suma+
Artículos
Julio 2019
91
pp. 51-60

# ¿Qué hacer en probabilidad cuando no se sabe qué hacer?

José de Francisco Estaire

En este artículo se presentan varias actividades relativas al cálculo de probabilidades. El alumno, para su resolución, contará con la hoja de cálculo Excel.

Al realizar el planteamiento, solución y análisis de situaciones nada sencillas, se consigue elevar la autoestima del alumno. Las actividades también permiten dar una respuesta a la pregunta que el alumno siempre nos plantea: ¿para qué sirven las matemáticas?

*Palabras clave:* Probabilidad, Excel, Autoestima.

**How to cope with probability when we do not know what to do?**

The article presents different activities related to calculation of probabilities. Students, in order to solve it, will be provided with an Excel sheet.

Their self-esteem is being increased when developing a strategy, solution and analysis of non-easy situations. Thus, the activities allow to answer students´ well-known question: What is Mathematics useful for?

*Keywords:* Probability, Excel, Self-esteem.

Hay situaciones complejas que, en principio, solo se pueden abordar cuando se tiene un amplio conocimiento del cálculo de probabilidades y de sus recursos. Este planteamiento priva a casi todos los mortales de la posibilidad de acercarse a la solución de algún problema complejo que despierte su interés.

Hoy contamos con recursos al alcance de un alumno de bachillerato, los cuales le facilitan el abordaje de dichos problemas. En concreto disponemos de la hoja de cálculo, la cual permite encarar situaciones de matemática discreta, teniendo (por su «sencillez» y popularidad) una gran ventaja sobre otros programas de cálculo numérico.

Por tanto, a la pregunta que encabeza este artículo, ¿qué hacer en probabilidad cuando no se sabe qué hacer?, la respuesta es realizar una simulación.

Presentaré diversas situaciones, propuestas a los alumnos de primero de bachillerato que cursaron la asignatura optativa Estadística. En ellas los alumnos tienen que hacer una lectura comprensiva del ejercicio propuesto, con el fin de realizar el planteamiento y el programa de trabajo, que conduzca a la resolución de cada actividad y que posteriormente puedan iniciar pequeñas investigaciones.



Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2018 y aceptado en enero de 2019

> *Situación 1*
>
> En el Océano Pacífico hay tres islas $E_1$, $E_2$ y $E_3$, que no están muy distantes entre sí, pero a gran distancia de la tierra más cercana. En estas islas vive una colonia de aves, cuya población permanece estable en el tiempo, habiendo solo migraciones entre las islas. Inicialmente en $E_1$ hay 350 parejas, 500 en $E_2$ y 200 en $E_3$. Estudios sobre el comportamiento de estas aves han determinado que semestralmente:
>
> a) el 50 % de las parejas de $E_1$ se queda en $E_1$, un 20 % se va a $E_2$ y el resto a $E_3$;
>
> b) el 40 % de las parejas de $E_2$ se queda en $E_2$, un 20 % se va a $E_1$ y el resto a $E_3$;
>
> c) el 80 % de las parejas de $E_3$ se queda en $E_3$ y el resto se va a $E_1$.
>
> A largo plazo ¿cuál será la distribución de las aves en cada isla?

Debemos determinar las relaciones entre las aves y las islas, para ello comencemos con un método gráfico: *el diagrama de estados.*

Tenemos tres estados $E_1$, $E_2$ y $E_3$ en los que ponemos las conexiones entre ellos, junto con las probabilidades de transición (figura 1).

A partir del diagrama de flujo, escribimos *la tabla de las transiciones entre estados,* siendo $E_1(n)$ la población de la colonia de la isla $E_1$, en el instante $n$ y $E_1(n+1)$ la población de la colonia $E_1$ en el instante siguiente $n+1$, en nuestro caso seis meses después (tabla 1).

Utilizando la tabla de transiciones escribimos *el sistema de ecuaciones recurrentes,* que nos proporcionan la evolución de la población con el paso del tiempo, según las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} E_1(n+1)=0{,}5E_1(n)+0{,}2E_2(n)+0{,}2E_3(n) \\ E_2(n+1)=0{,}2E_1(n)+0{,}4E_2(n) \\ E_3(n+1)=0{,}3E_1(n)+0{,}4E_2(n)+0{,}8E_3(n) \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} E_1(0)=350 \\ E_2(0)=500 \\ E_3(0)=200 \end{cases}$$

Lo hecho hasta aquí está al alcance de un alumno de la ESO, pero la resolución del sistema recurrente es otro cantar.

La estimación de la solución del sistema la realizaremos utilizando la hoja de cálculo Excel, para ello procederemos de la siguiente forma:

En el rango B29:E29 ponemos los encabezamientos de lista y en B30:E30 ponemos los valores iniciales (he dejado 28 líneas de espacio para incluir en ellas el enunciado, el diagrama de estados, la tabla de transiciones, las ecuaciones recurrentes...) (figura 2).

En el rango C31:E31 ponemos las ecuaciones recurrentes:

En C31 escribimos =0,5*C30+0,2*D30+0,2*E30.

En D31 escribimos =0,2*C30+0,4*D30.

En E31 escribimos =0,3*C30+0,4*D30+0,8*E30.

Seleccionamos el rango <C31:E31> y rellenamos arrastrando, parando cuando se estabiliza el número de aves en cada isla. Esto se logra al cabo de 23 iteraciones (figura 3).

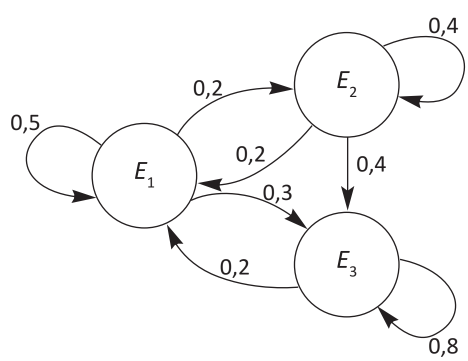
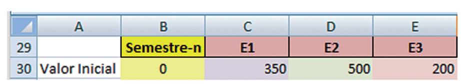



Figura 1

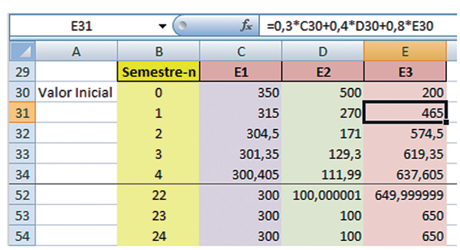
| | | | Inicial (n) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
| Final (n+1) | $E_1$ | | 0,5 | 0,2 | 0,2 |
| | $E_2$ | | 0,2 | 0,4 | 0 |
| | $E_3$ | | 0,3 | 0,4 | 0,8 |

Tabla 1



| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | | Semestre-n | E1 | E2 | E3 |
| 30 | Valor Inicial | 0 | 350 | 500 | 200 |

Figura 2



E31 =0,3*C30+0,4*D30+0,8*E30

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | | Semestre-n | E1 | E2 | E3 |
| 30 | Valor Inicial | 0 | 350 | 500 | 200 |
| 31 | | 1 | 315 | 270 | 465 |
| 32 | | 2 | 304,5 | 171 | 574,5 |
| 33 | | 3 | 301,35 | 129,3 | 619,35 |
| 34 | | 4 | 300,405 | 111,99 | 637,605 |
| 52 | | 22 | 300 | 100,000001 | 649,999999 |
| 53 | | 23 | 300 | 100 | 650 |
| 54 | | 24 | 300 | 100 | 650 |

Figura 3

Vemos que la población de aves, en cada isla, se estabiliza en 300, 100 y 650 parejas. Si *jugamos* con la distribución inicial de las 1050 parejas de aves, observamos que la distribución final no depende de la inicial; por ejemplo si inicialmente tenemos: 0, 1 050 y 0 parejas, después de 23 iteraciones la distribución de las parejas en las islas se estabiliza en (300, 100, 650), de forma tal que si inicialmente tenemos (300, 100, 650) parejas, esta distribución se mantendrá fija cada semestre (figura 4).

Podemos decir que el vector (300, 100, 650) se transforma en el mismo, siendo por tanto un autovector.

¿Qué ocurrirá si tenemos una masa inicial distinta de 1 050 parejas? Normalicemos la solución estable dividiéndola entre el total $N=1\,050$, de esta forma obtenemos el porcentaje de aves que terminarán en cada isla: $1/1\,050\cdot(300, 100, 650)=$ (0,286, 0,095, 0,619), es decir, independientemente del valor inicial del número de parejas y de su distribución en las islas, obtenemos, que a la larga, el 28,6 % de la población estará en la isla $E_1$, el 9,5 % en la $E_2$ y el 61,9 % restante en $E_3$ (figura 5).

C31 fx =0,5*C30+0,2*D30+0,2*E30

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | | Semestre-n | E1 | E2 | E3 |
| 30 | Valor Inicial | 0 | 300 | 100 | 650 |
| 31 | | 1 | 300 | 100 | 650 |
| 32 | | 2 | 300 | 100 | 650 |
| 33 | | 3 | 300 | 100 | 650 |

Figura 4

| | Semestre-n | E1 | E2 | E3 |
|---|---|---|---|---|
| Valor Inicial | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,3 |
| | 2 | 0,35 | 0,18 | 0,47 |
| | 24 | 0,28571429 | 0,0952381 | 0,61904762 |
| | 25 | 0,28571429 | 0,0952381 | 0,61904762 |

Figura 5

## Notas para el profesor

El sistema de ecuaciones recurrentes puede escribirse de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E_1(n+1) \\ E_2(n+1) \\ E_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(n) \\ E_2(n) \\ E_3(n) \end{pmatrix}$$

Abreviadamente: $E(n+1)=A\cdot E(n)$

Se verifica que: $E(n)=A^n\cdot E(0)$. El problema se reduce a calcular $A^n$, cálculo muy laborioso, a mano, que podría simplificarse si hubiera una matriz semejante a $A$ pero más sencilla: concretamente una matriz diagonal $D$.

Sabemos que una matriz cuadrada $A$ es diagonalizable o semejante a una matriz $D$ si existe una matriz $P$ (matriz de paso) que cumple: $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$, en este caso $A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$. Por tanto el problema se ha transformado en:

1. Calcular una matriz diagonal $D$, semejante a la matriz $A$ (sabemos que no todas las matrices son diagonalizables).
2. Calcular la matriz de paso $P$ y su inversa.

Esto dicho en pocas palabras se traduce en un trabajo arduo, que depende de la dimensión de $A$ ya que el cálculo de $P$ y de su inversa no es inmediato. Si $A$ no es diagonalizable la cosa se pone más fea, ya que la matriz semejante a $A$ será una matriz de Jordan.



## Cálculo de la matriz $D$

Tenemos que resolver la ecuación característica $|A-\lambda\cdot I|=0$, en nuestro caso:

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4-\lambda & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8-\lambda \end{vmatrix}=0$$

obteniendo: $\lambda^3-1,7\lambda^2+0,82\lambda-0,12=0$, cuyas soluciones, son los autovalores $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0,4$, $\lambda_3=0,3$. Al ser las raíces de la ecuación simples, la matriz A es diagonalizable y semejante a la matriz diagonal $D$, que tiene en la diagonal principal los autovalores (en cualquier orden).

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$$

## Cálculo de la matriz de paso *P*

Las columnas de $P$ están formadas por los autovectores asociados a cada autovalor, para ello debemos resolver tres sistemas de ecuaciones, uno para cada autovalor:

Para $\lambda = 1$, resolvemos $(A - 1 \cdot I) \cdot V_1 = 0$, obteniendo:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 0{,}4$, resolvemos $(A - 0{,}4 \cdot I) \cdot V_2 = 0$, obteniendo:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 0{,}3$, resolvemos $(A - 0{,}3 \cdot I) \cdot V_3 = 0$, obteniendo:

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso $P$ será:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 13 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa $P^{-1}$ (cuyo cálculo lleva su tiempo) es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/21 & 1/21 & 1/21 \\ 4/3 & 1/3 & -2/3 \\ 5/7 & -2/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

Con estos mimbres podemos calcular $A^n$:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 13 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/21 & 1/21 & 1/21 \\ 4/3 & 1/3 & -2/3 \\ 5/7 & -2/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2/7 + 5/7 \cdot (0{,}3)^n & 2/7 - 2/7 \cdot (0{,}3)^n & 2/7 - 2/7 \cdot (0{,}3)^n \\ 2/21 + 4/3 \cdot (0{,}4)^n - 10/7 \cdot (0{,}3)^n & 2/21 + 1/3 \cdot (0{,}4)^n + 4/7 \cdot (0{,}3)^n & 2/21 - 2/3 \cdot (0{,}4)^n + 4/7 \cdot (0{,}3)^n \\ 13/21 - 4/3 \cdot (0{,}4)^n + 5/7 \cdot (0{,}3)^n & 13/21 - 1/3 \cdot (0{,}4)^n - 2/7 \cdot (0{,}3)^n & 13/21 + 2/3 \cdot (0{,}4)^n - 2/7 \cdot (0{,}3)^n \end{pmatrix}$$

El resultado final es:

$$\begin{pmatrix} E_1(n) \\ E_2(n) \\ E_3(n) \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 300 + 50 \cdot (0'3)^n \\ 100 + 500 \cdot (0{,}4)^n - 100 \cdot (0{,}3)^n \\ 650 - 500 \cdot (0{,}4)^n + 50 \cdot (0{,}3)^n \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de la distribución de las aves a largo plazo, debemos calcular el límite cuando n tiende a infinito, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} E_1(\infty) \\ E_2(\infty) \\ E_3(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 650 \end{pmatrix}$$

Conclusión a la que se llega después de saber por dónde hay que moverse y de alguna hora de cálculo manual. A esta misma conclusión llegará un alumno (motivado y adiestrado) en pocos minutos.

*Situación 2. El Juego de Penny-ante*

Se lanza una moneda sucesivamente. Un jugador (Abel) selecciona una de las secuencias de tres resultados {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++} y el otro jugador (Caín) selecciona otra secuencia diferente. Gana el primero que obtiene la secuencia que ha seleccionado. Si Abel apuesta por la secuencia (cc+) y Caín por (+c ). ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ganar? (Haihg, 2003: 79)

Llamemos 1 a cara y 0 a cruz. Abel apuesta por la secuencia (110) y Caín por (011).

A estas alturas, el alumno ya debe saber: trasladar la información del enunciado a un diagrama (figura 6), deducir la tabla de transiciones (tabla 2) y escribir las ecuaciones recurrentes del sistema.

Trasladamos las recurrencias a la hoja de cálculo y rellenamos arrastrando, obteniendo, después de 90 iteraciones, que el sistema se estabiliza. Abel gana con probabilidad de 1/4 y Caín gana con probabilidad de 3/4 (figura 7).

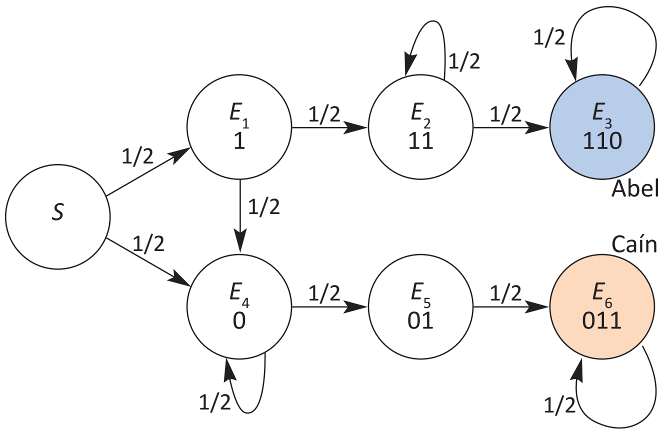



Figura 6

| | | Inicial (n) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | S | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ |
| Final (n+1) | S | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_1$ | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_2$ | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_3$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_4$ | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 |
| | $E_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| | $E_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1 |

Tabla 2

$$\left.\begin{aligned}
&S(n+1)=0\cdot S(n)\\
&E_1(n+1)=1/2S(n)\\
&E_2(n+1)=1/2E_1(n)+1/2E_2(n)\\
&E_3(n+1)=1/2E_2(n)+E_3(n)\\
&E_4(n+1)=1/2S(n)+1/2E_1(n)+1/2E_4(n)+\\
&\qquad\qquad +1/2E_5(n)\\
&E_5(n+1)=1/2E_4(n)\\
&E_6(n+1)=1/2E_5(n)+E_6(n)
\end{aligned}\right\}$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | | n | S | E1 | E2 | E4 | E5 | E3-ABEL | E6-CAíN |
| 30 | Valor Inicial | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 31 | | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 0 |
| 32 | | 2 | 0 | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0 | 0 |
| 33 | | 3 | 0 | 0 | 0,125 | 0,375 | 0,25 | 0,125 | 0,125 |
| 34 | | 4 | 0 | 0 | 0,0625 | 0,3125 | 0,1875 | 0,1875 | 0,25 |
| 120 | | 90 | 0 | 0 | 8,0779E-28 | 3,7644E-09 | 2,3265E-09 | 0,25 | 0,74999999 |
| 121 | | 91 | 0 | 0 | 4,039E-28 | 3,0454E-09 | 1,8822E-09 | 0,25 | 0,75 |
| 122 | | 92 | 0 | 0 | 2,0195E-28 | 2,4638E-09 | 1,5227E-09 | 0,25 | 0,75 |

Figura 7

## Notas para el profesor

En este caso, como en el anterior, tenemos una cadena de Markov cuya matriz de transición es una matriz estocástica (la suma de los elementos de cada columna es la unidad). La diferencia de este caso, con el anterior, es que aparte de los estados transitorios tenemos dos estados absorbentes: $E_3$ y $E_6$, de forma que cuando el sistema alcanza alguno de ellos ya no sale de él (el juego se ha terminado).

Reorganicemos la matriz de transición, de forma que los primeros estados que figuren sean los estados absorbentes (tabla 3).

| | | Inicial (n) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $E_3$ | $E_6$ | S | $E_1$ | $E_2$ | $E_4$ | $E_5$ |
| Final (n+1) | $E_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| | $E_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 |
| | S | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_1$ | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_2$ | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| | $E_4$ | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| | $E_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 |

Tabla 3

La forma canónica de la matriz $A$ es de la forma:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

donde *I, R,* 0 *y Q* son matrices.

Su potencia *n*-ésima será:

$$A^n=\left(\begin{array}{c|c} I & * \\ \hline 0 & Q^n \end{array}\right)$$

siendo * una matriz.

Los elementos de la matriz $Q^n$ son las probabilidades de estar en cada elemento transitorio después de n pasos; $(q_{ij}^{\,n})$ = probabilidad de estar en el estado $E_j$, después de $n$ pasos, cuando partió de $E_i$.

La matriz fundamental es $N=(I-Q)^{-1}$. Sus elementos $(n_{ij})$ nos dan el número medio de veces que la cadena está en $E_j$ cuando salió de $E_i$.

Si la cadena comienza en un estado transitorio $E_i$, la probabilidad de que acabe en un estado absorbente $E_j$ es: $B=R\cdot N=R\cdot(I-Q)^{-1}$; $b_{1i}$ es la probabilidad de terminar en el estado absorbente $E_1$ cuando se partió del estado transitorio $E_i$.

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N=\left(I-Q\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B=R\cdot N=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{11}=1/4$ es la probabilidad de terminar en el estado $E_3$ cuando se partió del estado $S$, es decir es la *probabilidad de que gane Abel.*

$b_{21}=3/4$ es la probabilidad de terminar en el estado $E_6$ cuando se partió del estado $S$, es decir es la *probabilidad de que gane Caín.*

Si el sistema alcanza el estado $E_4$ es seguro que gana Caín, esta situación nos la predice la matriz $B$, pues $b_{24}=1$. De igual forma si alcanza $E_2$ es seguro que gane Abel, en la matriz $B$ tenemos $b_{13}=1$.

Si tenemos $F=(1,1,1,1,1)$ (vector fila de dimensión el número de estados transitorios y componentes la unidad), se cumple que el producto matricial $F\cdot N$ coincide con el número medio de pasos que el sistema dará desde el estado $E_i$ hasta la absorción. En nuestro caso desde el inicio en el estado $S$, hasta la finalización (absorción, por cualquier estado absorbente), el juego tendrá una duración media de $13/2$ jugadas.

$$F\cdot N=\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$



## Comentario

Este juego tiene una particularidad: es de los juegos en los que el «postre» (segundo jugador) tiene ventaja sobre el «mano» (siempre que conozca la estrategia ganadora). Inicialmente a los alumnos se les dio el esquema y el encargo de realizar 10 partidas. Juntando los resultados de todos los alumnos se realizó una previsión de la probabilidad que tenía Abel de ganar. Esto motivó que el profesor desafiara a la configuración elegida por cualquier alumno. Posteriormente se pasó a la generación de las ecuaciones recurrentes, a su iteración en la hoja de cálculo y a la estimación de la probabilidad que cada uno tenía de ganar, quedando como investigación el determinar una estrategia ganadora.

## Estrategia ganadora

Si Abel elige *ABc,* Caín elegirá las dos primeras opciones de Abel como últimas suyas, por tanto elegirá *xAB* y tomará por primera cifra *x* aquella que haga que su opción no sea capicúa.

Como respuesta a la elección de Abel, la tabla 4 nos da la probabilidad de que gane Caín.

Cuando esta actividad se presente en clase, conviene no abusar del contrario y con objeto de au-

| *Secuencia de Abel* | *Secuencia de Caín* | *Prob. de Caín* |
|---|---|---|
| 111 | 011 | 7/8 |
| 110 | 011 | 3/4 |
| 101 | 110 | 2/3 |
| 011 | 001 | 2/3 |
| 100 | 110 | 2/3 |
| 010 | 001 | 2/3 |
| 001 | 100 | 3/4 |
| 000 | 100 | 7/8 |

Tabla 4

mentar su autoestima dejarle ganar alguna vez (al menos un 20 %); para concederles ventaja, tomaremos nuestras dos primeras opciones iguales a las dos últimas del mano, de esta forma conseguimos que su probabilidad de éxito sea la de Caín.

> *Situación 3*
>
> Abel dice a Caín: «Vamos a lanzar una moneda de Laplace de caras 0 y 1 tantas veces como sea necesario, hasta obtener una de las palabras 1111 o 0011. Tú ganas si sale primero 1111. En caso contrario gano yo. El juego es equitativo, ya que ambas palabras tienen la misma probabilidad 1/16».
>
> ¿Cuál es la probabilidad de que gane Abel? (Engel, 1988: 25)

Realizamos el diagrama de estados y a partir de él las ecuaciones recurrentes del sistema. Ecuaciones que introducidas en la hoja de cálculo, después de unas 165 iteraciones obtenemos que Abel tiene una probabilidad de ganar de 1/4, mientras que la probabilidad de que gane Caín es de 3/4.

## Notas para el profesor

El diagrama de estados es el de la figura 8 y las primeras simulaciones se pueden ver en la figura 9, obteniéndose $P$(ganar Abel) = 1/4; $P$(ganar Caín) = 3/4.

En esta actividad, como en la anterior, inicialmente se les entregó el diagrama del juego y se les encargó que realizaran 10 partidas, determinando las veces que ganaba Abel y el número de partidas realizadas hasta la finalización del juego. Juntando todos los resultados se obtuvo

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | n | S | E0 | E1 | E2 | E3 | E5 | E6 | E4-ABEL | E7-CAíN |
| Valor Inicial | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0 | 0,25 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0,25 | 0,125 | 0,125 | 0,125 | 0,25 | 0,125 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0,25 | 0,125 | 0,0625 | 0,0625 | 0,25 | 0,125 | 0,0625 | 0,0625 |
| | 5 | 0 | 0,1875 | 0,125 | 0,0625 | 0,03125 | 0,25 | 0,125 | 0,09375 | 0,125 |
| | 163 | 0 | 1,7134E-09 | 9,6341E-10 | 5,4171E-10 | 3,0459E-10 | 2,201E-09 | 1,2376E-09 | 0,25 | 0,74999999 |
| | 164 | 0 | 1,5236E-09 | 8,5671E-10 | 4,8171E-10 | 2,7085E-10 | 1,9572E-09 | 1,1005E-09 | 0,25 | 0,75 |
| | 165 | 0 | 1,3549E-09 | 7,6182E-10 | 4,2835E-10 | 2,4085E-10 | 1,7404E-09 | 9,786E-10 | 0,25 | 0,75 |

Figura 9

una estimación de la probabilidad que tenía Abel de ganar y del número medio de partidas hasta la finalización. Posteriormente se determinaron las ecuaciones recurrentes del sistema, su traslado a la hoja de cálculo y sus iteraciones, obteniendo una estimación de la probabilidad que cada jugador tiene de ganar.

## Tiempo medio hasta la absorción

El valor de espera de un estado interior es igual a la unidad más la media ponderada de los valores de espera de sus estados vecinos.

Si $mS$ es el tiempo de espera del estado $S$ y $m1$ el del estado $E_1$... Podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} mS = 1 + 1/2m1 + 1/2m0 \\ m1 = 1 + 1/2m0 + 1/2m2 \\ m2 = 1 + 1/2m3 + 1/2m0 \\ m3 = 1 + 1/2m4 + 1/2m0 \\ m4 = 0 \\ m0 = 1 + 1/2m5 + 1/2m1 \\ m5 = 1 + 1/2m5 + 1/2m0 \\ m6 = 1 + 1/2m7 + 1/2m0 \\ m7 = 0 \end{cases}$$

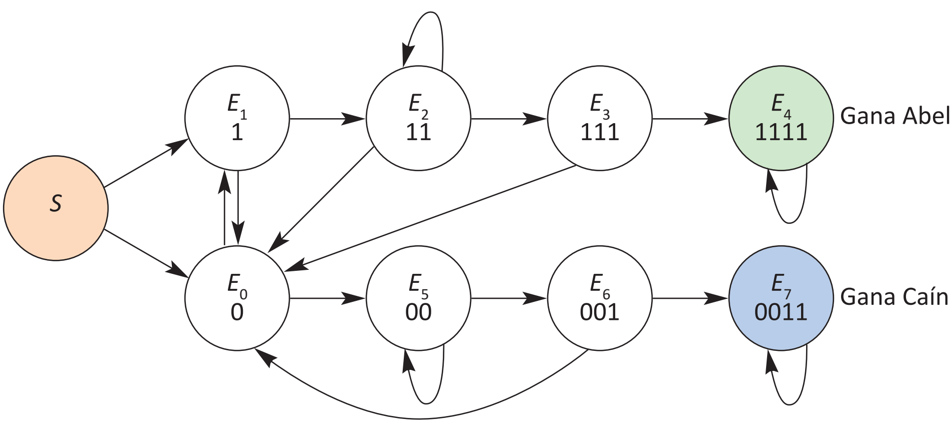



Figura 8

Al trasladarlas a la hoja y rellenarla barriendo, obtenemos (después de 165 iteraciones) que desde el estado de salida $S$ el número medio de jugadas hasta la absorción es de 12. Desde $E_0$ el número medio de jugadas es de 10,8... (figura 10).

Si recurrimos al cálculo matricial, reordenamos los estados para obtener la matriz canónica y a partir de ella obtendremos las matrices $Q$ y $R$. Operando obtenemos la matriz fundamental $N$. Los encabezamientos de las columnas transitorias son: $S$, $E_0$, $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_5$, $E_6$, y los de las absorbentes son $E_4$ y $E_7$ (tabla 5).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | | n | S | E0 | E1 | E2 | E3 | E5 | E6 | E4-ABEL | E7-CAÍN |
| 30 | Valor Inicial | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 31 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 32 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1,5 | 2 | 1,5 | 0 | 0 |
| 33 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 2,75 | 2 | 2,75 | 2 | 0 | 0 |
| 34 | | 4 | 4 | 3,875 | 3,875 | 3,5 | 2,5 | 3,375 | 2,5 | 0 | 0 |
| 35 | | 5 | 4,875 | 4,625 | 4,6875 | 4,1875 | 2,9375 | 3,9375 | 2,9375 | 0 | 0 |
| 209 | | 179 | 12 | 10,8 | 11,2 | 9,59999999 | 6,4 | 8,39999999 | 6,4 | 0 | 0 |
| 210 | | 180 | 12 | 10,8 | 11,2 | 9,59999999 | 6,4 | 8,39999999 | 6,4 | 0 | 0 |
| 211 | | 181 | 12 | 10,8 | 11,2 | 9,59999999 | 6,4 | 8,4 | 6,4 | 0 | 0 |
| 212 | | 182 | 12 | 10,8 | 11,2 | 9,59999999 | 6,4 | 8,4 | 6,4 | 0 | 0 |
| 213 | | 183 | 12 | 10,8 | 11,2 | 9,6 | 6,4 | 8,4 | 6,4 | 0 | 0 |

Figura 10



| | | Inicial (n) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $E_4$ | $E_7$ | S | $E_0$ | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_5$ | $E_6$ |
| Final (n+1) | $E_4$ | 1 | | | | | | 1/2 | | |
| | $E_7$ | | 1 | | | | | | | 1/2 |
| | S | | | | | | | | | |
| | $E_0$ | | | 1/2 | | 1/2 | 1/2 | 1/2 | | 1/2 |
| | $E_1$ | | | 1/2 | 1/2 | | | | | |
| | $E_2$ | | | | | 1/2 | | | | |
| | $E_3$ | | | | | | 1/2 | | | |
| | $E_5$ | | | | 1/2 | | | | 1/2 | |
| | $E_6$ | | | | | | | | 1/2 | |

Tabla 5

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N=\left(I-Q\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{16}{5} & \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} \\ 2 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 3 & \frac{16}{5} & \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{18}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Las probabilidades de terminar en cada estado absorbente, desde un estado transitorio, vienen dadas por los elementos de la matriz $B$:

$$B=R\cdot N=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{9}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$P(\text{ganar Abel})=P(\text{Terminar en }E_4)=b_{11}=1/4$
$\text{P(ganar Cain)}=\text{P(Terminar en }E_7)=b_{21}=3/4$
Si:

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

el tiempo medio de absorción, desde cualquier estado transitorio es $F\cdot N$.

$$F\cdot N=\begin{pmatrix} 12 & \frac{54}{5} & \frac{56}{5} & \frac{48}{5} & \frac{32}{5} & \frac{42}{5} & \frac{32}{5} \end{pmatrix}$$

Desde el estado inicial $S$ el tiempo medio hasta la absorción es de 12 unidades de tiempo (tiradas).

*Situación 4*

¿Cuántas personas deben estar reunidas para que la probabilidad, de que al menos dos cumplan años el mismo día, sea mayor de 1/2? (Spiegel, 1976: 31)

## Notas para el profesor

Sabemos que la forma de atacar este problema clásico no es la directa, sino que es determinando que ninguna de las $n$ personas ($n<365$) cumpla años el mismo día. El suceso contrario a tener $n$ cumpleaños distintos es que al menos dos cumplan años el mismo día, por tanto:

$$P(\text{al menos 2 coincidencias}) = \\ = 1 - P(\text{ninguna coincidencia})$$

La primera persona puede cumplir años cualquier día: 365/365.

La segunda, si no coincide con la primera, tiene probabilidad $364/365=(365-1)/365$.

La tercera tiene una probabilidad de no coincidir con las anteriores de $363/365=(365-2)/365$.

La persona $n$-ésima tiene una probabilidad de no coincidir con las anteriores de:

$$(365-(n-1))/365.$$

Si definimos el suceso $NC$=«dos personas no cumplen años el mismo día», entonces:

$$P(NC)=(365/365)\cdot(364/365)\cdot(363/65)\cdot\ldots \\ \cdot\ldots(365-(n-1))/365 \text{ (ya que los sucesos son independientes).}$$

El suceso $C$=«al menos dos personas cumplen años el mismo día» es el suceso contrario de $NC$ y la probabilidad de que ocurra C es:

$$P(C)=1-\mathrm{P}(NC)=1-(365/365)\cdot(364/365)\cdot \\ \cdot(363/365)\cdot\ldots\cdot(365-(n-1))/365$$

Si el número total de personas (incluyéndonos) es $n$, la ecuación recurrente que nos da la probabilidad de «no coincidencia en el cumpleaños de $n$ personas» es:

$$P(n)=P(n-1)\left(\frac{365-(n-1)}{365}\right), \text{ con } P(1)=1$$

Para la realización de la hoja de cálculo podemos actuar de la siguiente forma:

En las columnas `B`, `C` y `D` pondremos: «$n$=número de personas», «$NC$=probabilidad de no coincidir» y «C=probabilidad de al menos una coincidencia».

Los valores iniciales los ponemos en la fila 10, escribiendo: `<B10=1>`, `<C10=1>`, `<D10=0>`. Las fórmulas las ponemos en la fila 11, escribimos: `<B11=2>`, `<C11=C10*(365-B10)/365>`, `<D11=1-C11>`. Seleccionamos el rango `<B11:D11>` y rellenamos arrastrando y obtenemos la lista de valores de la figura 11.

Observamos que cuando el número de personas es 23, la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día es de 0,50729723. Tabulamos y representamos gráficamente los resultados obtenidos, observando que la gráfica del número de coincidencias tiene un cierto parecido a la curva logística (figura 12).

C11 $f_x$ =C10*(365-B10)/365

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | Probabilida | Probabilida | |
| 9 | | n | NC | C | |
| 10 | Valor Inicial | 1 | 1 | 0 | |
| 11 | | 2 | 0,99726027 | 0,00273973 | |
| 12 | | 3 | 0,99179583 | 0,00820417 | |
| 13 | | 4 | 0,98364409 | 0,01635591 | |
| 14 | | 5 | 0,97286443 | 0,02713557 | |
| 30 | | 21 | 0,55631166 | 0,44368834 | |
| 31 | | 22 | 0,52430469 | 0,47569531 | |
| 32 | | 23 | 0,49270277 | 0,50729723 | |
| 33 | | 24 | 0,46165574 | 0,53834426 | |
| 34 | | 25 | 0,4313003 | 0,5686997 | |
| 35 | | 26 | 0,40175918 | 0,59824082 | |
| 36 | | 27 | 0,37314072 | 0,62685928 | |
| 37 | | 28 | 0,34553853 | 0,65446147 | |
| 38 | | 29 | 0,31903146 | 0,68096854 | |
| 39 | | 30 | 0,29368376 | 0,70631624 | |

Figura 11

| Nº de personas | Probabilidad de al menos dos coincidencias |
|---|---|
| 20 | 0,41143838 |
| 23 | 0,50729723 |
| 30 | 0,70631624 |
| 40 | 0,89123181 |
| 50 | 0,97037358 |
| 60 | 0,99412266 |
| 70 | 0,99915958 |

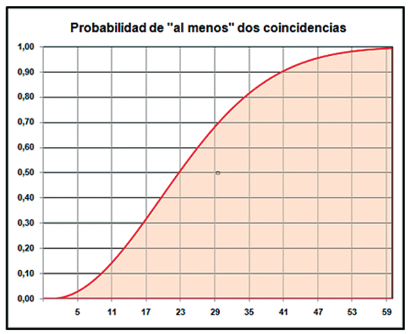



Figura 12

## Comentario

Esta es la actividad que realizo el primer día de curso. Como el número de alumnos de la asignatura no es muy numeroso (diez o quince) les encargo que en un papel pongan el día de su cumpleaños y el de dos personas más (padres, hermanos…) siempre que sean distintas las fechas del cumpleaños. Yo previamente apuesto a que al menos dos fechas coinciden. Posteriormente realizamos el escrutinio para determinar si hay alguna coincidencia. Generalmente he ganado casi todas las veces. Después de dejarles intrigados les indico que posteriormente, cuando avance el curso resolveremos, teóricamente, esta situación.

## Conclusión

El tratamiento de sistemas discretos con la hoja de cálculo proporciona al alumno una herramienta que le facilita el poder abordar, de una forma sencilla, situaciones complejas, sin requerir amplios conocimientos de matemáticas superiores, permitiendo la realización de investigaciones matemáticas, sobre todo en el campo de la dinámica de poblaciones. Por otro lado el alumno puede empezar a obtener una respuesta a la pregunta que siempre nos formulan: «¿Para qué sirven las matemáticas?».

## Referencias bibliográficas

Barbolla, J., y otros (1998), *Algebra Lineal y Teoría de Matrices,* Prentice Hall, Madrid.

Engel, A. (1988), *Probabilidad y Estadística,* Tomos I y II, Mestral Universidad, Valencia.

Fernández, C. y otros (2003), *Ecuaciones diferenciales y en diferencias,* Thomson, Madrid.

Gardner, M. (1983), *Circo Matemático,* Alianza Editorial, Madrid.

Haihg, J. (2003), *Matemáticas y juegos de azar*, Tusquets editores, Barcelona.

Kemeny, J., y otros (1980), *Introducción a las Matemáticas Finitas,* CECSA, México.

Pérez, C. (2002), *Estadística aplicada a través de Excel*, Prentice Hall, Madrid.

Spiegel, M. (1976), *Probabilidad y Estadística,* McGraw Hill, México.

José de Francisco Estaire
*IES Andrés Laguna, Segovia*
<j_d_francisco@yahoo.es>