suma+
Artículos
Noviembre 2015
80
pp. 9-19

Introducción de la modelización en la Educación Secundaria

Jose Benito Búa Ares
M.ª Teresa Fernández Blanco

El nuevo curriculum de ESO y Bachillerato menciona expresamente la modelización en el bloque de «Procesos, métodos y actitudes». La complejidad de la modelización matemática se añade a las complejidades inherentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de modo que su introducción en la enseñanza secundaria representa en un reto para el profesor. Los tres ejemplos que se proponen están basados en fenómenos físicos y pretenden ilustrar algunos de los retos que implica la modelización en la enseñanza.

Palabras clave: Experiencia de aula, Funciones, Modelización, Procesos, Bachillerato.

Introduction of modelling in secondary education

The new curriculum for Secondary School mentioned modelling explicitly into the block «Processes, methods and attitudes.» The complexity of mathematical modelling is added to the complexities of mathematics teaching and learning, so its introduction in secondary education represents a challenge for the teacher. The three functional modeling are proposed as examples that are based on physical phenomena and are intended to illustrate some of the challenges of modeling in teaching.

Keywords: Classroom experience, Functions, Modelling, Processes, Upper Secondary Education.

El borrador del curriculum de la ESO y el Bachillerato, en la descripción de los contenidos de Matemáticas, introduce un bloque denominado «Procesos, métodos y actitudes». Dicho bloque se describe como «común y transversal» y se indica que debe desarrollarse «simultáneamente al resto de bloques de contenido ya que es el eje fundamental de la asignatura» (MECD, 2014; Anexo I-Troncales, Matemáticas, 3). En la descripción de los contenidos asociados a «Procesos, métodos y actitudes», tanto en Educación Secundaria como en Bachillerato, se incluye la «matematización y modelización» (v., e.g., ibid., 32)

La influencia que han tenido y tienen los sucesivos informes PISA en los decretos que regulan la enseñanza matemática en España es indudable. Así, es probable que la mención expresa a la modelización matemática en el borrador del decreto no sea más que el reflejo de la mención expresa a la construcción de modelos que se realiza en el último informe PISA (2012).

De forma resumida, puede decirse que la modelización matemática representa un proceso en el que se vinculan y relacionan la realidad y las matemáticas. El problema fundamental al hablar de modelización en la enseñanza estriba en la complejidad de esas relaciones y la importancia que se concede a cada

Artículo recibido en *Suma* en octubre de 2014 y aceptado en agosto de 2015

uno de los elementos presentes, lo que convierte la modelización y la construcción de modelos vinculados a la realidad en un medio didáctico de gran complejidad. La experiencia de aula que presentamos pretende ilustrar, al menos en parte, esa complejidad.

La modelización matemática

Al tratar el tema de la modelización suele establecerse una diferencia entre modelo y modelización, identificando la modelización como el proceso que da lugar a un producto que toma la forma de modelo matemático (Blum y Niss, 1991, 39). Así, se puede describir la modelización como un triple en el que se hallan presentes la realidad, las matemáticas y las relaciones entre ambos mundos (Blum y Niss, 1991, 39).

La obtención del modelo matemático se describe mediante un esquema de tipo cíclico, por lo que es conocido como «ciclo de modelización». La importancia que se concede a cada uno de los elementos presentes, a los objetivos que se pretenden alcanzar mediante la modelización y a los medios que se usan en el proceso genera una variedad considerable de enfoques relativos a la modelización y, como consecuencia, a una gran variedad de ciclos de modelización. Incluimos uno de esos ciclos como ejemplo (figura 1).

El informe PISA 2012 incluye un esquema que describe el proceso de construcción de modelos matemáticos (figura 2, MECD, 2013, 10-11) y que coincide en sus aspectos básicos con el proceso de

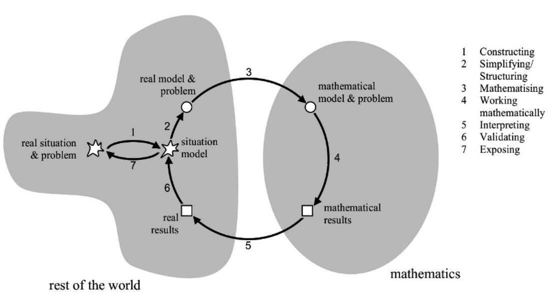

Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007, 225)

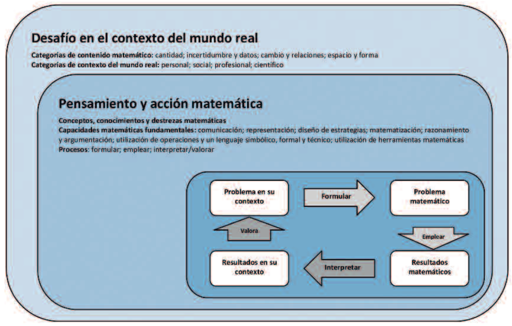

Figura 2. Ciclo de construcción de modelos matemáticos de PISA 2012

matematización de un problema del mundo real que describía en informes anteriores:

Se podría afirmar que el ciclo de PISA representa una versión simplificada del ciclo de Blum y Leiss. Los puntos en común son evidentes aunque también son indudables las diferencias. Por ejemplo, para Blum y Leiss, simplificar/estructurar y matematizar un problema real para generar un modelo y un problema matemático, representa dos procesos diferenciados. En el ciclo de PISA la obtención del problema matemático se realiza mediante un único paso, que consiste en «Formular» el problema matemático.

El borrador de curriculum de ESO y Bachillerato incluye, como contenido, la realización de la «Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos» (MECD, 2014, v., e.g., Anexo I-Troncales, 32). Los estándares de aprendizaje correspondientes a la modelización y construcción de modelos del borrador tiene su correspondencia con el esquema de PISA (figura 2), la descripción del mismo que se realiza en el informe PISA y con el marco teórico en el que ese esquema se inserta. Así, en las descripciones de dichos estándares de los cursos de 3..º y 4.º de ESO y de 1.º de Bachillerato (MECD, 2014, Anexo I-Troncales) se describen una serie de procesos vinculados al ciclo de construcción de modelos o matematización de PISA que el alumno debe ser «capaz de hacer».

Se menciona expresamente el «mundo real», el «mundo matemático» y las relaciones entre ambos mundos que se establecen en el proceso de modelización. El proceso incluye una matematización del problema original propuesto en contexto y el empleo de diversas *capacidades matemáticas* para obtener un modelo matemático, que será interpretado en el contexto original y valorado como solución al problema original contextualizado.

Descripción y análisis de las actividades

Las tres actividades que describiremos a continuación fueron propuestas a estudiantes de la asignatura Matemáticas I de 1.º de Bachillerato Científico Tecnológico, como una práctica voluntaria, a desarrollar fuera del horario lectivo, durante dos años consecutivos (Cursos 2010-2011 y 2011-2012) y en el segundo trimestre del curso académico (momento en que ya habían estudiado el bloque correspondiente a Análisis Matemático). Las actividades se realizaron una a continuación de la otra, con dos semanas de separación entre cada una de las tres modelizaciones. El interés de los alumnos en participar se puede calificar como alto, a pesar de que se les aclaró que deberían asistir alrededor de 8 tardes al Instituto (tabla 1). Los alumnos participantes los nombraremos en lo que sigue como A1,..., A15 y B1,…, B12.

Como paso previo a la propuesta de las actividades (dos semanas antes), los alumnos aprendieron a obtener la expresión analítica de una función de ajuste a partir del volcado de datos, provenientes de una tabla de datos, como puntos del plano

	n.º de alumnos del grupo	*n.º de alumnos que se apuntaron para realizar las actividades*
Curso 2010-2011	24	15 (62,5%)
Curso 2011-2012	20	12 (60%)

Tabla 1

cartesiano. Se realizó en dos casos diferentes: obtener una función que *pase* por todos los puntos (función afín) y un segundo caso en que no es posible que la función de ajuste *pase* por todos los puntos (función cuadrática). Se les explicó cómo usar el programa de Geometría Dinámica GeoGebra en todo aquello necesario para obtener una función de ajuste a partir de un conjunto de puntos visibles del plano mediante el uso de deslizadores. Esta parte fue justificada ante los alumnos como una forma de obtener la expresión analítica de una función a partir de una tabla de datos, proceso inverso al que realizan desde 3.º de ESO.

Se distinguen tres fases en el desarrollo de cada una de las tres propuestas (en adelante, *Muelle*, *Aceite y agua y Termómetro)*:

a) Recogida de datos en el laboratorio
b) Volcado de datos y obtención de la función de ajuste con un ordenador.
c) Preguntas sobre el modelo funcional que los alumnos han obtenido.

En la primera fase de la actividad, y para cada uno de los ejemplos seleccionados, se les indica explícitamente a los estudiantes que pueden tomar el número de datos que estimen necesarios y que pueden utilizar el procedimiento para ello que les parezca más adecuado.

Cada una de las actividades se enuncia en los siguientes términos:

Muelle: Vamos a estudiar cómo se estira un muelle al colgarle un peso.

Aceite y agua: Vamos a estudiar cómo varía el diámetro de una mancha de aceite sobre el agua al añadir aceite a la mancha.

Termómetro: Vamos a estudiar cómo varía la temperatura de un termómetro calentado previamente con el paso del tiempo.

La obtención de datos se realizó con los alumnos distribuidos en grupos de trabajo G1, G2,… (6 en el caso de *Muelle*, 5 en *Aceite y agua* y 4 en *Temperatura*). Cada grupo disponía de su propio material para obtener los datos: pesas, soporte para pesas, muelle (diferente en cada grupo de trabajo), una tina, detergente, aceite, jeringuillas de 2 ml, 5 ml y 10 ml, reglas, flexómetro, un termómetro de mercurio y un móvil con una aplicación de cronómetro instalada.

La segunda fase fue planteada en las tres modelizaciones de la forma siguiente:

Volcad los datos que has obtenido en el laboratorio en el ordenador e intenta obtener una función que ajuste los datos mediante el programa GeoGebra.

Cada grupo disponía de un ordenador y de una fotocopia que contenía las gráficas de las funciones fundamentales: afín, cuadrática, proporcionalidad inversa, raíz cuadrada ($f(x)=k\cdot\sqrt{x}$, $k\in\mathbb{R}^+$), exponencial de base mayor y menor que 1, logarítmicas de base mayor y menor que 1, seno, coseno y tangente. La función adecuada para el caso de *Muelle* (vinculada a la Ley de Hooke) es la función lineal $f(x)=ax$ o afín $f(x)=ax+b$, $k\in\mathbb{R}^+$, dependiendo de si se mide solo la longitud de estiramiento del muelle o la longitud total. En el caso de *Aceite y agua*, la función adecuada es $f(x)=k\cdot\sqrt{x}$, $k\in\mathbb{R}^+$, y en el caso de *Termómetro* la función es del tipo $f(x)=a+b\cdot c^x$, $a, b, c\in\mathbb{R}$ (vinculada a la Ley de Enfriamiento de Newton: $T(x)=T_{\text{ambiente}}+(T_{\text{inicial}}-T_{\text{ambiente}})\,e^{-kx}$, T, temperatura; x, tiempo; k, constante directamente relacionada con el calor específico).

En la tercera fase, las preguntas planteadas alrededor de los modelos obtenidos previamente fueron propuestas para que los alumnos las contestasen de forma individual y por escrito, exceptuando tres preguntas sobre el modelo de aceite y agua. Esas tres preguntas representaban un paso previo necesario para la aplicación del modelo funcional a una hipotética situación real, última fase de la modelización del comportamiento del aceite sobre el agua. A continuación reproducimos las preguntas planteadas a los alumnos. En el análisis de respuestas nos referiremos sólo a algunas de ellas.

Muelle

1) ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.
2) ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función?
3) En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando?
4) ¿Cuanto se alarga el muelle con 370 g de peso?
5) ¿Qué peso se corresponde con 21 cm de longitud del muelle?
6) ¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso en el soporte? Interpreta tu resultado.
7) Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado pero teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado.
8) Intenta deducir como conocer el peso colocado en el muelle si conoces la longitud del muelle.
9) ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento de un muelle al que se le ha colocado un peso?
10) Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?

Aceite y agua

1) La función que rige los datos es siempre de la forma $f(x)=k\cdot\sqrt{x}$, siendo k una constante, x la cantidad de aceite en ml y $f(x)$ el diámetro en mm. La k es diferente dependiendo de cada caso. En ese sentido, k varía. ¿Sería apropiado darle el nombre de «variable»? ¿Por qué? ¿Usarías otro nombre? ¿Por qué crees que k varía en cada caso estudiado?
2) Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el radio en lugar del diámetro?

3) Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro?
4) ¿Qué función obtendría si representase en el eje x el diámetro y en el eje y la cantidad de aceite? (O el área y la cantidad de aceite).

Aplicación del modelo «Aceite y Agua»

La fotografía que aparece en la figura 3, se corresponde con una fotografía vía satélite de un vertido que se produjo en la costa de Cambados.

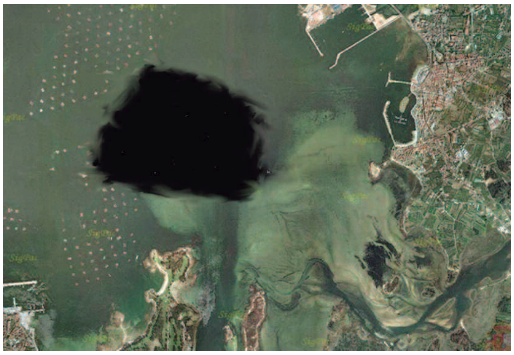

Figura 3. Hipotética imagen de vertido de petróleo (tamaño reducido respecto al original)

1) Determina la escala de la fotografía.
2) Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.
3) Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.

Para la determinación de la escala de la fotografía, los alumnos disponían de una fotocopia de una carta marina a escala 1:30000 de la misma zona de la costa (figura 4) y de material de dibujo técnico (regla, compás, escuadra, etc.).

Termómetro

Figura 4. Carta marina entregada a los alumnos y detalle de la misma

Se confeccionaron dos cuestionarios diferentes. Uno de ellos para el caso de que no consiguiesen obtener la función de ajuste (como ocurrió en 3 de los 4 grupos) y otro para el caso en que sí lo consiguiesen. Incluimos el cuestionario para el primer caso:

No has conseguido encontrar la función de ajuste de los datos.

1) Intenta explicar por qué crees que no lo has conseguido
2) ¿Crees que cambiando algo en el experimento se conseguiría obtener la función de ajuste? Si es así, ¿qué cambiarías e en qué forma crees que influiría en la búsqueda de la función de ajuste? Si crees que no se puede cambiar nada que mejore los resultados, intenta explicar el por qué.
3) ¿Cual crees que es el tipo de función que ajusta los datos? Intenta explicar por qué crees que es de ese tipo.
4) ¿Crees que el experimento que has realizado, u otro equivalente, ha sido realizado en el pasado?
5) ¿Crees que encontrar la función de ajuste de los datos que has recogido experimentalmente tiene alguna utilidad práctica? Si es así, indica cual.

Como se observa, cada modelización da lugar a un tipo de preguntas diferentes con unos objetivos diferentes. Por ejemplo, el cuestionario del muelle se centra en las variables funcionales, la función inversa y el uso e interpretación de la función obtenida en el contexto real original. El primer cuestionario del aceite se centra en la noción de parámetro y en el uso de las operaciones funcionales para obtener nuevas funciones, necesarias para la aplicación posterior del modelo en una hipotética situación real.

Desarrollo de las actividades

A continuación resaltamos algunas consideraciones generales sobre el desarrollo de las actividades:

— No se fijó límite de tiempo para la realización de las sucesivas fases.

— El tiempo que los diferentes grupos dedicaron a obtener la tabla de datos, en el caso de *Muelle,* no superó en ningún caso los 18 minutos. La duración en el caso de *Aceite y agua* varía en mayor grado y se encuentra entre los 30 minutos y los 55 minutos. En algunos grupos la duración es mayor por las dificultades a la hora de verter aceite sobre agua con una jeringuilla. Esa dificultad hace recomendable usar una pipeta graduada en vez de jeringuillas. En el caso de *Termómetro*, si excluimos el tiempo dedicado a calentar el termómetro, el tiempo fue de menos de 10 minutos.

— La duración de la fase de obtención de la función de ajuste con el ordenador no supera los 15 minutos en ningún grupo ni en ninguna de las dos primeras modelizaciones. En el caso de *Termómetro*, la duración es de 1 hora, momento en que la mayoría de los alumnos se dan por vencidos.

— El tiempo que dedicaron a responder las preguntas sobre el modelo obtenido es aproximadamente el mismo los dos años: 35 minutos en *Muelle*, 40 minutos en el caso de la primera pregunta y el debate de *Aceite y agua*, 70 minutos en el caso de la aplicación del modelo de *Aceite y agua* y 30 minutos en *Temperatura*.

— El ambiente de trabajo en todas las fases es relajado y no se observan pérdidas de tiempo significativas. En la fase de obtención de datos y la obtención de la función de ajuste todos los alumnos participan activamente, deciden de forma consensuada la distribución del trabajo y asumen que es importante realizar bien las mediciones y el ajuste.

— En todas las fases los alumnos preguntan al profesor en muy contadas ocasiones y casi siempre en relación con cuestiones meramente técnicas, lo que lleva a pensar que procuran realizar el trabajo de forma autónoma.

La actividad de los grupos G1 y G4 fue grabada en audio y vídeo en las dos primeras fases. También se realizaron grabaciones en audio y vídeo de la actividad de todos los alumnos durante el debate y de las sesiones dedicadas a responder preguntas sobre los modelos obtenidos. Al finalizar las actividades, los alumnos respondieron dos preguntas sobre su opinión acerca de las actividades y las fases en que se habían dividido estas.

Durante el curso 2012-2013 se realizaron siete entrevistas a los alumnos: seis a alumnos participantes el curso 2011-2012 (2.º de Bachillerato Científico-Tecnológico) y a un alumno participante el curso 2010-2011(primer curso de una Ingeniería).

Tabla de datos y función de ajuste

El número de datos y el nombre que asignan a cada columna de la tabla de datos que obtienen varía considerablemente: en el caso de *Muelle* el número de datos que obtiene cada grupo varía desde 9 hasta 32; en el caso del *Aceite y agua* entre 9 y 23 y en el caso de *Termómetro* entre 19 y 23. Los grupos describen en la primera fila de la tabla la magnitud que miden como x e y , *Peso, Longitud*, *cm*, *g*, etc.

En el caso de *Muelle*, el grupo G1 (figura 5) obtiene la ecuación de una recta determinada a partir de dos datos de su tabla y otro grupo (G5) modifica los parámetros a y b de la ecuación de una recta en el plano, $y=ax+b$. Los restantes grupos utilizan la expresión $f(x)=ax+b$. En el caso de *Aceite y agua* todos los grupos aportan como solución una función del tipo $f(x)=k\cdot\sqrt{x}$, con valores de k diferentes en cada grupo.

En *Temperatura*, solo un grupo estimó que había obtenido una función de ajuste (figura 6). Se han incluido dos imágenes con

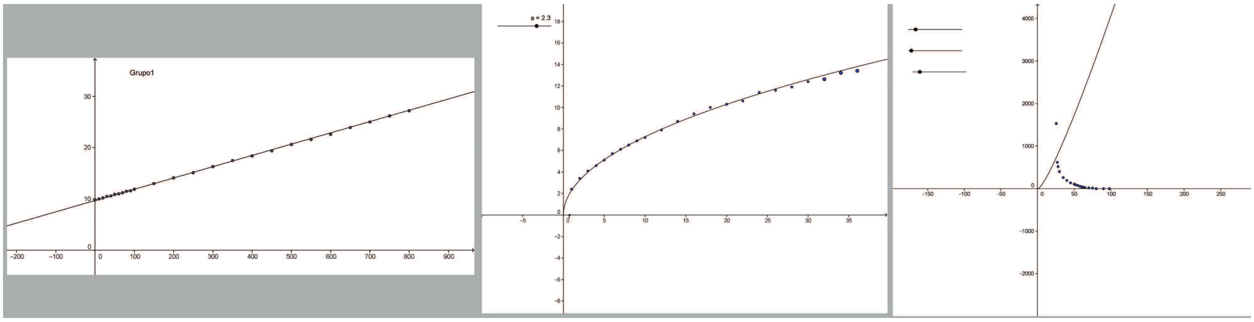

Figura 5. Datos y funciones obtenidas por el grupo G1 en las actividades

$$y=0{,}02x+9{,}7;\ f(x)=2{,}3\sqrt{x};\ f(x)=4{,}3\frac{\ln x}{\ln 0{,}05}(-6{,}14)x$$

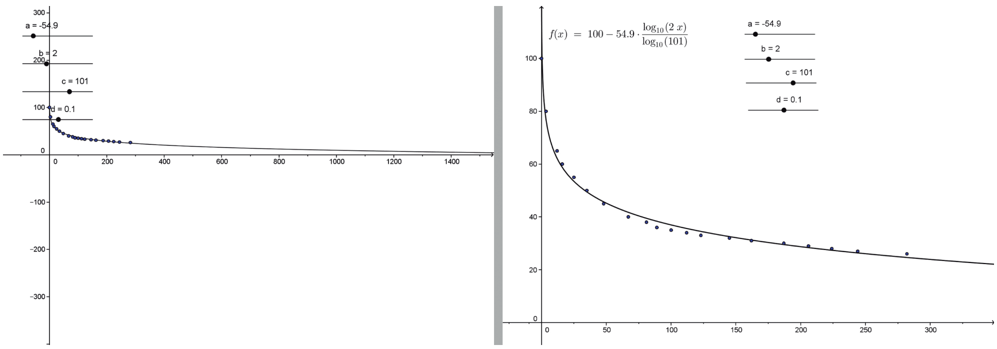

Figura 6. Función generada por el único grupo que obtuvo una función de ajuste (Gruvpo G4)

$$f(x)=100-54{,}9\cdot\frac{\log_{10}2x}{\log_{10}101}$$

la función obtenida por ese grupo. El gráfico de la izquierda representa la gráfica entregada por los alumnos sin modificación de ningún tipo. En el de la derecha se ha modificado la amplitud de ejes como forma de visualizar mejor la calidad del ajuste realizado por los alumnos.

En el caso de *Temperatura*, todos los grupos usan el mismo tipo de función en un momento u otro en sus intentos por obtener la función de ajuste: proporcionalidad inversa (en la forma en que aparecía en las fotocopias entregadas), potencial (de exponente positivo, negativo y fraccionario), exponencial y logarítmica. Para introducir logaritmos de base diferentes a *e* o *10*, utilizan la fórmula de cambio de base.

Respuestas a las preguntas sobre el modelo obtenido

De las preguntas 2 y 3 del cuestionario de *Muelle* se deduce que no identifican las variables ni los parámetros (tabla 2).

No identifican los parámetros	1	95,5 %
No identifican correctamente las variables	8	63,6 %

Tabla 2

Las respuestas sobre cuál es la variable dependiente e independiente presentan una ran variedad (figura 7).

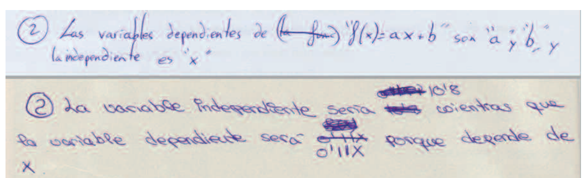

Figura 7. Respuestas de B12 y A10 a la segunda pregunta del cuestionario de *Muelle*

En la primera pregunta del cuestionario de *Aceite y agua*, nombran *k* como variable (52,2 %) o como constante (34,8 %)

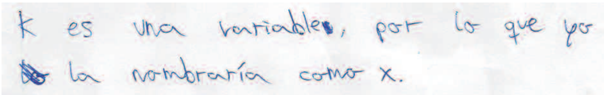

Figura 8. Respuesta de B5 a la primera pregunta de *Aceite y agua*

Han obtenido una función que permite obtener la longitud del muelle a partir del peso (masa en realidad) pero, en general, no usan la función en las preguntas 4 y 5 (tabla 3, figura 9):

Usa la función en una o las dos preguntas	27,2%
Usa una regla de tres en una o las dos preguntas	54,5%

Tabla 3

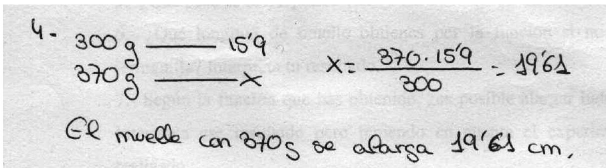

Figura 9. Respuesta de B11 a la preguntas 4 de *Muelle*

Identifican la recta con la proporcionalidad directa y la proporcionalidad directa con la tasa de variación media constante (figura 10). Esta afirmación se ve reforzada si recordamos que dos de los seis grupos realizan el ajuste mediante rectas en vez de mediante funciones.

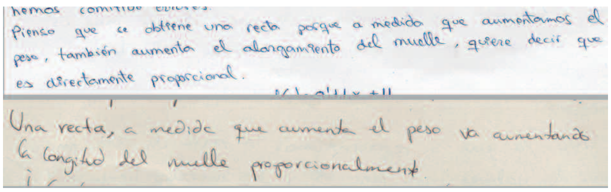

Figura 10. Respuesta de B2 y A4. Cuestionario de *Muelle*

Los estudiantes nombran la función como ecuación y las variables como «incógnitas»

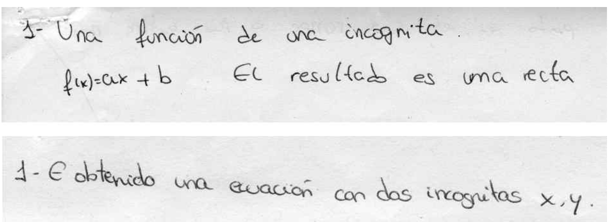

Figura 11. Respuesta de B3 y B11. Cuestionario de *Muelle*

No identifican inicialmente la función inversa, aunque realizan los cálculos asociados al cálculo de la función inversa con la expresión funcional: la expresión funcional es una «ecuación» que les permite «despejar» una «incógnita» (figura 12).

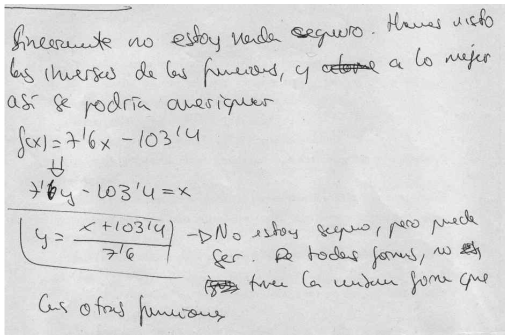

Figura 12. Respuesta de A1. Cuestionario de *Muelle*

En el debate de *Aceite y agua*, los estudiantes llegan a la conclusión de que la función solicitada en la cuarta pregunta es la inversa a través de su algoritmo de cálculo:

> *Alumna B1.* Bueno, lo que hice fue despejar la x [...] Y da eso. Y después cambiar la *x* por la *y* y la *y* por la *x*.
> *Alumno B8*. Pero es la inversa de una función. [Varios alumnos asienten y afirman también «es la inversa»].
> [...]
> *Alumno B8.* Es que es la inversa de una función. Esa es la inversa. Cuando miramos la composición. Cambiar la *x* por la *y* y despejar la *x*.

En el curso 2010-1011 debaten durante 6 minutos sobre si la expresión adecuada para el radio es

$$\frac{f(x)}{2} = 2{,}3\sqrt{x}$$

y sobre las consecuencias de dividir un solo miembro de la igualdad por un número. En el curso siguiente (2011-2012) debaten durante 10 minutos acerca de si la expresión del radio debía ser

$$\frac{2{,}1}{2}\sqrt{x};\ 2{,}1\frac{\sqrt{x}}{2} \text{ o } \frac{2{,}1\sqrt{x}}{2}$$

y la del área

$$\pi\left(\frac{2{,}1\sqrt{x}}{2}\right)^2 \text{ o } \pi\left(\frac{2{,}1}{2}\right)^2\sqrt{x}$$

Los alumnos tienen muchas dificultades en la aplicación del modelo *Aceite y agua* (tabla 4, figuras 13 14).

Determinan la escala	8	40%
Aproximan el área mediante un círculo	11	55%
Proporcionan un resultado aceptable del área contaminada (utilizan un cuadrilátero).	2	10%

Tabla 4

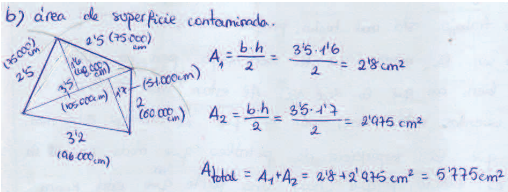

Figura 13. Resultado aceptable.
Cálculo de B1 del área

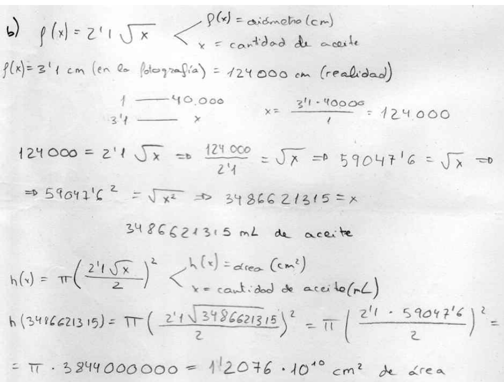

Figura 14. Cálculo de B2 del área

No recuerdan fórmulas básicas del cálculo de áreas, confunden nombres de figuras geométricas, utilizan mal las unidades de superficie o volumen, etc.

En ningún caso interpretan las dos imágenes (mapa y fotografía) como semejanzas, por lo que no usan la relación entre áreas y entre volúmenes de figuras semejantes.

En *Termómetro*, los alumnos llegan a usar en ocasiones la misma cantidad de parámetros y el mismo tipo de función, como por ejemplo los grupos G1 y G3 que usan la función $f(x) = a \cdot \log_b(x) \cdot c \cdot x$

Como solución al problema de no encontrar una función adecuada, algunos alumnos proponen modificar la realidad para que se ajuste mejor a la función que creen que es la adecuada. Así, un 23,5 % propone realizar la experiencia a una temperatura ambiente de 0° o menos (figura 15).

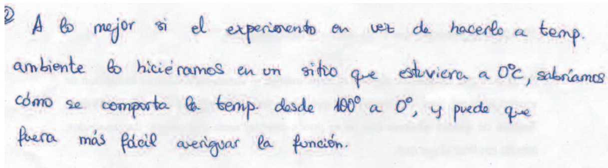

Figura 15. Respuesta de B1

Respecto a su opinión sobre las actividades, los estudiantes destacan especialmente la obtención de datos en el laboratorio (62,5 %). También destacan el debate (41,7 %), los cuestionarios y, en menor grado, el uso de ordenador. La mayoría resalta la aplicación del modelo *Aceite y agua* (83.3%) como la actividad que más les gustó. A pesar de sus valoraciones positivas sobre la experiencia, los alumnos entrevistados no consideran que la realización de este tipo de actividades sea *dar clase de matemáticas*, que identifican con el aprendizaje de algoritmos:

> *Alumna B3.* […] hacer un problema es hallar la solución y si es una ecuación pues lo mismo. Pero aquí es hallar datos para después tú hallar otra cosa. […] En la clase te los dan ya, no tienes que hacerlos tú.
> […]
> *Alumna B3.* Hombre, en matemáticas cuando das la clase pues básicamente es hacer ejercicios y aprenderte lo que tienes que saber. Esto es una cosa aparte que te ayuda pero no tiene que ver con la clase […]

Conclusiones

El ejemplo que hemos expuesto intenta ilustrar que «usar, elaborar o construir modelos matemáticos sencillos» (MECD, 2014) de forma que se obtiene un *resultado matemático* (figuras 1 y 2), no implica necesariamente matematizar y trabajar matemáticamente. Así, «Ser capaz de hacer»[1] o «saber hacer» un modelo matemático no implica necesariamente el «saber» asociado a ese «saber hacer»:

> Se proponen nuevos enfoques en el aprendizaje y evaluación, no dirigidos a la cantidad de lo memorizado sino a aquello que el alumno asimila y es capaz de hacer, sobre todo por lo que respecta a las competencias básicas: comunicación lingüística, y competencias STEM o en matemáticas, ciencia y tecnología e ingeniería, que se consideran prioritarias de cara al desarrollo de los alumnos y a su capacidad de desenvolverse en el mundo del conocimiento y la tecnología [...].

El problema fundamental se encuentra en que es posible, como ocurre con los tres casos que hemos expuesto, obtener o «saber hacer» modelos matemáticos asociados a situaciones extramatemáticas a través del uso puramente técnico de destrezas aprendidas previamente (como ocurre en las dos primeras fases). Hasta ese momento de la modelización, las matemáticas no juegan, en realidad, ningún papel relevante. El modelo como producto es obtenido sin que se realice de forma estricta un proceso de modelización matemática pues las matemáticas asociadas al proceso (los conceptos y nociones básicos relativos a las funciones) no son usadas en realidad en la construcción o generación del modelo matemático.

La construcción de modelos representa dificultades considerables inherentes al proceso de modelización. A esas dificultades se añade la posibilidad de múltiples enfoques y objetivos con consecuencias acordes con esos enfoques y objetivos. El elemento central de debate reside, a nuestro entender, en que la decisión de si el modelo obtenido cumple o no con los objetivos asignados inicialmente depende de qué objetivos se hayan fijado y de la asunción plena de esos objetivos y sus consecuencias. Por ejemplo, si la prioridad es el uso pragmático de las matemáticas, la obtención de un modelo matemático eficiente al ser aplicado en la situación real será en sí mismo el objetivo fundamental que, en nuestro caso, se alcanzaría al término de la 2.ª fase. Bajo esa perspectiva, los casos expuestos consisten en modelizaciones *reducidas* a obtener datos experimentales y el uso técnico de un programa informático, lo que proporciona directamente un modelo matemático funcional eficiente. Dilucidar si se han llevado realmente a cabo los procesos del ciclo de modelización representará un objetivo secundario o simplemente no representará un objetivo. Por el contrario, si el objetivo fundamental se centra en los procesos que tienen lugar durante la modelización, la obtención de un modelo que pueda ser usado de forma exitosa para responder preguntas que plantea el problema o situación real original contextualizada pasará a ser una cuestión secundaria. La prioridad se establecerá en el uso de conocimientos, conceptos y nociones matemáticas que implica el modelo que se construirá o se ha construido (tercera fase).

Evidentemente, entre ambas opciones se podrían insertar multitud de opciones, todas ellas justificables en función de los objetivos marcados para la modelización matemática en la enseñanza. Por ejemplo, la mención a la STEM[2] (Science-Technology-Engineering- Mathematics) que se realiza en el resumen del real decreto de la página web del MECD, no hace otra cosa que complicar aún más la situación. Bajo una perspectiva vinculada a un enfoque de enseñanza de las ciencias integrada como la STEM, el modelo matemático obtenido abre la puerta a la introducción o uso de conocimientos, conceptos y nociones asociados a otras ciencias. Por ejemplo, en el caso del muelle: la diferencia entre masa y peso, la constante de elasticidad de un muelle, la Ley de Hooke, la propuesta de la construcción a los alumnos de un dinamómetro u otro mecanismo que se base en las propiedades de un muelle, etc. Bajo esa perspectiva, las matemáticas representan una herramienta que permite obtener un modelo matemático que posibilite un uso *útil* o percibido como útil tanto de las matemáticas como de otras ciencias. Tiene sentido estudiar matemáticas porque son útiles proporcionando modelos matemáticos a otras ciencias, lo que permite introducir leyes y constantes extramatemáticas.

Dicho de otro modo, la modelización matemática no escapa de la discusión sobre *por qué*, *qué* y *cómo* enseñar matemáticas. Quizá, de hecho, se hace más evidente esa discusión en el caso de la modelización matemática.

Referencias bibliogáficas

Blum, W., y M. Niss (1991), «Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues mathematics instruction», *Educational studies in mathematics*, n.º 22, 37-68

Blum, W., y D Leiss (2007), «How do students and teachers deal with mathematical modelling problems?», en C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S. Khan, *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, Horwood Publishing, Chichester, 222-231.

MECD (2013), *Marco y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*. [Traducción al español de la publicación original de la OCDE: *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.*]

MECD (2014). *Proyecto de real decreto por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*
<http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/cerrados/2013/curriculo-basico.html>

Jose Benito Búa Ares
IES Sánchez Cantón (Pontevedra)
<bua@edu.xunta.es>

Mª Teresa Fernández Blanco
Facultad de Ciencias de la Educación.
Depto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática.
Universidad de Santiago de Compostela.
<teref.blanco@usc.es>

1 La mención a «ser capaz de hacer» se incluye en el resumen del proyecto del real decreto que el MECD hace en su página web (19/08/2014).MECD(2014)

2 El enfoque STEM que menciona y asume el Ministerio proviene de las recomendaciones de la UE, preocupada por la falta de titulados en ciencias e ingenierías en la UE. Para más información puede consultarse el informe Rocard y la información sobre la STEM y el IBL (Inquiry Based Learning) del portal Schoolnet:
<http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf>
<http://www.eun.org/focus-areas/stem>