suma+
Artículos
Julio 2015
79
pp. 35-46

# Esquemas conceptuales de los estudiantes en relación con algunas características de las funciones

Félix Martínez de la Rosa

Los estudiantes que ingresan en la Universidad han interiorizado una serie de esquemas conceptuales que pueden ocasionar errores de concepto que interfieren con el adecuado aprendizaje de nuevos conocimientos. Las enseñanzas que reciben a lo largo de los cursos previos a la Universidad y los libros que utilizan, tienen una gran influencia en la formación de esos esquemas. En este artículo se comparan los contenidos de los libros de bachillerato con los textos universitarios, en relación con los esquemas conceptuales que se han detectado acerca de los extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión. También se dan propuestas para facilitar la representación gráfica de funciones.

*Palabras clave:* Esquema conceptual, Puntos extremos, Concavidad, Convexidad, Puntos de inflexión, Multiplicidad.

**Concept images of students in relation to some characteristics of the functions**

Students entering the university have interiorized a set of concept images that can cause misconceptions that interfere with proper learning new knowledge. The lessons imparted throughout the pre-college and books that use, have a great influence on the formation of these concept images. In this paper, the content of school books with college texts are compared in relation to the concept images about local extremes, concavity and inflection points. There are also proposals to facilitate the graphical representation of functions.

*Key words:* Concept image, Extreme points, Concavity, Convexity, Inflection points, Multiplicity.

La comprensión y el aprendizaje del cálculo en los cursos de la enseñanza media ocasiona muchas dificultades para los estudiantes, y es un trabajo arduo para los profesores. Una parte destacada de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas se inscribe en la denominada teoría constructivista, que sostiene que el conocimiento matemático es reconstruido por cada individuo y es una manifestación de sus experiencias personales que provienen tanto de su mundo cotidiano como de la experiencia escolar (Wheatley (1991)).

El aprendizaje matemático es un proceso constructivo que requiere una actividad cognitiva individual y que un profesor no puede controlar como si se tratase de un fenómeno físico. Esto contrasta con la idea de que un estudiante es un receptor pasivo de conocimientos y que los errores de concepto pueden suprimirse con una explicación clara y sin riesgo de que un conocimiento matemático llegue a ser modificado mientras es transmitido (Moreno-Armella y Waldeg (1993)). Es necesario que el profesor conozca las ideas previas de los alumnos y provoque en ellos una reestructuración de las mismas, que incluso puede causar un conflicto cognitivo entre lo que saben y las nuevas ideas que se inculcan, de manera que puedan ir construyendo nuevos es-



Artículo recibido en *Suma* en ****** de 2012 y aceptado en **** de 2013

quemas conceptuales que les permitan evolucionar en su comprensión de los conceptos.

Con referencia a las ideas constructivistas sobre la creación de conocimientos matemáticos, el término «esquema conceptual» (*concept image*) (Tall y Vinner, (1981)) se utiliza para describir la estructura cognitiva completa (incluyendo todas las imágenes mentales, propiedades y procesos relacionados) que un individuo asocia a un concepto. Se construye a lo largo de los años, mediante experiencias de todo tipo, cambiando cuando el individuo se encuentra con nuevos estímulos y hechos.

Cuando se propone a un estudiante una tarea en relación con un concepto matemático el profesor puede suponer que la definición es activada; sin embargo, esa no es la situación que se da en la práctica: lo más frecuente es que el estudiante ignore la definición y responda de acuerdo a alguna parte de su «esquema conceptual» (una imagen, una fórmula, etc.) la cual no es necesariamente representativa de toda su estructura cognitiva asociada al concepto. A veces esos esquemas contienen ideas imprecisas o equivocadas que dan lugar a errores de concepto. Estos distorsionan el proceso de enseñanza y aprendizaje, e impiden la asimilación correcta de los nuevos conceptos que se edifican sobre los antiguos. En la literatura se ofrecen experiencias, (Bezuindenhout, (1996), Hähkiöniemi (2006) o Sierpinska (1992)) que muestran que los estudiantes pueden llegar a adquirir habilidades para resolver problemas, aunque tengan ideas equivocadas y errores de concepto.

lo más frecuente es que el estudiante ignore la definición y responda de acuerdo a alguna parte de su «esquema conceptual»

Los textos de Matemáticas son básicos para la enseñanza. En la ESO y el bachillerato, los estudiantes disponen de textos recomendados por el centro y los utilizan para el estudio de sus asignaturas, y los profesores se basan en ellos para la preparación de sus clases. Por esto, sus contenidos son los que el profesor suele transmitir a los estudiantes, y su influencia en la formación de los esquemas conceptuales es muy importante. Analizar la forma en que los textos introducen los conceptos permite observar ciertas carencias que después se reflejan en esquemas inadecuados.

Por ejemplo en Kajander y Lovric (2009) se analiza la forma en que los libros de texto introducen la recta tangente: el empleo de una terminología coloquial, la motivación a través de imágenes inadecuadas, la excesiva simplificación o la omisión de casos especiales, propicia que los estudiantes formen esquemas conceptuales erróneos. Sobre los que presentan los estudiantes que ingresan en la Universidad, en Martínez y Sáez (2014) se analizan aquellos que tienen que ver con los sistemas de ecuaciones y su relación con la forma en que se exponen en los textos de bachillerato. En Rivera y Ponce (2012) se analizan las gráficas que se utilizan como modelos en los textos de Cálculo para visualizar los extremos de una función y los criterios para obtenerlos. Cuando los estudiantes empiezan a estudiar las derivadas y sus aplicaciones a las funciones, les falta madurez para comprender las pruebas formales. Por esto en la enseñanza media se debe apostar por gráficas que estén diseñadas para visualizar e ilustrar claramente las ideas que se desean transmitir. Pero se corre el riesgo de que una excesiva simplificación pueda ocasionar esquemas conceptuales defectuosos que lastren el aprendizaje de la materia.

En relación con los extremos relativos, la concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión, en este artículo se muestran los esquemas conceptuales que se han detectado en los estudiantes que ingresan en la Universidad, los errores de concepto a que dan lugar, y cómo se pueden subsanar. Se analiza la influencia que tienen los textos de bachillerato en la formación de esos esquemas, mostrando la forma en la que cuatro libros de conocidas editoriales (Anaya, Editex, Guadiel y Santillana) introducen esos conceptos, comparándola con la manera en que lo hacen los libros de Cálculo universitario.

Los esquemas conceptuales que se describen acerca de la localización de extremos relativos y puntos de inflexión, se basan en la anulación de una derivada y la evaluación en la siguiente de los puntos obtenidos. Como consecuencia, se olvidan otras técnicas destacadas que en muchos casos son más útiles y requieren menos cálculos. Aquí se propone aprovechar la multiplicidad de las raíces para esbozar las gráficas de funciones polinómicas, y confeccionar tablas de signos de otras muchas con un número limitado de operaciones, lo que previene la aparición de errores de tipo operativo.

## Extremos relativos

Un extremo relativo de una función es un punto donde, en un entorno, la función alcanza el mayor o menor valor. Esta idea está incorporada al esquema conceptual con el que los alumnos ingresan en la Universidad: imaginan un lugar en el que la gráfica presenta una ligera elevación o depresión.

En tres de los libros de segundo de bachillerato que se han consultado para hacer este artículo (González y otros, (2009), 289, Colera y Oliveira (2009), 284 y Biosca y otros (2003), 155), el concepto de extremo se define como se ha expresado antes mientras que en Escoredo y otros (2009), 253, se dice que un máximo relativo se produce en un punto donde la función pasa de creciente a decreciente (mínimo en caso contrario).

En ninguno de estos libros se ofrece la imagen de una función que alcance un máximo o mínimo en un punto donde no es derivable: el extremo siempre se alcanza en un punto donde la tangente a la gráfica es horizontal, y esto causa en los estudiantes una idea falsa del concepto.

En los textos universitarios de Cálculo, el tema se desarrolla de forma unánime. Se explica que puede haber extremos en puntos donde la función es continua pero no derivable, y en el caso de funciones derivables todos destacan el criterio de la primera derivada (Larson y otros (1999), 196), (Edwards y Penney (1996), 210) o (Stewart (1994), 201):

> *Criterio de la primera derivada:* Sea $f$ una función continua en $c$ y derivable en un intervalo abierto $I$ que contiene a $c$, salvo quizás en $c$.
> 1) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $c$, entonces $f$ tiene un máximo local en $c$.
> 2) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $c$, entonces $f$ tiene un mínimo local en $c$.
> 3) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de $c$, entonces $f$ no tiene extremo en c.

Este resultado identifica de forma inequívoca a los extremos relativos y, junto con la descomposición en factores, es especialmente útil para las funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas, que se estudian con mucho detalle en el bachillerato. Para el caso de problemas en los que el análisis del signo sea complicado, en un capítulo posterior, se explica el criterio de la segunda derivada, que no es tan efectivo como el anterior al no ser concluyente si la derivada segunda vale cero (Larson y otros (1999), 219), (Edwards y Penney (1996), 230) o (Stewart (1994), 207):

> *Criterio de la segunda derivada*: Sea $f$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a $c$ y tal que $f'(c)=0$.
> 1) Si $f''(c)>0$, entonces $f$ tiene un mínimo local en c.
> 2) Si $f''(c)<0$, entonces $f$ tiene un máximo local en $c$.

La forma unificada en la que el tema se expone en estos libros no tiene nada que ver con lo que ocurre en los libros de bachillerato.

En Biosca y otros (2003), 155, la primera opción es el criterio de la segunda derivada. Dos páginas después y dentro de un ejemplo donde se analiza el crecimiento de una función, se dice: «observa que el estudio de los intervalos de monotonía de una función nos permite determinar también sus extremos locales». Es decir, el criterio de la primera derivada se da como una nota en un ejemplo.

En Escoredo y otros (2009), 255, se da el criterio de la primera derivada, y se aplica a una función polinómica para la que se construye una tabla de signos de su derivada. En la siguiente página, se formula el criterio de la segunda derivada en un destacado, y se aplica a una función racional: parece deducirse que para funciones no polinómicas debe aplicarse este segundo criterio.

En González y otros (2009), 289, se dice que la determinación de extremos relativos es muy sencillo para funciones dos veces derivable, y para ello, se recurre directamente el criterio de la segunda derivada.

En Colera y Oliveira (2009), 285, se enuncia el criterio de la primera derivada, y para conocer el cambio de signo de la derivada cerca de un punto crítico se apunta que: «en la práctica esto puede hacerse obteniendo los valores de la función en puntos muy próximos al estudiado». Esto se aplica a la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. Su derivada se anula en –1, 0, 1, y sus características se averiguan calculando el signo de la derivada en los puntos –1,01 y –0,99; –0,01 y 0,01; 0,99 y 1,01. Pero en vez del signo (para lo cual la descomposición en factores sería muy útil), se obtiene el valor de la derivada en cada punto: esto sólo puede hacerse usando una calculadora y después de tediosos cálculos. Es evidente que aplicar el criterio de la segunda derivada (que se da dos páginas después) es mucho más fácil.

En este recorrido por algunos textos de bachillerato se observa que la primera opción no es siempre el criterio de la primera derivada. Parece que resulta más cómodo anular la primera derivada, circunstancia que coincide con la imagen de que los extremos relativos se localizan en los puntos donde la pendiente de la tangente a la gráfica es cero. Por otro lado, parece menos complicado comprobar el signo de la segunda (ya se cuenta con que los problemas no sean tan raros como para que esta se anule o no exista), que confeccionar una tabla para comprobar los cambios de signo de la función derivada. Además, en los problemas que consisten en optimizar una función que se describe en un enunciado, todos los textos recurren al criterio de la segunda derivada. Teniendo en cuenta todo esto, los estudiantes conciben el siguiente esquema mental:

| |
|---|
| Paso 1. Obtener los puntos que anulan la primera derivada de una función.<br>Paso 2. Si la segunda derivada en ese punto es positiva hay un mínimo, y si es negativa hay un máximo. |

Esquema conceptual 1: obtención de extremos relativos

El esquema 1 no es concluyente en los casos en los que la segunda derivada es cero en alguno de los puntos del paso 1. Pero además da lugar a dos errores de concepto:

1. Los estudiantes no contemplan que los extremos relativos pueden localizarse en puntos donde la función no sea derivable.
2. Los estudiantes pueden llegar a creer que es necesario la existencia de la segunda derivada en un punto para que pueda haber un extremo relativo.

La visualización de la figura 1 es uno de los muchos ejemplos que convencen a los estudiantes de que hay funciones que alcanzan un extremo relativo en un punto donde no hay derivabilidad (las tangentes a derecha e izquierda en *a* no coinciden). Por otro lado funciones como las de las figuras 2 y 3,

$$f(x) = |x|^{3/2} \quad \text{(figura 2)}$$

$$g(x) = x^2 \mathrm{sen}^2 \frac{1}{x}, \ \text{si } x \neq 0, \ g(0) = 0$$
(figura 3)

permiten subsanar el segundo error de concepto, ya que ambas tienen un mínimo en el origen y es sencillo comprobar que en ese punto no existe la segunda derivada.

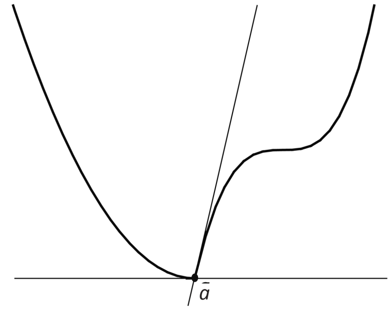



Figura 1

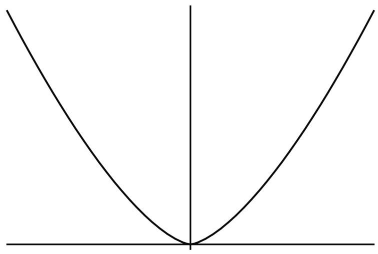


Figura 2

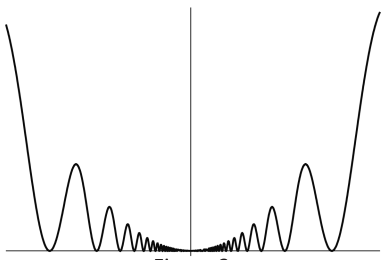


Figura 3

## Concavidad y convexidad

El concepto de función convexa es el de que la región del plano situado por encima de su gráfica lo sea: una función $f$ es convexa (figura 4) en un intervalo $I$ si para cada $a$, $b \in I$ el segmento que une los puntos $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$queda por encima de la gráfica (Spivak (1986), 280) (cóncava si ese segmento queda por debajo).

Hay una forma equivalente de expresar lo anterior (Rudin (1976), 101, o Apostol, (1967), 122): una función $f$ es convexa en un intervalo $I$ si para cada $a$, $b \in I$ y cada

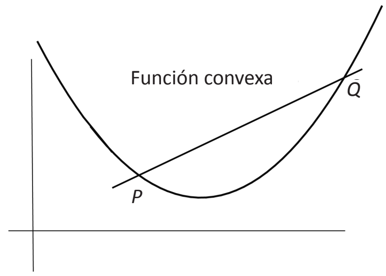
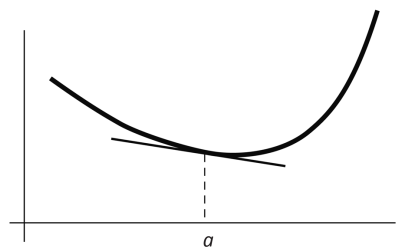



Figura 4

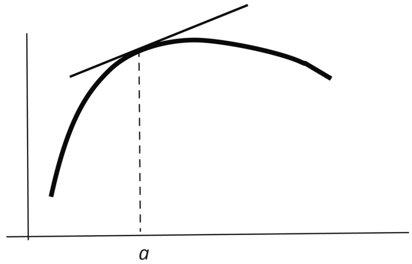
$t \in (0, 1)$ se verifica que $f(ta + (1-b)t) < tf(a) + (1-t)f(b)$. Cóncava para la desigualdad contraria.

Para evitar equívocos en la definición y ayudar a visualizar la forma de la gráfica, es habitual el empleo del término cóncava hacia arriba para referirse a la convexidad, y cóncava hacia abajo para la concavidad. Así aparece en todos los libros de Cálculo universitarios, donde la motivación inicial es siempre la comparación entre la posición de la gráfica y de la tangente (figura 5).

Aunque el dibujo que motiva los conceptos es el mismo, se han encontrado dos definiciones distintas. En Stewart (1994), 204, Edwards y Penney (1996),




Función cóncava hacia arriba en $a$




Función cóncava hacia abajo en $a$

Figura 5

232, Swokowsky (1988), 184, la relación entre tangente y gráfica da lugar a la siguiente definición:

> Una función *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo *I* si la gráfica de *f* se encuentra arriba de todas sus tangentes en *I*. En el caso contrario se dice cóncava hacia abajo.

Mientras que en Larson y otros (1999), 205, Thomas y Finney (1998), 211, y Stein y Barcellos (1995), 197, la definición destaca el comportamiento de la pendiente:

> Una función *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo donde *f'* sea creciente.

Lo que sí está unificado en todos estos libros es la técnica que se da, tras la definición, para el estudio de la concavidad:

> *Criterio de concavidad*: sea *f* una función cuya derivada segunda existe en un intervalo abierto *I*.
> 1) Si $f''(x) > 0$ en cada $x$ de $I$, la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba.
> 2) Si $f''(x) < 0$ en cada $x$ de $I$, la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo.

En los libros de texto de bachillerato analizados sólo en González y otros (2009), 292, se emplean las expresiones «cóncava hacia las *y* positivas o cóncava hacia arriba» y «cóncava hacia las *y* negativas o cóncava hacia abajo», que se apoya en la figura 5. En todos los demás se emplean las palabras convexidad y concavidad, y en todos hay unanimidad: estos conceptos se definen en sentido contrario respecto de las definiciones clásicas. Una pista de la causa que lleva a este cambio puede verse en Colera y Oliveira (2009), 286, donde se presenta el dibujo de la figura 6.

La explicación que se da es la siguiente: «Mirándola desde arriba ¿no es razonable que llamemos cóncavos a los tramos *BC* y *DE* y convexos a los tramos *AB* y *CD*?».

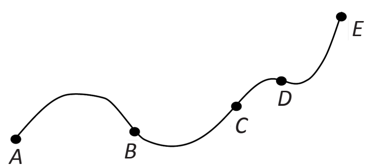



Figura 6

Para definir los conceptos, en Colera y Oliveira (2009), 286, Biosca y otros (2003), p.158, se opta por la comparación entre la posición de la gráfica y de la tangente en un determinado punto (figura 7), mientras que en Escoredo y otros (2009), 257, la definición se basa en el signo de la derivada segunda (convexas son las funciones $f$ tales que $f'' < 0$).

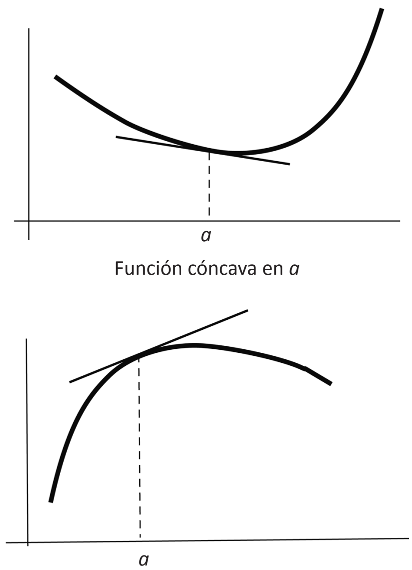



Figura 7

El esquema conceptual que los estudiantes se han creado para recordar estos dos conceptos refleja la forma en que son expuestos en los libros de bachillerato:

| |
|---|
| Una función cóncava es una función que sonríe.<br>Una función convexa es una función triste. |

Esquema conceptual 2: concavidad y convexidad

La manera de averiguar los intervalos de concavidad y convexidad en los libros de bachillerato, se basa en el análisis del signo de la derivada segunda y en la aplicación del criterio de concavidad. El problema es que debido al esquema 2, el resultado que se obtiene está impregnado de un error de concepto básico:

> Los estudiantes ingresan en la Universidad con los conceptos de concavidad y convexidad intercambiados entre sí.

Para evitar la confusión que se produce al explicarlos en la Universidad, habría que introducir los conceptos de manera opuesta, o emplear las expresiones «concavidad hacia arriba o hacia abajo» con la que se consigue una adecuada visualización de los mismos.

## Puntos de inflexión

El concepto de punto de inflexión tiene una relación directa con los de concavidad y convexidad. Su definición es una de las cuestiones donde se ha encontrado mayor disenso entre los libros de Cálculo Universitario. Aunque la idea básica es la misma (el cambio de concavidad), no hay unanimidad acerca de las características que debe presentar una función en un punto, para que este pueda ser considerado de inflexión.

Los hay que sólo exigen la *continuidad*. Por ejemplo en Stewart (1994) 206, Edwards y Penney (1996), 233, y Stein y Barcellos (1995), 198, se da la definición:

> Un punto $a$ donde $f$ es continua es un punto de inflexión de $f$ si a un lado y otro de $a$ cambia el tipo de concavidad.

También en Apostol (1967), 191, y Swokowsky (1988), 185, se requiere sólo la continuidad (en el segundo se explica que en un «pico» de una gráfica puede haber un punto de inflexión) aunque es el cambio de signo de la derivada segunda lo que se utiliza en la definición:

> Los puntos de una gráfica donde la derivada segunda cambia de signo se llaman puntos de inflexión.

Los hay que exigen la *derivabilidad*. Por ejemplo en (Larson y otros, 1999, p. 208) y (Thomas y Finney, 1998, p. 211), se da la definición:

> Un punto donde la gráfica de $f$ tiene una recta tangente y donde cambia la concavidad se llama punto de inflexión de $f$.

También en Spivak (1986), 291, se requiere la derivabilidad aunque la definición se basa en el comportamiento particular de la tangente en esos puntos:

> Si la tangente a la gráfica de $f$ en $(a, f(a))$ cruza la gráfica, $a$ se denomina punto de inflexión de $f$.

En cuanto a los libros de texto de bachillerato, en Escoredo y otros (2009), 258, y González y otros, (2009), 292, la definición se basa en el cambio de concavidad, mientras que en Colera y Oliveira (2009), 286, y en Biosca y otros (2003), 159, los puntos de inflexión se definen como aquellos donde la tangente atraviesa a la gráfica.

En todos estos libros parece darse a entender que la función debe ser derivable en un punto para que este pueda ser de inflexión. No obstante, los estudiantes reconocen visualmente estos puntos en una gráfica, y lo hacen teniendo en cuenta sólo la continuidad.

La técnica que, en un principio, se emplea tanto en los textos de bachillerato como en los universitarios, para localizar los puntos de inflexión es la de buscar los lugares donde se produce un cambio de signo de la derivada segunda. Sin embargo, los textos de bachillerato no dan ahí por concluida la cuestión. En todos (González y otros (2009), 293, Escoredo y otros (2009), 259, Colera y Oliveira (2009), 287, y Biosca y otros (2003), 159), se complementa el tema con una regla basada en la derivada tercera, que a los estudiantes les resulta fácil de recordar, y que incorporan a sus esquemas conceptuales:

| |
|---|
| Paso 1. Obtener los puntos que anulan la segunda derivada de una función. |
| Paso 2. Los que no anulan la tercera derivada son los puntos de inflexión. |

Esquema conceptual 3: obtención de puntos de inflexión

El esquema 3, que no es concluyente en los casos en que la derivada tercera es cero en alguno de los puntos del paso 1, proporciona un criterio que no se puede justificar en el bachillerato, porque se sustenta en una técnica que no se incluye en los temarios: el desarrollo de Taylor de una función. Por otro lado, se debe calcular la derivada tercera lo que a menudo supone realizar cálculos complicados, y provoca una cierta confusión con la idea visual que tenían acerca de los puntos de inflexión. Además propicia un error de concepto claro:

> Los estudiantes pueden llegar a creer que es necesario que la segunda derivada en un punto se anule para que este sea de inflexión.

Ejemplos sencillos de funciones como las de las figuras 8 y 9, con punto de inflexión en el origen a pesar de no tener segunda derivada en él, hacen posible corregir ese error de concepto:

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x<0 \end{cases} \quad \text{(figura 8)}$$

$$g(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{si } x<0 \\ -\dfrac{3x^2}{4} & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \quad \text{(figrua 9)}$$

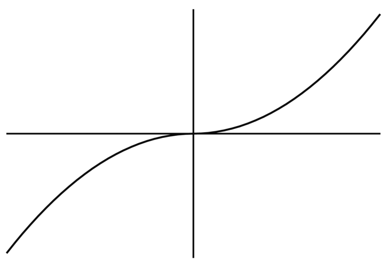


Figura 8

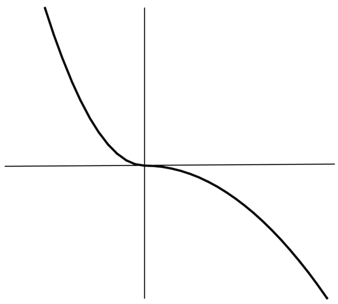


Figura 9

## Propuestas para la mejora de los esquemas conceptuales

En las secciones anteriores se han descrito tres esquemas conceptuales que los estudiantes han adquirido en el bachillerato y que se han detectado al explicar esos temas en la Universidad.

En relación con los conceptos de concavidad y convexidad expuestos en el esquema 2, sería conveniente definirlos bien. La idea que se explica en bachillerato sobre la concavidad hace referencia a la imagen de un hueco o de una depresión, que choca con el concepto matemático con el que tendrán que trabajar en los años posteriores. En este sentido, las expresiones de «concavidad hacia arriba o hacia abajo» que se exponen en los libros de Cálculo, ayudan a visualizar la forma de una curva y a evitar confusiones a la hora de denominarla.

En cuanto a los esquemas 1 y 3, ambos consisten en una receta formada por dos pasos (anular una derivada para obtener un punto en el cual se evaluará la siguiente derivada) que pueden hacer perder la referencia visual de las ideas matemáticas y dan pie a algunos errores de concepto expuestos anteriormente. En los libros de Cálculo se insiste en la utilización del criterio de la primera derivada como primera opción en el caso de los extremos relativos, y en el análisis del cambio del tipo de concavidad en el caso de los puntos de inflexión. Aquí se propone fomentar estas dos prácticas de forma decidida, como se hace en los textos universitarios, y no de una manera dubitativa como se hace en los de bachillerato.

Cuando a los estudiantes se les adiestra en el uso de las tablas de signos de una función y de sus derivadas, se suele utilizar el recurso de la descomposición en factores como herramienta para hallar esos signos, pero este cálculo puede ser complicado si las raíces están cercanas entre sí. Con el objetivo de facilitar lo anterior existe una técnica basada en la multiplicidad de las raíces que, al complementarla con la descomposición, evita cualquier tipo de operaciones al confeccionar las tablas de signos y que, además, permite esbozar sin esfuerzo las gráficas de funciones polinómicas. Sin embargo, en ningún texto, ni de bachillerato ni universitario, se le presta atención. En la siguiente sección se detalla esta técnica.

## La multiplicidad de las raíces y las funciones polinómicas

En relación con las funciones polinómicas, el análisis de la multiplicidad de sus raíces es una técnica en la que se insiste poco, a pesar de que esta revela algunas características importantes en relación con los ejes coordenados. A partir de la multiplicidad se puede explorar de una manera visual y muy didáctica, el tipo de contacto que se produce con el eje $x$, observar que este aumenta a medida que lo hace el grado de multiplicidad y adelantarse al concepto de derivada para hacer notar que a partir del grado dos se produce la tangencia entre la gráfica y el eje de abcisas.

La multiplicidad de las raíces de una función polinómica es también una herramienta muy útil para averiguar el signo de la función a ambos lados de una raíz. Es claro que si una función $f$ es continua y no se anula en un intervalo $I$ entonces el *Teorema de los Valores Intermedios* asegura que la función no cambia de signo en $I$. Además, si $a$ es una raíz de multiplicidad $m$ de una función continua $f(x)$, entonces esta se puede descomponer en la forma $f(x)=g(x)(x-a)^m$, donde $g(x)$ es continua y $g(a)\neq 0$. De la continuidad se deduce que $g(x)$ no se anula, y por tanto no cambia de signo, en algún entorno $I$ de $a$.

Supongamos que $g(a)>0$. La descomposición de $f(x)$ prueba que $f(x)$ es positiva en $I$ si $m$ es par, pero si $m$ es impar el signo de $f(x)$ cambia de negativa a positiva según que $x$ sea menor o mayor que $a$.

Para el caso $g(a)<0$, entonces la descomposición de $f(x)$ prueba que $f(x)$ es negativa en $I$ si $m$ es par, pero si $m$ es impar el signo de $f(x)$ cambia de positiva a negativa según que $x$ sea menor o mayor que $a$. Este resultado se resume en el siguiente teorema:

> *Teorema 1.* Si $f(x)$ es una función continua y $a$ es una raíz de $f(x)$ con multiplicidad $m$, entonces existe un entorno de $a$ en el cual:
> — Si $m$ es par, la función $f(x)$ mantiene el signo a ambos lados de $a$.
> — Si $m$ es impar, la función $f(x)$ cambia de signo cuando $x$ pasa de un lado a otro de $a$.

Para el caso de las funciones polinómicas el teorema 1 facilita enormemente las representaciones gráficas a través de los siguientes tres pasos:

1. Si $a$ es una raíz de multiplicidad par de un polinomio, entonces su gráfica y el eje $x$ son tangentes en $(a,0)$, y el polinomio no cambia de signo al pasar por el punto (*rebota* en él) (figura10).
2. Si $a$ es una raíz de multiplicidad impar, mayor que uno, de un polinomio, entonces la gráfica

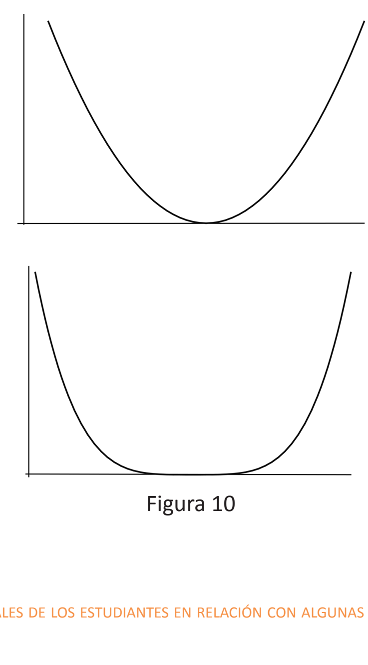


Figura 10

del polinomio y el eje $x$ son tangentes en $(a,0)$, y el polinomio cambia de signo al pasar por el punto (en él *atraviesa* al eje $x$) (figura 11).

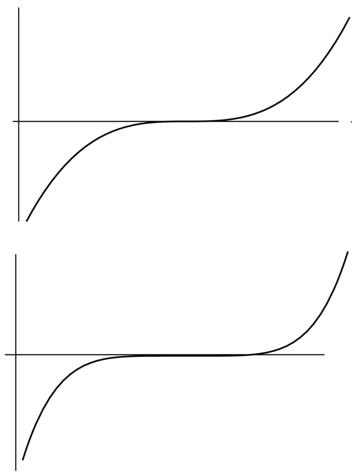


Figura 11



Los dos pasos anteriores permiten saber la forma en la que la gráfica pasa por las raíces del polinomio. Con el siguiente, la gráfica de un polinomio cuyas raíces se conozcan, se puede terminar de esbozar fácilmente:

3. Si el coeficiente de mayor grado es positivo, la gráfica se comienza a dibujar desde la parte superior derecha del primer cuadrante; si es negativo se hace desde la parte inferior derecha del cuarto cuadrante.

Como complemento a la descomposición en factores estos tres pasos permiten enseñar a esbozar sin dificultad, en los cursos iniciales de la ESO y de forma previa al concepto de derivada, gráficas de funciones polinómicas de un grado alto. Por ejemplo, en la figura 12 está la gráfica de

$$p(x)=(x+2)^2(x+1)^3x(x-1)^2(x-2)^3$$

Una última cuestión en referencia al esbozo de gráficas que debería inculcarse en los estudiantes es que estas no pueden hacerse manteniendo la escala entre los ejes: la diferencia entre los valores de $x$ y los correspondientes de $y$ lo hacen imposible.

Si estas ideas se afianzan desde el primer momento en que se enseñan los polinomios, se evitaría que los estudiantes adquirieran el esquema conceptual

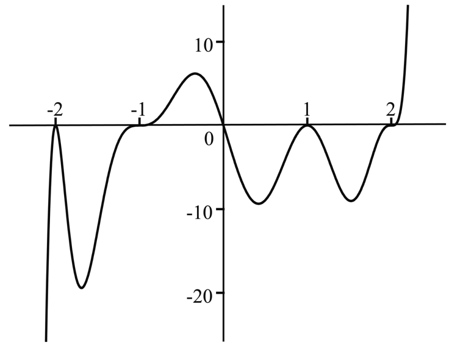



Figura 12

basado en unir los puntos de una tabla de valores para dibujar la gráfica de una función: es un recurso que se da en los libros de la ESO y del bachillerato, cuya aplicación complica los cálculos y proporciona resultados erróneos, pero que está muy arraigado en los estudiantes que ingresan en la Universidad.

## La multiplicidad de las raíces y las tablas de signos

Además de para las funciones polinómicas, el teorema 1es muy útil como herramienta para calcular las tablas de signos de otros tipos de funciones y de sus derivadas.

Por ejemplo en el caso de las funciones racionales,  (donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios), sólo hay que observar que los intervalos de positividad o negatividad son los mismos que los de la función polinómica. Por tanto para calcular sus tablas de signos basta tomar las raíces del numerador y del denominador, obtener su multiplicidad y mediante el teorema 1 averiguar el signo en cada intervalo determinado por ellas.

Aplicando esta técnica para la derivada primera y segunda se confeccionan, de una manera unificada, las tablas de signos con las que hallar fácilmente los intervalos de crecimiento y los extremos relativos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, para el caso de las funciones racionales y también de las exponenciales y logarítmicas.

Además, los estudiantes encuentran mayor sentido a la descomposición en factores, aprecian mejor el significado y la utilidad del concepto de multiplicidad, y se propicia la formación de esquemas conceptuales válidos para utilizarlos a lo largo de la ESO y el bachillerato y, posteriormente, en el estudio de las funciones en la Universidad.

## Resumen final y conclusiones

Desde el punto de vista de un profesor de matemáticas en el primer curso de la Universidad, resulta muy interesante conocer las ideas previas que los alumnos traen del bachillerato. Estas ideas conforman sus esquemas conceptuales, y de la validez de ellos depende que consigan captar adecuadamente las nuevas ideas que se les inculcan. En este artículo se muestran los esquemas observados en relación con los extremos relativos, la concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión. Se analiza cómo se originan, a qué errores de concepto dan lugar y cómo se pueden subsanar.

En la formación de los esquemas conceptuales, es capital el papel que juegan los textos de bachillerato, y por eso se han analizado algunos de ellos y se ha realizado una comparación con la forma de exponer esos temas en los textos de Cálculo universitario.

Los esquemas conceptuales que se describen acerca de la localización de extremos relativos y puntos de inflexión, se basan en la anulación de una derivada y la evaluación en la siguiente de los puntos obtenidos. Como consecuencia, los estudiantes pueden olvidar las referencias visuales de esos conceptos y además dejan de usar otras técnicas que en muchos casos son más útiles, requieren menos cálculos y por tanto previenen la aparición de errores de tipo operativo. También se hace hincapié en la manera de concebir la concavidad y convexidad en los textos de bachillerato, opuesta a la de los textos universitarios, y en las distintas formas de definir los puntos de inflexión.

Se exponen propuestas para mejorar los esquemas conceptuales detectados, y para ello se presenta un teorema que permite utilizar el concepto de la multiplicidad para la representación gráfica directa de las funciones polinómicas. Para otros tipos de funciones que se explican en el bachillerato, este teorema facilita obtener las tablas de signos con las que hallar sus puntos notables con un limitado número de operaciones. Es una técnica propicia para inculcar a los estudiantes desde el momento en que se enseñan los polinomios, y para seguir utilizándola a lo largo de la ESO y el bachillerato, como apoyo a la representación gráfica.

Si los estudiantes ingresan en la universidad con una serie de ideas erróneas o inadecuadas, la profundización en la materia les resulta más difícil porque además de aprender los conceptos nuevos deben modificar sus esquemas conceptuales previos para que estos no interfieran con aquellos. Pero cambiar esos esquemas, muy interiorizados por su parte porque les han sido inculcados a lo largo de los cursos, es difícil ya que a los estudiantes les cuesta renunciar a prácticas tan arraigadas. Por eso, la mejor manera de solucionar esos problemas es prevenirlos revisando la forma en que se introducen ciertos contenidos en la enseñanza media. En este artículo se han propuesto algunos cambios que pueden permitirles formar esquemas conceptuales sólidos donde asentar los conocimientos que adquirirán posteriormente.

## Referencias bibliográficas

Apostol, T. M. (1967), *Calculus. Volumen 1,* Wiley and sons [2ª ed.].

Bezuindenhout, J. (1996), «First-year university student´s understanding of rate change», *Int. J. Math. Educ. Sci.Technol*, vol. 29(3), 89-399.

Biosca, A., M. J. Espinet, J. Fandos, M. Jimeno y J. Villagrá (2003), *Matemáticas II aplicadas a las ciencias sociales. Bachillerato*, Guadiel-Edebé , Sevilla.

Colera, J., y M. J. Oliveira (2009), *Bachillerato 2. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.

Escoredo, A., M. D. Gómez, J. Lorenzo, P. Machín, C. Pérez, J. del Río y D. Sánchez (2009), *Matemáticas II. Bachillerato 2*, Santillana, Barcelona.

Edwards, C .H., y D. Penney (1996), *Cálculo con geometría analítica*, Prentice Hall Hispanoamérica, México [4.ª ed.].

González, C., J. Llorente y M. J. Ruiz (2009), *Matemáticas, 2º bachillerato*, Editex, Madrid.

Hähkiöniemi, M. (2006), «Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process», *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 25(2), 170-184.

Kajander, A., y M. Lovric (2009), «Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions», *Int. J. Math. Educ. Sci.Techno*, vol. 40(2), 173-181.

Larson, R., R. Hostetler y B. EDWARDS (1999), *Cálculo y geometría analítica. Volumen 1*, McGraw Hill/ Interamericana, Madrid [6.ª ed.].

Martínez, F., y S. Sáez (2014), « Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato», *Números*, vol. 85, 41-48.

Moreno-Armella, L., y G. Waldeg (1993), « Constructivism and mathematical education», *Int. J. Math. Educ. Sci.Technol*, vol. 24(5), 653-661.

Rivera-Figueroa, A., y J. C. Ponce-Campuzano (2012), «Derivative, máxima and minima in a graphical context», *Int. J. Math. Educ. Sci.Technol*, vol. 44(2), 284-299.

Rudin, W. (1976), *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York [3.ª ed.].

Sierpinska, A. (1992), *Understandig in Mathematics*, Falmer Press, Londres.

Spivak, M. (1986), *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Reverté, Barcelona.

Stein, S., y A. BARCELLOS, A. (1995), *Cálculo y geometría analítica. Volumen* 1, McGraw Hill/ Interamericana, 5ª ed., Colombia.

Stewart, J. (1994), *Cálculo*, Grupo editorial Iberoamérica, México [2.ª ed.].

Swokowski, E. (1988), *Cálculo y geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, México [2.ª ed.].

Tall, D., y S. Vinner (1981), «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics Education*, 12, 151-169.

Thomas, G., y R. Finney (1998), *Cálculo, una variable*, Addison Wesley, México [9.ª ed.].

Wheatley, G. H. (1991), «Constructivist perspectives on science and mathematics learning», *Science education*, vol. 75(1), 9-21.

Félix Martínez de la Rosa
*Llevar al final del mismo*