Completando cuadrados

Félix Martínez de la Rosa

SUMA+ núm. 95
pp. 27-32
Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2019 y aceptado en enero de 2020

Se muestran aspectos históricos y visuales del método de completar cuadrados, así como su relación con la división de polinomios y la envolvente de una familia de curvas.

Palabras clave: Historia, Baldosas, Visualización, División de polinomios, Envolvente.

Completing the square // Historical and visual aspects related to the method of completing squares are shown, and their relationship with the division of polynomials and the envelope of a family of curves.

Keywords: History, Tiles, Visualization, Polynomials division, Envelope.

En la novela de Luis Sepúlveda (1993: 70) *Un viejo que leía novelas de amor* se cuenta que el protagonista cuando viajó a El Dorado encontró en la biblioteca de la maestra un libro de geometría del que

> […] guardó una frase larga que soltaba en los momentos de mal humor: «La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo». Frase que más tarde causaba estupor entre los habitantes de El Idilio, y la recibían como un trabalenguas absurdo o una abjuración incontestable.

Me acuerdo de este pasaje, durante las clases de matemáticas de primer curso de la universidad, al hablar de las soluciones de la ecuación completa de segundo grado, $ax^2+bx+c=0$. La respuesta de los estudiantes es: «menos b más menos la raíz cuadrada de b al cuadrado menos cuatro a por c, partido por $2a$».

Los estudiantes aprenden todo tipo de recetas en sus clases de matemáticas, desde la enseñanza secundaria al bachillerato y la universidad. Es una manera rápida y cómoda que empleamos los profesores para transmitir el conocimiento. Además, permiten a los estudiantes resolver una amplia gama de problemas. Estas recetas cumplen su propósito y, si exceptuamos los casos que algunos podrían calificar de rebuscados, la mayoría de las veces funcionan. Pero siempre me he planteado si nuestra labor docente debe consistir solo en eso, teniendo en cuenta que las ideas y conceptos matemáticos son tan sutiles y ricos que una receta no puede englobar toda su complejidad.

El método de completar cuadrados es recordado por los estudiantes porque se usa para deducir las soluciones de la ecuación de segundo grado, además de otras cuestiones como hallar el vértice de una parábola o resolver ciertas integrales. Pero solo se le presta atención como recurso técnico. En la línea de trabajos como Moore (1978), Phelps y Edwards (2010) y Richardson y Bachman (2017), en este artículo se destacan algunos antecedentes históricos relacionados con el método y se analizan las posibilidades visuales que ofrece. Repensando y explorando las visualizaciones se obtienen nuevas ideas. Así por ejemplo, por medio de la división de polinomios, se conecta con el concepto de envolvente de una familia de curvas y se enuncia un resultado general.

Notas históricas y visualizaciones

La receta para resolver una ecuación de segundo grado es la manera en que los estudiantes de tercero de ESO aprenden la solución de la misma. Como nota histórica, por ejemplo en el texto de Colera y otros (2015), se cita al sabio árabe del siglo IX Al-Khwarizmi y su libro *Al-Jabr wal Muqabala*, de donde procede la palabra álgebra. Sin embargo, no se menciona que una de sus contribuciones fue una bonita manera de resolver dicha ecuación, que resulta muy instructiva y motivadora para los estudiantes a quienes se les imparte.

Como se describe en el artículo de Allaire y Bradley (2001), Al-Khwarizmi se planteó la siguiente pregunta: ¿Cuál es el cuadrado que combinado con diez de sus raíces da una suma total de 39? En el siglo IX, los matemáticos árabes no contemplaban números negativos, hasta que Al-Samaw en el siglo XII los concibió como un exceso (positivos) o una deficiencia (negativos). Si se sustrae un número deficiente (uno negativo como -2) de un número deficiente mayor (por ejemplo -5) queda la diferencia, deficiente. Por ejemplo, $-5-(-2)=-(5-2)$. En otro caso queda un exceso: $-2-(-5)=+(5-2)$, (Berggren, 2016: 134).

En la época de Al-Khwarizmi, una cantidad x se imaginaba a través de un objeto físico, por ejemplo un segmento de esa longitud, y x^2 se entendía como un cuadrado de ese área (de ahí el uso de la palabra cuadrado para nombrar la potencia dos), dando paso a demostraciones geométricas, que hoy en día podrían catalogarse como pruebas visuales. Por ejemplo la resolución de $x^2+10x=39$, consiste en calcular x para que se cumpla la igualdad entre las áreas de la figura 1.

Para lograrlo Al-Khwarizmi diseñó la siguiente estrategia: dibujó un cuadrado de lado x y le añadió a cada uno de ellos rectángulos de lados x y $5/2$. Por último completó el cuadrado con otros cuatro cuadrados de lado $5/2$ cuya suma de áreas es 25 (figura 2, izquierda). De aquí se deduce que si se suma 25 en ambos lados de la igualdad $x^2+10x=39$, se obtiene $(x+5)^2=64$. Así consiguió la solución $x=3$. Esta técnica geométrica, no sustituye a las técnicas algebraicas o simbólicas mucho más eficientes, pero motiva a los estudiantes y da sentido a la expresión *completar cuadrados*.

La imagen derecha de la figura 2 se basa en la misma idea pero utilizando solo dos rectángulos de lados x y 5. En general, para completar cuadrados en x^2+bx, se multiplica y divide por dos el coeficiente b de x. Sumando y restando $(b/2)^2$ se obtiene:

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

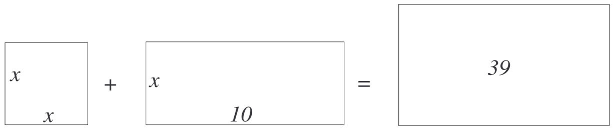

Figura 1

Este método se puede visualizar en la imagen de la parte derecha de la figura 2, sustituyendo 5 por $b/2$, como propone Moore (1978). También Mahmood (2014) da una prueba visual aunque empleando otra estrategia. Consiste en dibujar un cuadrado de lado $x+b/2$, trazar la diagonal hasta llegar al vértice del cuadrado de lado $b/2$, y recolocar los dos trapecios que se obtienen para formar un rectángulo (figura 3) con el que se visualiza la fórmula anterior.

Si se quiere utilizar el método de completar cuadrados se procura que el coeficiente de x^2 sea uno. Si no lo es, se saca factor común y se emplea la técnica anterior. Pero también se puede optar por no hacerlo: multiplicando por $4a$ y sumando y restando b^2 en $ax^2+bx+c=0$, se obtiene $(2ax+b)^2=b^2-4ac$. Esta técnica se conoce como *método hindú* desarrollado por el matemático indio del siglo VIII Sridhara (Renfro, 2007).

Baldosas, división de polinomios y envolvente

La técnica de completar cuadrados de Al-Khwarizmi, sirve de base en Phelps y Edwards (2010) y en Richardson y Bachman (2017), para desarrollar nuevas ideas sobre su enseñanza. Para ello se utilizan baldosas de áreas x^2, x y 1, como las que podemos observar en la figura 4.

Por ejemplo, para hacerlo en x^2+4x, se las sitúa de forma simétrica a la derecha y debajo del cuadrado de área x^2 (figura 5), visualizando que: $x^2+4x=(x+2)^2-4$.

En lo que sigue se verá que esta herramienta didáctica nos permite conectar con destacados conceptos matemáticos. Pero para ello se deben situar las baldosas de una manera no simétrica, como en las figuras 6 y 7.

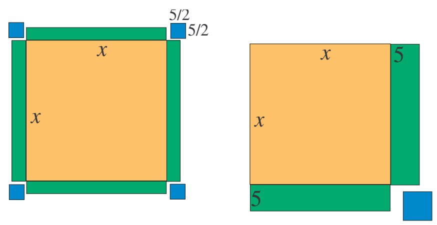

Figura 2

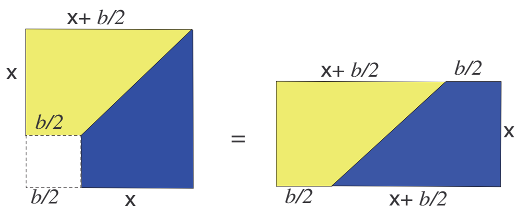

Figura 3

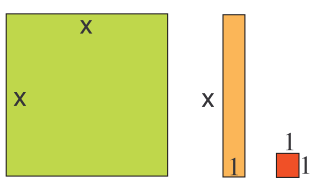

Figura 4

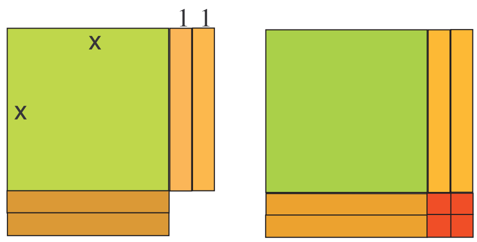

Figura 5

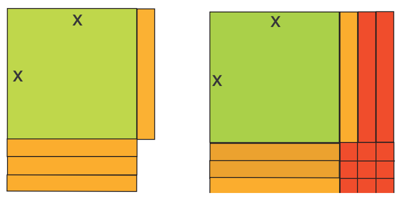

Figura 6

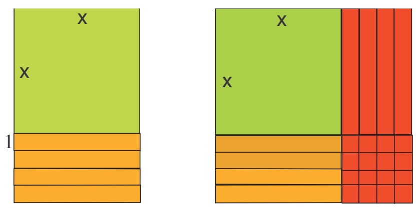

Figura 7

Estas dos imágenes ilustran dos maneras distintas de completar el cuadrado. También se observa que la posición asimétrica de las baldosas provoca la aparición de polinomios de grado uno, en lugar de números:

$$x^2+4x=(x+3)^2-(2x+9)=(x+4)^2-(4x+16).$$

En la figura 8 se aplica esta técnica para completar x^2+3x. En la tercera imagen se coloca una baldosa roja extra de área x para poder obtener otro cuadrado perfecto. Las tres imágenes permiten visualizar que:

$$\begin{aligned} x^2+3x &= (x+2)^2-(x+4)= \\ &= (x+3)^2-(3x+9)=(x+4)^2-(5x+16). \end{aligned}$$

En estas figuras se visualiza un hecho algebraico evidente: la diferencia entre un polinomio de grado dos, cuyo coeficiente de x^2 vale uno, y $(x+n)^2$ es o bien una constante o bien un polinomio de grado uno. Estos últimos se analizan en Phelps y Edwards, (2010) utilizando software matemático. La propuesta de este artículo es utilizar la división de polinomios para explorar las ideas que surgen de la visualización de las figuras, y llegar a enunciar un resultado general.

Los estudiantes conocen la división de polinomios, pero no la perciben más que como una aburrida herramienta, y no sacan de ella todo el partido que se podría. Por ejemplo, usándola en la siguiente función racional:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x^2+1}=x+3+\frac{x-2}{x^2+1}$$

la división permite apreciar de un vistazo que la recta $y=x+3$ es asíntota de la curva de ecuación $y=f(x)$, y que la corta en el punto $x=2$, que es donde se anula el resto. En relación con el tema de este artículo, al observar la figura 8 podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cuántos $(x+n)^2$ caben en x^2+3x?

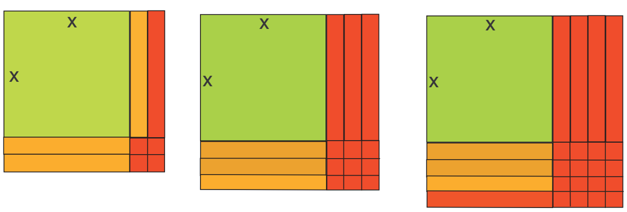

Figura 8

Tomemos el caso $n=2$, que corresponde a la primera imagen de la figura 8. La pregunta debe (¿puede?) ser respondida de dos maneras:

— *Respuesta visual*: en x^2+3x cabe un $(x+2)^2$ pero le falta $x+4$.
— *Respuesta algebraica*: al dividir x^2+3x entre $(x+2)^2$ el cociente es uno y el resto $-(x+4)$.

Las otras dos imágenes que podemos ver en la figura 8 corresponden a los valores de $n=3$ y $n=4$. Observemos que para $n=3$, al dividir x^2+3x entre $(x+3)^2$ no debe simplificarse por $x+3$ porque de hacerlo no lograríamos la relación entre el dividendo y el divisor: $x^2+3x=(x+3)^2-(3x+9)$.

Sean $p(x)=x^2+3x$ y $R(x)=-(3x+9)$. Se verifica que $p(x)-R(x)=(x+3)^2$, por tanto la recta $R(x)$ y la parábola $p(x)$ tienen un contacto doble en $x=-3$, y son tangentes en ese punto. El análisis del tipo de contacto entre una recta y una parábola permite explorar el concepto de tangencia sin tener que recurrir a la derivada.

Observando las figuras 6, 7 y 8, se intuye que la situación anterior se repite con otros cuadrados perfectos y que $p(x)$ es tangente a todos los restos obtenidos. Esto da pie a introducir el concepto de *envolvente* de una familia de curvas: una curva que es tangente a cada miembro de la familia en algún punto. Además, esta idea puede generalizarse a polinomios de grado mayor que uno a través del siguiente resultado:

> Sea $p(x)=a_0x^k+a_1^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x^1+a_k$, para $a_0\neq 0$ y $k\geq 2$. Se verifica que $p(x)$ es la envolvente de la familia de rectas que forman los restos del cociente entre $p(x)$ y $(x+n)^2$ para cada número real n. La tangencia se produce en los puntos $x=-n$.

Al efectuar la división entre el polinomio $p(x)$ y $(x+n)^2$ se obtiene que $p(x)=q(x)\cdot(x+n)^2+R(x)$ donde $q(x)$ es el cociente. El resto $R(x)$ es un polinomio de grado menor que dos con un contacto al menos de orden dos con $p(x)$, por lo que se produce la tangencia en $x=-n$.

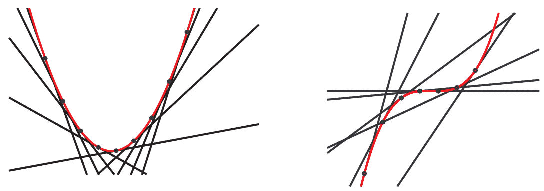

Figura 9

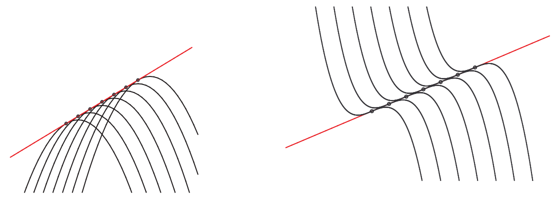

Figura 11

OBSERVACIONES

— Si $k=2$, el polinomio $p(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$ es la envolvente de las rectas, obtenidas con los restos mencionados en el enunciado, de ecuaciones $y=(a_1-2na_0)x+(a_2-a_0n^2)$. En la figura 9 pueden verse las gráficas de $p_1(x)=2x^2+5x+2$ y $p_2(x)=x^3-2x^2+x+5$ envolviendo a las correspondientes familias de rectas.

— El resultado puede generalizarse a otros casos. Por ejemplo, en el caso de un polinomio cúbico $p(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ donde $a_0\neq 0$, al hacer la división entre $p(x)$ y $(x+n)^3$ se obtiene $p(x)=a_0\cdot(x+n)^3+R(x)$. Aquí los restos son polinomios de grado menor que tres con un contacto de orden tres con $p(x)$, produciéndose la tangencia en los puntos $x=-n$. Sus ecuaciones son: $y=(a_1-3a_0n)x^2+(a_2-3a_0n^2)x+a_3-a_0n^3$. La figura 10 ilustra el caso del mismo polinomio $p(x)=x^3-2x^2+x+5$ como envolvente de una familia de parábolas.

— Si $p(x)=a_0x+a_1$ con $a_0\neq 0$, no se puede aplicar el resultado. No obstante $p(x)$ envuelve a la familia de curvas $p(x)-(x+n)^k$ con $k\geq 2$, al haber un contacto de orden superior a uno en $x=-n$. La figura 11 muestra a $p(x)=2x+5$ envolviendo a la familia $p(x)-(x+n)^k$ para $k=2, 3$. Es decir, una recta como envolvente de parábolas y cúbicas.

Existe una diferencia clara entre las dos imágenes de la figura 11: la de la derecha corresponde a $k=3$ y el contacto es más intenso. Si disponemos del concepto de punto de inflexión, podemos apreciar que el contacto de la recta con cada cúbica se produce en $x=-n$, que es el punto de inflexión de $p(x)-(x+n)^3$. Esto sucede porque la segunda derivada de $p(x)$ vale cero.

— Para $p(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$, $a_0\neq 0$, el resultado revela a esta parábola como envolvente de rectas, pero también puede serlo de otro tipo de curvas. Por ejemplo, de la familia $p(x)-(x+n)^k$, $k\geq 2$. La primera y tercera imagenes de la figura 12 muestran la gráfica de $p(x)=2x^2+5x-8$ junto con $p(x)-(x+n)^k$, $k=2, 3$. Es decir, una parábola como envolvente de parábolas y cúbicas. Si se varía el coeficiente de $(x+n)^k$, se obtienen resultados parecidos: en la imagen del centro vemos a $p(x)$ envolviendo a la familia $p(x)-3(x+n)^2$.

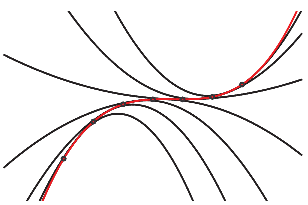

Figura 10

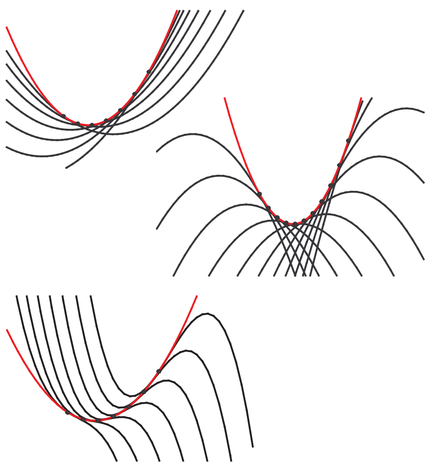

Figura 12

Resumen final

El método de completar cuadrados es una conocida técnica que se emplea en distintos momentos, en las asignaturas de matemáticas de la enseñanza media y bachillerato. Pero no es solo una herramienta útil. También es un instrumento didáctico destacado, porque podemos combinar la historia de las matemáticas y la visualización, aclarando el significado clásico del nombre del método y motivando e interesando a los estudiantes. Además, su relación con la división de polinomios da paso a exploraciones que permiten introducir el concepto de envolvente incluso en cursos tempranos, en los que aún no se dispone de la derivada.

Referencias bibliográficas

Allaire, P., y R. Bradley (2001), «Geometric approaches to quadratic equations from other times and places», *Mathematics Teacher* 94(4), 308-319.

Berggren, J. L. (2016), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer, Suiza.

Colera, J., O. González, I. Gaztelu y R. Colera (2015), *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, 3.º ESO*, Anaya, Salamanca.

Mahmood, M. (2014), «Proof without words: Completing the square via the difference of squares», *The College Mathematics Journal* 45(1), 21.

Moore, C. (1978), «Completing the square. A laboratory approach», *The Two-Year College Mathematics Journal* 9(4), 215-218.

Phelps, S., y M. Edwards (2010), «New life for an old topic: Completing the square using technology», *Mathematics Teacher* 104(3), 230-236.

Renfro, D. (2007), «The Hindu method for completing the square», *The Mathematical Gazette* 91(521), 198-201.

Richardson, J., y R. Bachman (2017), «A new take on an old square», *Mathematics Teacher* 110(9), 668-673.

Sepúlveda, L. (1993), *Un viejo que leía novelas de amor*, Tusquets, Barcelona.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>