealidades geométricas, en este caso, el ángulo aparece en diversas teorías que van desde la geometría euclidiana, hasta otras más avanzadas como trigonometría, física, análisis, entre otras; y se ha definido a partir de cada una de ellas de forma muy diferente, para resolver problemas propios de éstas, es por ello que se le asocia, por ejemplo, a la cantidad de giros y por otra parte también a la inclinación entre rectas. Pachuca y Zubieta (2020). Respondiendo con un modelo distinto a cada una de las situaciones y en consecuencia generando distintas idealidades de un mismo objeto.

Los estudiantes, más que a la definición del concepto, tienden a recurrir a la imagen mental que tienen de éste para resolver diversos problemas. Pachuca y Zubieta (2020). tienden a considerar ideas personales e imágenes mentales propias sobre este objeto, lo que hace necesario generar imágenes correctas en la mente de los estudiantes para que puedan así aplicarlas de manera adecuada. (Vinner, 2002)

Una de las definiciones más aceptadas (Matos, 1991) de este objeto, es la dada por Hilbert en 1971:

Sea α un plano cualquiera, y h, k dos semirrayos diferentes que parten de un punto O en α y que pertenecen a rectas distintas. El sistema de estos dos semirrayos h, k se llama ángulo y lo designaremos con $\sphericalangle(h,k)$ o con $\sphericalangle(k, h)$ (Hilbert, 1950, p. 9).

Sin embargo, claramente, no es una definición de fácil comprensión para los estudiantes de primaria, y es por ello que las dificultades se asocian a la particularidad del concepto, ya que además se han presentado en diversos países, contextos y paradigmas de enseñanza-aprendizaje. (Rotaeche y Montiel, 2017; Fyhn, 2007; Munier y Merle, 2009)

El ángulo como objeto matemático propiamente tal, tiene una definición independiente de la medida de éste. Sin embargo, como muestran diversas investigaciones, los estudiantes presentan dificultades al distinguir entre el concepto de ángulo y su medida. (Browning, Garza-Kling y Sundling, 2007).

3. DEFINICIÓN, SENTIDO Y DIFICULTADES ASOCIADAS AL OBJETO MATEMÁTICO ÁNGULO

Para poder entregar un referente respecto de la complejidad del objeto matemático ángulo y las dificultades asociadas a la comprensión de éste en su totalidad, se examinaron diversas investigaciones asociadas al tema, en las cuales se plantean revisiones a lo largo de la historia del objeto matemático en cuestión y que analizaban la existencia, características y sus propiedades.

Para el ángulo se presentan distintas definiciones que apuntan a dimensiones diferentes de éste; Mitchelmore y White (2000), proponen que las definiciones de ángulos más frecuentes hacen referencia a los tres siguientes aspectos:

- Cantidad de giros alrededor de un punto entre dos líneas,
- Un par de rayos con un punto en común
- Una región formada por la intersección de dos semiplanos.

Rotaeche y Montiel (2008) y Buendia (2011) reconocen que el sentido que se les puede entregar a estas definiciones del objeto matemático ángulo, también es diverso; es una cualidad, por su forma; una cantidad de algo, porque puede medirse y también una relación, pues a veces se define a partir de otros objetos matemáticos. Por otra parte, le asocian un carácter estático o dinámico dependiendo de la situación en la cual se presente. Clasificando finalmente estas definiciones en cuatro tipos de significados:

- Cualitativo estático: cuando se presenta como sector de un área, es decir se centra en la forma del ángulo en un contexto sin movimiento.
- Cualitativo dinámico: cuando se presenta como un giro, es decir se centra en la forma del ángulo en un contexto con movimiento.
- Cuantitativo estático: cuando se presenta como una porción de circunferencia, es decir se centra en la medida del ángulo en un contexto sin movimiento.
- Cuantitativo dinámico: cuando se presenta como una parte de una vuelta, es decir se centra en la medida del ángulo en un contexto con movimiento.

(Rotaeche y Montiel, 2017).

Estas diferentes definiciones y significados conllevan a diversas dificultades asociadas a la apropiación por parte de los estudiantes de este objeto matemático, dentro de las más comunes se destacan las siguientes:

- Se excluyen los ángulos de 0° , 180° , 360°
- Se excluyen los ángulos negativos
- Se excluyen los ángulos mayores de 360°
- Concepción incompatible del ángulo como giro y también como inclinación
- Consideración sobre que la longitud de las rectas que definen al ángulo afecta su medida.

(Casas y Luengo, 2005; Fyhn, 2007; Munier y Merle; 2009).

Estas dificultades, se ven reflejadas en la contextualización de las situaciones presentadas, en donde, por la naturaleza de estas, no se consideran todas las medidas posibles, o no aplican a los ejemplos propuestos, entregando una definición sesgada de este objeto. Algunas de estas dificultades, se superan aclarando lo que se quiere expresar mediante un dibujo, y es un recurso comúnmente usado en diversos libros de textos.

Cada uno de los aspectos mencionados anteriormente, hace énfasis en una dimensión particular del objeto matemático ángulo, pero no hay que perder de vista que todas están relacionadas entre sí, caracterizando al mismo elemento. (Andonegui, 2006).

4. METODOLOGÍA

Este es un estudio bajo el paradigma constructivista, con un enfoque cualitativo descriptivo ya que caracteriza la progresión que tiene el concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica chilenos, especificando las definiciones propuestas, las imágenes, las medidas y las actividades relacionadas con el concepto.

Para esta investigación cualitativa que permite analizar la progresión que tiene el concepto de ángulo, se consideraron como muestra los textos escolares de 1ero a 6to año básico, distribuidos gratuitamente en Chile en los colegios que reciben aportes del estado para el año 2020.

Para esta investigación, se consideraron las bases curriculares de enseñanza básica, se analizó en la asignatura de matemática, los Objetivos de aprendizajes [OA] involucrados, separándolos por los contenidos implicados en cada uno de ellos. Luego se seleccionaron los que tenían relación con el concepto de ángulo.

Cuando se obtuvieron los OA relacionados con los ángulos, se revisaron los textos escolares donde se trataban los temas señalados en los OA, para así verificar la coherencia entre lo planteado en el curriculum y las actividades propuestas.

Se hizo una triangulación entre el OA, los indicadores de evaluación y las actividades propuestas en los textos escolares.

La Tabla 1 muestra el esquema en donde se analizaron los OA propuestos en las bases curriculares, sus respectivos indicadores de evaluación y su vinculación con las actividades presentes en los textos escolares.

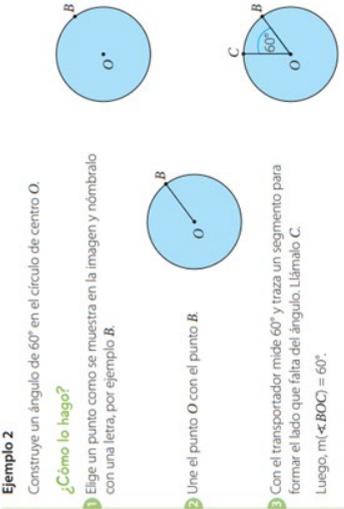
Tabla 1. *Triangulación entre el OA, los indicadores de evaluación y las actividades propuestas en los textos escolares*

OA	Indicadores de evaluación	Actividad

Para poder otorgarle sentido a la clasificación realizada, esta fue analizada por cada OA en los diferentes niveles de enseñanza.

La Tabla 2 a modo de ejemplo, muestra el OA 15 de 6to básico, sus 3 indicadores de evaluación sugeridos y una actividad asociada a cada uno de ellos, considerando el indicador como abordado al encontrar al menos una actividad representativa. La actividad propuesta hace referencia general del indicador, ya que éstas se complementan con otras presentes en el texto.

Tabla 2. *Triangulación entre el OA 15 de 6to básico, los indicadores de evaluación asociados y las actividades propuestas en el texto escolar*

OA	Indicadores de evaluación	Actividad
<p>Construir ángulos agudos, obtusos, rectos, extendidos y completos con instrumentos geométricos o software geométrico.</p>	<p>Dibujan un círculo y registran ángulos agudos, rectos y obtusos en él, utilizando un transportador.</p>	<p>Ejemplo 2 Construye un ángulo de 60° en el círculo de centro O.</p> <p><i>¿Cómo lo hago?</i></p> <ol style="list-style-type: none"> Elige un punto como se muestra en la imagen y nómbralo con una letra, por ejemplo B. Une el punto O con el punto B. Con el transportador mide 60° y traza un segmento para formar el lado que falta del ángulo. Llámalo C. Luego, $m(\angle BOC) = 60^\circ$. 
	<p>Construyen un ángulo recto y lo toman como referencia para determinar ángulos agudos y obtusos.</p>	<p>Marca el punto C considerando la medida del ángulo que quieres construir, en este caso, 90°.</p> 
<p>Construyen ángulos agudos o ángulos agudos y obtusos que sumen 180° con un transportador o con procesadores geométricos</p>		<p>Construye los siguientes ángulos. Explica tu estrategia en cada caso.</p> <ol style="list-style-type: none"> Dos ángulos agudos de distinta medida y que la suma de estos sea un ángulo recto. Un ángulo agudo y un ángulo obtuso que la suma sea un ángulo extendido. Tres ángulos agudos distintos cuya suma sea un ángulo extendido. Un ángulo recto y dos ángulos agudos cuya suma sea un ángulo obtuso.

Por otra parte, cada una de las actividades presentadas incluyendo aquellas que demandan ser completadas por los estudiantes, fueron clasificadas de acuerdo con la bibliografía analizada; respecto del tipo de definición, sentido y dificultad a la cual hacía referencia

La Tabla 3 muestra el esquema en donde se clasificaron las actividades de los textos escolares, marcando con una X en cada una de las 3 dimensiones que fueron analizadas según corresponda, pudiendo marcar más de una casilla en cada categoría.

Tabla 3. *Tabulación de las actividades presentes en los textos escolares de 1ro a 6to básico*

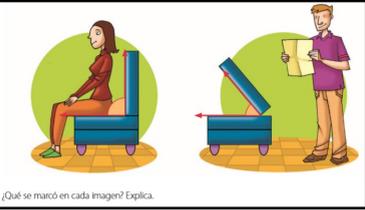
Actividad				Nivel	Definición						
					Cantidad de giros	Par de rayos	Región entre planos				
Significado				Dificultades							
Cualitativo		Cuantitativo		Excluye 0°	Excluye 180°	Excluye 360°	Excluye ángulos negativos.	Excluye mayores a 360°	Giro e inclin. Simult.	Longitud recta	
Estático	Dinámico	Estático	Dinámico								

Para poder otorgarle sentido a la clasificación realizada, esta fue analizada por cada nivel de enseñanza y luego de forma global, examinando cuales son las categorías más y menos repetidas dentro de la revisión.

La Tabla 4, muestra a modo de ejemplo, la tabulación realizada a la primera actividad presente en el libro de 3ro básico, la cual es una imagen que demanda que sea el estudiante quien indique que lo señalado en ella es un ángulo.

Por el contexto y dibujo de la imagen presentada, se clasifica como par de rayos, ya que estos están dibujados en el esquema; no habla de medidas por lo tanto se presenta con un sentido cualitativo; es de carácter dinámico, ya que muestra dos posiciones diferentes del objeto y finalmente entre las dificultades presentes detectadas, se excluyen los ángulos de 0° y 360°, ya que la persona aparece sentada en el sillón, lo que no podría ocurrir en los ángulos mencionados, lo mismo ocurre con los ángulos mayores de 360°. Los ángulos negativos se excluyen, ya que el giro del sillón como situación concreta, sólo es posible en un sentido, dado por las bisagras del mismo.

Tabla 4. Tabulación actividad de 3ero básico

Actividad				Nivel	Definición					
					Cantidad de giros		Par de rayos		Región entre planos	
				3ro básico			X			
Significado				Dificultades						
Cualitativo		Cuantitativo		Exclu ye 0°	Exclu ye 180°	Exclu ye 360°	Exclu ye ángulos neg.	Exclu ye mayores a 360°	Giro e inclin. Simult.	Long recta
Estático	Dinámico	Estático	Dinámico							
	X			X		X	X	X		

Las actividades se tabularon considerando los lineamientos predominantes, ya que no siempre tenían una clasificación radical. Sin embargo, en todas hubo tendencias que prevalecían.

5. RESULTADOS

Al analizar las bases curriculares de enseñanza básica en la asignatura de matemática, lo primero a considerar es que el objeto matemático ángulo, se trabaja recién en 3ero básico, siguiendo luego en 4to básico; sin embargo, en 5to año, no se aborda este tema y luego se retoma en 6to año básico.

Al revisar los textos de 3ero, 4to y 6to año básico, respecto del tema, se destaca que sólo hasta 6to año aparece una definición del objeto. Durante 3ro y 4to básico, sólo aparecen características, formas de medirlos y compararlos.

La definición expuesta en el texto escolar de 6to año básico hace referencia a que este objeto es una región del plano, que está ubicada entre dos semirectas que tienen un origen en común, señalando, además, que éste posee una medida. (Mineduc, 2020); esta es la única definición expuesta en los textos escolares de enseñanza básica año 2020.

Respecto de la cobertura del curriculum en los textos escolares, se tiene que el 100% de los OA y sus respectivos indicadores de evaluación son abordados, tanto en los ejercicios resueltos, como propuestos para los estudiantes.

Del análisis realizado a las imágenes, actividades ejemplificadoras y ejercicios propuestos en 3ro básico; se tiene que, aluden a una definición asociada a una cantidad de giros alrededor de un punto un 6%, asociada a un par de rayos el 72%, y a una región entre planos el 22% de ellas.

Respecto a los significados que se les otorga en 3ro básico, el 33% es cualitativo estático, 6% cualitativo dinámico, 50% Cuantitativo estático y un 11% cuantitativo dinámico.

Respecto de las dificultades asociadas al objeto, se tiene que, en todos los casos, hay más de una dificultad presente, el 89% de las actividades excluye los ángulos de 0° , el 78% excluye los ángulos de 180° , el 89% lo hace con el ángulo de 360° , el 94% lo hace con los ángulos negativos, con los mayores a 360° y no permite considerar un ángulo como giro e inclinación de forma simultánea. Finalmente, en el 22% de las actividades se podría llegar a inferir que la longitud de la recta podría afectar la medida del ángulo.

En 4to básico; se tiene que, aluden a una definición asociada a una cantidad de giros alrededor de un punto un 33%, asociada a un par de rayos el 60%, y a una región entre planos el 7% de ellas.

Respecto a los significados que se les otorga en 4to básico, el 7% es cualitativo estático, 0% cualitativo dinámico, 73% Cuantitativo estático y un 20% cuantitativo dinámico.

Respecto de las dificultades asociadas al objeto, se tiene que, en todos los casos, hay más de una dificultad presente, el 67% de las actividades excluye los ángulos de 0° , el 40% excluye los ángulos de 180° , el 53% lo hace con el ángulo de 360° , el 93%, lo hace con los ángulos negativos y con los mayores a 360° , el 67% no permite considerar un ángulo como giro e inclinación de forma simultánea. Finalmente, no hay actividades en las que se podría llegar a inferir que la longitud de la recta afecta la medida del ángulo.

En 6to básico; se tiene que, aluden a una definición asociada a una cantidad de giros alrededor de un punto un 9%, asociada a un par de rayos el 91%, y a una región entre planos el 0% de ellas.

Respecto a los significados que se les otorga en 6to básico, el 3% es cualitativo estático, 3% cualitativo dinámico, 82% Cuantitativo estático y un 12% cuantitativo dinámico.

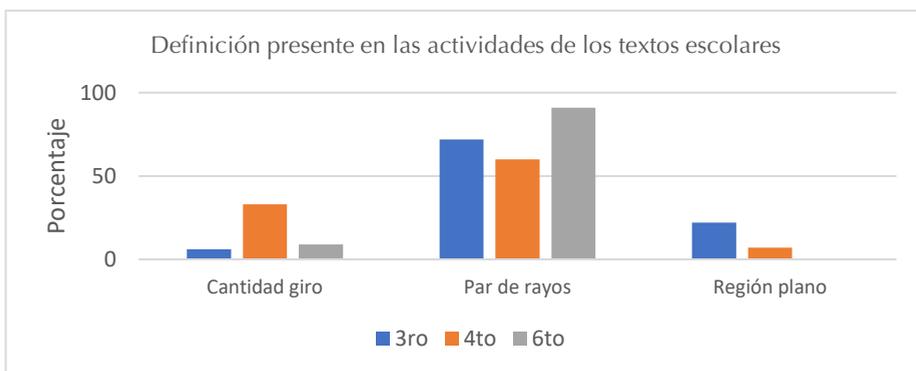
Respecto de las dificultades asociadas al objeto, se tiene que, en todos los casos, hay más de una dificultad presente, el 76% de las actividades excluye los ángulos de 0° , el 59 % excluye los ángulos de 180° , el 71% lo hace con el ángulo de 360° , el 97%, lo hace con los ángulos negativos, el 94% con los mayores a 360° , el 88% no permite considerar un ángulo como giro e inclinación de forma simultánea.

Finalmente, no hay actividades en las que se podría llegar a inferir que la longitud de la recta afecta la medida del ángulo.

Las figuras presentadas, muestran de forma conjunta los resultados obtenidos, lo que permite comparar el cambio y la tendencia en los distintos niveles de enseñanza:

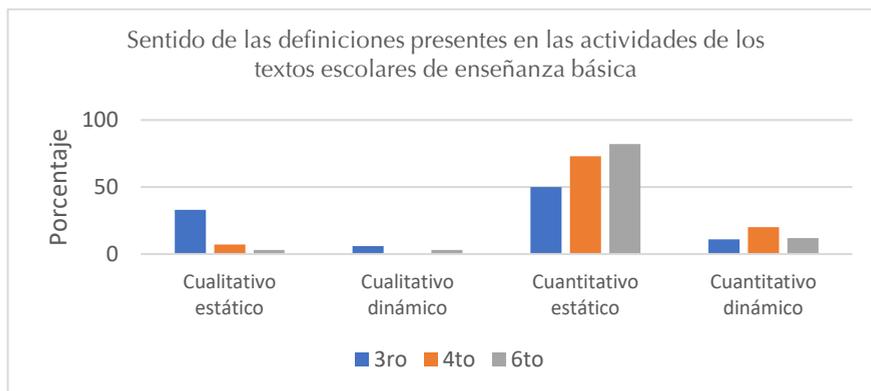
En la figura 1, se muestra la progresión en los diferentes niveles de enseñanza básica, de la definición del objeto matemático ángulo presente en las actividades propuestas y sugeridas en los textos escolares, en donde se evidencia que la más utilizada es la que hace referencia a un par de rayos con un punto en común.

Figura 1. *Gráfico distribución definiciones*



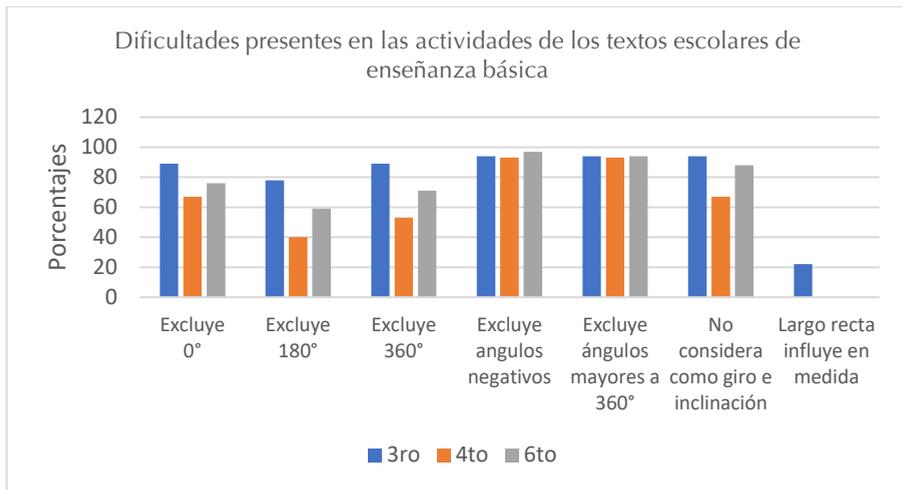
En la figura 2, se muestra la progresión del sentido de las definiciones del objeto matemático ángulo en los diferentes niveles de enseñanza básica presente en las actividades propuestas y sugeridas en los textos escolares, en donde se evidencia que el más utilizado es el que hace referencia a un sentido cuantitativo estático del ángulo.

Figura 2. *Gráfico sentido de las definiciones*



En la figura 3, se muestra la progresión en los diferentes niveles de enseñanza básica, de las dificultades del objeto matemático ángulo presente en las actividades propuestas y sugeridas en los textos escolares, en donde se evidencia que la mayoría de las actividades presentan dificultades, y cada actividad excluye a más de una característica, lo que prevalece durante todos los niveles de enseñanza.

Figura 3. Gráfico de dificultades



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir de la única definición expuesta en los textos escolares de enseñanza básica 2020, se podría inferir que la medida del ángulo es la medida de la superficie entre los rayos, ya que menciona que éste es una región entre ellos, lo que podría confundir al estudiante entre la medida del ángulo y el área de la región representada; lo que claramente es un error.

Respecto de la cobertura del curriculum en los textos escolares, se descarta que el problema sea las temáticas trabajadas, sino más bien hay que analizar la forma en que éstas son planteadas y a su vez, si abarcan todas las dimensiones del objeto matemático, para poder así comprenderlo en su totalidad.

Se recomienda que los docentes puedan complementar el trabajo de los ángulos en geometría, con el uso de material concreto, de modo que faciliten la comprensión y logro de los aprendizajes y que no sea el texto escolar la única fuente de material pedagógico para las clases.

Además, en los textos es común encontrar actividades en donde se buscan ángulos en objetos concretos, los cuales involucran en la mayoría de los casos, un

carácter estático, lo que impide que el estudiante conceptualice el ángulo de forma correcta, ya que, en este contexto los ángulos de 0° , 360° y mayores, no tienen cabida.

Se recomienda privilegiar las aplicaciones con carácter dinámico, ya que, de acuerdo al análisis realizado, son las que tienen menos dificultades en la comprensión del objeto matemático ángulo, explicando de mejor forma todas sus características.

Por otra parte, se concluye que las actividades presentes en los textos con menores dificultades son aquellas en las que se hace referencia a un rayo inicial y otro final que gira hasta formar el ángulo deseado, ya que el sentido dinámico de este esquema permite formar ángulos que van desde 0° y que pueden superar los 360° . O al hacerlo girar en sentido inverso hace referencia a ángulos negativos, ámbito que puede ser manejado por el docente que diseña la situación pedagógica, por lo que se sugiere utilizar este tipo de sistemas o estrategias para trabajar dicho concepto durante la enseñanza básica con los estudiantes.

Las actividades a las cuales se les encontraron un número menor de dificultades fueron aquellas que contextualizaban las situaciones en un reloj analógico, en donde las agujas representaban los rayos que forman el ángulo, y las preguntas modelaban la problemática y regulaban la dificultad.

Se sugiere incorporar este tipo de aplicaciones prácticas para ejemplificar a los estudiantes los diferentes significados del ángulo, pudiendo ser complementadas con otras situaciones cotidianas por ejemplo saltos en skate, el giro en un salto mortal el cual puede ser hacia delante o hacia atrás, los giros que se realizan en la prueba de lanzamiento de martillo, entre otros.

Respecto de la dificultad asociada a la relación entre el largo de los rayos y la medida del ángulo que representan, en los textos escolares, no se encuentra evidencia que fomente esta confusión, por lo que podría ser el estudiante el que hace estas inferencias a partir de experiencias con otros objetos matemáticos, por lo que se sugiere al docente enfatizar en este aspecto para evitar esta dificultad.

Finalmente, se concluye que debido a la complejidad intrínseca de la apropiación de la definición del objeto matemático ángulo y todas sus dimensiones, como lo plantean (Browning, Garza-Kling y Sundling, 2007), es necesario abordarlo con herramientas tecnológicas más allá del lápiz y papel, y trabajarlo con algún software que permita visualizarlo de mejor forma.

En una próxima investigación, se podría analizar las competencias que demanda de parte del estudiante el trabajo con ángulos con carácter dinámico y si éstas se pueden desarrollar en los primeros niveles de enseñanza de este objeto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andonegui, M. (2006). *Geometría: conceptos y construcciones elementales*. Federación Internacional Fe y Alegría.
- Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 139-178. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1621>
- Arias, P. (2020). Análisis resultados Timss 2019. *Acción Educar*, 1. 1-6. <https://accioneducar.cl/analisis-resultados-prueba-timss-2019/>
- Browning, C., Garza-Kling, G. y Sundling, E. (2007). What's your angle on angles? *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 283-287.
- Buendia, G. (2011). *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa*. Lectorum.
- Casas, L. y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las ciencias*, 23(2), 201-216. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/22018>
- Díaz, L. y Kú, D. (2017). Construcción del concepto de ángulo en segundo grado de secundaria desde la teoría Apoe. *Investigación e Innovación en matemática educativa*, (2). 436-445.
- Fyhn, B. (2007). A Climbing Class' Reinvention of Angles. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 19-35. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9087-z>
- Hilbert, D. (1950). *The foundations of Geometry*. (L. Unger, Trans.) (2nd. ed.). La Salle, Open Court. <https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf>
- Hurtado, L. (2017). Revisión de las definiciones de proposición y enunciado en su relación con las matemáticas. *Revista digital de investigación en docencia universitaria*, 11(1), 207-218. <http://www.scielo.org.pe/pdf/ridu/v11n1/a14v11n1.pdf>
- Husserl, E. (2000). *El origen de la geometría*. Manantial.
- Itzcovich, H. (Ed.) (2007). *La matemática escolar*. Aique.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Zorzal.
- Matos, J. (1991). The historical development of the concept of angle (2). *The Mathematics Educator*, 2(1), 18-24.
- Matos, J. (1990). The Historical Development of the Concept of Angle. *The Mathematics Educator*, 1(1), 4-11.
- Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of Angle Concepts by Progressive Abstractions and Generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-23. <https://doi.org/10.1023/A:1003927811079>

- Ministerio de Educación (2020). *Texto del estudiante Matemática*. Santillana.
- Ministerio de Educación (2018). *Bases curriculares*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf
- Munier, V. y Merle, H. (2009). Interdisciplinary Mathematics-Physics Approaches to Teaching the Concept of Angle in Elementary School. *International Journal of Science Education*, 31(14), 1857-1895. <https://doi.org/10.1080/09500690802272082>
- Pachuca, Y. y Zubieta, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación Matemática*, 32(1), 38-66. <https://doi.org/10.24844/EM3201.03>
- Pino J., y Blanco. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88. <https://revistaseug.ugr.es/index.php/publicaciones/article/view/2247>
- Rotaèche, R. y Montiel G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 29(1), 171-199. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40550442008.pdf>
- Rotaèche, A. y Montiel, G. (2008). From the History of the Angle to its Epistemological Nature. Contributions to a Scholar Design. *Proceedings of the Conference History and Pedagogy of Mathematics 2008*. https://www.researchgate.net/publication/237437592_FROM_THE_HISTORY_OF_THE_ANGLE_TO_ITS_EPISTEMOLOGICAL_NATURE_Contributions_to_a_scholar_design
- SIMCE (2019). Resultados Nacionales SIMCE. http://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Nacional_Resultados_educativos_2019.pdf
- Torres, Y. y Moreno, R. (2008). El texto escolar, evolución e influencias. *Laurus*, 14(27), 53-75. <https://www.redalyc.org/pdf/761/76111892004.pdf>
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.