



¿Qué estrategia es mejor para un problema de Fermi? Adaptabilidad de futuros maestros

Which is the Best Strategy for a Fermi Problem? Adaptability of Pre-Service Teachers

Carlos Segura, Irene Ferrando

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, València, España
carlos.segura@uv.es, irene.ferrando@uv.es

RESUMEN • Los problemas de Fermi, adecuados para primaria, plantean una situación real y abierta que permite desarrollar y comparar múltiples estrategias, lo que requiere que los maestros sean adaptables (capaces de escoger la más apropiada). El objetivo de este trabajo es caracterizar y analizar la adaptabilidad de futuros maestros cuando resuelven estos problemas. Para ello, la investigación se divide en dos estudios. El Estudio 1 presenta una encuesta dirigida a expertos en educación matemática; el análisis de sus respuestas permite vincular las características contextuales de los problemas con estrategias, y estas, con criterios de adecuación (precisión, rapidez y rigor). Estos resultados conducen a una caracterización de adaptabilidad que nos permite abordar el Estudio 2 con futuros maestros, y se concluye que la mayoría de los resolutores adaptables usan estrategias de manera no sistemática.

PALABRAS CLAVE: Adaptabilidad; Flexibilidad; Estimación; Modelización; Problemas de Fermi.

ABSTRACT • Fermi problems, suitable for primary school, pose a real and open situation that allows the development and comparison of multiple strategies. This requires teachers to be adaptive (able to choose the most appropriate strategy). The aim of this paper is to characterise and analyse the adaptability of prospective teachers when solving these problems. For this purpose, the research is divided into two studies. Study 1 presents a survey addressed to experts in mathematics education; the analysis of their answers makes it possible to link the contextual characteristics of the problems with strategies, and these with appropriateness criteria (accuracy, speed and rigour). These results lead to a characterisation of adaptability that allows us to approach Study 2 with pre-service teachers, finding that most adaptive solvers use strategies non-systematically.

KEYWORDS: Adaptability; Flexibility; Estimation; Modelling; Fermi problems.

Recepción: junio 2023 • Aceptación: septiembre 2023 • Publicación: noviembre 2023

INTRODUCCIÓN

Los problemas de Fermi plantean una situación real y abierta que debe simplificarse para realizar estimaciones y cálculos sencillos (Årlebäck, 2009). Su relevancia se debe a que son una vía accesible para introducir la modelización en educación primaria (Albarracín y Gorgorió, 2019). Para implementar con éxito este tipo de problemas en las aulas es necesario que los docentes sean competentes en su resolución (Chapman, 2015; Sáenz, 2007; Van Dooren et al., 2003).

Una de las particularidades de los problemas de Fermi es que se pueden clasificar las múltiples estrategias de resolución (Albarracín et al., 2021). Los futuros maestros deben ser capaces de escoger y comparar distintas estrategias, y sucesivos trabajos han profundizado en este aspecto. Así, Ferrando et al. (2021) encontraron que algunas características contextuales de los problemas de Fermi influyen en la selección de estrategias. La influencia del contexto posibilita diseñar secuencias de problemas de Fermi que promuevan cambios de estrategia, es decir, un uso flexible de estas (Segura et al., 2023; Segura y Ferrando, 2023).

Continuando los estudios previos, es importante interpretar si los cambios de estrategia de los maestros en formación responden a la selección de la más adecuada según el contexto del problema de Fermi que debe resolverse, lo que Verschaffel et al. (2009) denominan adaptabilidad. A pesar de la importancia de comparar múltiples estrategias (Heinze et al., 2009), existen pocos estudios que exploren estas habilidades en el marco de los problemas reales (Schukajlow et al., 2015). En particular, no se ha estudiado qué caracteriza la adaptabilidad en resolución de problemas de Fermi ni, en consecuencia, qué adaptabilidad demuestran los futuros maestros.

Para abordarlo, presentamos una investigación dividida en dos estudios conectados. El Estudio 1 presenta el análisis de las respuestas de 81 expertos en matemáticas o su didáctica a un cuestionario diseñado con dos objetivos: relacionar las características contextuales de una secuencia de problemas de Fermi con las estrategias de resolución y vincular estas con criterios de adecuación, que estudios previos asocian a la rapidez, la precisión o el rigor (Heinze et al., 2009; Star y Rittle-Johnson, 2008; Threlfall, 2002). Estos objetivos permiten responder a qué caracteriza la adaptabilidad cuando se resuelve una secuencia de problemas de Fermi. En el Estudio 2 se utiliza la caracterización obtenida en el Estudio 1 para analizar las estrategias de 224 futuros maestros, lo que permite determinar qué adaptabilidad demuestran cuando resuelven la secuencia de problemas de Fermi.

MARCO TEÓRICO

Resolución de problemas de Fermi

Årlebäck (2009) define los problemas de Fermi como tareas abiertas y no estándar que plantean una situación real que requiere hacer suposiciones y estimar cantidades relevantes antes de realizar cálculos sencillos. La investigación se ha centrado en describir y caracterizar el proceso de resolución: requiere que los estudiantes partan de un conocimiento previo sobre el mundo real (Henze y Fritzlar, 2010) para descomponer el problema en subproblemas más sencillos (Carlson, 1997) donde formular conjeturas fundamentadas (Efthimiou y Llewellyn, 2007; Sriraman y Lesh, 2006; Sriraman y Knott, 2009) y obtener estimaciones razonables (Taggart et al., 2007) que conduzcan a la solución. Algunos autores encuentran similitudes de este proceso con el ciclo de modelización (Peter-Koop, 2009; Robinson, 2008).

En este estudio nos centraremos en un subconjunto de problemas de Fermi: aquellos que consisten en estimar un gran número de elementos en una superficie acotada, por ejemplo, cuántas personas caben en la Puerta del Sol en la celebración de Nochevieja. Albarracín et al. (2021) determinaron

esquemas que clasifican todas las estrategias posibles para este tipo de problemas. Las estrategias categorizadas son cuatro: recuento; linealización (distribuir los elementos por filas); unidad base (dividir el área total por el área de un elemento tomado como unidad de medida) y densidad (multiplicar el área total por una densidad estimada). Esto permite considerar los problemas de Fermi como tareas de solución múltiple (Levav-Waynberg y Leikin, 2012) en las que se puede controlar qué estrategias se utilizan y analizar si los resolutores emplean varias estrategias.

Este tipo de problemas pueden servir como medio de iniciación a la modelización matemática en educación primaria (Albarracín y Gorgorió, 2019; English, 2011; Haberzettl et al., 2018). Sin embargo, varios estudios indican que los maestros en formación tienen dificultades con los problemas de modelización (Klock y Siller, 2020). En particular, se ha desarrollado recientemente una línea de investigación sobre errores y dificultades de futuros maestros en la resolución de problemas de Fermi (Pla-Castells et al., 2021; Segura y Ferrando, 2023). En línea con estudios previos (Chapman, 2015), esos trabajos encontraron que los futuros maestros usan una gama reducida de estrategias, aunque estas no sean productivas o eficaces. Trabajos recientes destacan la importancia de usar y comparar múltiples estrategias para la competencia en modelización (Huinchahue-Arcos et al., 2018) y, en particular, para resolver problemas de Fermi (Segura y Ferrando, 2023). Otras investigaciones relacionan el conocimiento de varias estrategias y de su eficacia con la creatividad, tanto para problemas de modelización (Lu y Kaiser, 2022) como para problemas de Fermi (Okamoto et al., 2023).

Adaptabilidad en resolución de problemas

Schoenfeld (1982) señala que el éxito en la resolución de problemas se basa en dos condiciones: por un lado, conocer las técnicas básicas de resolución de problemas; por otro, ser competente en la selección y gestión de las estrategias adecuadas. Lemaire y Siegler (1995) distinguen cuatro dimensiones de la competencia estratégica: 1) el repertorio de estrategias conocido; 2) la frecuencia con la que se utiliza cada estrategia; 3) la eficacia con la que se ejecuta cada estrategia, medida en términos de rapidez o precisión; 4) la adaptabilidad de la estrategia elegida. Así, una parte importante de la competencia en resolución de problemas consiste en gestionar de manera adaptable varias estrategias, seleccionando consciente o inconscientemente la más adecuada para un problema matemático dado en un contexto determinado (Heinze et al., 2009; Newton et al., 2020; Verschaffel et al., 2009). Así, la adaptabilidad requiere la flexibilidad del resolutor, es decir, la capacidad de elegir entre diferentes estrategias cuando se enfrenta a un problema matemático (Heinze et al., 2009; Nistal et al., 2012; Selter, 2009). Sin embargo, va más allá, ya que se refiere a la capacidad de elegir la más apropiada (Verschaffel et al., 2009).

Siguiendo las dimensiones de la competencia estratégica de Lemaire y Siegler (1995), en este trabajo distinguiremos –aunque la segunda es un caso específico de la primera– entre *flexibilidad a lo largo de una secuencia de problemas de Fermi*, entendida como el cambio de estrategia de un problema a otro de la secuencia (dimensiones 1 y 2); y *adaptabilidad a lo largo de una secuencia de problemas de Fermi*, entendida como la capacidad de seleccionar la estrategia más adecuada para cada problema en función de ciertas características contextuales (dimensiones 3 y 4).

Escoger la estrategia más adecuada para un problema implica asumir un criterio explícito o implícito de su eficacia. El conocimiento de la eficacia de la estrategia es una característica clave de los expertos en resolución de problemas (Star y Rittle-Johnson, 2008; Selter, 2009). Al respecto, Hicken-dorff (2022) distingue entre el *conocimiento potencial* –el que el resolutor podría llegar a conocer– y el *conocimiento práctico* –el que se utiliza realmente– cuando se elige entre varias estrategias.

Criterios de adecuación de estrategias para problemas de Fermi

Determinar qué se entiende por la estrategia más adecuada o eficaz para un tipo de problema dado es un reto teórico (García Coppersmith y Star, 2022; Heinze et al., 2009), pues requiere explicitar unos criterios que justifiquen la elección. Explicitarlos puede ser sencillo para actividades como la resolución de ecuaciones o el cálculo mental, donde el criterio podría ser la reducción del número de pasos para obtener la solución, lo que llamamos rapidez (Blöte et al., 2001; Lemaire y Siegler, 1995; Star y Rittle-Johnson, 2008). Si se debe realizar una estimación, otro posible criterio es la precisión del resultado (Lemaire y Siegler, 1995; Threlfall, 2002). No obstante, Threlfall (2002) encuentra dificultades para elegir qué estrategia es la más rápida o precisa en el cálculo mental y en la estimación computacional. La elección aún es más compleja en problemas de Fermi, en los que las características contextuales pueden tener influencia en la rapidez o precisión de una estrategia, y en los que podrían existir otros criterios.

En este sentido, resultados previos facilitan la definición de unos criterios de adecuación de estrategias para problemas de Fermi. Los esquemas de Albarracín et al. (2021) estructuran el proceso de resolución y explicitan el número de operaciones hasta alcanzar la estimación, por lo que se puede asumir el criterio de *rapidez* (menor número de pasos). Por otro lado, el criterio de *precisión* está asociado a la fiabilidad de la estimación obtenida. Estos dos criterios, como hemos visto, ya aparecen en la literatura sobre adaptabilidad en problemas intramatemáticos. Pero Albarracín et al. (2021) también incluyen, en sus esquemas, posibles supuestos realistas y procedimientos parciales de medida y estimación que enriquecen el proceso de resolución y dan mayor verosimilitud al resultado (Krawitz et al., 2018; Segura et al., 2021). Esto permite definir otro criterio específico para los problemas de Fermi: el *rigor*, entendido como el uso de procedimientos empíricamente fundamentados y cuidadosamente ejecutados durante el desarrollo de una estrategia.

Llegados a este punto, hay que hacer una distinción teórica entre estos tres criterios. La precisión se refiere a que una estimación es más exacta que las demás, lo que implica poder validarla con datos sobre la situación real planteada por el problema. Así, siguiendo la distinción de Hickendorff (2022), para muchos problemas de Fermi –como los que presentamos en este trabajo, para los que no se dispone de datos y cuya solución debe ser analizada por su consistencia interna (Segura y Ferrando, 2023)– la precisión es un *criterio potencial*, mientras que la rapidez y el rigor son *criterios prácticos*.

Albarracín et al. (2021) proponen como problema de investigación estudiar si las estrategias y criterios de adecuación pueden depender de algunas características contextuales de los problemas de Fermi. En efecto, Ferrando et al. (2021) encontraron, en un estudio con futuros maestros, una relación entre estrategias y ciertas características contextuales: el orden en la disposición de los elementos que se van a estimar se relaciona con la linealización, mientras que el desorden se vincula a la densidad, especialmente cuando el tamaño de los elementos que se va a estimar es pequeño; por el contrario, cuando el tamaño de los elementos que estimar es grande, aumentan las estrategias basadas en la unidad base. Averiguar si el uso de estas estrategias también está relacionado con criterios de adecuación (rapidez, precisión o rigor) nos permitiría abordar el estudio de la adaptabilidad en problemas de Fermi.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Presentamos un estudio exploratorio sobre la adaptabilidad de los maestros en formación al resolver una secuencia de problemas de Fermi. En particular, este trabajo pretende responder a dos preguntas de investigación:

Pregunta de investigación 1. ¿Qué caracteriza la adaptabilidad cuando se resuelve una secuencia de problemas de Fermi?

- 1a) ¿Cómo se relacionan las estrategias con las características contextuales del problema?
- 1b) ¿Cómo se relacionan las estrategias de resolución con los criterios de adecuación?

Pregunta de investigación 2. ¿Qué adaptabilidad demuestran los futuros maestros al resolver los problemas de Fermi?

Esta investigación se basa en dos estudios vinculados entre sí, de los cuales el segundo depende de los resultados del primero. Por claridad, primero presentaremos la metodología y resultados del Estudio 1; a continuación, los del Estudio 2. En las secciones de discusión y conclusiones, se presentarán conjuntamente los resultados de ambos estudios para dar una respuesta completa e integrada a las preguntas de investigación.

ESTUDIO 1: CARACTERIZACIÓN DE LA ADAPTABILIDAD EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI

Metodología del Estudio 1

Participantes

En este estudio participaron 81 expertos en educación matemática (57 % hombres). Entre abril y mayo de 2020, se envió una invitación a participar en un cuestionario *online* a través de diferentes canales para asegurar un conocimiento sólido de los participantes: la lista de correo de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) y de la comisión de educación de la RSME (Real Sociedad Matemática Española), así como una lista de correo de profesores de secundaria que habían participado en cursos de formación en modelización matemática (y, por tanto, familiarizados con los problemas de Fermi).

En cuanto a la formación de los participantes, la mayoría (64 %) son licenciados en Matemáticas, el 32,1 % de ellos son doctores en Matemáticas y el 12,3 % son doctores en Educación Matemática. La mayoría de los participantes (51,9 %) imparten asignaturas de matemáticas en educación secundaria. El 32,1 % imparte asignaturas de matemáticas o didáctica de las matemáticas en grados de Maestro/a en Educación Primaria o en el máster de Educación Secundaria. El 21 % imparte asignaturas de matemáticas en titulaciones de Matemáticas, Física o Ingeniería.

Recogida de datos

El instrumento de recogida de datos del Estudio 1 es un cuestionario con preguntas cerradas, con una lista de respuestas predeterminadas entre las que el participante debe elegir. Estas respuestas tienen un rango similar y pueden agruparse para extraer conclusiones mediante análisis estadístico. El cuestionario incluye una secuencia de cuatro problemas de Fermi (tabla 1), la misma utilizada en el Estudio 2 con futuros maestros. Cada enunciado del problema iba acompañado de una imagen.

Obersteiner et al. (2022) destacan que, para evaluar la adaptabilidad en la elección de estrategias, las características del problema deben construirse cuidadosamente. Así, para el diseño de la secuencia de cuatro problemas de Fermi se siguió la teoría de la variación (Ko y Marton, 2004), construyendo un contraste entre variables contextuales previamente estudiado (Ferrando et al., 2021; Segura et al.,

2023). Este contraste en una secuencia de problemas ayuda a discernir un nuevo aspecto de la situación real planteada por un problema a través de la comparación con otro problema. En la secuencia de la tabla 1, las diferencias de contraste entre problemas se refieren al tamaño de los elementos y del espacio total, pero también a la regularidad o no de la forma de los elementos, y al orden o desorden en la disposición de los elementos. Ferrando et al. (2021) explicaron detalladamente el valor de estas variables (tamaño, forma y disposición).


Tabla 1.
Enunciados de la secuencia de problemas de Fermi y valor de las variables contextuales

<i>Enunciado</i>	<i>Valor de las variables contextuales</i>
<i>P1-Personas.</i> ¿Cuántos estudiantes caben en el porche de la Facultad de Magisterio?	Tamaño de los elementos: medio Disposición: desordenada Forma de los elementos: irregular Tamaño del espacio: medio
<i>P2-Adoquines.</i> ¿Cuántos adoquines hay entre el edificio de la Facultad y el gimnasio?	Tamaño de los elementos: pequeño Disposición: ordenada Forma de los elementos: regular Tamaño del espacio: grande
<i>P3-Hierba.</i> ¿Cuántas briznas de hierba hay en esta parcela?	Tamaño de los elementos: pequeño Disposición: desordenada Forma de los elementos: irregular Tamaño del espacio: pequeño
<i>P4-Coches.</i> ¿Cuántos coches caben en el aparcamiento de la Facultad sin dejar espacio libre?	Tamaño de los elementos: grande Disposición: ordenada Forma de los elementos: regular Tamaño del espacio: grande

Para responder a la primera pregunta de investigación, necesitamos conocer cuál es, para los expertos, la estrategia más adecuada en cada uno de los cuatro problemas de la secuencia y cuál es el criterio que justifica su elección.

El cuestionario de expertos se divide en cuatro secciones en las que se presentan los problemas de Fermi de la secuencia (tabla 1). Al enunciado del problema le siguen dos preguntas relacionadas con las estrategias para resolverlo. La primera pregunta es: «¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema?». Las posibles respuestas son el repertorio de estrategias categorizadas en estudios previos (Albarracín et al., 2021, Ferrando et al., 2021): recuento, linealización, unidad base, densidad. No obstante, para evitar sesgos o ambigüedades en la interpretación de cada una de estas estrategias, en cada problema se describe brevemente la estrategia de resolución y, además, se incluye la opción «No hay una estrategia más adecuada que otra». En la figura 1 mostramos un extracto del cuestionario de expertos, que corresponde al problema *P3-Hierba*.

P3. ¿Cuántas briznas de hierba hay en esta parcela?



¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema? *

- Estrategia 1. Se propone contar las briznas de hierba que hay en la parcela.
- Estrategia 2. Se estima el número de briznas de hierba que forman una fila a lo largo de la parcela y se multiplica por el número de filas que cubren el ancho de la parcela para obtener el número de briznas.
- Estrategia 3. Se calcula el área de la parcela, se calcula el área de una brizna de hierba como unidad base, y se divide el área total entre el área ocupada por una brizna para obtener el número de briznas.
- Estrategia 4. Se determina una unidad de área en la parcela y se estima cuántas briznas caben dentro de esa unidad de área. Se obtiene la densidad (nº de briznas/unidad de área). Se calcula el área de la parcela en unidades de área y luego se multiplica la densidad por el área total de la parcela para obtener el número de briznas.
- No hay una estrategia más adecuada que otra.

Fig. 1. Extracto del cuestionario de expertos.

La segunda pregunta es «¿En cuál de los siguientes criterios se basó para elegir la estrategia más adecuada?». Las posibles respuestas son los criterios de adecuación definidos en el marco teórico: rapidez («La estrategia elegida es la que proporciona la estimación más rápida»); precisión («La estrategia elegida es la que proporciona la estimación más exacta»); rigor («La estrategia elegida se basa en procedimientos de cálculo más rigurosos/cuidadosos»). Los participantes podían marcar más de un criterio y la opción abierta «Otro» para proponer un criterio diferente.

Resultados del Estudio 1

Relación entre estrategias y características contextuales

A partir de las respuestas de los 81 expertos que completaron el cuestionario podemos abordar las preguntas 1a) y 1b), que nos permitirán responder a la primera pregunta de investigación. Examinemos primero cómo se relacionan las estrategias de resolución con las características contextuales de cada problema de la secuencia.

Los resultados del cuestionario que figuran en la tabla 2 muestran que existe una correlación estadísticamente significativa entre la estrategia elegida por los expertos como la más adecuada y los problemas de secuencia (caracterizados por su contexto, según la tabla 1), con un valor de la prueba

chi cuadrado $\chi^2(12, 324) = 108,88$ con $p < ,001$ y un tamaño de efecto medio ($V = ,34$). Puesto que más de un 20 % de las frecuencias es menor que 5, la fiabilidad de esta relación debe confirmarse mediante la prueba de razón de verosimilitud, para la que se obtiene $LR = 142,86$ con una significación asintótica (bilateral) inferior a 0,001.

Tabla 2.
Relación entre la estrategia elegida como más adecuada y el problema de la secuencia, en las respuestas de N = 81 expertos

	<i>Recuento</i>	<i>Linealización</i>	<i>Unidad base</i>	<i>Densidad</i>	<i>No hay más apropiada</i>
P1	1 (1 %)	3 (4 %)	35 (43 %)	34 (42 %)	8 (10 %)
P2	2 (2 %)	20 (25 %)	40 (49 %)	15 (19 %)	4 (5 %)
P3	0 (0 %)	2 (2 %)	9 (11 %)	67 (83 %)	3 (4 %)
P4	2 (2 %)	26 (32 %)	30 (37 %)	19 (24 %)	4 (5 %)
Total	5 (1 %)	51 (16 %)	114 (35 %)	135 (42 %)	19 (6 %)

La tabla 2 muestra que en el problema *P1-Personas* las estrategias más apropiadas según los expertos son la unidad base y la densidad; en *P2-Adoquines*, son la unidad base y la linealización; en *P3-Hierba*, la estrategia más apropiada es, con diferencia, la densidad; y en *P4-Coches*, son la unidad base y la linealización. Como se explicó en el marco teórico, en el estudio de Ferrando et al. (2021) se demostró que los problemas en los que se presenta claramente una disposición ordenada de los elementos promueven estrategias de linealización. En ese estudio también se encontraba que, cuando el tamaño de los elementos es pequeño y su disposición es desordenada, la estrategia de densidad es la más usada por los futuros maestros; y que cuando el tamaño de los elementos a estimar es grande o regular, tendían a utilizar la unidad base. Estas asociaciones se confirman en los resultados del cuestionario de expertos.

Relación entre estrategias y criterios de adecuación

Con el fin de examinar cómo se relacionan las estrategias con los criterios de adecuación, analizaremos las preguntas del cuestionario de expertos relacionadas con dichos criterios. En general, el criterio de adecuación más elegido por los expertos fue el de precisión (38 %), seguido de rapidez (36 %) y rigor (23 %). Los expertos no sugirieron ningún otro criterio, y solo el 3 % utilizó la opción abierta «Otro» para decir que no existe ningún criterio de adecuación objetivo. Por lo tanto, podemos descartar otros criterios distintos de los elegidos en este estudio.

Tabla 3.
Relación entre la estrategia elegida como más apropiada y el criterio de adecuación que justifica la elección, en las respuestas de N = 81 expertos

	<i>Recuento</i>	<i>Linealización</i>	<i>Unidad base</i>	<i>Densidad</i>	<i>No hay más apropiada</i>
Precisión	5	29	44	78	4
Rapidez	0	8	78	34	4
Rigor	1	35	17	72	1
Otro (sin criterio)	0	0	0	2	11

La tabla 3 muestra la relación entre las estrategias seleccionadas por los expertos como más apropiadas en los problemas y el criterio de adecuación con el que las relacionaron. Utilizando la prueba chi cuadrado de independencia de variables nominales, obtenemos $\chi^2(12, 423) = 276,53$ con $p < ,001$. Dado que más del 20 % de las celdas tienen una frecuencia inferior a cinco, es necesario confirmar la fiabilidad con una prueba de razón de verosimilitud (LR), obteniendo $LR = 153,74$ con una significancia asintótica (bilateral) menor que 0,001, que garantiza que la correlación entre estrategias y criterios de adecuación es significativa. Además, el tamaño del efecto, medido por la V de Cramer, es fuerte ($V = ,47$).

La asociación observada entre estas variables nos informa de que la linealización está relacionada con los criterios de precisión y rigor; que la unidad base está claramente vinculada con el criterio de rapidez, pero también con la precisión; y que la densidad guarda relación con los criterios de precisión y rigor.

Caracterización de adaptabilidad

Se ha observado que los expertos respaldan la existencia de características contextuales de los problemas de la secuencia que hacen más apropiado el uso de determinadas estrategias (tabla 2). Por lo tanto, diremos que un resolutor muestra *adaptabilidad contextual* cuando elige una estrategia relacionada con las características contextuales del problema. Además, dado que también hemos encontrado relaciones entre estrategias y criterios de adecuación, es posible caracterizar comportamientos dentro de la adaptabilidad contextual.

Como hemos explicado en el apartado 2.3, para los problemas de Fermi empleados en esta secuencia la precisión es un criterio potencial, al que todo resolutor aspira, ya que el objetivo es hacer una estimación lo más precisa posible. Sin embargo, al tratarse de problemas sin datos y de respuesta abierta, este criterio no puede considerarse como un criterio práctico, por lo que nos fijaremos en los otros dos que son, en cierto modo, complementarios. En efecto, la precisión puede alcanzarse a través de la rapidez, obteniendo una estimación ajustada en un número reducido de pasos. La precisión también puede alcanzarse a través del rigor, tratando de realizar una resolución exhaustiva que tenga en cuenta más aspectos del contexto real (por ejemplo, heterogeneidad en el tamaño de los elementos; obstáculos en la superficie, etc.) en el que se formula el problema. La tabla 4 muestra, a partir de las respuestas de los expertos, cuál es la estrategia más adecuada para cada problema según los criterios de adecuación práctica elegidos.

Tabla 4.
Estrategia más adecuada para cada problema
en función de los criterios de adecuación práctica elegidos

	<i>Recuento</i>	<i>Linealización</i>	<i>Unidad base</i>	<i>Densidad</i>
P1			Rapidez	Rigor
P2		Rigor	Rapidez	
P3				Rigor
P4		Rigor	Rapidez	

Puede ocurrir que el resolutor no se base sistemáticamente en ningún criterio de adecuación, sino que, consciente o inconscientemente, cambie de estrategia a lo largo de la secuencia siguiendo sencillamente la variación de las características contextuales (*adaptabilidad contextual no sistemática*). Por

ejemplo, si un resolutor sigue el siguiente patrón de uso de estrategias: *P1-Personas* resuelto por estrategia de densidad, *P2-Adoquines* resuelto por linealización, *P3-Hierba* resuelto por densidad y *P4-Coches* resuelto por unidad base. Este resolutor no sigue un criterio de adecuación estable a lo largo de toda la secuencia: la unidad base está asociada al criterio práctico de rapidez, mientras que la linealización y la densidad se asocian con el criterio práctico de rigor.

Otro comportamiento posible podría ser el de un resolutor que, en función de las características contextuales de cada problema, cambia de estrategia teniendo en cuenta solo uno de los dos criterios prácticos (rapidez o rigor). Por lo tanto, dentro de la adaptabilidad contextual, si el resolutor tiene en cuenta sistemáticamente uno de los dos criterios, podemos caracterizar dos comportamientos específicos de adaptabilidad. Así, definimos la *adaptabilidad eficiente* cuando el resolutor elige sistemáticamente la estrategia que busca la rapidez como criterio práctico de adecuación. De manera complementaria, definimos la *adaptabilidad meticulosa* cuando se busca sistemáticamente el rigor como criterio práctico de adecuación.

Por lo tanto, cuando el resolutor muestra una adaptabilidad contextual eficiente, caracterizamos el siguiente patrón estratégico: P1 se resuelve con unidad base, P2 con unidad base, P3 con densidad (aquí es importante señalar que la rapidez no es un criterio viable en este problema, debido a la baja frecuencia de elección, 11 %, y la elección está supeditada a las características contextuales del problema) y P4 con unidad base.

Del mismo modo, si aplicamos sistemáticamente la definición de adaptabilidad meticulosa contextual a todos los problemas de la secuencia, obtenemos el siguiente patrón estratégico: P1 se resuelve con densidad, P2 con linealización, P3 con densidad y P4 con linealización.

ESTUDIO 2: ANÁLISIS DE LA ADAPTABILIDAD DE FUTUROS MAESTROS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI

Metodología del Estudio 2

Participantes

El segundo estudio se llevó a cabo en la Facultad de Magisterio de la Universitat de València (España). La muestra estuvo formada por 224 estudiantes del último curso del grado de Maestro/a en Educación Primaria, con una edad media de 23,9 años, de los cuales el 72 % son mujeres. Esta muestra representa el 25 % de los estudiantes de este curso en la universidad donde se llevó a cabo la investigación.

Recogida de datos

Los dos autores se encargaron de la recogida de datos, que se realizó durante los cursos académicos 2017-18 y 2018-19. El instrumento de recogida de datos en esta fase fue la secuencia de cuatro problemas de Fermi, también utilizada en el Estudio 1 (tabla 1). Durante una sesión ordinaria de clase de 90 minutos, se proporcionó a cada participante los enunciados escritos de los cuatro problemas. Aunque el contexto de los problemas era conocido por los participantes (se refieren a lugares del entorno de la Facultad), cada enunciado iba acompañado de una fotografía. Antes de comenzar, se destacó que en cada problema debían proponer una solución individual y por escrito, explicando cuidadosamente la estrategia y las medidas que necesitarían para obtener la estimación, aunque sin ser necesario que la obtuvieran numéricamente.

Una vez recogidas y escaneadas las respuestas de los 224 participantes, se comprobó que todos los alumnos habían respondido a los cuatro problemas de la secuencia, descartando valores perdidos, y se procedió al análisis de las 896 soluciones.

Análisis

El primer paso para poder analizar la adaptabilidad de los futuros maestros en la resolución de la secuencia de problemas de Fermi es categorizar las estrategias utilizadas. Para ello, al igual que en el Estudio 1, nos basamos en la clasificación de estrategias establecida en Albarracín et al. (2021): recuento (C), linealización (L), unidad base (UB) y densidad (D). Se categorizaron como incompletas aquellas soluciones en las que faltaban variables por identificar o relaciones matemáticas entre variables, quedando interrumpido o poco claro el proceso para obtener una estimación. Las 896 soluciones fueron revisadas por dos investigadores, con una buena fiabilidad de acuerdo: $0,78 \leq \kappa \leq 0,8$, medida con la kappa de Cohen. En caso de discrepancia, la categoría se acordó con un tercer investigador.

Como se ha explicado en el marco teórico, la adaptabilidad requiere previamente de flexibilidad, por lo que, tras categorizar las soluciones producidas por los 224 participantes, se analizó la flexibilidad de cada resolutor. Para ello, establecimos que un resolutor es *flexible* si cambia de estrategia en al menos un problema de la secuencia. En consecuencia, para el análisis de la adaptabilidad, solo nos quedamos con los participantes que mostraron flexibilidad. El resto se clasificaron directamente como *no adaptables*, ya que solo utilizaron una estrategia para todos los problemas.

Para categorizar la adaptabilidad de los participantes flexibles, nos basamos en los resultados del Estudio 1. Un participante cuyas resoluciones a los cuatro problemas siguen el patrón estratégico basado en las características contextuales de los problemas se considera *adaptable contextualmente*. Dado que para cada problema de la secuencia hay dos estrategias apropiadas, hay ocho posibles patrones estratégicos para entrar en la categoría de adaptabilidad contextual (cualquiera de los que se ajustan a la tabla 4 presentada en la sección anterior; dos de ellos, además, corresponden a la adaptabilidad meticulosa o eficiente). Aunque un resolutor sea flexible, si su patrón estratégico no se ajusta a ninguna de estas opciones, se clasifica como no adaptable.

Resultados del Estudio 2

A partir de las estrategias usadas por los participantes, podemos responder a la segunda pregunta de la investigación.

El análisis de los cambios de estrategia entre problemas nos permite clasificar a cada participante como flexible o no flexible, en función de si incluye o no al menos dos estrategias diferentes a lo largo de la secuencia. Obtenemos que el 72 % de los participantes (161 de 224) son flexibles. Por lo tanto, se deduce que ya hay al menos un 28 % de participantes (63 de 224) que, por su falta de flexibilidad, tampoco son adaptables.

A continuación, para analizar cuántos futuros maestros flexibles son también adaptables debemos fijarnos en la estrategia utilizada por cada participante flexible en cada uno de los cuatro problemas. Encontramos que 90 participantes flexibles son no adaptables porque su patrón estratégico para la secuencia de problemas no se ajusta a los ocho patrones estratégicos (tabla 5).

Así, se concluye que el 32 % restante de los participantes (71 de 224) demuestran adaptabilidad contextual porque, consciente o inconscientemente, han escogido las estrategias más apropiadas (según el criterio de los expertos) en función de las características contextuales de los problemas de la secuencia. La tabla 5 muestra las frecuencias de cada uno de los ocho patrones estratégicos asociados a la adaptabilidad contextual.

Tabla 5.
Frecuencia de los patrones estratégicos de los futuros maestros adaptables contextualmente

<i>Criterio (estrategia) para la secuencia P1-P2-P3-P4</i>	<i>Frecuencia</i>
Rapidez (UB) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	14
Rigor (D) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	14
Rapidez (UB) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	17
Rapidez (UB) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rigor (L)	3
Rapidez (UB) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rigor (L)	6
Rigor (D) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rigor (L)	5
Rigor (D) - Rapidez (UB) - Rigor (D) - Rigor (L)	0
Rigor (D) - Rigor (L) - Rigor (D) - Rapidez (UB)	12
Casos totales de adaptabilidad contextual	71

Entre estos 71 participantes con adaptabilidad contextual, observamos que algunos de ellos han seguido sistemáticamente el mismo criterio de adecuación práctica (rigor o rapidez); se trata de los participantes que aparecen en las filas sombreadas de la tabla. Observamos, por tanto, que solo hay 5 participantes de 224 que muestren una adaptabilidad meticulosa, y que hay 14 que muestran una adaptabilidad eficiente.

DISCUSIÓN

¿Qué caracteriza la adaptabilidad cuando se resuelve una secuencia de problemas de Fermi?

Los expertos en matemáticas y su didáctica respaldan que existen unas estrategias más apropiadas que otras según las características contextuales de los problemas de Fermi. Este resultado es importante porque justifica una relación que ya había sido identificada en estudios previos con maestros en formación (Ferrando et al., 2021), y está en línea con Nistal et al. (2012), que señalan que las características contextuales pueden influir en la estrategia elegida como la más adecuada. También advierten que se trata de un tema poco estudiado. En esta investigación, aportamos una caracterización de adaptabilidad para problemas de Fermi que tiene en cuenta esta posible influencia del contexto.

Para ello, necesitábamos disponer de criterios de adecuación: la rapidez y la precisión son empleados en estudios sobre adaptabilidad en dominios como la aritmética o las ecuaciones (Blöte et al., 2001; Star y Rittle-Johnson, 2008), mientras que el rigor es un criterio específico para los problemas de contexto real, en los que la matematización de la realidad es más compleja, pues puede incluir supuestos reales que contribuyen a refinar la estimación (Albarracín et al., 2021; Krawitz et al., 2018; Segura et al., 2021). En los resultados del cuestionario de expertos no aparecen nuevos criterios de adecuación, por lo que estos tres son suficientes. Puesto que en muchos problemas de Fermi la cantidad que debe ser estimada es desconocida y no puede validarse, hemos introducido la distinción entre criterios potenciales o prácticos (Hickendorff, 2022). La precisión es un criterio potencial, mientras que la rapidez y el rigor son siempre criterios operativos porque aplican sobre el proceso de resolución y no sobre el resultado obtenido.

El siguiente paso era encontrar una asociación significativa, a partir de las respuestas de los expertos, entre estrategias y criterios de adecuación. En efecto, encontramos que la estrategia de la unidad base está asociada a la rapidez. Si se acude al espacio de soluciones planteado por Albarracín et al. (2021), se comprueba que es la estrategia que implica menos operaciones aritméticas: por ejemplo, en

P1-Personas debemos estimar la longitud y la anchura del porche y multiplicarlas. También debemos estimar la superficie que ocupa una persona y dividir una superficie por la otra: se resuelve en dos cálculos aritméticos. En cambio, la estrategia de linealización implica estimar la longitud del porche y estimar la longitud ocupada por una persona, y dividir, para obtener el número de personas a lo largo del porche. Debemos hacer lo mismo con la anchura para terminar multiplicando ambas estimaciones lineales. Se resuelve en tres cálculos aritméticos. Por último, en la estrategia de densidad debemos delimitar un área, por ejemplo, 4 m^2 , estimando cuántas personas caben (o experimentarlo). A continuación, debemos estimar la anchura y la longitud del porche para obtener el área total multiplicando; y por último, dividir la superficie total entre la superficie definida (4 m^2) y multiplicar por el número de personas que caben en esa superficie definida. Esto requiere al menos tres cálculos aritméticos y una estimación parcial.

Por otro lado, encontramos que la densidad y la linealización están asociadas al criterio de rigor. ¿Cómo interpretarlo? El primer caso es claro: la estimación parcial del número de elementos dentro de un área delimitada, menor que el área total, garantiza un mayor apoyo empírico que las otras estrategias, es un procedimiento más minucioso (podemos validar, en un área pequeña, la estimación parcial obtenida con el número de elementos observados). La relación de la linealización con el rigor debe, sin embargo, matizarse: para que la estimación parcial del número de elementos en una fila, que podría asegurar mayor fiabilidad en la estimación final, tenga sentido, los elementos deben estar ordenados en filas y columnas (Albarracín et al., 2021). De ahí que el rigor se pueda asociar a la estrategia de linealización solo en los problemas con estas características contextuales.

De este modo, los criterios de adecuación permiten interpretar por qué una estrategia es la más apropiada según las características contextuales de un problema de Fermi, lo que ayuda a comprender mejor la relación entre la selección de la estrategia y su ejecución (García Coppersmith y Star, 2022). Así, en *P3-Hierba* la única estrategia elegida como apropiada fue la densidad: si tenemos en cuenta el desorden en la disposición de las briznas, su forma irregular y su pequeño tamaño, es evidente que exige mayor cuidado y meticulosidad (rigor) que aquellos problemas, como *P4-Coches*, que presentan elementos regulares y ordenados, de forma que las áreas puedan calcularse rápidamente sin perder verosimilitud en la estimación. Sin embargo, en *P1-Personas*, el área ocupada por una persona, aunque se considere irregular, es poco variable (menos que la forma y tamaño de las briznas). Por tanto, como muestra la tabla 4, si el resolutor sigue un criterio de rapidez, seleccionará la unidad base, considerando que las áreas ocupadas por las personas son iguales; pero si sigue un criterio de rigor, elegirá la densidad, por lo que podrá suponer heterogeneidad en las áreas ocupadas por las personas (Segura et al., 2021). Por último, en *P2-Adoquines* y *P4-Coches*, como los elementos están ordenados por filas y columnas, si el resolutor opta por el rigor calculará una estimación parcial del número de elementos por fila y por columna, lo que puede darle más confianza en el proceso de estimación.

Las relaciones encontradas entre estrategia, contexto y criterios de adecuación son la clave para responder al reto teórico de Heinze et al. (2009) en el dominio de los problemas de Fermi, describiendo una caracterización operativa de la adaptabilidad contextual en patrones estratégicos (tabla 5). Dentro de la adaptabilidad contextual, distinguimos tres variantes: si el resolutor, teniendo en cuenta las características contextuales de los problemas, aplica sistemáticamente el criterio de rapidez, demuestra adaptabilidad eficiente; si aplica sistemáticamente el criterio de rigor, demuestra adaptabilidad metódica; y si cambia de criterio según el problema, demuestra adaptabilidad contextual no sistemática.

¿Qué adaptabilidad demuestran los futuros maestros al resolver los problemas de Fermi?

Los resultados muestran que, aplicando los patrones estratégicos de adaptabilidad contextual (tabla 5), un tercio de los futuros maestros adaptan sus estrategias para adecuarlas mejor al contexto de los

problemas de Fermi de la secuencia. No se trata de una proporción muy elevada, lo que concuerda con los estudios sobre la limitación en el repertorio de estrategias de los futuros profesores (Chapman, 2015; Van Dooren et al., 2003) y sobre sus dificultades para relacionar sus soluciones con la realidad al resolver problemas contextualizados (Chapman, 2015; Pla-Castells et al., 2021; Segura y Ferrando, 2023). Sin embargo, aunque la proporción de futuros maestros contextualmente adaptables no es grande, es mucho menor la de aquellos que aplican un criterio de manera sistemática (adaptabilidad meticulosa o eficiente), ya que la mayoría cambian de rapidez a rigor según el problema. Estos cambios de criterio ligados a las exigencias de las características contextuales de los problemas de Fermi se alinean con lo que Siegler (1996, p. 145) afirma sobre la adaptabilidad de los niños en los problemas aritméticos: «reaccionan adecuadamente a las circunstancias cambiantes, como el énfasis situacional en la rapidez o en la precisión». Así, mientras que en la literatura sobre adaptabilidad, centrada en operaciones aritméticas o en ecuaciones algebraicas, se suele aplicar un criterio de adecuación (rapidez o precisión) a todas las actividades (Lemaire y Siegler, 1995; Blöte et al., 2001; Star y Rittle-Johnson, 2008), los resultados de este trabajo nos llevan a considerar la adaptabilidad contextual no sistemática como el comportamiento más destacable. Esto se debe a la relevancia del contexto real en los problemas de Fermi, que empuja a que los resolutores escojan la estrategia más apropiada cambiando consciente o inconscientemente sus criterios de un problema a otro de la secuencia. Aunque se han estudiado y justificado las características contextuales que influyen en esta variedad de patrones estratégicos, debemos considerar que la gama de casos que incluye este tipo de adaptabilidad también puede estar influida por criterios externos, como el gusto personal por un tipo de estrategia en un problema determinado, o porque un tipo de estrategia se ha asimilado mejor que otra (Hickendorff et al., 2022). Como señalan Hickendorff et al. (2022), es importante distinguir lo que los alumnos saben de lo que los alumnos hacen, y la adaptabilidad contextual, en los problemas de Fermi, responde a esta distinción.

CONCLUSIONES

La adaptabilidad es un componente de la competencia matemática especialmente relevante en la resolución de tareas abiertas que permiten múltiples estrategias, como es el caso de los problemas de Fermi (Albarracín et al., 2021; Segura y Ferrando, 2023). Este trabajo avanza en el conocimiento sobre la influencia de los factores contextuales en el uso adaptable de estrategias en la resolución de problemas, un tema sobre el que hay poca investigación, a pesar de su importancia (Verschaffel et al., 2009; Hickendorff et al., 2022). En el marco de los problemas de Fermi, constatamos que pocos maestros en formación escogen sistemáticamente la estrategia más rápida o la más rigurosa para todos los problemas, aunque una parte importante sí demuestra adaptabilidad contextual no sistemática, ya que cambia de criterio para escoger la estrategia más adecuada en función de las características contextuales del problema. Sin embargo, la mayoría de futuros maestros tiene limitaciones al adaptar sus estrategias a los problemas de Fermi. En consecuencia, este trabajo muestra que la formación inicial en modelización para maestros de primaria debe incidir en el uso y comparación de múltiples estrategias, lo que forma parte de la competencia del docente en modelización (Huinchahue-Arcos et al., 2018). En particular, los resultados de este trabajo sobre las relaciones entre criterios de adecuación, estrategias y características contextuales pueden utilizarse para diseñar secuencias de problemas de Fermi en las que se demande a los futuros maestros comparar distintas estrategias aplicando varios criterios de adecuación, o, al contrario, desarrollar varias estrategias para un problema basándose en distintos criterios.

En relación con lo anterior, una limitación de este trabajo es no abordar la influencia de las características del sujeto en su comportamiento adaptable (Verschaffel et al., 2009). En este sentido, estos resultados deberían completarse con un estudio de corte cualitativo sobre el conocimiento de los futuros

maestros sobre la adecuación de sus estrategias, es decir, si saben justificar que su elección es apropiada para las características contextuales de los problemas de Fermi.

Otra limitación de este trabajo es su carácter descriptivo y exploratorio, pues además de caracterizar la adaptabilidad de los futuros maestros es necesario analizar si está relacionada con un mejor rendimiento del alumnado. Tal y como han mostrado Durkin et al. (2017) para la resolución de ecuaciones, sería interesante analizar si el diseño instruccional basado en el uso y comparación de múltiples estrategias mejora el rendimiento del alumnado en resolución de problemas de Fermi. En este tipo de problemas abiertos sin datos, el rendimiento se puede medir a partir del número y la gravedad de los errores (Segura y Ferrando, 2023). También sería interesante analizar si algún criterio de adecuación (rapidez o rigor) está relacionado con un mejor rendimiento. Así, un menor número de operaciones (rapidez) podría reducir las posibilidades de cometer errores matemáticos o acumular menos errores de estimación (García Coppersmith y Star, 2022). Un futuro estudio sobre la relación entre adaptabilidad y rendimiento en estudiantes de primaria debería seguir el método de elección / no elección para garantizar datos no sesgados sobre el rendimiento asociado a cada estrategia (Hickendorff et al., 2022).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico de los proyectos PID2020-117395RB-I00 y PID2021-126707NB-I00 financiados por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033 y por los fondos «ERDF A way of making Europe».

REFERENCIAS

- Albarracín, L., Ferrando, I. y Gorgorió, N. (2021). The Role of Context for Characterising Students' Strategies when Estimating Large Numbers of Elements on a Surface. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 1209-1227.
<https://doi.org/10.1007/s10763-020-10107-4>
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57.
<https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004>
- Ärleback, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364.
<https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157>
- Blöte, A. W., Van der Burg, E. y Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93, 627-638.
<https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.627>
- Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35(5), 308-309.
<https://doi.org/10.1119/1.2344696>
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3(1), 19-36.
<https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049>
- Durkin, K., Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM Mathematics Education*, 49, 585-597.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9>

- Efthimiou, C. J. y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, 42(3), 253.
<https://doi.org/10.1088/0031-9120/42/3/003>
- English, L. D. (2011). Data modeling in the beginning school years. En P. Sullivan y M. Goos (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (pp. 226-234). MERGA.
- Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2021). Analysis of the relationship between context and solution plan in modelling tasks involving estimations. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 119-128). Cham: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_10
- García Coppersmith, J. y Star, J. R. (2022). A Complicated Relationship: Examining the Relationship Between Flexible Strategy Use and Accuracy. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 382-397.
<https://doi.org/10.5964/jnc.7601>
- Haberzettl, N., Klett, S. y Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule—Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts y K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (pp. 31-41). Springer Spectrum.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-21042-7_3
- Henze, J. y Fritzlar, T. (2010). Primary school children's model building processes by the example of Fermi questions. En A. Ambrus y E. Vásárhelyi (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 11th ProMath conference* (pp. 60-75). Eötvös Loránd University.
- Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- Hickendorff, M. (2022). Flexibility and Adaptivity in Arithmetic Strategy Use: What Children Know and What They Show. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 367-381.
<https://doi.org/10.5964/jnc.7277>
- Hickendorff, M., McMullen, J. y Verschaffel, L. (2022). Mathematical Flexibility: Theoretical, Methodological, and Educational Considerations. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 326-334.
<https://doi.org/10.5964/jnc.10085>
- Huinchahue-Arcos, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. J. F. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 36(1), 99-115.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277>
- Klock, H. y Siller, H.-S. (2020). A Time-Based Measurement of the Intensity of Difficulties in the Modelling Process. En H. Wessels, G. A. Stillman, G. Kaiser, y E. Lampen (Eds.), *International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 163-173). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_15
- Ko, P. Y. y Marton, F. (2004). Variation and the secret of the virtuoso. En F. Marton y A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 43-62). Erlbaum.
<https://doi.org/10.4324/9781410609762>
- Krawitz, J., Schukajlow, S. y Van Dooren, W. (2018). Unrealistic responses to realistic problems with missing information: what are important barriers? *Educational Psychology*, 38(10), 1221-1238.
<https://doi.org/10.1080/01443410.2018.1502413>
- Lemaire, P. y Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: contributions to children's learning of multiplication. *Journal of experimental psychology: General*, 124(1), 83.
<https://doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83>

- Levav-Waynberg, A. y Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 73-90.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001>
- Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 287-311.
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y>
- Newton, K. J., Lange, K. y Booth, J. L. (2020). Mathematical flexibility: Aspects of a continuum and the role of prior knowledge. *The Journal of Experimental Education*, 88(4), 503-515.
<https://doi.org/10.1080/00220973.2019.1586629>
- Nistal A. A., Van Dooren W. y Verschaffel L. (2012). Flexibility in Problem Solving: Analysis and Improvement. En N. M. Seel (Eds.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_540
- Obersteiner, A., Alibali, M. W. y Marupudi, V. (2022). Comparing fraction magnitudes: Adults' verbal reports reveal strategy flexibility and adaptivity, but also bias. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 398-413.
<https://doi.org/10.5964/jnc.7577>
- Okamoto, H., Hartmann, M. y Kawasaki, T. (2023). Analysis of the Relationship between Creativity in Fermi Problems Measured by Applying Information Theory, Creativity in Psychology, and Mathematical Creativity. *Education Sciences*, 13(3), 315.
<https://doi.org/10.3390/educsci13030315>
- Peter-Koop, A. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling through Fermi-Problems. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131-146). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_10
- Pla-Castells, M., Melchor, C. y Chaparro, G. (2021). MAD+. Introducing misconceptions in the temporal analysis of the mathematical modelling process of a Fermi problem. *Education Sciences*, 11(11), 747.
<https://doi.org/10.3390/educsci11110747>
- Segura, C., Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individuales y resoluciones grupales de problemas de estimación de contexto real. *Cuadrante*, 30(1), 31-51.
<https://doi.org/10.48489/quadrante.23592>
- Segura, C., Ferrando, I. y Albarracín, L. (2023). Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101040.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101040>
- Segura, C. y Ferrando, I. (2023). Pre-service teachers' flexibility and performance in solving Fermi problems. *Educational Studies in Mathematics*, 113(2), 207-227. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10220-5>
- Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education*, 43(1), 83-87.
<https://doi.org/10.1088/0031-9120/43/01/009>
- Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(3), 355-366.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3701>

- Schoenfeld, A. H. (1982). Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 31-49.
<https://doi.org/10.2307/748435>
- Schukajlow, S., Krug, A. y Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 393-417.
<https://doi.org/10.1007/s10649-015-9608-0>
- Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41, 619-625.
<https://doi.org/10.1007/s11858-009-0203-7>
- Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking*. Oxford: Oxford University Press.
<https://doi.org/10.1093/oso/9780195077872.001.0001>
- Sriraman, B. y Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, 247-254.
<https://doi.org/10.1007/BF02652808>
- Sriraman, B. y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, 40(2), 205-223.
<https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7>
- Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and instruction*, 18(6), 565-579.
<https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018>
- Taggart, G. L., Adams, P. E., Eltze, E., Heinrichs, J., Hohman, J. y Hickman, K. (2007). Fermi Questions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(3), 164-167.
<https://doi.org/10.5951/MTMS.13.3.0164>
- Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29-47.
<https://doi.org/10.1023/A:1020572803437>
- Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2003). Preservice teachers' preferred strategies for solving Arithmetic and Algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(1), 27-52.
<https://doi.org/10.1023/A:1022109006658>
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. y Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.
<https://doi.org/10.1007/BF03174765>

Which is the Best Strategy for a Fermi Problem? Adaptability of Pre-Service Teachers

Carlos Segura, Irene Ferrando

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, València, España

carlos.segura@uv.es, irene.ferrando@uv.es

Fermi problems, suitable for primary school, pose a real, open-ended situation that allows developing and comparing multiple strategies. This requires teachers to be adaptive (able to choose the most appropriate strategy). In this research, we will focus on a specific type of Fermi problem, consisting in obtaining a reasoned estimate of the number of elements that fit in a bounded rectangular enclosure. The aim of this work is to characterise and analyse the adaptability of pre-service teachers when solving these problems. To this end, we have undertaken a mixed research project divided into two studies.

The starting point of Study 1 is the design and collection of data from a survey of experts in mathematics education. The aim is to characterise adaptability when solving a sequence of Fermi problems. The analysis of the responses of the 81 participants allows us to associate, first, the contextual characteristics of the problems (size, shape, and arrangement of the elements, as well as size of the enclosure) with the strategies. Then, the strategies are related to three adequacy criteria: accuracy, speed and rigour. Accuracy is a potential criterion that every solver aspires to, as the aim is to make an estimate as accurate as possible. However, as we are dealing with data-free and open-ended problems, this criterion cannot be considered as a practical one, so we focus on the other two, which are, in a way, complementary. Indeed, accuracy can be achieved through speed, by obtaining a close estimate in a small number of steps. Accuracy can also be achieved through rigour, by trying to perform an exhaustive resolution that considers more aspects of the real context of the problem formulated. These results lead to a characterisation of adaptability, distinguishing two practical criteria: speed and rigour, which, in turn, give rise to a contextual adaptability that can be unsystematic, or systematically efficient (based on speed) or meticulous (based on rigour).

This allows us to address Study 2 with prospective primary school teachers so as to answer the second research question concerning the characterisation of flexibility. For this purpose, we analysed the solutions proposed by 224 future teachers to a sequence of four estimation problems. The analysis of strategy changes between problems allows us to classify each participant as flexible or non-flexible, depending on whether or not they include at least two different strategies throughout the sequence. We obtained that 72 % of the participants are flexible. Therefore, it follows that there are already at least 28 % of participants who, due to their lack of flexibility, are not adaptable either. Next, to analyse how many future flexible teachers are also adaptable, we must look at the strategy used by each flexible participant in each of the four problems. We find that 90 flexible participants are non-adaptive because their strategy pattern for the problem sequence does not fit the eight strategy patterns identified in Study 1. Thus, we conclude that only 32 % of the remaining participants demonstrate contextual adaptability, as they have consciously or unconsciously chosen the most appropriate strategies (according to the expert judgement obtained in Study 1) based on the contextual characteristics of the problems in the sequence. Among the participants with contextual adaptability, we observe that some of them have systematically followed the same criterion of practical appropriateness (rigour or speed).

From these results, we derive conclusions regarding initial teacher training in teacher competence in modelling. In particular, the results of this work concerning the relationships between adequacy criteria, strategies and contextual features can be used to design sequences of Fermi problems in which prospective teachers are required to compare different strategies by applying various adequacy criteria, or, conversely, to develop several strategies for a problem based on different criteria.

