Cónicas y sus elementos

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Manuel de León Rodríguez

SUMA+ núm. 95
pp. 33-42
Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2020 y aceptado en septiembre de 2020

El siguiente artículo muestra el uso de GeoGebra como recurso para apoyar algunos procesos para determinar los elementos de las distintas cónicas, con especial atención a los focos de la elipse y la hipérbola, y a la directriz y el foco de la parábola. Aunque GeoGebra ofrece los comandos que devuelven todos los elementos de las cónicas, se ha querido destacar la forma de obtenerlos tanto algebraicamente como gráficamente, considerando que estos dos puntos de vista, serán complementarios, facilitando cada uno de ellos entender el proceso seguido en el otro.

Palabras clave: Geometría, GeoGebra, Construcciones, Secundaria.

Conics and their elements // The following article shows the use of GeoGebra as a resource to support some processes to determine the elements of the different conics, with special attention to the foci of the ellipse and hyperbola, and to the guideline and the focus of the parabola. Although GeoGebra offers the commands that return all the elements of the conics, we wanted to highlight the way to obtain them both algebraically and graphically, considering that these two points of view will be complementary, facilitating each of them to understand the process followed in the other.

Keywords: Geometry, GeoGebra, Constructions, Secondary.

A lo largo de la historia, las cónicas han sido una fuente de estudio e inspiración para afrontar nuevos retos para muchos matemáticos. Desde Menecmo (350 a. C.) que ya las conocía y las utilizó como herramientas para resolver los problemas clásicos, obteniéndolas como secciones de distintos conos y Apolonio (260 a. C.) que las obtuvo como secciones de un único cono, determinando sus elementos y distintos modos de construcción, además de definirlas como lugares geométricos y ponerle los nombres con los que conocemos a la elipse, hipérbola y parábola, hasta llegar a Descartes cuyo estudio se basó en sus ecuaciones gracias al uso de nuevos sistemas de referencia, han sido una obsesión para los matemáticos que revisaban los trabajos anteriores para buscar nuevas formas de estudio, lo que les sirvió para descubrir nuevos conceptos (Boyer, 1987, y Kline, 1992).

Este interés por las cónicas no se mantiene en el currículum actual; apenas se estudian, salvo el caso de la circunferencia que aparece tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria, donde también contempla el estudio al menos de la parábola a partir de su ecuación cuadrática. Sí aparecen como contenidos en el currículum de Bachillerato, aunque como estos estudios están condicionados por la EBAU, su estudio estará supeditado a que los contenidos sean o no objeto de preguntas en dichas pruebas.

El presente trabajo no pretende cambiar el currículum, aunque eso no descarta que sea necesaria una revisión; lo único que pretende es destacar algunos aspectos de las cónicas algo olvidados, así como promover el uso de programas como GeoGebra como ayuda para poder afrontar en el aula nuevas propuestas o actividades como las expuestas a continuación. Estas incluyen distintas construcciones que pueden parecer alejadas de las matemáticas y más cercanas a otras asignaturas como el dibujo, pero nadie pueda negar el carácter interdisciplinar de las matemáticas.

En los ejemplos propuestos a continuación se expone cómo determinar elementos como los focos en la elipse e hipérbola, o el foco y la directriz en la parábola; en primer lugar, mediante operaciones y transformaciones en sus ecuaciones, y posteriormente, con distintas construcciones que complementan de manera gráfica dicho proceso.

Focos de una cónica a partir de su ecuación general

Una cónica tiene como ecuación general:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
$$\text{siendo } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

A partir de la misma y mediante transformaciones —un giro y una traslación— se puede obtener la expresión reducida y también determinar el tipo de cónica a la que representa.

El proceso que se desea describir intenta hallar las coordenadas de los focos de la cónica a partir de su ecuación general, realizando las transformaciones para obtener su expresión reducida, a partir de la cual resultará fácil determinar estas coordenadas, de manera que aplicando los mismos movimientos anteriores, pero en sentido contrario, se podrá llegar a la cónica inicial.

En este proceso recurriremos a GeoGebra para representar la cónica, así como para realizar el giro y la traslación para lograr que la cónica esté centrada en los ejes de coordenadas. Es evidente que GeoGebra ofrece los comandos necesarios para obtener directamente todos los elementos de la cónica, por lo que sin más que aplicarlos aparecerán los vértices, ejes, focos, así como la directriz en el caso de las parábolas. Estos comandos servirán para comprobar el proceso que ayudará a recordar algunos conceptos y procedimientos, a veces olvidados y poco utilizados en el aula.

Expondremos el procedimiento a partir de un ejemplo, tomando como cónica la definida por la ecuación siguiente:

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0.$$

Al representar esta expresión con GeoGebra (figura 1), observaremos que se trata de una elipse, hecho que también se podría obtener, como sabemos, analizando los coeficientes de la ecuación. Para ello, expresamos la ecuación anterior en forma matricial, para lo que consideramos los valores de los distintos coeficientes: $A=1$; $B=1/2$; $C=1$; $D=1$; $E=2$ y $F=-4$:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Determinamos los valores de los invariantes que son el determinante de los coeficientes, el determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$, y la suma de los coeficientes A y C.

El valor del determinante de los coeficientes es -6, mientras que $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$, y $A+C=2$.

Como el determinante de los coeficientes es distinto de cero y el segundo determinante es mayor que cero, se trata de una elipse. Al ser de signo distinto el determinante de los coeficientes y $A+C$, se trata de una elipse real.

A partir de los coeficientes de la ecuación general se determinará el ángulo a utilizar en el giro que hay que aplicar a la elipse como primer movimiento.

El ángulo de giro α está determinado por la expresión $\tan 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$. En la elipse del ejemplo $A=C=1$ y $B=1/2$, así que se tendrá que $\tan 2\alpha = \infty$, por lo que $2\alpha = \pm\pi/2$. Por tanto $\alpha = \pm\pi/4$.

Si aplicamos un giro en el sentido de las agujas del reloj, con respecto al origen y un ángulo igual a $\pi/4$ se obtendrá la elipse representada en la figura 2.

La expresión de la elipse se transforma aplicando el cambio de coordenadas determinado por el giro que se acaba de aplicar, en el que:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y &= x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \end{aligned}$$

Sustituyendo las coordenadas x e y en la ecuación general de la elipse y realizando las operaciones de simplificación se obtendrá la siguiente expresión para la cónica, en la que por comodidad y con un abuso de notación, mantenemos x e y para las coordenadas, en lugar de arrastrar x' e y':

$$3x^2 + y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Ecuación que se puede introducir en GeoGebra (figura 2) para comprobar que coincide con la elipse obtenida al aplicar el giro.

Para determinar el vector necesario para realizar la traslación que permita obtener su ecuación reducida, hay que completar las expresiones en x e y, como cuadrados perfectos:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6\sqrt{2}x &= 3\left(x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\right) - 6 = \\ &= 3\left(x+\sqrt{2}\right)^2 - 6 \\ y^2 + 2\sqrt{2}y &= \left(y^2 + 2\sqrt{2}y + 2\right) - 2 = \\ &= \left(y+\sqrt{2}\right)^2 - 2. \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación de la elipse, se tendrá:

$$3\left(x+\sqrt{2}\right)^2 - 6 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2 - 2 - 8 = 0$$
$$3\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2 - 16 = 0.$$

De la expresión anterior se deduce que el vector de la traslación que es necesario aplicar es $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

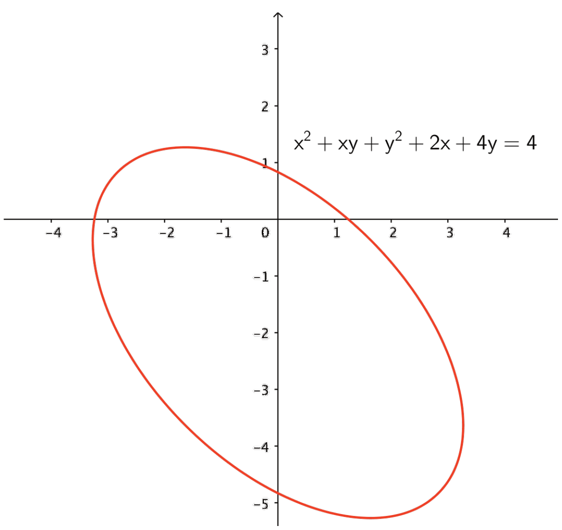

Figura 1. Elipse

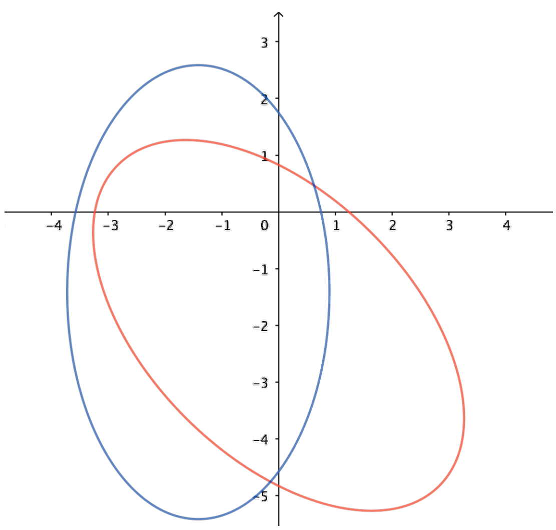

Figura 2. Rotación aplicada a la elipse

Una vez definido este vector en GeoGebra, bastará con aplicar la herramienta Traslación, a la elipse obtenida tras aplicar el giro, para conseguir su representación ahora ya centrada en el origen.

La ecuación de la nueva elipse será $3x^2 + y^2 = 16$, que se puede expresar como:

$$\frac{x^2}{16/3} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ecuación que también se puede comprobar que al representarla con GeoGebra corresponde a la elipse obtenida tras aplicar la traslación (figura 3).

A partir de la expresión anterior, se tienen los valores de los semiejes a y b, y por tanto se puede calcular el valor de la distancia focal que dará las coordenadas de los focos.

Se tiene que $a^2 = 16/3$ y $b^2 = 16$, de donde podemos deducir que $c^2 = 16 - 16/3 = 32/3$.

Por tanto, $c = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, así que las coordenadas de los focos son $F = \left(0, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$ y $F' = \left(0, -\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.

Se puede comprobar que estos valores coinciden con los obtenidos por GeoGebra utilizando el comando Foco, valores que devuelve de manera instantánea, sin que el usuario necesite aplicar ningún concepto matemático, más allá de conocer que la elipse tiene dos focos.

A continuación, para obtener los focos de la elipse original, bastará con realizar el proceso contrario, lo que supone aplicar una traslación según el vector $-\vec{v} = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y un giro cuyo ángulo sea $-\frac{\pi}{4}$.

Tomando las coordenadas del foco F, al aplicarle una traslación de vector $-\vec{v}$, el nuevo punto F_1 será:

$$\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{OF} - \vec{v} =$$
$$= \left(0, \tfrac{4\sqrt{6}}{3}\right) - \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}, \tfrac{4\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2}\right).$$

Con la misma operación se obtendrán las coordenadas del punto F_1', trasladando el punto F'.

Y, por último, solo queda aplicar el giro a los puntos anteriores para obtener las coordenadas de los focos de la elipse inicial.

El giro que se aplica es de $-\frac{\pi}{4}$, que determinará las coordenadas del punto F_2 a partir de:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

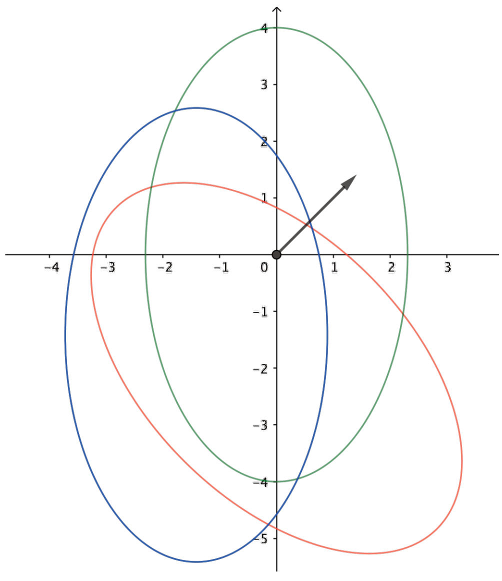

Figura 3. Elipse centrada en el origen

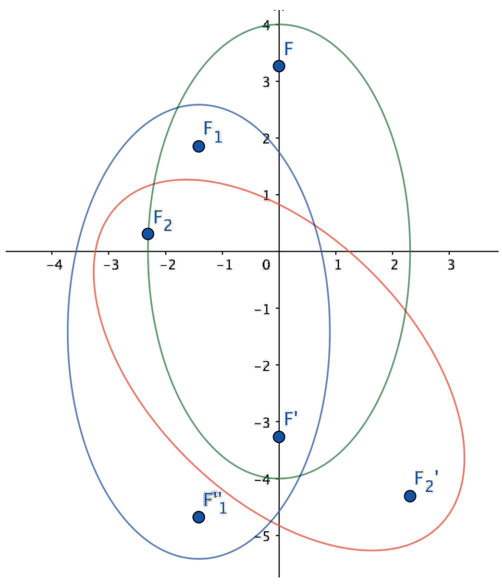

Figura 4. Focos de la elipse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \frac{4\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}-6}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas de uno de los focos de la elipse original son:

$$F_2 = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}-6}{3}\right).$$

De la misma forma se obtendrán las del otro foco.

Con este proceso y sobre todo con la ayuda de GeoGebra, el alumnado podrá observar las transformaciones que va aplicando a la elipse para llegar a la que corresponde a su ecuación reducida.

Es evidente que hay otros procesos que permiten obtener directamente los elementos de la cónica a partir de su ecuación general, realizando operaciones con los coeficientes, pero consideramos que con estos pasos que la mayoría conocemos, la ayuda de programas como GeoGebra facilita la visualización; además los comandos que ofrece servirán para comprobar los resultados.

Focos de la elipse

A continuación, se expone un método basado en el dibujo lineal que permite obtener los elementos de la elipse y, por tanto, también determinar sus focos.

Para ello, se dibuja una elipse utilizando la herramienta **Cónica por cinco puntos**, en la que se traza una cuerda cualquiera FG (figura 5).

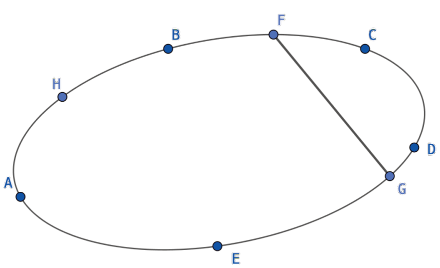

Figura 5. Elipse por cinco puntos

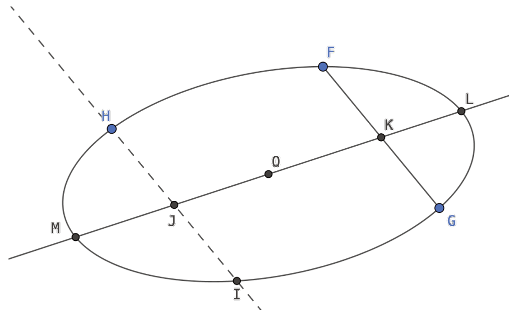

Figura 6. Centro de la elipse

Por otro punto cualquiera H de la elipse se traza una nueva cuerda paralela a la anterior FG. De ambas cuerdas se buscan los puntos medios, que determinan una nueva cuerda ML cuyo punto medio será el centro de la elipse (figura 6). Esta relación se debe a la propiedad descubierta por Apolonio sobre los diámetros conjugados que estableció que los puntos medios del conjunto de cuerdas paralelas a un diámetro de una elipse o una hipérbola están situados sobre un segundo diámetro que será conjugado con el primero. Probó que, dado un conjunto de cuerdas paralelas, sus puntos medios determinarán un segmento en la elipse o en la hipérbola que es un diámetro; por lo que una vez hallado el punto medio de ese diámetro, al trazar una recta paralela a las cuerdas anteriores, se obtendrá el diámetro conjugado.

Con centro en el punto O y radio OH, se traza una circunferencia, determinando el segmento HN, siendo N el punto de corte de la circunferencia con la elipse (figura 7).

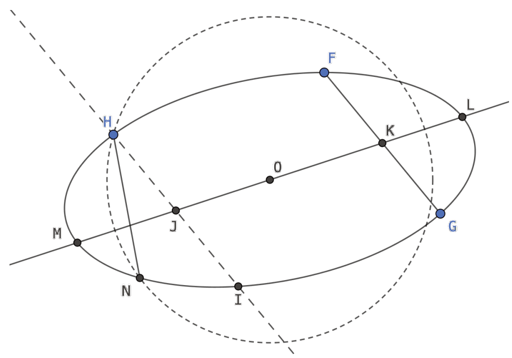

Figura 7

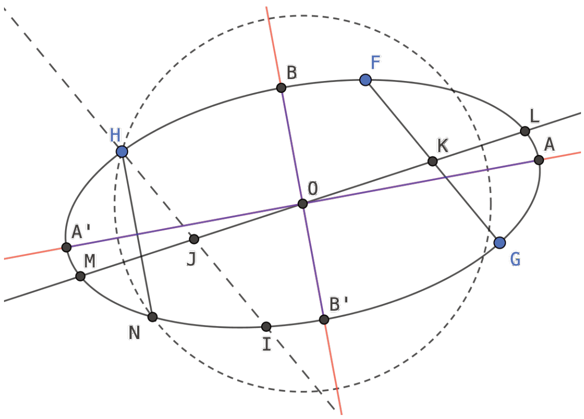

Figura 8. Ejes y vértices de la elipse

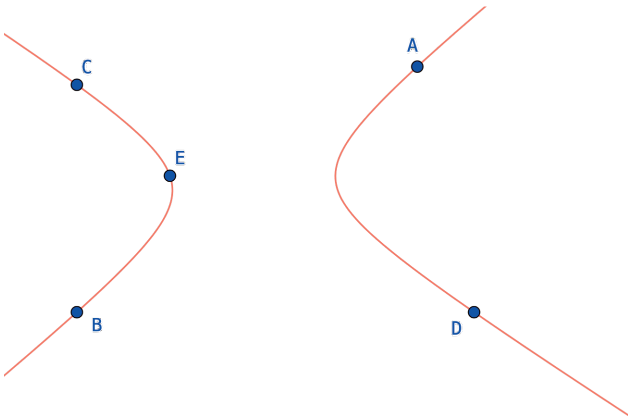

Figura 10. Hipérbola dados cinco puntos

La cuerda perpendicular a la cuerda *HN*, trazada por el centro *O* de la elipse será uno de los ejes de la cónica. Para obtener el otro eje bastara con trazar la perpendicular al eje anterior por el centro de la elipse (figura 8).

Para obtener los focos bastará con aplicar la definición de elipse —la elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante—, por lo que se traza una circunferencia de centro *B* (o *B*') y radio igual a *AA'*/2. Los puntos de corte con el eje principal serán los focos de la elipse (figura 9).

Focos de la hipérbola

Para la hipérbola el proceso a partir de la ecuación general es el mismo expuesto para la elipse, mientras que para obtener sus elementos de forma gráfica serán de gran ayuda las asíntotas.

A partir de una hipérbola dibujada en GeoGebra con la herramienta Cónica por cinco puntos, se podrán obtener las asíntotas utilizando el comando correspondiente (figura 10).

Una vez dibujadas las asíntotas con GeoGebra, el punto de intersección será el centro de la hipérbola.

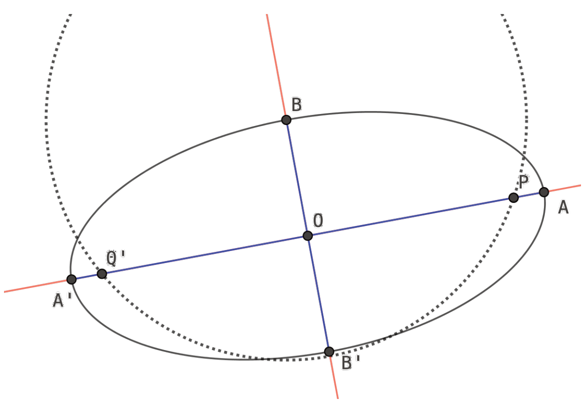

Figura 9. Focos de la elipse

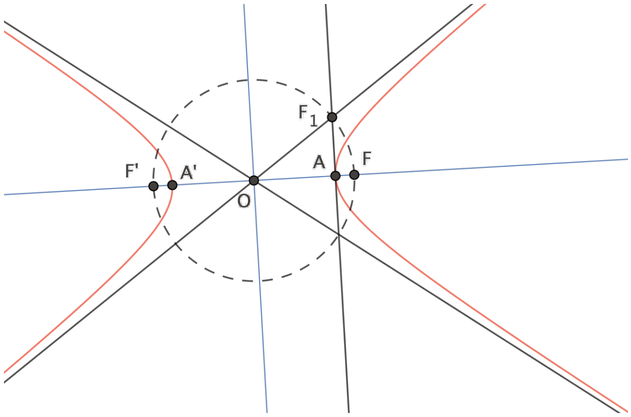

Figura 11. Asíntotas, centro y vértices de la hipérbola

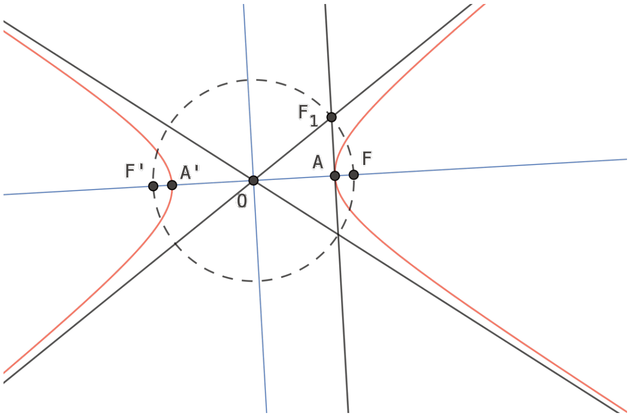

Figura 12. Focos de la hipérbola

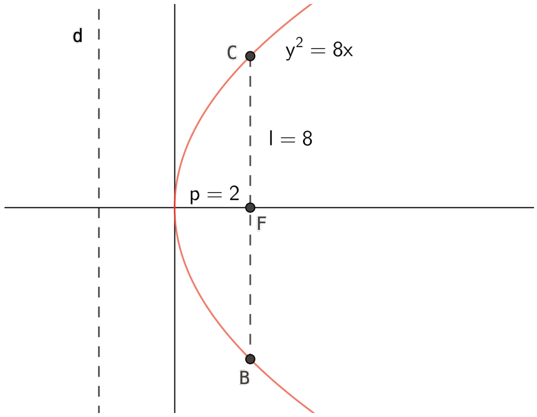

Figura 13. Lado recto en la parábola

Además, las asíntotas son simétricas respecto del eje real, por lo que los focos se encontrarán en la bisectriz del ángulo formado por ellas y los puntos de intersección de esta recta con la hipérbola serán los vértices (figura 11).

Para determinar los puntos correspondientes a los focos se traza la circunferencia principal que se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos a las tangentes de la hipérbola, también se puede definir como el punto medio de los segmentos que unen un foco, con la circunferencia focal del otro foco, y las mediatrices de dichos segmentos, son tangentes a la hipérbola.

La recta tangente en los vértices de la hipérbola es perpendicular al eje, por lo que servirá para encontrar los puntos por los que pasará la circunferencia principal, puntos que se obtienen como intersección con las asíntotas. Los puntos de corte de la circunferencia principal con el eje real serán los focos de la hipérbola (figura 12).

Foco de la parábola

Al igual que para las cónicas anteriores, en el caso de la parábola se puede aplicar un método similar a partir de su ecuación general para determinar sus elementos. Recordemos que la ecuación reducida de una parábola, tal y como Apolonio demostró, es de la forma $y^2=4px$, siendo $4p$ el valor del lado recto que corresponde a la longitud del segmento determinado por los puntos de intersección de la recta paralela a la directriz por el foco y p la distancia del foco al vértice se podría definir como cuatro veces la abscisa del foco.

En la figura 13 aparece representada la parábola cuya ecuación es $y^2=8x$, que se podría expresar como $y^2=4\cdot 2x$, lo que determina que $p=2$, siendo por tanto el lado recto igual a 8.

Cuando la ecuación de la parábola es de la forma $y=ax^2+bx+c$ o $x=ay^2+by+c$, bastará con completar el cuadrado del binomio para obtener una expresión similar a $y-k=a\cdot(x-h)^2$ o la equivalente cambiando x por y. A partir de la nueva expresión se podrán determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

Por ejemplo, para la parábola dada por la ecuación $x=y^2-4y+3$, se realiza la transformación siguiente:

$$x=y^2-4y+4-1$$
$$(y-2)^2=x+1.$$

De la expresión anterior se puede deducir que el vértice de la parábola se encuentra en el punto $(-1,2)$, y que $4p=1$, de donde $p=\frac{1}{4}$. Por tanto, el foco de la parábola será el punto $F=(-1+\frac{1}{4},2)=(-\frac{3}{4},2)$, y la directriz será la recta $x=-1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$, tal y como se puede observar en la figura 14.

En el desarrollo de los contenidos para el estudio de la parábola en Educación Secundaria apenas se hace referencia al foco y a la directriz, elementos de vital importancia para la definición de esta cónica, ya que en general se estudian solo a partir de su ecuación. Con ejemplos y propuestas similares a las anteriores el alumnado podrá conocer la importancia de estos elementos y las propiedades que tienen, que son la base de muchas de sus aplicaciones a la vida cotidiana, consiguiendo que el único ejemplo para las parábolas no se limite a la trayectoria de un proyectil.

Una importante propiedad de la parábola, que sirve de base para muchas aplicaciones, viene dada por la igualdad entre el ángulo formado por la recta tangente en un punto y la recta paralela al eje por ese punto, que es igual al ángulo formado por la recta tangente en dicho punto y el segmento que lo une con el foco (figura 15).

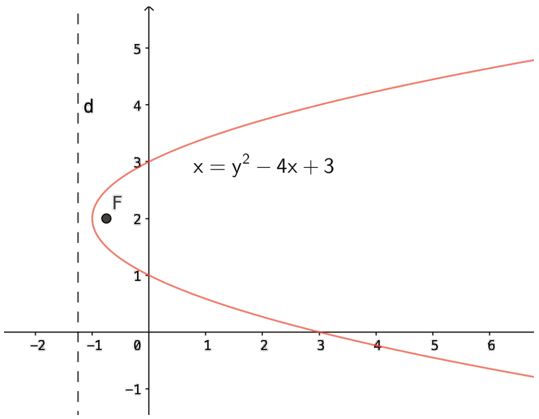

Figura 14. Foco y directriz

Esta relación hace que cualquier rayo paralelo al eje que llegue a la parábola se reflejará en dirección al foco, y al contrario, cualquier rayo que parta del foco, al chocar con la parábola saldrá paralelo al eje (figura 16).

Esta propiedad se aplica en la construcción de espejos parabólicos, en los que los rayos se reflejan pasando por el foco, lo que significa que se concentrarán en el ocular. También se utiliza en la construcción de las antenas parabólicas, aunque cada vez lo son menos ya que los datos y las imágenes, al menos en los domicilios particulares se reciben a través de fibra óptica en lugar de la parabólica.

La antena parabólica es en realidad un paraboloide circular que recibe los rayos que llegan paralelos al eje, lo que hará que al reflejarse se dirijan y por tanto, se concentren en el foco, lugar en el que se encuentra el receptor de la antena. Es lo mismo que ocurre en los paneles de energía solar que reciben los rayos del sol que llegan a la Tierra como rayos paralelos, y al reflejarse en la parábola se concentrarán en el foco (figura 17).

En los reflectores parabólicos, linternas o faros como los utilizados en los automóviles, el proceso se invierte, ya que la emisión se realiza desde la posición

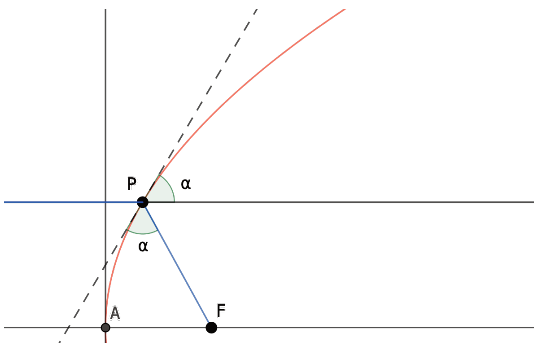

Figura 15. Ángulos determinados por la tangente en la parábola

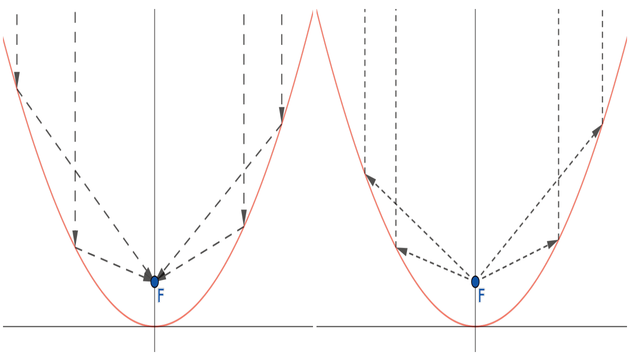

Figura 16. Rayos que llegan o salen del foco de la parábola

Figura 17. Paneles de una central solar

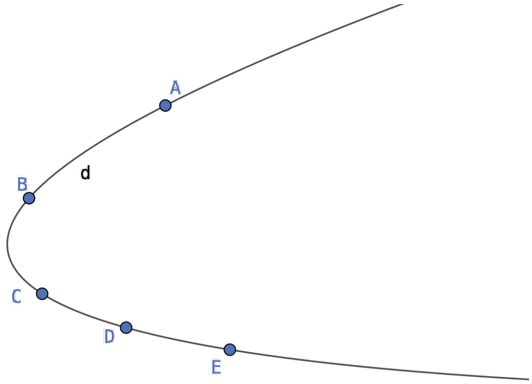

Figura 18. Parábola

del foco de la parábola que sirve de base para su construcción, de manera que los rayos de luz se reflejan paralelos al eje, lo que creará un haz de luz que iluminará con rayos paralelos.

Continuando con un desarrollo similar al expuesto anteriormente para la elipse y la hipérbola, se describe un método para obtener el foco y la directriz de manera gráfica, para lo que se recurrirá de nuevo a GeoGebra para dibujar una parábola, omitiendo los comandos que ofrece este software para obtener directamente estos elementos. Interesa conocer el método que se puede seguir, basado en el teorema de Lambert.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán que demostró la irracionalidad del número π, realizó aportaciones a la geometría hiperbólica y determinó un método para calcular las órbitas de los cometas, para lo que utilizó el teorema que lleva su nombre.

Este teorema establece que la circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres tangentes de una parábola pasa por el foco. Y como consecuencia de este teorema, también se tiene que el ortocentro de dicho triángulo está en la directriz de la parábola.

Por tanto, a partir de la gráfica de una parábola se podrán trazar cuatro tangentes, determinando la circunferencia circunscrita al triángulo que determinan tres de ellas y el ortocentro de dicho triángulo. Tomando otras tres tangentes se repite el proceso, obteniendo una nueva circunferencia y un nuevo punto como ortocentro de este triángulo. Como el foco de la parábola se encuentra en las dos circunferencias obtenidas, será el punto de intersección y los dos puntos que corresponden a los ortocentros obtenidos determinaran la directriz de la parábola.

Dibujamos una parábola utilizando el comando Cónica por cinco puntos (figura 18).

A continuación, se toman cuatro puntos F, G, H e I en la parábola. Para los puntos F, G e I se trazan las rectas tangentes a la parábola por dichos puntos, determinando un triángulo JKL, sobre él se traza la circunferencia circunscrita y se halla el ortocentro de ese triángulo, que aparece como O_1 en la figura 19.

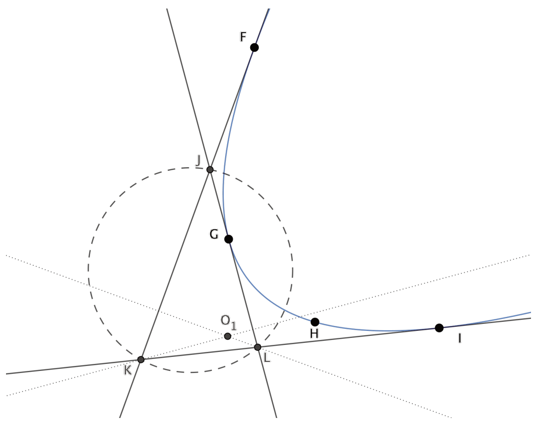

Figura 19. Tangentes a una parábola

Repitiendo el proceso para los puntos *F*, *G* y *H*, se obtendrá un nuevo triángulo *JMN*, una nueva circunferencia y el ortocentro O_2 del nuevo triángulo.

Una vez dibujadas las dos circunferencias, se tiene el foco de la parábola que será el punto *P*, el otro punto de intersección se ha descartado ya que se encuentra fuera de la parábola, y la recta que pasa por los dos ortocentros es la directriz, tal y como se puede observar en la figura 20.

Conclusión

En los ejemplos y construcciones realizados, con la inestimable ayuda de programas como GeoGebra, se intenta que el estudio de las cónicas no se haga solo a partir de su ecuación, recordando elementos como los focos cuya importancia es vital en su definición como lugares geométricos, facilitando la construcción de las distintas cónicas con ayuda de este software tan extendido entre el profesorado de matemáticas, aunque quizás menos utilizado de lo que creemos. De esta forma promovemos el uso de las TIC en ejemplos completos que ayuden a que las matemáticas se hagan de otra forma y cuando se habla de una rotación o de un giro a una cónica para llegar a su ecuación, el proceso se pueda visualizar, lo que hará más fácil su comprensión.

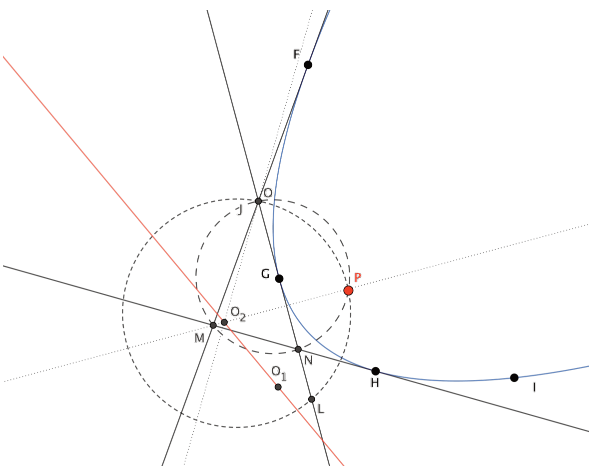

Figura 20. Aplicación del teorema de Lambert

Es evidente que GeoGebra ofrece los comandos necesarios para obtener todos los elementos de una cónica, lo cual no significa que no se les deba dedicar tiempo a describir el proceso para obtenerlos, pero también dispone de comando para derivar, integrar y sin embargo nadie niega que estos contenidos permanezcan en el currículum.

Negar el uso de las tecnologías porque devuelven resultados sin ninguna dificultad tiene poco sentido si pensamos que su presencia está en nuestro alrededor sobre todo en el mundo en el que el alumnado se mueve en su día a día. Utilizar la calculadora no significa que no se sepan realizar las operaciones de cálculo, lo mismo que el uso de este tipo de programas no implica que se puedan resolver todas las actividades sin saber matemáticas; ese es el argumento fácil de quien no quiere ver la tecnología en su aula, pero sin embargo no renuncia a ella en su vida diaria.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1987), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

Kline, M. (1992), *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*, Alianza Universidad, Madrid.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Instituto GeoGebra de Andalucía
<agustincarrillo@telefonica.net>

Manuel de León Rodríguez
Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC)
Real Academia de Ciencias
<mdeleon@icmat.es>